BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

12(222)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

★ HỌC TOÁN NHƯ THẾ NÀO

★ PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VỚI VIỆC XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

★ MỘT SỐ ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ

ÁCSIMET

MẬT MÃ KHÓA CÔNG KHAI

Đội tuyển toán 9 Hải Phòng 1994 - 1995
Ảnh : ĐẶNG ĐỨC TRÌNH

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : TRỌNG THIỆP

Dành cho các bạn Trung học Cơ sở

HỌC TOÁN NHƯ THẾ NÀO

NGUYỄN VĂN VĨNH
(ĐHSP TP Hồ Chí Minh)

Học toán như thế nào, đó là vấn đề khá rộng. Trong bài này, xin bàn về một khía cạnh. Đối với lời giải của một bài toán có ba yêu cầu có tính chất bắt buộc là :

– Lời giải không có sai lầm.

– Lập luận phải có căn cứ.

– Lời giải phải đầy đủ, không thiếu, không thừa.

Bốn yêu cầu sau đây cũng rất quan trọng đối với việc rèn tư duy lôgic, phương pháp học toán thông minh, sáng tạo :

– Lời giải cần ngắn gọn, đơn giản, hay nhất.

– Lời giải phải rõ ràng, sáng sủa và hợp lí cả về nội dung lẫn hình thức trình bày.

– Cần biết giải thích con đường dẫn đến lời giải, làm cho lời giải dễ hiểu, nhất là khi trình bày miệng lời giải.

– Biết nhận xét, khái quát hóa lời giải, mở rộng bài toán, phát hiện thêm các bài toán mới.

Trong bài toán này chúng tôi muốn trao đổi cùng các bạn về yêu cầu phải biết nhận xét, khái quát hóa lời giải, mở rộng bài toán và phát hiện thêm các bài toán mới.

Chúng ta bắt đầu từ *bài toán 1.*

Bài toán 1 : *Cho hình vuông ABCD. I là một điểm bất kì ở trên cạnh AB (I khác A và B). Tia DI cắt tia CB tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M.*

Chứng minh rằng đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BM.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Tp Hồ Chí Minh, vòng 2 – 1993 – 1994)

Lời giải

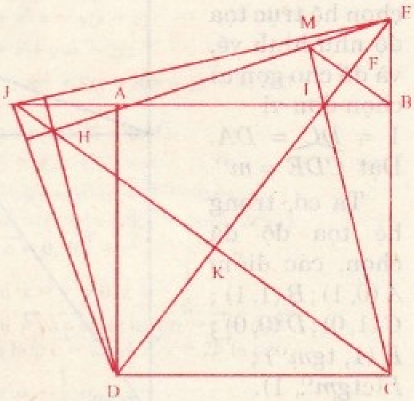
Trên tia đối của tia AB ; lấy điểm J sao cho $AJ = BE$.

Ta có : $\Delta EBA = \Delta JAD$ (c.g.c)

$\Rightarrow AE \perp DJ$.

Ta có : $\Delta JBC = \Delta ECD$ (c.g.c)

$\Rightarrow JC \perp DE$



Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AE và JC thì H là trực tâm của tam giác DEJ. Dễ thấy I là trực tâm của tam giác CEJ, do đó đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng JE.

$$\left.\begin{array}{r} CM \perp JE \\ DH \perp JE \end{array}\right\} \Rightarrow CM \text{ song song với } DH.$$

Tam giác EDH có $IM \,//\, DH$, suy ra $\dfrac{ME}{MH} = \dfrac{IE}{ID}$ (1)

Tam giác ECD có $IB \,//\, DC$, suy ra $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{IE}{ID}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{ME}{MH} = \dfrac{BE}{BC} \Rightarrow BM \,//\, CH$.

$$\left.\begin{array}{r} BM \,//\, CH \\ CH \perp DE \end{array}\right\} \Rightarrow BM \perp DE \text{ (đpcm)}$$

Sau khi giải xong *bài toán 1*, ta có nhận xét : vì I là điểm bất kì lấy trên cạnh AB (I khác A và B), ta luôn luôn nhận được kết quả là BM vuông góc với DE tại F. Nói cách khác, nếu hình vuông $ABCD$ cố định, điểm I lưu động trên cạnh AB (I khác A và B) thì $\widehat{BFD} = 90^o$, hay là, điểm F chạy trên đường tròn đường kính BD (chưa giới hạn với cách nhìn nhận như vậy, chúng ta đi tới :

Bài toán 2 : *Cho hình vuông ABCD cố định. I là một điểm thay đổi trên cạnh AB (I khác A và B). Tia DI cắt tia CB tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M. Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F. Tìm quỹ tích điểm F.*

(Quỹ tích của điểm F là một phần tư đường tròn, đường kính BD, loại trừ các điểm A và B).

Sau khi giải xong *Bài toán 2*, chắc các bạn sẽ tự hỏi :

Nếu điểm I lấy trên cạnh AB thì $\widehat{BFD} = 90^o$. Vậy thì

Nếu I là một điểm bất kì trên tia AB (I khác A) thì kết quả còn đúng hay không ?

Câu trả lời là : kết quả vẫn còn đúng. Và chúng ta đi tới :

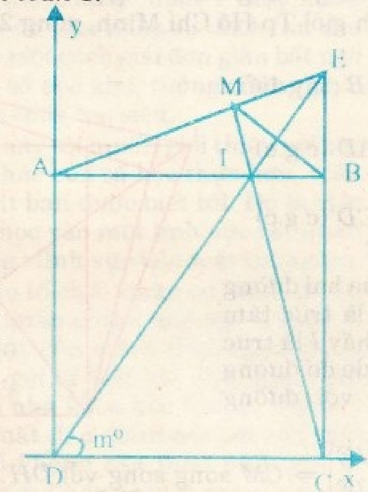
Bài toán 3 : *Cho hình vuông ABCD cố định. I là một điểm thay đổi trên tia AB (I khác A). Tia DI cắt tia CB tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M. Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F.*

Tìm quỹ tích điểm F.

Trong trường hợp điểm B nằm giữa 2 điểm A và I, các bạn chỉ việc chọn điểm J trên cạnh AB sao cho $AJ = BE$. Sau đó, chứng minh tương tự như bài toán 1 sẽ nhận được kết quả $\widehat{BFD} = 90^o$.

Quỹ tích là nửa đường tròn đường kính BD (bỏ điểm A). Việc chuyển từ : *bài toán 1* sang các *bài toán 2* và *bài toán 3* sẽ được định hình ngay, nếu như các bạn sử dụng *phương pháp tọa độ* để giải *bài toán 1*.

Thật vậy, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, và để cho gọn ta chọn đơn vị $1 = DC = DA$. Đặt $\widehat{CDE} = m^o$.



Ta có, trong hệ tọa độ đã chọn, các điểm $A(0, 1)$; $B(1, 1)$; $C(1, 0)$; $D(0, 0)$; $E(1, \text{tg}m^o)$; $I(\text{cotg}m^o, 1)$.

Khi đó phương trình đường thẳng AE là $\dfrac{y-1}{\text{tg}m^o - 1} = \dfrac{x-0}{1-0}$

hay là : $\quad y = (\text{tg}m^o - 1)x + 1$

Phương trình đường thẳng CI là :

$$\frac{y-1}{0-1} = \frac{x - \text{cotg}m^o}{1 - \text{cotg}m^o}$$

hay là : $y = \dfrac{x-1}{\text{cotg}m^o - 1}$

Từ đó suy ra giao điểm M của các đường thẳng AE và CI có tọa độ :

$$x = \frac{\text{cotg}m^o}{\text{cotg}m^o + \text{tg}m^o - 1};$$

$$y = \frac{1 - \text{tg}m^o}{(\text{cotg}m^o - 1)(\text{cotg}m^o + \text{tg}m^o - 1)}$$

viết phương trình đường thẳng BM, ta suy ra được đường thẳng BM có hệ số góc $K = -\text{cotg}m^o$. Đường thẳng DE có hệ số góc là $\text{tg}m^o$.

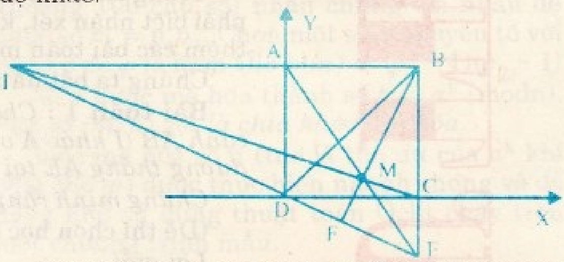
Từ đó suy ra : đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BM. Sử dụng phương pháp tọa độ giải *bài toán 1*, bạn có thể nhận xét ngay được, góc $\widehat{CDE} = m^o$ có thể được xác định một cách tùy ý chỉ cần m^o khác 90^o và 0^o (để $\text{tg}m^o$ và $\text{cotg}m^o$ xác định) ta vẫn có hai đường thẳng DE và BM vuông góc với nhau.

Chúng ta đi tới :

Bài toán 4 : *Cho hình vuông ABCD cố định. I là một điểm chuyển động trên đường thẳng AB (I khác A). Đường thẳng DI cắt đường thẳng CB tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M. Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F.*

Tìm quỹ tích của điểm F.

Bây giờ chúng ta xét bài toán dưới một góc độ khác.



Xét một vị trí của điểm I trên tia đối của tia AB. Nếu thay đổi cách xem xét cấu trúc của hình vẽ, xem BD là phân giác của góc vuông IBE của tam giác IBE, còn BF là đường cao thuộc cạnh huyền, chúng ta đi tới :

Bài toán 5 : *Cho tam giác ABC ($\widehat{C} = 90^o$). Vẽ đường phân giác CD và đường cao CH. Từ D dựng DE và DF lần lượt vuông góc với cạnh CB và cạnh CA. (E trên CB và F trên CA).*

Chứng minh rằng các đường thẳng CH, AE và BF cắt nhau tại một điểm.

Các bài toán 2, 3, 4, 5 tương tự với bài toán 1. Việc giải bài toán 1 có thể giúp chúng ta giải các bài toán khác tương tự với nó.

Nhà sư phạm và là nhà toán học nổi tiếng người Mĩ (gốc Hungari) Pôlya có nhận xét : "Trong toán học sơ cấp cũng như trong toán học cao cấp, *phép tương tự* có lẽ là có mặt trong mọi phát minh. Trong một số phát minh *phép tương tự* chiếm vai trò quan trọng hơn cả."

Còn đối với nhà thiên văn tài ba Kep Ler (người Đức), người đã phát minh ra ba định luật nổi tiếng trong thiên văn học mang tên *Kep Ler* thì : "Tôi vô cùng biết ơn các *phép tương tự*, những người thầy đáng tin cậy nhất của tôi. Các *phép tương tự* đã giúp tôi khám phá ra các bí mật của tự nhiên, đã giúp tôi vượt qua được mọi trở ngại"

Quá trình khái quát hóa dựa trên sự vận dụng phép tương tự gắn liền với "phòng thí nghiệm" của tư duy sáng tạo. Có thể nói, đó là một trong những phương tiện quan trọng nhất của việc tự giáo dục, tức là việc mở rộng và đào sâu kiến thức đã có.

Phương pháp học tập khoa học này, đòi hỏi sự nỗ lực của bản thân các bạn, trên cơ sở đã nắm vững các phương pháp, đường lối giải những bài toán đã có.

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/218. *Hãy tìm số chính phương lớn nhất có chữ số cuối khác không sao cho sau khi xóa bỏ hai chữ số cuối thì thu được một số chính phương.*

Lời giải (của đa số các bạn)

Gọi số chính phương phải tìm là n^2.

Ta có

$$n^2 = 100a + \overline{bc}$$

theo bài ra $100a$ là số chính phương, do đó $a = k^2$

Ta có $n^2 > 100k^2 \rightarrow n \geqslant 10k + 1 \rightarrow$

$\overline{bc} = n^2 - 100k^2 \geqslant (10k+1)^2 - 100k^2 =$
$= 20k + 1$

vì $\overline{bc} < 100 \rightarrow 20k + 1 < 100 \rightarrow k \leqslant 4$

Do đó $n^2 = 100k^2 + \overline{bc} < 1600 + 99 = 1699$

Nhận thấy $42^2 = 1764$

$41^2 = 1681.$

1681 thỏa mãn điều kiện đầu bài. Vậy đó là số cần tìm.

Nhận xét : Rất đông các bạn tham gia giải bài này. Tất cả đều giải đúng. Không có gì khó khăn trong việc tìm *tất cả* các số chính phương thỏa mãn điều kiện bài toán. Đó là các số {121, 144, 169, 196, 441, 484, 961, 1681}. Đáng tiếc, không có bạn nào "đào sâu" bài toán như vậy.

Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Đỗ Minh Châu* 9T Đông Anh Hà Nội, *Phạm Đình Quốc Hưng* 7 Trần Đăng Ninh, Nam Hà, *Nguyễn Xuân Nguyên* 9T Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Lê Xuân Hoàng* 9NK Hiệp Hòa, Hà Bắc, *Nguyễn Hồng Dung* 9T Trần Đăng Ninh Nam Định, *Nguyễn Đức Thành* 9T quận 3 TP Hồ Chí Minh, *Mai Đức Phương* 7T Bỉm Sơn, Thanh Hóa, *Vũ Tuấn Anh*, THCS Thái Nguyên, Bắc Thái, *Phan Thị Thu Hằng* 9 Toán, Biên Hòa, Đồng Nai, *Nguyễn Quốc Thắng* 9C Đông Anh Hà Nội, *Nguyễn Quang Hải* 8A Quang Trung, Hà Nội, *Ngô Quốc Anh*, 7 Ban Mê Thuột, Đắc Lắc, *Trần Anh Kiên*, 8T NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/218. *Cho hai số x, y thỏa mãn đẳng thức*

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$$

Xác định x, y để tích xy đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải : Ta có $2x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{y^2}{4} = 4 \quad (1)$

Từ chỗ x, y thỏa mãn (1) suy ra $x \neq 0$ và

$$(1) \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + xy\right) - 2 = xy$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - 2 = xy \quad (2)$$

Từ (2) ta thấy tích xy đạt giá trị nhỏ nhất là -2 khi và chỉ khi

$$x - \frac{1}{x} = 0 \text{ và } x + \frac{y}{2} = 0.$$

Từ đó ta có $(x, y) = (1, -2)$ hoặc $(x, y) = (-1, 2)$ thì tích xy đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn lớp 7, lớp 8, lớp 9 giải bài này theo cách trên. Hầu hết các bạn đều giải tốt bài này. Các địa phương có người gửi lời giải như sau : Yên Bái, Bắc Thái, Hà Bắc, Vĩnh Phú, Hà Tây, Hà Nội, Hải Phòng, Hải Hưng, Thái Bình, Nam Hà, Ninh Bình, Thanh Hóa, Nghệ An, Hà Tĩnh, Quảng Bình, Quảng Trị, Thừa Thiên – Huế, Quảng Nam – Đà Nẵng, Quảng Ngãi, Phú Yên, Đak Lak, Tây Ninh, Khánh Hòa, Đồng Nai, TP. Hồ Chí Minh, Vĩnh Long, Trà Vinh, Minh Hải.

TÔ NGUYÊN

Bài T3/218. *Giải phương trình :*

$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1$$

Lời giải Điều kiện : $x \neq -1$.

Phương trình đang xét

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x+1} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1} + 1\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{x+1} + 1 = \sqrt{2} & (1) \\ \dfrac{x^2}{x+1} + 1 = -\sqrt{2} & (2) \end{array}\right.$$

Giải ra (2) vô nghiệm vì có biệt thức âm. Vậy phương trình có hai nghiệm là nghiệm của (1), đó là :

$$x_1 = \frac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2};$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

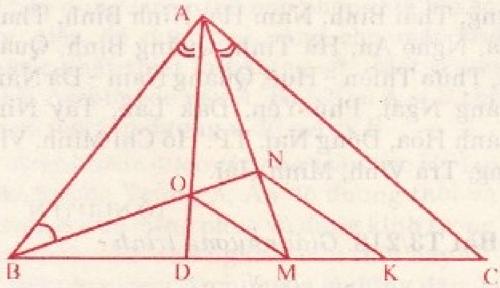
Nhận xét. Có 178 bài giải trong số đó có 2 bài giải sai (kết luận : phương trình vô nghiệm !), còn lại đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Võ Quốc Hùng* (chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi), *Đỗ Thanh Hải* (9A, Tô Hiệu, Hải Phòng) ; *Nguyễn Kiều Liên* (9T, THCS Trưng Vương, Hà Nội), *Đặng Thành Trung* (9A, Ngô

Gia Tự, Hải Hưng), *Tống Ngọc Tú* (9A, Bế Văn Đàn, Hà Nội), *Nguyễn Mạnh Hùng* (9T, Năng khiếu Nghi – Lộc, Nghệ An) *Trần Đức Sơn* (8 Chuyên Ba Đồn, Quảng Ninh, Quảng Bình), *Ngô Văn Giêng* (9A THCS Núi Đối, Kiến Thụy, Hải Phòng), *Đỗ Minh Châu* (chuyên Đông Anh, Hà Nội)

ĐẶNG VIỄN

Bài T4/218. *Cho tam giác ABC với AC > AB. Gọi M là trung điểm của BC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$. Trên tia AM lấy điểm N sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{ACB}$. Gọi O là giao điểm của AD với BN, từ N kẻ NK // OM cắt BC tại điểm K. So sánh BD với CK.*

Lời giải. Từ các giả thiết về góc bằng nhau suy ra các cặp tam giác đồng dạng (g.g) sau đây :



$\Delta OAB \backsim \Delta MAC$; $\Delta ABN \backsim \Delta ACD$ từ đó ta có các tỉ lệ thức :

$\dfrac{BO}{MC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BN}{CD}$. Mà

$OM \parallel NK$ nên $\dfrac{BO}{BM} = \dfrac{BN}{BK}$. Hơn nữa

$BM = MC$ nên ta có $\dfrac{BN}{CD} = \dfrac{BN}{BK}$. Suy ra

$CD = BK$. Từ đó ta có $BD = CK$.

Nhận xét. 1) Có 223 bài giải, tất cả đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Nguyễn Hồng Dung* (9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định) *Nguyễn Thịnh* (9T – Phan Bội Châu, Nghệ An), *Vũ Phong Hải* (8 Toán Bỉm Sơn, Thanh Hóa), *Phạm Văn Tiến* (Trung tâm giáo dục thường xuyên, Đầm Dơi, Minh Hải), *Phạm Mạnh Hùng* (9 Toán, Nguyễn Du, Gò Vấp, TP Hồ Chí Minh), *Phan Trang Xuân* (8, Phan Chu Trinh, Diên Khánh, Khánh Hòa), *Phạm Thị Thu Hằng* (Trường Bồi Dưỡng Giáo Dục, Biên Hòa), *Đào Duy Nam* (8 Toán Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai), *Trần Mạnh Quân* (9 Toán, Nguyễn Tri Phương, Huế), *Lê Thanh Bình* (10A, Đại học Sư Phạm Vinh), *Ngô Văn Giòng* (9A, THCS Núi Đối, Kiến Thụy, Hải Phòng).

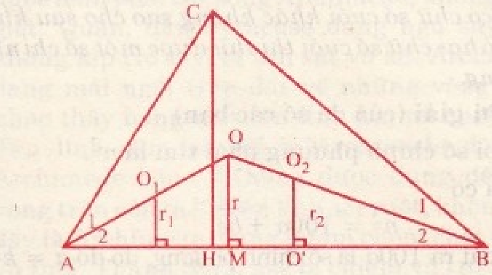
ĐẶNG VIỄN

Bài T5/218 : *Cho nửa đường tròn đường kính AB trên đó có điểm C. Hạ đường cao CH của tam giác ABC. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH, BCH. Tìm vị trí của C để O_1O_2 đạt độ dài lớn nhất.*

Lời giải :

Cách 1 :

Gọi r là tâm đường tròn nội tiếp của ΔABC.



Dễ dàng chứng minh được

$\Delta ABC \backsim \Delta ACH \backsim \Delta CBH$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{CH}{CB} ; \frac{r_2}{r} = \frac{CH}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = CH^2\left(\frac{1}{CB^2} + \frac{1}{AC^2}\right) =$$

$$= \frac{CH^2\,(AC^2 + CB^2)}{CB^2\,.\,AC^2} = \left(\frac{CH\,.\,AB}{CB\,.\,AC}\right)^2 = 1$$

Suy ra $\quad r^2 = r_1^2 + r_2^2 \quad$ (1)

Mặt khác ΔO_1O_2H vuông tại H (bạn đọc tự CM) $\Rightarrow O_1O_2^2 = O_1H^2 + O_2H^2 = 2r^2 \quad$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra O_1O_2 lớn nhất khi và chỉ khi r lớn nhất.

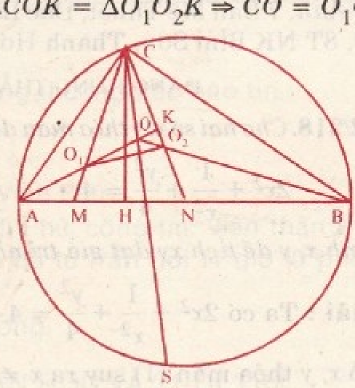
Xét ΔOAB ta có :

$\widehat{AOB} = 180^o - (\hat{A}_2 + \hat{B}_2) = 135^o$.

Vậy O thuộc cung chứa góc 135^o dựng trên đoạn AB thuộc nửa mặt phẳng bờ AB cùng phía với nửa đường tròn đã cho. Dễ thấy khi O là điểm chính giữa cung đó thì r lớn nhất. Lúc đó C là điểm chính giữa của nửa đường tròn đường kính AB.

Cách 2 : (Hướng dẫn)

Chứng minh $AC = AN$, suy ra O là trực tâm $\Delta CO_1O_2 \Rightarrow CO \perp O_1O_2$. Từ đó suy ra $\Delta COK = \Delta O_1O_2K \Rightarrow CO = O_1O_2$.



Mặt khác $SO = SA = SB$. Từ đó suy ra CO lớn nhất khi và chỉ khi CS lớn nhất. Từ đó suy ra C là điểm ở chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Nhận xét : Giải tốt bài này có các bạn : *Phạm Thu Hương* $9A_1$ Hồng Bàng, *Đặng Anh Tuấn*, 9T Trần Phú, Hải Phòng, *Ngô Thành Trung*, 8T Chuyên cấp II Phú Thọ, *Tạ Xuân Đức* 9A1 cấp II Dệt Việt Trì, Vĩnh Phú, *Bùi Mạnh Hùng*, 9H Trưng Vương, *Nguyễn Công Minh*, 9A Đào Phương Nam, 8A Bế Văn Đàn, *Đỗ Minh Châu*, 9T Chuyên Đông Anh, *Bùi Việt Hà*, 9C Ngọc Lâm, Gia Lâm, Hà Nội, *Trần Ngọc Anh*, *Nguyễn Tiến Trung*, 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, *Nguyễn Tiến Hòa*, 8T Bỉm Sơn, *Lê Huy Bình*, 9T Lam Sơn, Thanh Hóa, *Trần Nam Dũng*, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An, *Đào Xuân Hưng* 72 tổ 5 Đồng Vinh, phường Tân Giang, Hà Tĩnh, *Trần Đức Sơn*, 8 Chuyên Ba Đồn, Quảng Bình, *Nguyễn Hữu Nghị*, 9TL Chuyên PTTH Quảng Trị, *Nguyễn Đức Thành*, 9, PTCS cấp 2 Colette quận 3 TP Hồ Chí Minh, *Cao Anh Đức*, $9A_1$ chuyên Mạc Đĩnh Chi, Tây Ninh.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/218 *Giải phương trình*

$$2\cos(x-45^0) - \cos(x-45^0)\sin 2x - 3\sin 2x + 4 = 0 \qquad (1)$$

Lời giải (của đa số các bạn)

$(1) \leftrightarrow \cos(x-45^0)(2-\sin 2x) + 3(2-\sin 2x) - 2 = 0$

$\leftrightarrow (2-\sin 2x)[3+\cos(x-45^0)] = 2 \qquad (2)$

Mà $\quad 2-\sin 2x \geqslant 2-1 = 1$

$\quad 3+\cos(x-45^0) \geqslant 3-1 = 2$

Vậy $(2-\sin 2x)[3+\cos(x-45^0)] \geqslant 2, \forall x$.

Suy ra :

$$(2) \leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos(x-45^0) = -1 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \cos(90^0-2x) = 1 \\ \cos(x-45^0) = -1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \cos 2(x-45^0) = 1 \\ \cos(x-45^0) = -1 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2(x-45^0)-1 = 1 \\ \cos(x-45^0) = -1 \end{cases} \leftrightarrow \cos(x-45^0) = -1$$

$\leftrightarrow x - 45^0 = 180^0 + K360^0$

$\leftrightarrow x = 225^0 + K360^0,\ K \in \mathbf{Z}$.

Nhận xét. 1) Một số bạn cho lời giải trực tiếp bằng cách phân tích ra thừa số :

Đặt $x - 45^0 = t$, thì

$(1) \leftrightarrow (1+\cos t)(2\cos^2 t + 4\cos t - 7) = 0$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/218. *Cho đa thức*

$$P(x) = (x^2-2)(x^2-3)(x^2-6)$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p đều tìm được số nguyên dương n để P(n) chia hết cho p.

Lời giải : Với $p = 2$ ta chọn $n = 2$, với $p = 3$ chọn $n = 3$. Xét $p \neq 2, 3$. Ta hãy chứng minh nhận xét sau :

Nếu $(a, p) = 1$ và $n^2 \not\equiv a$ (modp) với $\forall n$ thì

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (modp)} \qquad (1)$$

Thật vậy với mỗi $k \in \{1, 2..., p-1\}$ dễ chứng minh rằng tồn tại duy nhất $k' \in \{1, 2, ..., p-1\}$ sao cho $kk' \equiv a$ (modp). Vì $n^2 \not\equiv a$ (modp) với mọi n nếu $k \neq k'$. Từ đó $(p-1)! \equiv (1.1')(2.2')...(k.k')...$

$$\equiv a^{\frac{p-1}{2}} \text{ (modp)}$$

mà $(p-1)! \equiv -1$ (modp) theo định lí Winsơn.

Do đó ta có (1). Nhận xét được chứng minh.

Trở lại bài toán giả sử $P(n) / p\ \forall n$.

Khi đó $\forall n,\ n^2 \not\equiv 2$ (modp), $n^2 \not\equiv 3$ (modp) và $n^2 \not\equiv 6$ (modp). Theo nhận xét trên suy ra

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (modp)},\ 3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (modp)}$$

$\rightarrow 6^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ (modp) mâu thuẫn với sự kiện $6^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ (modp).

Nhận xét : i) Mấu chốt của bài toán là chứng minh nhận xét (1). Nhiều bạn đã phát hiện được điều đó nhưng chứng minh còn dài hoặc không chứng minh.

ii) Từ cách giải trên dễ dàng chứng minh bài toán tổng quát với đa thức

$P(x) = (x^2-a)(x^2-b)(x^2-ab) \quad a \neq b$.

Có bạn cho rằng khẳng định của bài toán vẫn đúng nếu thay bằng đa thức $P(x) = (x^2-2)(x^2-3)$

Nhưng điều này không đúng chẳng hạn với $p = 5$. Ta có $\forall n,\ n^2 \equiv 0, 1, 4$ (mod5) do đó $n^2 - 2 \not\equiv 0,\ n^2 - 3 \not\equiv 0$ (mod5) với mọi n.

Số bạn tham gia giải bài toán này không nhiều. Các bạn có lời giải đúng là :

Lê Văn An 11CT Phan Bội Châu, Nghệ An, *Lê Anh Vũ* 12 Quốc học Huế, Nguyễn Lê Lực 10CT TP Hồ Chí Minh, *Trần Nguyên Ngọc* 11CT ĐHTHHN, *Lê Tuấn Anh* 11CTĐHTH HN, *Phan Dung Hùng* Quảng Bình, *Nguyễn Xuân Thắng*, Quảng Trị.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/218 : *Cho số nguyên $n \geqslant 3$. Chứng minh rằng, tồn tại hai hoán vị khác nhau $(s_1, s_2, ..., s_n)$ và $(t_1, t_2, ..., t_n)$ của $(1, 2, ..., n)$ sao cho*

$s_1 + 2s_2 + ... + ns_n = t_1 + 2t_2 + ... + nt_n$.

Lời giải (Theo *Trịnh Hữu Trung, 11T Lam Sơn, Thanh Hóa*) : Xét *Bài toán sau* : *"Cho số nguyên $n \geqslant 3$ và cho n số thực đôi một khác* *nhau $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng, tồn tại hai hoán vị $(b_1, b_2, ..., b_n)$ và $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ của $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :*

(i) $b_i \neq c_i \ \forall i = \overline{1,n}$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$ "

Chứng minh : • Với $n = 3$ ta có (a_2, a_3, a_1) và (a_3, a_1, a_2) là hai hoán vị thỏa mãn (i) và (ii).

• Với $n \geqslant 4$, dễ thấy $(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$ và $(a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ là hai hoán vị thỏa mãn (i) và (ii).

Chọn $a_i = i$, $\forall i = \overline{1,n}$ và thay điều kiện (i) bởi điều kiện "nhẹ" hơn : "$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ và $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là hai hoán vị khác nhau", từ Bài toán trên ta có Bài đã ra.

Nhận xét : 1. Đại đa số các bạn gửi lời giải tới tòa soạn đã giải bài ra theo phương pháp của lời giải trên.

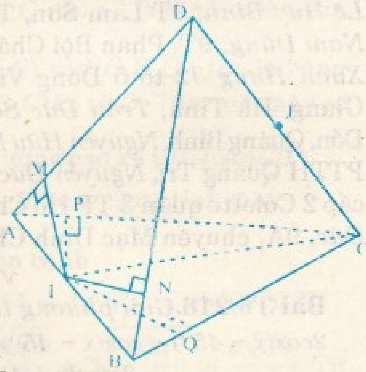
2. Danh sách các bạn có lời giải ngắn gọn : *Nguyễn Thị Khánh Truyền* (11CT1 Trường Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai) ; *Nguyễn Lê Lực, Trần Thiên Ảnh, Khưu Minh Cảnh* (10CT, 11CT ĐHTH T.P Hồ Chí Minh) ; *Phan Phú Đông, Phan Anh Huy, Hồ Văn Hữu, Đào Duy An* ($10A_1$, $11A_1$, $11A_2$, $11A_3$ PTTH Lê Quý Đôn Đà Nẵng) ; *Cao Thế Anh, Võ Thanh Tùng, Lê Anh Vũ* (11CT, 12CT Quốc học Huế) ; *Nguyễn Hoàng Công* (12T Quảng Ngãi) ; *Phạm Văn Hùng* (10T NK Hà Tĩnh) ; *Trần Chí Hòa, Trương Vinh Lân, Đỗ Đức Dũng, Phan Duy Hùng, Mai Thế Hùng* (10CT, 11CT, 12CT Trường Đào Duy Từ, Quảng Bình) ; *Nguyễn Khánh Quỳnh* ($11A_0$ PTTH Phan Đăng Lưu, Yên Thành, Nghệ An) ; *Lê Văn An, Nguyễn Hồng Chung, Dương Văn Yên,* (11CT PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Hoàng Xuân Bách* (12A PTCT ĐHSP Vinh) ; *Mai Thịnh Hiệp* ($10A_3$ PTTH Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa) ; *Đoàn Tiến Dũng, Nguyễn Thanh Hoài, Trịnh Hữu Trung* (9T, 11T Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Đặng Việt Cường, Nguyễn Anh Hoa* (10T PTTH Lê Hồng Phong, Nam Hà) ; *Trần Văn Hà* (7T Trường NK Kiến Xương, Thái Bình) ; *Lê Văn Mạnh* (12CT PTNK Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình) ; *Trần Nguyên Ngọc* (11B PTCT ĐHTH Hà Nội) ; *Nguyễn Minh Phương* (9A PTCS Minh Phương, Việt Trì, Vĩnh Phú) ; *Trần Anh Tuấn, Nguyễn Phương, Nguyễn Quang Hải, Phạm Quang Hưng* (10CT, 12CT PTTH Hùng Vương, Vĩnh Phú) và *Lê Quang Minh* ($12K_5$ PTNK Bắc Thái)

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/218 *Các cạnh AC, AD, BC và BD của tứ diện ABCD tiếp xúc với mặt cầu (S_o) bán kính ρ, tâm I nằm trên cạnh AB. Còn các cạnh CA, CB, DA và DB thì tiếp xúc với mặt cầu (S'_o) bán kính r, tâm J nằm trên cạnh CD. Chứng minh hệ thức sau đây :*

$$AB^4 (CD^2 - 4r^2) = CD^4 (AB^2 - 4\rho^2)$$

Lời giải (của nhiều bạn)



Giả sử mặt cầu $S_o(I, \rho)$ tiếp xúc với AD, AC, BD, BC lần lượt ở M, N, P, Q. Ta có : $BP = BQ$; $IP = IQ = \rho$ nên $\Delta IBP = \Delta IBQ$.

Suy ra : $\widehat{IBD} = \widehat{IBC}$. Chứng minh tương tự, ta được : $\widehat{IAD} = \widehat{IAC}$. Do đó : $\Delta ABD = \Delta ABC \Rightarrow AD = AC$; $BD = BC$. Đối với mặt cầu S'_o, (J, r), chứng minh tương tự, ta được :

$DA = DB$ và $CA = CB$. Như vậy :

$AC = AD = BC = BD \ (= a)$.

Từ đó dễ dàng thấy rằng I là trung điểm của AB và J là trung điểm của CD.

Đặt $AB = 2m$, $CD = 2n$, ta có hệ thức :

$s(DAB) = 2s(DIA) = a\rho = mDI = m\sqrt{a^2 - m^2}$. Suy ra :

$$\rho = \frac{m}{a}\sqrt{a^2 - m^2}$$

Tương tự : $r = \dfrac{n}{a}\sqrt{a^2 - n^2}$

Từ đó ta được :

$$CD^2 - 4r^2 = 4(n^2 - r^2) = 4n^2\left(1 - \frac{a^2 - n^2}{a^2}\right) = 4\frac{n^4}{a^2} = \frac{CD^4}{4a^2}$$

$$AB^2 - 4\rho^2 = 4(m^2 - \rho^2) = 4m^2\left(1 - \frac{a^2 - m^2}{a^2}\right) = 4\frac{m^4}{a^2} = \frac{AB^4}{4a^2}$$

Do đó ta được hệ thức cần tìm :

$$AB^4 (CD^2 - 4r^2) = CD^4 (AB^2 - 4\rho^2) = \left(= \frac{AB^4 CD^4}{4a^2}\right)$$

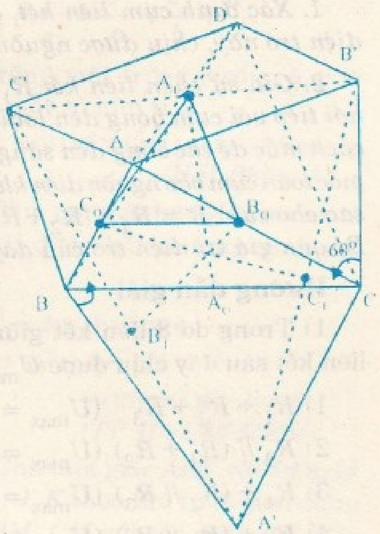
Nhận xét : Nhiều bạn tham gia giải bài toán này, tất cả đều giải đúng, trừ một bạn kết luận sai (*ABCD* là tứ diện đều !). Tuy nhiên, lời giải của một số bạn còn rườm rà, chưa gọn.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/218. *Lấy các cạnh BC, CA và AB của một tam giác ABC làm đáy, dựng ra phía ngoài tam giác ABC ba tam giác đều A'BC và C'AB. Gọi* A_o, A_1 ; B_o, B_1 *và* C_o, C_1 *lần lượt là trung điểm các cạnh BC, B'C' ; CA, C'A' và AB, A'B' của hai tam giác ABC, A'B'C'. Chứng minh rằng các đoạn thẳng* A_oA_1, B_oB_1 *và* C_oC_1 *đồng quy và bằng nhau.*

Sau đây là một số cách giải khác nhau của bài toán này.

Lời giải *cách 1.* (Dựa theo *Trần Lực*, 10CT, Đào Duy Từ, Quảng Bình và nhiều bạn khác).



– Trước hết, dễ dàng chứng minh rằng ba đoạn thẳng *AA'*, BB' và CC' bằng nhau và đồng quy (Đây chính là nội dung của một bài toán cổ điển, quen thuộc đối với số đông các bạn).

– Sau đó, chứng minh rằng bốn tam giác *ABC*, $A_oB_oC_o$, *A'B'C'* và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Thật vậy, nếu tam giác *ABC* có hướng dương (xem hình vẽ) thì $f(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}) =$
$= f(\overrightarrow{AC'}) + f(\overrightarrow{BA'}) + f(\overrightarrow{CB'}) =$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{O}$, trong đó $f = Q_{+60^o}$ là phép quay véctơ, góc $\varphi = +60^o$. Do đó :

$$\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra : Hai tam giác *ABC* và *C'A'B'* có cùng trọng tâm ; từ đó ta được ngay đ.p.c.m.

– Để ý rằng $A_oB_oC_o$ và $A_1B_1C_1$ là tam giác trung bình của các tam giác *ABC* và *A'B'C'* ; do đó, phép vị tự $V_G^{-\frac{1}{2}}$ tâm *G*, hệ số $k = -\frac{1}{2}$ biến *ABC* thành $A_oB_oC_o$, *A'B'C'* thành $A_1B_1C_1$. Suy ra phép vị tự $V_G^{\frac{1}{2}}$ biến các đoạn thẳng *AA'*, *BB'* và *CC'* lần lượt thành các đoạn thẳng A_oA_1, B_oB_1 và C_oC_1. Bởi vậy, ba đoạn thẳng này cũng đồng quy và bằng nhau.

Cách 2 (dựa theo *Trần Quế Lâm*, 12CT, trường PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình).

– Trước hết, chứng minh rằng các tam giác $A_1B_oC_o$, $B_1C_oA_o$ và $C_1A_oB_o$ là đều và dựng ra ngoài tam giác $A_oB_oC_o$.

Thật vậy, ta có :

$2\overrightarrow{A_1B_o} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{B'C} = f(\overrightarrow{C'B}) + f(\overrightarrow{B'A}) =$
$= f(\overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{B'A}) = f(2\overrightarrow{A_1C_o}) = 2f(\overrightarrow{A_1C_o})$, hay :

$\overrightarrow{A_1B_o} = f(\overrightarrow{A_1C_o})$, trong đó $f = Q_{+60^o}$ là phép quay véctơ, góc $+60^o$. Do đó $A_1B_oC_o$ là một tam giác đều và có hướng âm.

Chứng minh tương tự, các tam giác $B_1C_oA_o$ và $C_1A_oB_o$ cũng là những tam giác đều và có hướng âm, dựng ra ngoài tam giác $A_oB_oC_o$.

– Đối với tam giác $A_oB_oC_o$, ta trở về bài toán cổ điển quen thuộc, và được kết quả như đã chỉ ra trong đề toán.

Cách 3 (dựa theo *Lê Thanh Tùng*, lớp 8T, trường PTNK Bỉm Sơn, Thanh Hóa và nhiều bạn khác lớp 9 PTCS).

– Gọi *D* là đỉnh thứ tư của hình bình hành *C'AB'D'* (x. hình vẽ), ta chứng minh rằng *DBC* là một tam giác đều, từ đó suy ra $A_1C_oB_o$ là đều. Thật vậy, đặt $\widehat{AB'D} = \widehat{AC'D} = \theta = 180^o - \widehat{B'AC'}$; ta được $\theta = 180^o - \widehat{B'AC'} = 180^o - (360^o - 120^o - \widehat{BAC}) = -60^o + \widehat{BAC}$. Suy ra : $\widehat{DB'C} = \widehat{BC'D} = \widehat{BAC}$ và do đó : $\Delta DB'C = \Delta BC'D = \Delta BAC$ (c.g.c). Từ đó : $DC = BD = BC$.

Chứng minh tương tự, $B_1C_oA_o$ và $C_1A_oB_o$ cũng là những tam giác đều như tam giác $A_1B_oC_o$ và dựng ra ngoài tam giác $A_oB_oC_o$.

Nhận xét. 1°) Lời giải 2 (sử dụng phép quay véctơ) là lời giải ngắn gọn hơn cả.

2°) Phần đông các bạn đã biết sử dụng tính chất của phép quay để chứng minh *AA'*, *BB'* và *CC'* bằng nhau và đồng quy (hoặc A_oA_1, B_oB_1 và C_oC_1 bằng nhau và đồng quy). Tuy nhiên, lời giải của nhiều bạn còn rất rườm rà.

3°) Có rất đông, 117 bạn tham gia giải bài toán trên và cho lời giải đúng. Tuy nhiên cũng còn một vài bạn chưa đạt điểm tối đa vì chứng minh thiếu chặt chẽ.

4°) Tác giả đề toán này giải bằng phương pháp tọa độ. Một số bạn sử dụng hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác để chứng minh các tam giác như $A_1B_oC_o$ là đều. Các lời giải này đều dài dòng, không đẹp.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/218. *Một viên bi khối lượng m có khoan một lỗ xuyên tâm và được lồng trên một thanh cứng thẳng sao cho bi có thể chuyển động dọc trên thanh với ma sát không đáng kể. Hai lò xo* L_1 *và* L_2 *có một đầu gắn chặt với viên bi và đầu còn lại gắn cố định vào các điểm A và*

B trên thanh cứng (xem hình vẽ). Lúc đầu đặt thanh AB nằm ngang và viên bi đứng yên ở vị

trí M, khi đó lò xo L_1 bị nén một đoạn a_1, lò xo L_2 bị nén một đoạn a_2. Tại thời điểm $t = o$ quay thanh AB xung quanh M tới vị trí thanh thẳng đứng.

1. Hãy chứng minh là viên bi sẽ dao động điều hòa.

2. Cho biết biên độ dao động của viên bi là 9,8cm và gia tốc trọng trường là 9,8 m/s^2. Hãy tính chu kì dao động của viên bi.

3. Cho biết $m = 100g$, $a_1 = 15\,cm$ và $a_2 = 10\,cm$. Hãy tính độ cứng của cái lò xo L_1 và L_2.

Hướng dẫn giải. 1. Khi thanh AB nằm ngang và viên bi đứng yên ở M ta có $k_1a_1 = k_2a_2$ (1). Khi thanh AB thẳng đứng, chọn vị trí cân bằng làm gốc tọa độ và trên Ox hướng xuống dưới. Xét viên bi ở vị trí có tọa độ x, hợp lực tác dụng lên viên bi có hình chiếu lên trục Ox :

$$F = k_1(a_1 - x + x_o) - k_2(a_2 + x - x_o) + mg$$

chú ý đến (1) :

$$F = -(k_1 + k_2)x + (k_1 + k_2)x_o + mg.$$

Tại O, $F = 0$ và $x = 0$ suy ra

$$x_o = -\frac{mg}{k_1 + k_2} \quad (2)$$

và $F = -(k_1 + k_2)x$ (3). Áp dụng định luật Niutơn suy ra $x'' + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0 \rightarrow x = A\sin(\omega t + \varphi)$ với $\omega^2 = (k_1 + k_2)/m$: viên bi dao động điều hòa.

2) Lúc $t = 0$, $x = x_o$ và $v = 0$, rút ra

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ và } A = \frac{mg}{k_1 + k_2} \quad (4).$$ Từ đó

suy ra $\omega = \sqrt{\frac{g}{A}}$ chu kì dao động

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{g}} \simeq 0{,}628s.$$

3) Từ (1) và (4) rút ra

$$k_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{mg}{A} = 4N/m\ ;$$

$$k_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{mg}{A} = 6N/m$$

Nhận xét. Các em có lời giải tốt : *Nguyễn Quốc Nguyên* 11 Lý PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An ; *Nguyễn Quốc Khánh* 11F C Lí, PTTH Hùng Vương, Việt Trì, Vĩnh Phú ; *Tô Huy Cường* 12A$_1$, PTTH chuyên, Thái Bình ; *Bùi Thế Dũng*, 11A, PTTH Văn Giang, Châu Giang, Hải Hưng.

M.T

Bài L2/218 *Có 3 điện trở R_1 : 30Ω – 15A ;*

R_2 : 10Ω – 5A ;

R_3 : 20Ω – 20A ;

Trong đó giá trị sau là dòng cao nhất mà các điện trở có thể chịu được.

1. Xác định cụm liên kết, có thể có giữa ba điện trở này, chịu được nguồn U = 180V.

2. Giả sử chọn liên kết $R_1 // (R_2 + R_3)$ mắc nối tiếp với cụm bóng đèn loại 30V – 40W. Tìm cách mắc để các bóng đèn sáng bình thường khi mắc toàn cụm vào nguồn điện không đổi V = 220V, sao cho cụm $R = R_1 // (R_2 + R_3)$ không bị cháy. Bỏ qua giá trị điện trở của dây nối.

Hướng dẫn giải.

1) Trong đó 8 liên kết giữa 3 điện trở có 4 liên kết sau đây chịu được $U_{max} < 180V$:

1) $R_1 + R_2 + R_3$ $(U_{max} = 300V)$

2) $R_3 // (R_1 + R_2)$ $(U_{max} = 200V)$

3) $R_1 + (R_2 // R_3)$ $(U_{max} = 275V)$

4) $R_3 + (R_1 // R_2)$ $(U_{max} = 183{,}3V)$

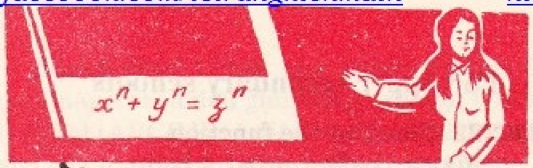
2) Liên kết $R = R_1 // (R_2 + R_3)$ có $U_{max} = 150V$ vì vậy khi mắc nối tiếp R với cụm bóng đèn để đưa vào nguồn $U = 220V$, mà muốn cho liên kết R không bị cháy thì hiệu điện thế trên cụm bóng đèn phải có giá trị nhỏ nhất là $70V$. Ta có $R = 15\Omega$ và $U_R + U_D = 220V$ và, ngoài ra, để đèn sáng bình thường thì U_D phải là bội của $U_d = 30V \rightarrow U_D = nU_d$ với n nguyên dương. Từ đó suy ra chỉ với $n = 4 \rightarrow U_D = 120V \rightarrow U_R = 100V$. Và công suất tiêu thụ của một khối bóng đèn là

$$P'_d = I_c \cdot U_d = \frac{U_R}{R}\,U_d = 200W \rightarrow \text{có 5 bóng}$$

mắc song song. Như vậy : cần mắc nối tiếp 4 nhóm bóng đèn, mỗi nhóm có 5 bóng mắc song song.

Nhận xét. Có 2 em có lời giải đúng :

Nguyễn Thanh Tùng 12A, THPT Chí Linh, Hải Hưng ; *Đặng Minh Tuệ*, 10 chuyên lí, THPT Đào Duy Từ, Đồng Hới, Quảng Bình.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/222 : Chứng minh rằng $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ không chia hết cho 343 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T2/222 : Cho a, b, c là 3 số hữu tỉ thỏa mãn

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{c^2} + \dfrac{c}{a^2} = \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{c^2}{b} + \dfrac{a^2}{c} \end{cases}$$

Chứng minh rằng một trong 3 số a, b, c là bình phương của một số hữu tỉ.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

Bài T3/222 : Tìm một hệ thức giữa a và b là điều kiện cần và đủ để hệ bất phương trình sau đây có nghiệm.

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 \leq a^2 \\ x^2 + xy - 4y^2 \geq b \end{cases}$$

TRỊNH BẰNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T4/222 : Cho tam giác ABC với điểm M ở bên trong. Gọi I, J, K theo thứ tự là giao điểm của các tia AM, BM, CM với các cạnh BC, CA, AB. Đường thẳng qua M và song song với BC cắt IK, IJ tại các điểm tương ứng E, F. Chứng minh rằng $ME = MF$.

NGUYỄN MINH HÀ
(Hải Phòng)

Bài T5/222 : Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M di động trên nửa đường tròn đó. Gọi N là giao điểm của tia BM với tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn, P là giao điểm thứ hai của nửa đường tròn với đường vuông góc hạ từ M xuống Ax, Q là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB. Xác định vị trí của M sao cho N, P, Q thẳng hàng.

DẶNG VIÊN
(Hà Nội)

CÁC LỚP THCB

Bài T6/222 : Cho hàm số $f(x) = \cos 2x + a\cos x + b\sin x$. Tìm a, b sao cho $f(x) \geq -1$ với mọi x.

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

Bài T7/222 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 3z^2x - 3z + z^3 = 0 \\ y - 3x^2y - 3x + x^3 = 0 \\ z - 3y^2z - 3y + y^3 = 0 \end{cases}$$

NGUYỄN QUANG HẢI
(Vĩnh Phú)

Bài T8/222 : Bốn số a, b, c, d có tích bằng 1 và thỏa mãn đẳng thức :

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Chứng minh rằng bốn số a, b, c, d phân làm hai cặp giả sử là cặp (a, b) và (c, d) sao cho : $a \, . \, b = c \, . \, d = 1$.

NGUYỄN LÊ DŨNG
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T9/222 : Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC ở điểm D. Gọi J và K lần lượt là trung điểm của BC và AD. Chứng minh rằng đường thẳng JK đi qua I.

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Bài T10/222 : O là một điểm nằm trong tứ diện $ABCD$ sao cho $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{O}$, ở đó A_1, B_1, C_1, D_1 là hình chiếu của O trên các mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$. Chứng minh rằng :

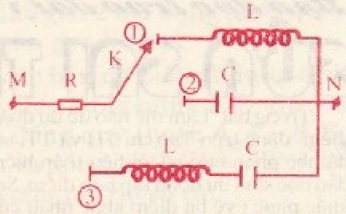
$$OA_1 + OB_1 + OC_2 + OD_1 \leq 4r$$

trong đó r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.

DÀO TRƯỜNG GIANG
(Vĩnh Phú)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/222 : Cho đoạn mạch xoay chiều như hình vẽ, trong đó R = 60Ω, 2 cuộn dây cùng độ tự cảm L (điện trở thuần không đáng kể) và 2 tụ cùng điện dung C. 2 đầu đoạn mạch M, N mắc vào nguồn xoay chiều ổn định. Khi khóa K lần lượt ở vị trí 1 và 2 thì biểu thức dòng điện qua R lần lượt là



$$i_1 = \sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{12}\right) \text{ (A)}$$

$$i_2 = \sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{7\pi}{12}\right) \text{ (A)}$$

Viết biểu thức dòng điện qua R khi K ở vị trí 3 . Biết rằng điện trở của dây nối và khóa K không đáng kể.

TRẦN TRỌNG HƯNG
(Quảng Ngãi)

Bài L2/222 : Một con lắc đơn được kéo ra tới vị trí A mà dây hợp với phương thẳng đứng một góc $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ rồi buông ra $(v_o = 0)$. Hãy xác định các vị trí của con lắc mà tại đó gia tốc của vật nặng có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

LƯƠNG TẤT ĐẠT
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For lower secondary schools.

T1/222. Prove that $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ is not divisible by 343 for every $n \in \mathbb{Z}$.

T2/222. Let a, b, c be three national numbers satisfying

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{c^2} + \dfrac{c}{a^2} = \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{c^2}{b} + \dfrac{a^2}{c}. \end{cases}$$

Prove that one of these three numbers a, b, c is a square of a rational number.

T3/222. Find a relation between a and b which is a necessary and sufficient condition for the system of inequations

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 \leqslant a^2 \\ x^2 + xy - 4y^2 \geqslant b \end{cases}$$

to have a solution.

T4/222. M is a point inside the triangle ABC. Let I, J, K be respectively the points of intersection of the semi-lines AM, BM, CM with the sides BC, CA, AB. The line passing through M parallel to BC cuts IK, IJ respectively at E, F. Prove that $ME = MF$.

T5/222. A point M moves on a semi-circle with center O and diameter AB. Let N be the point of intersection of the semi-line BM and the tangent Ax to the semi-circle, P be the second point of intersection of the semi-circle, with the perpendicular issued from M to Ax, Q be the orthogonal projection of M on AB. Determine the position of M so that N, P, Q are collinear.

For upper secondary schools

T6/222. Consider the function

$$f(x) = \cos 2x + a\cos x + b\sin x.$$

Determine a, b so that $f(x) \geqslant -1$ for every x.

T7/222. Solve the system of equations :

$$\begin{cases} x - 3z^2x - 3z + z^3 = 0 \\ y - 3x^2y - 3x + x^3 = 0 \\ z - 3y^2z - 3y + y^3 = 0\,. \end{cases}$$

T8/222. Let a, b, c, d be four numbers satisfying

$$\begin{cases} abcd = 1 \\ a + b + c + d = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}\,. \end{cases}$$

Prove that the set $\{a, b, c, d\}$ can be divided into two pairs (a, b) and (c, d) such that

$$ab = cd = 1.$$

T9/222. The incircle of triangle ABC touches the side BC at D. Let J and K be respectively the midpoints of BC and AD. Prove that the line JK passes through the center of the incircle.

T10/222. O is a point inside the tetrahedron $ABCD$ such that $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{O}$, where A_1, B_1, C_1, D_1 are respectively the orthogonal projections of O on the faces (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Prove that

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1 \leqslant 4r$$

where r is the radius of the inscribed sphere of the tetrahedron $ABCD$.

Bạn đọc trao đổi ý kiến

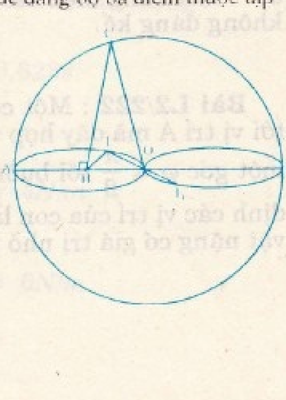
SỬA SAI THÀNH ... CHƯA ĐÚNG

Trong bài "Làm thế nào để dự đoán hình dạng của tập hợp điểm" đăng trên Tạp chí TH và TT, số 210, 12 – 1994, tác giả đã phê phán một số tài liệu toán hiện hành về vấn đề hướng dẫn học sinh dự đoán tập hợp điểm. Sau đó tác giả đưa ra cách khắc phục : vẽ ba điểm khác nhau của tập hợp điểm, nếu ba điểm này thẳng hàng thì tập hợp điểm có dạng thẳng

... Cách đoán nhận này cũng chưa chính xác. Tôi xin nêu hai thí dụ :

Thí dụ 1 : Cho đường tròn tâm O, đường kính AB cố định và một điểm C chuyển động trên đường tròn. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB. Tìm tập hợp I, tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHO.

Tập hợp là bốn cung chứa góc 135° vẽ qua các đoạn AO hoặc OB, và ta có thể tìm được dễ dàng bộ ba điểm thuộc tập hợp mà cả ba điểm đó thẳng hàng (xem hình 1)



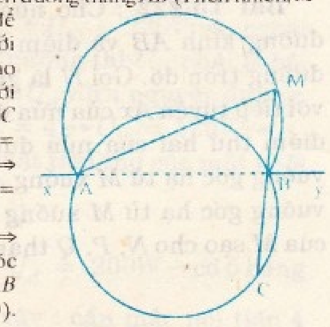
Thí dụ 2 :

Cho đường tròn (O), dây AB cố định. Tìm tập hợp những điểm M (trong mặt phẳng chứa đường tròn (O)) thỏa mãn : $MA.\ MB = MT^2$ (MT là tiếp tuyến của đường tròn (O))

Lời giải bài toán này được đăng trên báo TH và TT (tháng 11 – 1966) như sau :

Nếu Ax là tia đối của tia (AB) và By là tia đối của tia BA thì hai tia Ax và By thuộc tập hợp phải tìm.

Giả sử M không nằm trên đường thẳng AB (Hiển nhiên, M nằm ngoài đường tròn (O) để tồn tại tiếp tuyến MT tới đường tròn). Gọi C là giao điểm (khác B) của (MB). Với đường tròn (O), thì $MB.\ MC = MT^2 = MA.\ MB \Rightarrow MA = MC \Rightarrow \Delta\ MAC$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{AMB} = (180^\circ - \widehat{ACM})/2 = (180^\circ - \alpha)/2$ trong đó $\alpha = 1/2\ \overset{\frown}{AOB}$ (không đổi) $\Rightarrow M$ thuộc cung (ω) chứa góc $90^\circ - \alpha/2$ vẽ qua đoạn AB (phần ngoài đường tròn (O)). (Xem hình 2)



Như vậy, tập hợp M gồm hai tia Ax, By và cung (O). Trên tập hợp này, tồn tại bốn điểm thẳng hàng, cũng tồn tại bốn điểm trong đó có ba điểm không thẳng hàng...

Thực ra, việc dự đoán tập hợp không chỉ dừng lại ở cách làm thủ công mà các sách mà bài báo đã nêu, mà phải kết hợp với sự nỗ lực của các thao tác tư duy : nghiên cứu tính đối xứng của tập hợp, tìm các điểm "vô tận" của tập hợp, "dựa vào các phép biến (chính xác) hình... hy vọng tìm được tương đối về hình dáng" của tập hợp cần tìm.

LÊ NGỌC THÀNH VINH
(Năng khiếu Kì Anh, Hà Tĩnh)

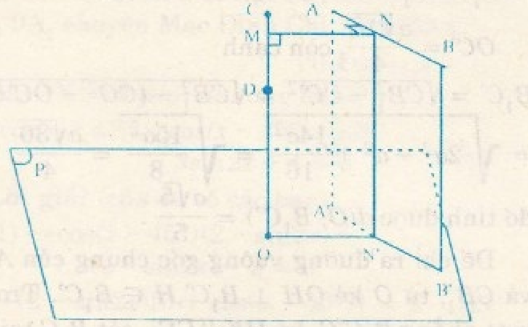
PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VỚI VIỆC XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

THÁI VIẾT THẢO
(Trường Phan Bội Châu, Nghệ An)

Bài viết này giới thiệu cùng các bạn ứng dụng của phép chiếu vuông góc trong việc xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Qua đó làm phong phú thêm cách giải loại toán này, đồng thời cho thấy một cách nhìn và sự vận dụng sáng tạo phần lí thuyết đã được học trong chương trình hình học

Ta biết rằng phép chiếu vuông góc bảo tồn tỉ số các đoạn thẳng cùng phương và nếu $MA = kMB$ thì $M'A' = k \cdot M'B'$ với M', A', B' tương ứng là ảnh của M, A, B qua phép chiếu vuông góc.

Xét hai đường thẳng chéo nhau AB và CD. Ta dựng 1 mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại O ($O \in AB$). (Xem hình 1)



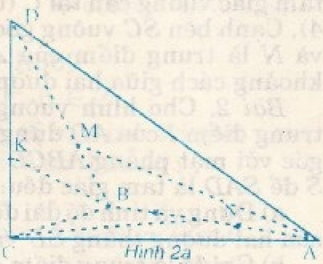
Hình 1

Giả sử đoạn MN là đoạn vuông góc chung của AB, CD ; hình chiếu của A, B, N trên (P) là A', B', N'. Rõ ràng $MN = ON'$ (h. vẽ). Như vậy $d(AB, CD) = d(O, A'B')$ (Ta kí hiệu $d(AB, CD)$ là khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD, (hình 1) $d(O, A'B')$ là khoảng cách giữa điểm O và $A'B'$.

Trong từng bài toán, có thể chọn mặt phẳng (P) qua C, hoặc D hay 1 điểm đặc biệt nào đó trên đường thẳng CD. Cụ thể ta xét các bài toán sau :

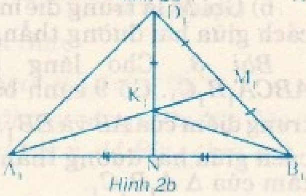
Bài toán 1. Hình tứ diện $ABCD$ có cạnh CD vuông góc với mặt phẳng ABC, M là trung điểm của DB, N là trung điểm của AB, K là điểm trên CD sao cho $CK = \frac{1}{3}CD$.

Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng BK và CN bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CN (hình 2a).



Hình 2a

Giải. Ta chiếu tứ diện $ABCD$ lên mặt phẳng (P) vuông góc với CN tại N.



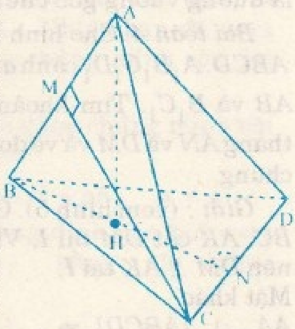
Hình 2b

Kí hiệu A_1, B_1, D_1, M_1, K_1 là hình chiếu của A, B, D, M, K trên (P), chú ý rằng hình chiếu của CN và N chính là N.

Theo giả thiết $CD \perp (ABC) \Rightarrow CD \perp CB$, $CD \perp CA$. Do đó $ND_1 \parallel CD$ và $ND_1 \perp A_1B_1$ tại N. (xem hình 2b). Ta có : $d(BK, CN) = d(N, B_1K_1)$; $d(AM, CN) = d(N, A_1M_1)$. Suy ra cần chứng minh $d(N, B_1K_1) = d(N, A_1M_1)$. Suy ra cần chứng minh $d(N, B_1K_1) = d(N, A_1M_1)$.

Từ giả thiết M là trung điểm $BD \Rightarrow M_1$ là trung điểm B_1D_1 ; cũng như thế N là trung điểm A_1B_1, mặt khác $CK = \frac{1}{3}CD \Rightarrow$ $NK_1 = \frac{1}{3}ND_1$ ($K \in ND_1$). Từ các đẳng thức trên dễ dàng suy ra K_1 là trọng tâm $\Delta A_1B_1D_1$. Mặt khác $\Delta A_1K_1B_1$ cân tại K_1 nên suy ra $d(N, B_1K_1) = d(N, A_1M_1)$ (dpcm).

Bài toán 2. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm cạnh CD. Hãy tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và CM.



Giải : Vì $ABCD$ là tứ diện đều, nên từ giả thiết ta suy ra $BN \perp CD$. Ta chiếu tứ diện $ABCD$ lên mặt phẳng P vuông góc với BN tại N. Rõ ràng $CD \subset (P)$.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A tới mặt BCD. Khi đó $A \xrightarrow{P} A_1$, $B \xrightarrow{P} N$, $C \xrightarrow{P} C$, $D \xrightarrow{P} D$, $H \xrightarrow{P} N$

(Kí hiệu $A \xrightarrow{P} A_1$ tức A_1 là ảnh của A qua phép chiếu vuông góc lên P). Từ giả thiết suy ra : $A_1C = A_1D$, $A_1N \perp CD$

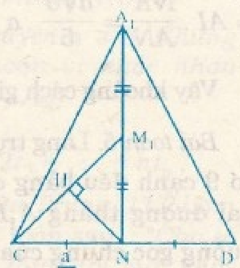
Ta có $NA_1 = HA = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ và $d(MC, NB) = d(N, CM_1)$. Chú ý rằng MA = MB $\Rightarrow$ $M_1A_1 = M_1N$ ($M_1 \in A_1N$) (xem hình 3b).

Và $d(N, CM_1) = NH$, trong tam giác vuông CNM_1 ta có :

$$\frac{1}{NH^2} = \frac{1}{NC^2} + \frac{1}{NM_1^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{6}{a^2} = \frac{16}{a^2} \Rightarrow$$

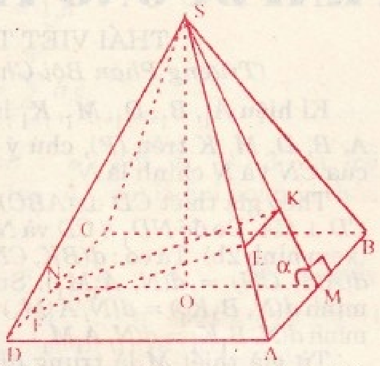
$$NH = \frac{a\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $d(MC, NB) = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.



Bài toán 3. (Đề 128. Bộ đề thi Tuyển sinh ĐHCĐ).

Trong mặt phẳng P cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên đường thẳng Ox vuông góc với mặt phẳng ABC tại O lấy 1 điểm S. Gọi α là góc do mặt bên hình chóp $SABCD$ tạo với đáy. Hãy xác định đường vuông góc chung của SA và SD và tính độ dài đường vuông góc chung đó.



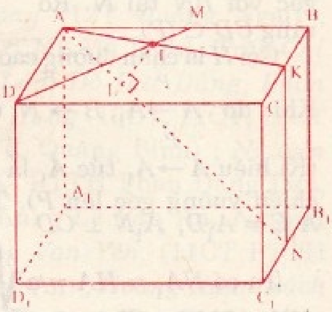
Giải : Gọi M, N là trung điểm của AB và CD (xem hình 4), khi đó O là trung điểm MN và mặt phẳng SMN vuông góc với CD tại N. Hình chiếu của SA trên mặt phẳng này là SM (vì $AB \perp (SMN)$. Do đó $d(CD, S) = d(N, SM) = NK$ ($NK \perp SM$). Do đó $NK = NM . \sin\alpha = a . \sin\alpha$.

Để vẽ đường vuông góc chung của CD và SA, từ K kẻ $KE // AB$, $E \in SA$. Trong mặt phẳng $DNKE$ từ E kẻ $EF // NK$, cắt DC tại F. Thì EF là đường vuông góc chung của CD và SA.

Bài toán 4. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a, M, N là trung điểm của AB và B_1C_1. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM và vẽ đoạn vuông góc chung của chúng.

Giải : (xem hình 5). Gọi K là trung điểm của BC. AK cắt DM tại I. Vì $ABCD$ là hình vuông, nên $DM \perp AK$ tại I.

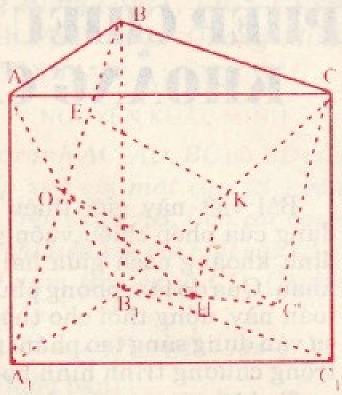
Mặt khác $AA_1 \perp [ABCD] \Rightarrow AA_1 \perp DM$. Do đó $DM \perp [AKNA_1]$. Hình chiếu của AN lên mặt phẳng này là chính nó. Vì vậy $d(DM, AN) = = d(I, AN) = IL$ ($IL \perp AN$). IL chính là đoạn vuông góc chung của DM và AN. Ta tính IL : $IL = AI. \sin\widehat{LAI} = AI . \frac{NK}{AN} = \frac{a\sqrt{5}}{5} . a . \frac{2}{3a} = \frac{2a\sqrt{5}}{15}$.



Vậy khoảng cách giữa MD và AN bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Bài toán 5. Lăng trụ tam giác đều $ABC\,A_1B_1C_1$ có 9 cạnh đều bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1C, và chỉ ra đoạn vuông góc chung của chúng.

Giải : (xem hình 6). Gọi giao của AB_1 và A_1B là O. Vì ABB_1A_1 là hình vuông nên $AB_1 \perp A_1B$ Ta xác định mặt phẳng P chứa AB_1 và $\perp A_1B$. Khi đó hình chiếu của B_1 lên (P) là B_1. Để xác định hình chiếu của C trên (P), từ O trong mặt CBA_1 ta kẻ $Ox \perp A_1B$, rồi từ C kẻ tia $Cy // A_1B$ chúng cắt nhau tại C' thì C' là hình chiếu của C trên (P).



Ta có $d(A_1B, B_1C) = d(O, B_1C')$ tức là bằng đường cao của $\Delta OB_1C'$ kẻ từ O. Tam giác này có $OB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, OC' = đường cao kẻ từ C của ΔCBA_1 có $A_1B = A_1C = a\sqrt{2}$, $BC = a$, từ đó tính được

$OC' = \frac{a\sqrt{14}}{4}$, còn cạnh

$$B_1C' = \sqrt{CB_1^2 - CC'^2} = \sqrt{CB_1^2 - (CO^2 - OC'^2)}$$

$$= \sqrt{2a^2 - a^2 + \frac{14a^2}{16}} = \sqrt{\frac{15a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{30}}{4}.$$ Từ đó tính được $d(O, B_1C') = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Để chỉ ra đường vuông góc chung của A_1B và CB_1, từ O kẻ $OH \perp B_1C'$, $H \in B_1C'$. Trong mặt phẳng $B_1C'C$, kẻ $HK // CC'$, cắt B_1C tại K. Trong mặt phẳng OHK, kẻ $KE // HO$, cắt A_1B tại E ; EK là đoạn vuông góc chung.

Chú ý : Trong bài này có thể vẽ EK theo cách trình bày trên rồi tính độ dài của EK, đó là khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1C. Tuy nhiên, thoạt đầu để nghĩ ra cách vẽ này cũng không phải là dễ dàng !

Bằng phương pháp trên, bạn đọc có thể giải được các bài tập cùng loại sau :

Bài 1. Cho hình chóp $SABC$, đáy ABC là 1 tam giác vuông cân tại C ($C = 90^o$, $CA = CB = 4$). Cạnh bên SC vuông góc với đáy, $SC = 3$, M và N là trung điểm của AB và BC. Hãy tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SN.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Từ trung điểm I của AD dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và trên đó lấy điểm S để SAD là tam giác đều.

a) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SD và AB.

b) Gọi M là trung điểm của AB, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CM.

Bài 3. Cho lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$. Có 9 cạnh bằng a. Gọi M và N là trung điểm của AB và BB_1. Hãy xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và ON với O là tâm của $\Delta A_1B_1C_1$.

Kể chuyện các nhà toán học

ACSIMET (ARCHIMÈDE)

(khoảng 287 - 212 trước CN)

Archimède người Hy lạp, là con trai nhà thiên văn học Pheidias. Ông sinh tại Syracuse, một thương cảng và trung tâm văn hóa quan trọng đương thời, ở bờ biển mé đông đảo Sicile của nước Ý hiện nay. Ông thuộc dòng dõi quý tộc, có họ hàng với vua Hiéron II xứ Syracuse. Thuở niên thiếu ông du học một thời ở Alexandrie (Ai Cập), rồi trở về sinh sống ở quê hương.

Miền tây Địa Trung Hải vào những năm 264 – 146 trước CN từng xảy ra những cuộc chiến tranh Puniques[1] dai dẳng và tàn khốc để giành quyền bá chủ giữa hai xứ Roma (La Mã) và Carthage (ở bờ biển Bắc Phi, tại bán đảo phía đông thủ đô Tunis nước Tunisie hiện nay). Đảo Sicile, xứ Syracuse nằm xen giữa hai kẻ kình địch hùng mạnh này, trong nhiều năm đã trở thành chiến địa và phải chiến đấu quyết liệt chống quân xâm lược La Mã. Vua Hiéron II biết tài Archimède, đã giao cho ông đem tài năng bảo vệ xứ sở, và ông đã không phụ lòng nhà vua.

Archimède ở đâu cũng tìm được cách để vẽ và tính toán : ngồi xổm, dùng que vạch vào mảng đất nện, hoặc cời tro bếp lò sưởi ra sàn nhà, xoa mịn rồi vạch vào đó ; có khi còn bôi dầu ô–liu lên da mình rồi vẽ lên đó. Những khi mải miết, ông bỏ cả bữa ăn, có khi ông còn quên hết những gì xung quanh. Một lần, khi ông đang tắm, thấy thân mình bồng bềnh trong bồn nước, ông bỗng phát hiện ra rằng nước nâng mình lên, ông mừng quýnh, nhảy ra khỏi bồn tắm và, theo truyền thuyết, cứ thế trần như nhộng chạy ra phố kêu lên "Eureka ! Eureka !" (Tôi tìm ra rồi ! tôi tìm ra rồi !). Câu chuyện là : Một người thợ vàng nổi tiếng thành Syracuse được vua sai làm một chiếc vương miện. Hắn làm đẹp quá, song vua nghi ngờ hắn cho thêm bạc vào trong vương miện. Vua nhờ Archimède xem xét hộ, mà không được phá chiếc vương miện ra. Archimède suy nghĩ, và khi đi tắm ông bỗng tìm ra bí quyết, mà sau này gọi là nguyên lí Archimède về thủy tĩnh học. *"Mọi vật nhúng trong một chất lỏng đều nhận được từ chất lỏng ấy một lực đẩy thẳng đứng, từ dưới lên trên, bằng với trọng lượng của lượng nước bị dời chỗ"*. Thế thì chỉ cần cân chiếc vương miện như thường, rồi dùng sợi chỉ nhỏ treo chiếc vương miện lên rồi thả chìm nó lơ lửng vào nước mà cân lại, bằng cách móc đầu kia sợi chỉ vào móc cân. Nếu vương miện toàn bằng vàng thì trọng lượng của nó phải bằng hiệu số hai trọng lượng vừa cân, đem nhân với tỉ trọng của vàng[2]. Theo truyền thuyết thì tay thợ vàng bị chứng minh là gian và bị trừng phạt.

Archimède là nhà công trình sư, nhà thiên văn học, nhà cơ học, nhà toán học. Người ta cho rằng ông đã sáng chế ra bánh xe răng, vít vô tận, ròng rọc di động, palăng (nhiều ròng rọc ghép thành cụm để tăng lực kéo vật nặng lên nhiều lần). Đặc biệt, ông triệt để tận dụng nguyên tắc đòn bẩy để tăng lực. Về điểm này ông cũng để lại một câu đầy hào khí và bạo nghĩ : *"Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ bẩy được cả Trái Đất !"*. Ông đã sáng chế ra những máy dẫn nước từ thấp lên cao để tưới ruộng, những máy nâng và cẩu các vật nặng, những máy bắn đá để chống giặc. Tương truyền ông còn định làm những kính tập trung ánh nắng, dõi theo thuyền địch để đốt cháy.

Về thiên văn học thành tựu lớn nhất của Archimède là sáng tạo ra một cung thiên văn (có thể tựa tựa như ở cung văn hóa thiếu nhi Hà Nội chăng ?), mà bầu trời là hình một quả cầu rỗng và quay được. Khi ta đứng trong lòng quả cầu nhìn lên, ta có thể tùy theo ngày, tháng của năm mà thấy trên bầu trời những chòm sao dịch chuyển trong đêm hôm đó, cùng với sự dịch chuyển của mặt trời (lúc ban ngày hôm đó), mặt trăng, một số hành tinh chính như Sao Hỏa, Sao Thổ, Sao Mộc, Sao Kim. Lại còn có thể quan sát các mô hình hiện tượng Nhật thực, Nguyệt thực, và hiện tượng mặt Trăng khuyết lại tròn, tròn rồi lại khuyết trong một tháng quay quanh Trái Đất.

Về Cơ học, Archimède là thủy tổ của môn thủy tĩnh học bởi đã phát hiện và ứng dụng nguyên lí thứ nhất về thủy tĩnh học như câu chuyện Eureka ở trên. Ông cũng là thủy tổ của môn tĩnh học các vật thể, của lí thuyết kết cấu các giàn.

Về toán học Archimède đã tìm được cách dựng bằng thước và compa hình năm cạnh đều nội tiếp trong đường tròn, cách tính diện tích các mảnh parabol, cách tính diện tích và thể tích hình cầu, các mảnh cầu và các mảnh vật tròn xoay sinh ra bởi các cung đường cong bậc hai quay quanh trục của chúng. Ông cũng tính gần đúng số Pi bằng cách xem chu vi đường tròn là giới hạn chung của các chu vi các đa giác đều n cạnh nội tiếp, ngoại tiếp với đường tròn khi n dần tới vô cùng. Theo cách xem xét ấy ông đã tính đến $n = 96$, từ đó thu được

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

và trong ứng dụng ông đã lấy gần đúng $\pi \approx \approx \frac{22}{7} \approx 3{,}14$ là một số có độ chính xác đủ dùng cho các công trình thời đó. Archimède cũng đưa ra đường xoắn ốc Archimède $r = a\varphi$ trong hệ tọa độ cực (r, φ). Ông còn tính ra biểu diễn của đường tiếp tuyến cho đường xoắn ốc này tại một điểm của nó. Archimède cũng đưa ra tiên đề Archimède : cho hai số dương a, b với $a < b$; Sẽ tồn tại số nguyên dương n sao cho $na > b$. Tiên đề này dùng làm cơ sở cho phép chia hai số. Về sau, tiên đề được mở rộng cho một trường không nhất thiết là trường số : Một trường T gọi là Archimède nếu $A, B \in T$ và $A < B$ thì tồn tại số nguyên dương n để $nA > B$.

Archimède được các nhà toán học Hy lạp, La mã, Ai cập, Trung Á, Ấn độ đương thời và đời sau xem như đáng phục và đáng kính trọng vào bậc nhất. Các nhà nghiên cứu thời nay về lịch sử toán học xem Archimède là đứng đầu ở thời cổ đại. Ông suy nghĩ tự do, táo bạo và hiện đại. Điều sáng giá là trong toán học Archimède đã vận dụng những phương pháp tương tự như phép tính vi phân và phép tính tích phân, mà hơn 2000 năm sau Newton là Leibnit mới phát triển lên.

Trong giai đoạn thứ hai của chiến tranh Puniques tướng La mã Marcellus đem pháo thuyền và quân bộ tấn công chớp nhoáng thành Syracuse. Khi pháo thuyền áp sát thành, Archimède chỉ huy quân Syracuse dội những chùm đá mỗi tảng nặng hơn 2 tạ rưỡi, phá vỡ thuyền địch, rồi thả những cần cẩu với ngoàm sắt lớn nhấc bổng thuyền lên mà lăng ra xa. Quân bộ leo lên thành cũng bị các máy bắn đá và máy lia quét nện tơi bời. Chúng khiếp vía, kinh hồn. Marcellus buộc phải chuyển từ tấn công sang bao vây lâu dài thành Syracuse, đồng thời đánh chiếm thành Mégare ở bên cạnh. Quân Syracuse cầm cự được ba năm bị vây hãm. Vào một kì lễ thánh quân dân Syracuse mải lễ bái, cúng thần linh và ca múa. Marcellus vào một đêm cho quân ngậm tăm, từ Mégare sang, lặng lẽ leo vào thành Syracuse từ phía đất liền, được lệnh phải bắt sống Archimède, không được giết. Quân, dân Syracuse đang ngủ say sưa, không kịp trở tay, bị tàn sát vô kể. Archimède đang mải ngồi trên đất vẽ những vòng tròn, nhác thấy bóng một tên lính La mã chạy đến. Tên lính sấn lại hỏi : "Archimède đâu ? " Archimède bảo : "Không được đụng đến các vòng tròn của ta !". Tên lính sốt ruột, không biết đấy là Archimède, vung gươm chém chết cụ già 75 tuổi. Thành Syracuse bị chiếm và trở thành thuộc địa La mã !

1. Một pha trong Chiến tranh Puniques được Gustave Flaubert (1821 - 1880), nhà văn hiện thực bậc thầy của Pháp, tái hiện rất sinh động trong tiểu thuyết lịch sử *Salammbô* (1862). Flaubert cũng là tác giả của tiểu thuyết *Madame Bovary* (1857) rất nổi tiếng.

2. Gọi a = trọng lượng vương miện bằng vàng cân lần đầu,

b = trọng lượng vương miện bằng vàng cân lần sau,

v = thể tích vương miện, d = tỉ trọng vàng, d' = tỉ trọng nước, $(d' = 1)$.

Ta có $a = vd$, $b = a - vd'$ (theo nguyên lí Archimède)

Từ đó suy ra

$$a - b = vd' = v = \frac{a}{d}$$

$a = (a - b)d$.

Cách tính này miễn được cho ta phép đo thể tích v.

Bạn đọc có thể dễ dàng làm quan sát hai phép cân một cục sắt không nhúng nước và có nhúng nước. Sẽ thấy ngay sự khác nhau giữa hai trọng lượng thu được. Cứ thử mà xem !

HỮU LIÊN

TIN BUỒN

Tòa soạn tạp chí TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ vô cùng thương tiếc báo tin :

Nhà giáo **ĐÀO TRƯỜNG GIANG**

Sinh ngày 19.10.1954

Quê quán : Xã Thượng Nông, huyện Tam Thanh, Vĩnh Phú

Giáo viên trường THPT Chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú, cộng tác viên thân thiết của TC Toán học và tuổi trẻ, do mắc bệnh hiểm nghèo đã từ trần hồi 14 giờ 10 phút ngày 11.11.1995 tại Bệnh viện Bạch Mai, Hà Nội.

Tòa soạn xin chia buồn cùng gia đình và nhà trường.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Một số ứng dụng TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

TÔ XUÂN HẢI
(Trường PTNK Hải Hưng)

Trong chương trình hình học lớp 10, khái niệm về vectơ chiếm một phần quan trọng. Trong bài viết này, tôi xin trình bày một số ứng dụng nhỏ của TÍCH VÔ HƯỚNG.

Trước hết xin nhắc lại định nghĩa. Cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$. Tích vô hướng của chúng, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ hoặc $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$ với $(\vec{a},\vec{b})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$

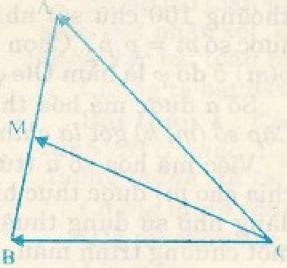
Biểu thức tọa độ : $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

Từ đó ta có $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

Sau đây là một số ứng dụng của tích vô hướng.

1. Ứng dụng để chứng minh đẳng thức

Ví dụ 1: Cho DABC có AB = c, BC = a, CA = b, trên AB lấy điểm M. Chứng minh rằng $c^2.CM^2 = a^2AM^2 + b^2BM^2 + (a^2 + b^2 + c^2)AM.BM$



Giải : Giả sử $\dfrac{MA}{MB} = k$. Ta có $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{CB}}{1+k}$ (*)

$\to \overrightarrow{CM} = \dfrac{|BM|.\overrightarrow{CA} + |AM|.\overrightarrow{CB}}{|AM| + |BM|}$

$\leftrightarrow c.\overrightarrow{CM} = |BM|.\overrightarrow{CA} + |AM|.\overrightarrow{CB}$

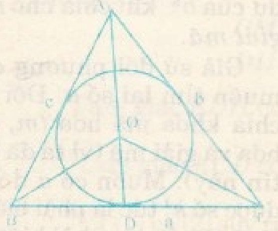
$\leftrightarrow c^2|CM|^2 = b^2|BM|^2 + a^2|AM|^2 + 2|AM|.|BM|(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})$

Do $2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = a^2 + b^2 - c^2$ nên

$c^2.|CM|^2 = b^2.|BM|^2 + a^2|AM|^2 + (a^2 + b^2 - c^2).|AM|.|BM|$

Ví dụ 2 : O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC với các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh $\dfrac{OA^2}{bc} + \dfrac{OB^2}{ca} + \dfrac{OC^2}{ab} = 1$

Giải : Sử dụng tính chất của các đường phân giác OA, OB, OC cùng với nhận xét (*) ở ví dụ 1 ta dễ dàng chứng minh được $a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.



Từ đó

$\leftrightarrow (a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC})^2 = 0$

$\leftrightarrow a^2OA^2 + b^2OB^2 + c^2OC^2 + 2ab\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2bc\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2ca\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 0$

Vì $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ và $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2 = c^2$

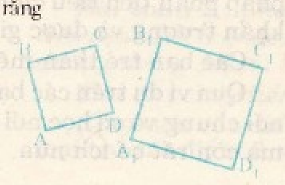
$\Rightarrow 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA^2 + OB^2 - c^2$

Tương tự, ta có

$a^2OA^2 + b^2OB^2 + c^2OC^2 + ab(OA^2 + OB^2 - c^2) + bc(OB^2 + OC^2 - a^2) + ca(OC^2 + OA^2 - b^2) = 0 \leftrightarrow (a + b + c)(aOA^2 + bOB^2 + cOC^2) = abc(a + b + c) \leftrightarrow \dfrac{OA^2}{bc} + \dfrac{OB^2}{ca} + \dfrac{OC^2}{ab} = 1$

Ví dụ 3 : Trên mặt phẳng cho hai hình vuông cùng hướng $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$. Chứng minh rằng

$AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$



Giải : Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$,

$\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a_1}, \overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b_1}, \overrightarrow{CA_1} = \vec{c}$.

Bởi vì $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{CC_1} = \vec{a_1} + \vec{b_1} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BB_1} = \vec{a_1} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{DD_1} = \vec{a} + \vec{b_1} + \vec{c}$ nên

$\overrightarrow{AA_1}^2 + \overrightarrow{CC_1}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{a_1}^2 + \vec{b_1}^2 + 2\vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{a_1}.\vec{c} + 2\vec{b_1}.\vec{c_1}$

$\overrightarrow{BB_1}^2 + \overrightarrow{DD_1}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{a_1}^2 + \vec{b_1}^2 + 2\vec{c}^2 + 2\vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{a_1}.\vec{c} + 2\vec{b_1}.\vec{c} + 2\vec{b_1}.\vec{a} + 2\vec{a_1}.\vec{b}$

Đẳng thức cần chứng minh $\leftrightarrow \vec{a_1}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{b_1} = 0$

Ta có $\left.\begin{array}{l}(\vec{a},\vec{b_1}) = 90^\circ + (\vec{a},\vec{a_1}) \\ (\vec{b},\vec{a_1}) = (\vec{a},\vec{a_1}) + 270^\circ\end{array}\right\} \to \vec{a_1}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{b_1} = 0$

2. *Ứng dụng trong giải phương trình và hệ phương trình*

Ví dụ 1 : Giải phương trình

$$x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$$

Giải : Đặt $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (\sqrt{x+1}, \sqrt{3-x})$. Khi đó $\vec{a}.\vec{b} = x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$; $|\vec{a}|.|\vec{b}| = \sqrt{x^2+1}.\sqrt{(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{3-x})^2} = 2\sqrt{x^2+1}$

Do đó $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}| \to \vec{a}, \vec{b}$ cộng tuyến

$\leftrightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}} \leftrightarrow x^2 = \dfrac{x+1}{3-x} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$

$\leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \leftrightarrow x_1 = 1,\ x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$

Ví dụ 2 : Giải hệ phương trình

$$(I)\begin{cases} x^2 + y^2 = -y(x+z) \\ x^2 + x + y = -2yz \\ 3x^2 + 8y^2 + 8xy + 8yz = 2x + 4z + 2 \end{cases}$$

Giải :

$$(I) \leftrightarrow \begin{cases} x(x+y) + y(y+z) = 0 \\ x(x+1) + y(2z+1) = 0 \\ 4(x+y)^2 + 4(y+z)^2 = (x+1)^2 + (2z+1)^2 \end{cases}$$

Xét $\vec{a} = (x, y), \vec{b} = (x+y, y+z), \vec{c} = (x+1, 2z+1)$

$\to \vec{a}.\vec{b} = 0, \vec{a}.\vec{c} = 0, 4\vec{b}^2 = \vec{c}^2$

* Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì $x = y = 0, z = -\frac{1}{2}$
* Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $\vec{b}$ và $\vec{c}$ cộng tuyến $\to \vec{c} = \pm 2\vec{b}$

Xét hai trường hợp $\vec{c} = 2\vec{b}$ và $\vec{c} = -2\vec{b}$ ta có

$x = 0, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(0, 0, -\frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

3. *Ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức*

Ví dụ 1 : Cho 8 số thực $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Chứng minh rằng ít nhất một trong 6 số

$x_1x_3 + x_2x_4$; $x_1x_5 + x_2x_6$; $x_1x_7 + x_2x_8$; $x_3x_5 + x_3x_7 + x_4x_8 + x_5x_7 + x_6x_8$ không âm.

Giải : Xét 4 vectơ

$\vec{v_1} = (x_1, x_2), \vec{v_2} = (x_3, x_4), \vec{v_3} = (x_5, x_6), \vec{v_4} = (x_7, x_8)$ Ta có $\vec{v_1}.\vec{v_2} = x_1x_3 + x_2x_4, \vec{v_1}.\vec{v_3} = x_1x_5 + x_2x_6, ..., \vec{v_3}.\vec{v_4} = x_5x_7 + x_6x_8$

ít nhất một trong các góc giữa 4 vectơ không vượt quá 90° nên ít nhất một trong 6 tích vô hướng là không âm.

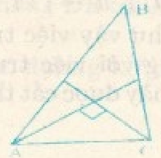
Ví dụ 2 : Chứng minh ΔABC có các trung tuyến ứng với các cạnh AB và BC vuông góc thì ta có $\cos B \geq \frac{4}{5}$

Giải : Đặt $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{BA} = \vec{c}$, ta có $\vec{m_a} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}, \vec{m_c} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$

do $\vec{m_a} \perp \vec{m_c}$ nên $\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right) = 0$

$\leftrightarrow \vec{a}.\vec{c} = \frac{2}{5}(\vec{a}^2 + \vec{c}^2)$ $\cos B = \dfrac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}|.|\vec{c}|} = \dfrac{2}{5}.\dfrac{\vec{a}^2 + \vec{c}^2}{|\vec{a}|.|\vec{c}|} = \dfrac{4}{5}\dfrac{|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2}{2|\vec{a}|.|\vec{c}|} \geq \dfrac{4}{5}$ (Côsi)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|\vec{a}| = |\vec{c}|$ hay ΔABC cân.



MẬT MÃ KHÓA CÔNG KHAI
MỘT ỨNG DỤNG BẤT NGỜ CỦA SỐ HỌC

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Đại học Quốc gia - Hà Nội)

Thế giới của những con số thật huyền ảo kỳ lạ và hấp dẫn. Đã có nhiều vẻ đẹp bí ẩn được phát hiện và còn biết bao điều bí ẩn chứa đựng trong dãy số 1, 2, 3, ... Số học, vị nữ hoàng của toán học mặc dù đã 3000 tuổi mà sắc đẹp lộng lẫy của nó vẫn còn quyến rũ biết bao nhiêu tài năng. Vẻ đẹp của số học làm say lòng nhiều người, từ những nhà toán học lỗi lạc nhất đến đông đảo các bạn yêu toán. Phải chăng sự hấp dẫn của số học là ở chỗ nhiều mệnh đề của nó được phát biểu rất đơn giản ai cũng hiểu được mà để chứng minh thì phải sử dụng những công cụ toán học hiện đại nhất, những kĩ thuật "cao cường" nhất ? Mặt khác, nhiều bạn trẻ chắc đã cảm nhận sự thích thú khó tả khi tìm ra được một cách giải đơn giản bất ngờ của một bài toán số học khó, tưởng chừng phải dùng đến các kiến thức cao siêu.

Trong bài báo này tôi muốn giới thiệu với các bạn mọi vẻ đẹp khác của số học thực hơn, trần tục hơn mà có lẽ ít bạn được biết tới. Đó là việc ứng dụng của số học vào một lĩnh vực rất quan trọng của đời sống : lĩnh vực bảo mật thông tin.

Hiện nay nhiều tổ chức quân sự, kinh tế, tài chính hay các cơ quan chính phủ khi truyền đi các tin tức tối mật của mình thường sử dụng một loại mật mã gọi là mật mã công khai viết tắt là RSA, do ba nhà khoa học Rivest, Shamir và Adleman đề xuất. Ưu điểm nổi bật của mật mã RSA là ở chỗ *không cần thiết phải giữ bí mật phương pháp mã hóa và giải mã cũng như chìa khóa mã hóa. Chỉ cần giữ bí mật chìa khóa giải mã là đủ*. Chính vì vậy mà mật mã RSA có tên gọi là mật mã khóa công khai (public key cryptography).

Thoạt nghe chắc các bạn khó hình dung ra một thứ mật mã như vậy. Mật mã RSA được xây dựng dựa trên một kết quả sơ cấp của số học và một sự kiện là rất khó phân tích một số lớn ra thừa số nguyên tố.

Giả sử ta cần chuyển đi một bức điện nào đó. Trước hết các chữ cái và các dấu ngắt câu được chuyển đổi thành các chữ số theo một "từ điển" tiêu chuẩn nào đó. Chẳng hạn theo từ điển ASCII (American Standard Code for Information Interchange) đang được sử dụng rộng rãi trong các mạng thông tin thì $a \to 097$, $g \to 071$, $u \to 117$, $! \to 033$ v.v...

Như vậy việc truyền đi một bức điện tương đương với việc truyền đi một dãy các chữ số. Dãy này được cắt thành một số các khối mỗi khối cho ta một con số. Tóm lại việc chuyển một bức điện có nghĩa là chuyển một dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$.

Để giữ bí mật thông tin ta biến đổi (mã hóa) mỗi số a thành số b theo cách sau.

Lấy hai số nguyên tố khá lớn p_1 và p_2 (có khoảng 100 chữ số) nhân chúng với nhau để được số $m = p_1p_2$. Chọn một số k nguyên tố với $\varphi(m)$ ở đó φ là hàm Ơle $\varphi(m) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)$

Số a được mã hóa thành số $b = a^k$ (modn). *Cặp số (m, k) gọi là chìa khóa mã hóa.*

Việc mã hóa số a (tức là tìm dư của a^k khi chia cho m) được thực hiện nhanh chóng và dễ dàng nhờ sử dụng thuật toán Ơclít chạy trên một chương trình mẫu.

Khi nhận được số b để tìm lại số a (giải mã) ta dựa trên nhận xét sau đây :

Nhận xét : Giả sử k' là số thỏa mãn $kk' \equiv 1$ (mod $\varphi(m)$). Khi đó $b^{k'} \equiv a$ (mod m)

Thật vậy ta có $b^{k'} \equiv a^{kk'}$ (mod m)

Xét $A = a^{kk'} - a = a(a^{kk'-1} - 1)$

Nếu $p_i \mid a$ thì $A \vdots\ p_i$. Nếu $p_i \not\vdots\ a$ thì $a^{kk'-1} - 1 \vdots\ a^{\varphi(m)} - 1 \vdots\ a^{p_i - 1} - 1 \vdots\ p_i$ (theo định lí Fecma nhỏ). Vậy ta luôn có $A \vdots\ p_i$ $(i = 1, 2)$. Vậy $a^{kk'} \equiv a$ (mod m) hay $b^{k'} \equiv a$ (mod m).

Như vậy để khôi phục lại số a ta chỉ cần tìm dư của $b^{k'}$ khi chia cho m *số k' gọi là chìa khóa giải mã.*

Giả sử đối phương của ta bắt được số b và muốn tìm lại số a. Đối phương cũng biết được chìa khóa mã hóa (m, k) và phương pháp mã hóa và giải mã (vì ta đã công khai hóa các thông tin này). Muốn có a đối phương phải xác định được số k' tức là phải biết $\varphi(m) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)$ hay cũng vậy, phải biết phân tích m ra thừa số nguyên tố. Tuy nhiên rất khó phân tích tiêu chuẩn một số lớn. Hiện tại sử dụng thuật toán tốt nhất và chạy trên máy tính nhanh nhất *phải cần tới hàng thế kỉ để phân tích một số có 100 chữ số ra thừa số nguyên tố* ! Thành thử trên thực tế đối phương hoàn toàn bó tay !

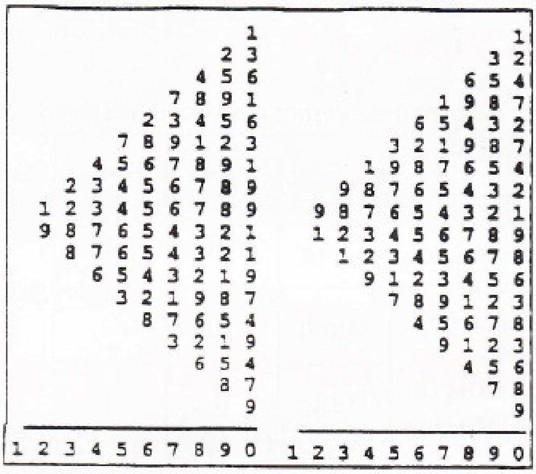
Do sự ra đời của mật mã khóa công khai RSA, nhiều nghiên cứu để tìm tòi các phương pháp phân tích tiêu chuẩn đang được tiến hành khẩn trương và được giữ bí mật.

Các bạn trẻ thân mến,

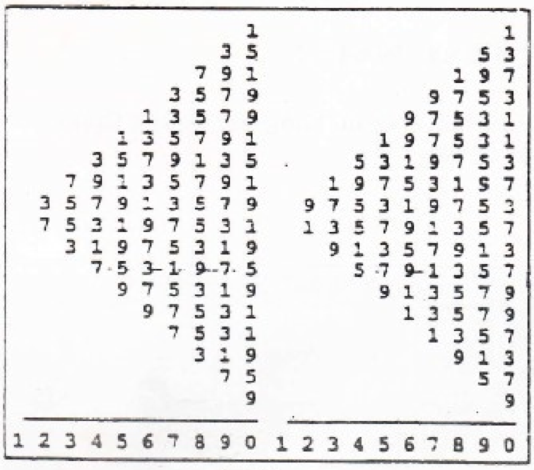
Qua ví dụ trên các bạn đã thấy rằng toán học nói chung và số học nói riêng không những đẹp mà còn rất có ích nữa.

SỰ KÌ LẠ TỪ CÁC CON SỐ

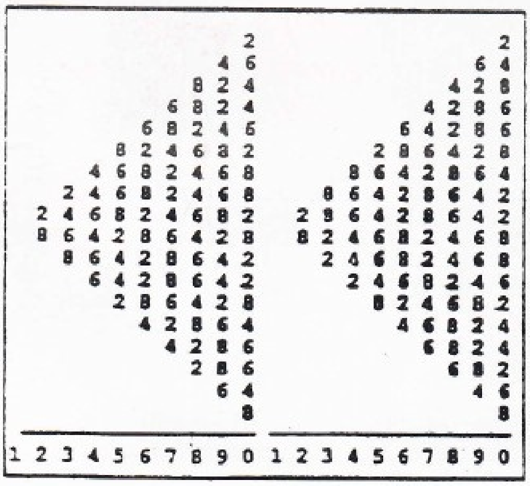
Dưới đây là các con số được tạo thành từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 theo hình tháp ở trật tự xuôi và ngược

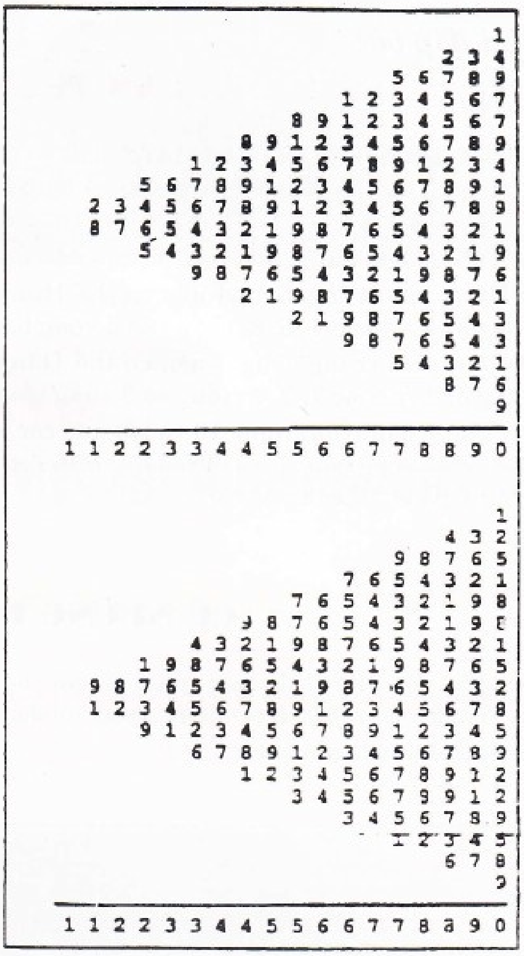


Với các số lẻ : 1 3 5 7 9

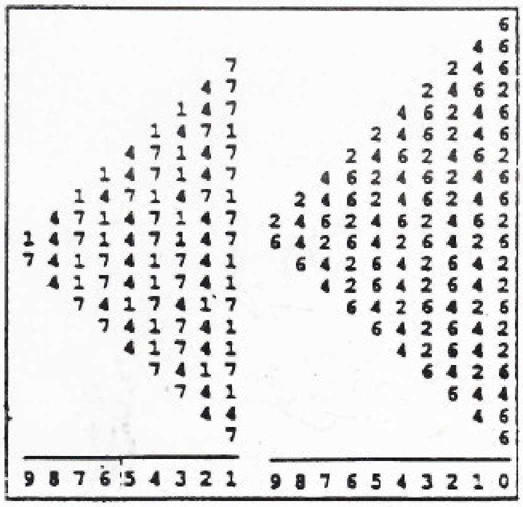


Với các số chẵn : 2 4 6 8





Hai hình tháp kì lạ



TUẤN THANH

Theo báo "Khoa học và đời sống" (Nga)

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài

AI BẮN TRÚNG VÒNG 10 ?

Vì có 9 phát bắn và cả 9 vòng bia đều được bắn trúng nên mỗi vòng bia từ 2 đến 10 chỉ có một phát trúng. Như vậy tổng số điểm của cả 3 người là

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 54.$$

và số điểm của mỗi người đạt được là $54 : 3 = 18$.

Vì Hùng bắn trúng vòng 4 nên có thể Hùng bắn trúng các vòng 5, 4, 9 hoặc 4, 6, 8. (Tổng số 3 vòng bằng 18).

Vì Dũng bắn trúng vòng 7 nên có thể Dũng bắn trúng các vòng 3, 8, 7 hoặc 7, 2, 9 (tổng số 3 vòng bằng 18).

Vậy Mạnh bắn trúng vòng 10 và kết quả các khả năng có thể được cho trong bảng bên. (Theo *Bùi Phú An*, $7T_1$ trường chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi).

	Mạnh	Hùng	Dũng
Dũng	3	8	7
Mạnh	10	6	2
Hùng	5	4	9

BÌNH PHƯƠNG

CÓ NHỮNG ĐA GIÁC NÀO ?

Bạn hãy tìm những đa giác (phẳng) sao cho ta có thể chia nó bằng các đường thẳng để được những đa giác con (nhỏ hơn) đồng dạng với đa giác đã cho.

Có bao nhiêu đa giác như vậy ?

VŨ HOÀNG THÁI

THÔNG BÁO VỀ CUỘC THI THƯỜNG NIÊN GIẢI TOÁN TRÊN TẠP CHÍ THVTT

Để đánh giá chính xác năng lực của các bạn dự thi theo từng lớp và cấp học, bắt đầu từ nay, các cuộc thi trên THVTT tính theo năm học.

Bài dự thi là bài giải các số tạp chí từ tháng 9 đến hết tháng 5 năm sau. Các bài giải đó được tính điểm và công bố kết quả dự thi vào dịp cuối năm hàng năm.

Ngoài ra bài giải các số khác vẫn nêu tên người giải tốt trên tạp chí. Các bạn tham gia giải bài cần ghi rõ lớp và tên trường, tên địa phương. Ngoài phong bì đề rõ giải bài của số tạp chí nào.

THVTT

ISSN : 0866 – 8035
Chỉ số 12884
Mã số : 8BT24M5

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục
In tại Xưởng in Nhà xuất bản Giáo dục
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12/ 1995.

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng