BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

11 (221)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

- CÁI HAY CỦA MỘT BÀI TOÁN NHỎ
- TẬP MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN
- SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ ĐỂ PHÁT HIỆN MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC
- DÙNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH

Học sinh lớp 9 toán trường Chuyên Nguyễn Khuyến, huyện Bình Lục, tỉnh Nam Hà

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : THANH LONG

Dành cho các bạn Trung học Cơ sở

CÁI HAY CỦA MỘT BÀI TOÁN NHỎ

TRẦN BÁ SĨ
(Thiệu Yên – Thanh Hóa)

Trong tập sách Toán (của Liên Xô) có bài toán sau "Trong tam giác ABC ($AB > AC$) có góc $A = \alpha$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Lấy điểm E là trung điểm AD, F trung điểm BC. Tính góc BEF ?". Nghiên cứu kĩ bài toán này bạn sẽ thấy có hai điều đáng chú ý sau :

Thứ nhất bài toán rất phong phú về lời giải.

Sau đây xin trình bày các lời giải đó.

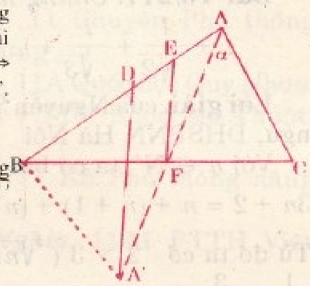
Cách 1

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua tâm F. Thế thì $ACA'B$ là hình bình hành $\Rightarrow AC \parallel BA' \Rightarrow AC = DB = BA'$.

$\Rightarrow \Delta DBA'$ cân.

Từ đó chú ý rằng $EF \parallel DA'$ và $\hat{A}$ bù góc $\widehat{ABA'}$

$\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BDA'} = \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$



Cách 2

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua tâm E. Thế thì $ACDC'$ hình bình hành $\Rightarrow AC \parallel DC'$ và $DB = DC' = AC$

$\Rightarrow \Delta DBC'$ cân

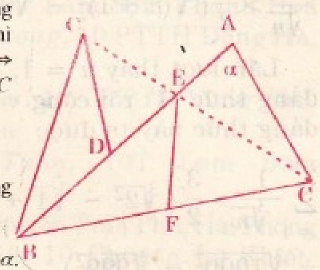
$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_2$

và $\hat{B}_1 + \hat{C}_2 = \widehat{C'DA}$ nhưng $\widehat{C'DA} = \hat{A}$ ($C'D \parallel AC$)

$\Rightarrow \hat{B}_1 = \dfrac{1}{2}\widehat{C'DA} = \dfrac{1}{2}\hat{A} = \dfrac{1}{2}\alpha.$

Chú ý trong $\Delta CBC'$ thì EF đường trung bình

$\Rightarrow EF \parallel BC' \Rightarrow \widehat{BEF} = \hat{B}_1 = \dfrac{\alpha}{2}$



Cách 3

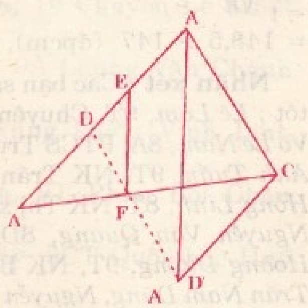
Gọi D' đối xứng với D qua tâm F.

Tứ giác $DBD'C$ hình bình hành

$\Rightarrow DB = AC = CD'$

$\Rightarrow \Delta ACD'$ cân.

Xét tương tự như cách 1 ta cũng có $\widehat{BEF} = \dfrac{\alpha}{2}$



Cách 4

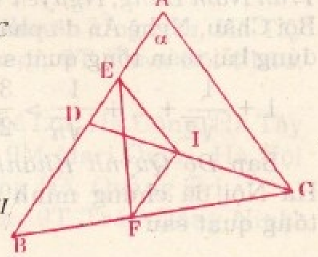
Nối DC gọi I trung điểm DC

Dễ thấy $EI \parallel \dfrac{1}{2} AC$

$FI \parallel \dfrac{1}{2} DB$

mà $AC = DB \Rightarrow EI = FI$

Do đó ΔEIF cân



$\Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{IFE}$

Dễ thấy $\hat{A}$ bù với $\widehat{EIF}$

$\Rightarrow \widehat{EFI} = \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

Chú ý $IF \parallel AB \Rightarrow \widehat{BEF} = \dfrac{\alpha}{2}$

Cách 5

Đặt $AC = b$; $AB = c$

Kẻ $FK \parallel AC \Rightarrow$

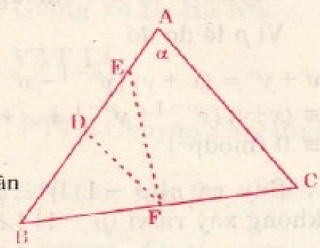
$FK = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{b}{2}$

$KE = BE - BK =$

$\dfrac{c+b}{2} - \dfrac{c}{2} = \dfrac{b}{2}$

$\Rightarrow KE = KF \Rightarrow \Delta FKE$ cân

$\Rightarrow \widehat{BEF} = \dfrac{\alpha}{2}$



Cách 6

Kẻ phân giác AK.

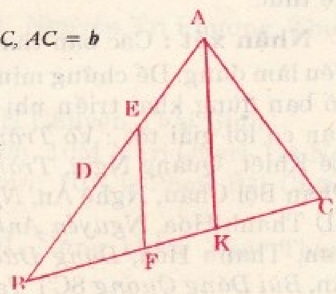
Đặt $BC = a$, $AB = C$, $AC = b$

Ta có : $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{c}{b}$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{KB + KC} = \dfrac{c}{c+b}$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{a} = \dfrac{c}{c+b}$

$\Rightarrow KB = \dfrac{ac}{c+b}$



Vậy $\dfrac{KB}{AB} = \dfrac{\dfrac{ac}{b+c}}{c} = \dfrac{a}{b+c}$ (1)

mặt khác $BE = b + \dfrac{c-b}{2} = \dfrac{b+c}{2}$ $BF = \dfrac{a}{2}$

vậy $\dfrac{BF}{BE} = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{b+c}{2}} = \dfrac{a}{b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{KB}{AB} = \dfrac{BF}{BE} \Rightarrow \Delta EBA \sim \Delta ABK$

$\Rightarrow \widehat{BEF} = \dfrac{\alpha}{2}$

Thứ hai, bài toán ta vừa giải ở trên là trường hợp đặc biệt của bài toán sau đây, mà có lẽ bạn học sinh nào cũng đã một lần gặp :

"Tứ giác $ABCD$ có $AD = BC$ gọi E, F lần lượt là trung điểm của DC và AB. EF cắt AD, BC kéo dài tại K và I. Chứng minh rằng $\widehat{AKF} = \widehat{BIF}$". Bài toán ta vừa giải là trường hợp của bài toán này khi A, D, C thẳng hàng. Cách giải của bài toán ta vừa nêu có phong phú như bài toán suy biến của nó không ? Điều này xin dành cho các bạn suy nghĩ.

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/217. *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm x, y nguyên thỏa mãn*

$$x^p + y^p = p(p-1)!^p.$$

Lời giải : (của các bạn *Đỗ Minh Châu* 9T, Đông Anh, Hà Nội, *Nguyễn Tiến Hòa* 7T, Bỉm Sơn, Thanh Hóa, *Trần Tấn Đạt* 8A Chu Văn An, Hà Nội

Giả sử tồn tại x, y thỏa mãn bài toán. Theo định lí nhỏ Fécma

$x + y \equiv x^p + y^p \pmod p$.

Suy ra $x + y \equiv 0 \pmod p \Rightarrow x \equiv -y \pmod p$

Vì p lẻ do đó

$$x^p + y^p = (x+y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + \dots - xy^{p-2} + y^{p-1})$$
$$\equiv (x+y)(y^{p-1} + y^{p-1} + \dots + y^{p-1}) = (x+y)py^{p-1}$$
$$\equiv 0 \pmod{p^2}$$

Suy ra $p[(p-1)!]^p \vdots\ p^2$. Song điều này không xảy ra vì $(p-1)! \not\vdots\ p$

Vậy không tìm được x, y nguyên thỏa mãn hệ thức.

Nhận xét : Các bạn tham gia giải bài này đều làm đúng. Để chứng minh $x^p + y^p \vdots\ p^2$ một số bạn dùng khai triển nhị thức Niutơn. Các bạn có lời giải tốt : *Võ Trần Nguyên Lộc* 9T, Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Trần Nam Dũng* 9CT Phan Bội Châu, Nghệ An, *Nguyễn Văn Quang* 8D Thanh Hóa, *Nguyễn Anh Tuấn* 6NK, Bỉm Sơn, Thanh Hóa, *Đặng Đức Hạnh* 9T, Nghệ An, *Bùi Đăng Quang* 8CT Tam Đảo, Vĩnh Phú, *Cao Quốc Hiệp* 9T Thanh Hóa, *Bùi Mạnh Hùng* 8H, PTCS Trưng Vương, Hà Nội.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/217. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình :*

$$3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$$

Lời giải. (dựa theo *Lê Hoàng Dương* – 9T. NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa). Nhân hai vế của phương trình đã cho với 2 rồi chuyển vế, được :

$$6x^2 + 6xy + 6y^2 - 2x - 16y = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 + 2(x^2 + 2xy + y^2) + 2\left(y^2 - 7y + \frac{49}{4}\right) + 3x^2 + y^2 - \frac{51}{2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x+y-1)^2 + 2(x+y)^2 + 2\left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + 3x^2 + y^2 = \frac{51}{2}$$

Do các số hạng ở vế trái đều không âm nên :

$3x^2 \leq \frac{51}{2}$ hay $x^2 \leq \frac{51}{6}$. Vậy $x \in [-2 ; 2]$.

Thay các giá trị có thể được vào phương trình đã cho, ta có các nghiệm (x, y) là $(0, 0)$ và $(1 ; 1)$.

Nhận xét. Lời giải tốt gồm có : *Lê Hoàng Dương* (9T NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa) ; *Nguyễn Thị Nhung* (9T NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa) ; *Nguyễn Quốc Thắng* (9CT Đông Anh, Hà Nội) ; *Nguyễn Thành Tâm* (9 toán, Lê Khiết, Quảng Ngãi) ; *Nguyễn Phạm Phương Thảo* (9I Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên – Huế) ; *Vũ Duy Thuần* (Hương Sơn, Lạng Giang, Hà Bắc)

ĐẶNG VIỄN

Bài T3/217. *Chứng minh rằng*

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{999}} > 147.$$

Lời giải. của Nguyễn Sỹ Phong, 9A, Chuyên ngữ, ĐHSPNN Hà Nội

Với $n \in \mathbf{N}^+$ ta có bất đẳng thức Côsi :

$$3n + 2 = n + (n+1) + (n+1) > 3\sqrt[3]{n(n+1)^2}$$

Từ đó ta có $2 > 3\left(\sqrt[3]{n(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^3}\right)$ hay

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}\right) \quad (1)$$

Lần lượt thay $n = 1, 2, 3, \dots, 999$ vào bất đẳng thức (1) rồi cộng vế với vế của 999 bất đẳng thức này ta được

$$\sum_{n=1}^{999} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2} + \dots + \sqrt[3]{1000^2} - \sqrt[3]{999^2}\right)$$

Ước lược vế phải ta đi đến

$$\sum_{n=1}^{999} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1000^2} - \sqrt[3]{1^2}\right) = \frac{3}{2} \cdot 99 =$$
$$= 148{,}5 > 147 \quad \text{(đpcm)}.$$

Nhận xét : Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Lê Lâm*, 9T, Chuyên Phú Thọ, Vĩnh Phú ; *Võ Lê Nam*, 8A, PTCS Trung Tự, Hà Nội ; *Đặng Anh Tuấn*, 9T, NK Trần Phú, Hải Phòng ; *Lê Hồng Linh*, 8T, NK Thị xã Ninh Bình. Các bạn *Nguyễn Văn Quang*, 8D, NK Thành phố, *Lê Hoàng Dương*, 9T, NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa ; *Trần Nam Dũng*, *Nguyễn Việt Dũng*, 9CT, Phan Bội Châu, Nghệ An đã phát biểu và chứng minh đúng bài toán tổng quát sau :

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - 1\right).$$

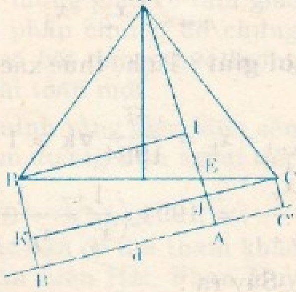
Bạn *Đỗ Quỳnh Khanh*, 9A, Chu Văn An, Hà Nội đã chứng minh được bất đẳng thức tổng quát sau :

$$1+\frac{1}{\sqrt[k]{2}}+\frac{1}{\sqrt[k]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[k]{n}} > \frac{k}{k-1}\left(\sqrt[k]{(n+1)^{k-1}}-1\right)$$

TỐ NGUYÊN

Bài T4/217 : *Cho tam giác đều ABC và một đường thẳng d. Gọi A', B', C' là chân đường vuông góc lần lượt hạ từ A, B, C xuống d. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

Lời giải :



• Xét hình vẽ có đường thẳng d không cắt cạnh của ΔABC. Gọi giao của AA' với BC là E. Kẻ $BI \perp AA'$, $CJ \perp AA'$. Kéo dài CJ cắt BB' tại K. Kẻ $AH \perp BC$. Gọi a là cạnh của tam giác đều ABC. Ta có : $\Delta BIE \backsim \Delta AHE$. Suy ra $BI = \dfrac{AH \cdot BE}{AE}$.

Tương tự $CK = \dfrac{BC \cdot AH}{AE}$ và $CJ = \dfrac{CE \cdot AH}{AE}$

nên $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = BI^2 + CK^2 + CJ^2$

$= \dfrac{AH^2}{AE^2}(BE^2 + BC^2 + CE^2)$ (1)

Mà $BE^2 + BC^2 + CE^2 =$

$= (BH + HE)^2 + BC^2 + (BH - HE)^2$

$= 2(BH^2 + HE^2) + BC^2$

$= 2(BH^2 + AE^2 - AH^2) + BC^2$

$= 2 \cdot \dfrac{a^2}{4} + 2AE^2 - 2\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 = 2AE^2$ (2)

Từ (2) và (1) ta có :

$A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = 2 \cdot \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{2}$

suy ra đpcm.

• Trường hợp d cắt cạnh ΔABC xét tương tự.

Nhận xét

1) Nhiều bạn giải bài này phải dùng đến lượng giác. Bạn *Đào Phương Bắc* đã giải bài này không cần dùng căn thức và lượng giác.

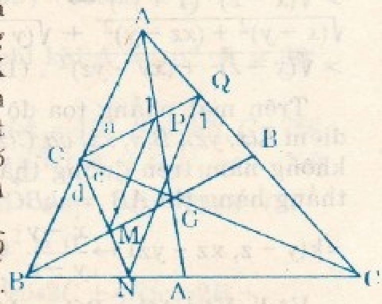
2. Giải tốt bài này có các bạn :

Bùi Đăng Quang, C2 chuyên Tam Đảo, Vĩnh Phú ; *Trần Quốc Tuấn*, 10T PTNK Hải Hưng ; *Đoàn Mạnh Hà*, 9A THCS Tiên Lãng, *Đặng Anh Tuấn*, 9CT PTTH Trần Phú, Hải Phòng ; *Bùi Mạnh Hùng*, 8H THCS Trưng Vương, *Đào Phương Bắc*, *Đào Phương Nam*, 7A THCS Bế Văn Đàn, *Nguyễn Sỹ Phong* 9A Chuyên ngữ ĐHSPNN, *Nguyễn Quốc Thắng* 9C, *Đỗ Minh Châu*, 9T Đông Anh, Hà Nội, *Mai Ngọc Kha*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, *Cao Quốc Hiệp*, 9T NK Hoằng Hóa, *Mai Thịnh Hiệp* 9B, Nga Hải, Nga Sơn, Thanh Hóa ; *Trần Nam Dũng*, *Nguyễn Việt Dũng*, *Nguyễn Thịnh*, 9T Phan Bội Châu, Nghệ An, *Lương Hữu Khoa Luật*, đội 3, Hiệp Phổ Bắc, Hành Trung, Nghĩa Hành, *Lê Quang Nẩm*, 9T Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi, *Trần Hữu Nhơn*, 9T Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/217. *Cho tam giác ABC với các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1, đường phân giác trong của góc AC_1C cắt AA_1 và AC tại P và Q. Đường phân giác trong của góc BC_1C cắt BB_1 và BC tại M và N. Chứng minh rằng nếu AP = AQ thì ta có BM = BN.*

Lời giải. (dựa theo *Trần Long Trọng* – 7 toán – NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa) Từ giả thiết $AP = AQ$, ta có ΔAPQ cân đỉnh A hay $\widehat{APQ} = \widehat{AQP}$ nên $\widehat{P}_1 = 180^\circ - \widehat{APQ} = 180^\circ - \widehat{AQP} = \widehat{Q}_1$. Hơn nữa $\widehat{C}_{1a} = \widehat{C}_{1b}$ nên



$\Delta APC_1 \backsim \Delta CQC_1$, và ta có :

$\dfrac{C_1P}{C_1Q} = \dfrac{AC_1}{C_1C}$ (1)

Từ các đường phân giác trong C_1Q, C_1N ta lại có :

$\dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AC_1}{C_1C} = \dfrac{BC_1}{C_1C} = \dfrac{BN}{NC}$,

nên $QN \,//\, AB$. Tương tự, ta cũng có $PM \,//\, AB$ và suy ra $\dfrac{C_1P}{C_1Q} = \dfrac{C_1M}{C_1N}$ (2)

Kết hợp (2) với (1), ta có $\dfrac{C_1M}{C_1N} = \dfrac{AC_1}{C_1C} = \dfrac{C_1B}{C_1C}$. Hơn nữa, $\widehat{C}_{1c} = \widehat{C}_{1d}$ nên $\Delta BC_1M \backsim \Delta CC_1N$, suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$. Mà các góc đáy của ΔBMN tương ứng bù với $\widehat{M}_1$, $\widehat{N}_1$ nên bằng nhau, hay ΔBMN cân. Vậy, $BM = BN$.

Nhận xét : có 103 bài giải, đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Trần Long Trọng* (7 toán, NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa) ; *Lê Quang Nẫm* (9T chuyên Đức Phổ, Quãng Ngãi) ; *Mai Thị Thủy* (9B – NK Nga Sơn, Thanh Hóa), *Nguyễn Thịnh* (9T Phan Bội Châu, Nghệ An), *Nguyễn Tuấn Anh* (9 toán, Chuyên Phan Chu Trinh, BMT Dak Lak), *Đỗ Minh Châu* (9T, trường chuyên Đông Anh, Hà Nội).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/217. *Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực đôi một khác nhau thì*

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}+\frac{|y-z|}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+z^2}}>\frac{|x-z|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+z^2}}$$

Lời giải : Cách 1 (Của bạn *Nguyễn Ngọc Hà*, 11A Mê Linh – Vĩnh Phú) *Đinh Trung Hàng* (11M Mari Quyri, Hà Nội)

Bất đẳng thức tương đương với :

$$\sqrt{(x-y)^2(1+z^2)}+\sqrt{(y-z)^2(1+x^2)}>\sqrt{(x-z)^2(1+y^2)} \leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-y)^2+(xz-y)^2}+\sqrt{(y-z)^2+(xy-xz)^2}>\sqrt{(x-z)^2+(xy-yz)^2}\ .\ (1)$$

Trên mặt phẳng tọa độ Đề các ta lấy các điểm $A(x, yz)$, $B(y, xz)$ và $C(z, xy)$. Ba điểm này không nằm trên đường thẳng vì nếu A, B, C thẳng hàng thì $AB = kBC \rightarrow (x-y, yz-xz) = k(y-z, xz-yz) \leftrightarrow \frac{x-y}{y-z}=\frac{z(y-x)}{z(x-y)} \rightarrow x = z$

Vô lí. Vậy $AB + BC > AC \leftrightarrow (1)$

Cách 2 (Của bạn *Nguyễn Tiến Hòa*, 7T Bỉm Sơn, *Cao Thế Anh* 10CT Quốc học Huế, *Ngô Đức Duy* 12CT Hải Phòng)

(*Phan Linh*, 9A Chuyên Ngữ ĐHSP Hà Nội)

Đặt $x = tg\alpha$, $y = tg\beta$, $z = tg\gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ khi đó ta thấy cần chứng minh

$$\frac{|tg\alpha-tg\beta|}{\sqrt{1+tg^2\alpha}\sqrt{1+tg^2\beta}}+\frac{|tg\beta-tg\gamma|}{\sqrt{1+tg^2\beta}\sqrt{1+tg^2\gamma}}>\frac{|tg\alpha-tg\gamma|}{\sqrt{1+tg^2\alpha}\sqrt{1+tg^2\gamma}}$$

$\leftrightarrow |\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| > |\sin(\alpha-\gamma)|$

Thật vậy $|\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| >$

$|\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)| + |\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)|$

$\geqslant |\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma) + \sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)|$

$= |\sin(\alpha-\beta)|$ (đpcm).

Nhận xét : Bài này được rất đông các bạn tham gia giải. Nhiều bạn giải bằng hai cách. BĐT (1) trong cách 1 có thể chứng minh bằng cách sử dụng BĐT Bunhiacopski

$$\sqrt{(a+c^2)+(b+d)^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/217 : *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *được xác định bởi* $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1994} + x_n$ *với mọi* $n \geqslant 1$.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$

Lời giải : Từ hệ thức xác định dãy $\{x_n\}$ ta có :

$$x_{k+1} - x_k = \frac{x_k^2}{1994}\ \forall k \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$1994\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k}\right)=x_k$

$$\frac{x_k}{x_{k+1}} = 1994\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right)\ \forall k \geqslant 1$$

$1994\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right)=\frac{x_k}{x_{k+1}}$

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\dots+ = 1994\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\dots+\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right)$

Suy ra :

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n+1}} = 1994\ .\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}\right) = 1994\left(1-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$$

Mặt khác, cũng từ hệ thức xác định dãy $\{x_n\}$ dễ thấy $1 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$. Giả sử dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ là dãy hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ta có $a \geqslant 1$ và

$a = \frac{a^2}{1994} + a \Leftrightarrow a = 0$. Mâu thuẫn vừa nhận được cho thấy dãy tăng $\{x_n\}$ không bị chặn trên, và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Suy ra

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0$ (2).

$\forall M>0\ \exists n_0>0:$ $n \geq N$ $x_n > M$

$\Rightarrow \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$

Từ (1) và (2) suy ra

$\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ và

$1994\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_{x+1}}\right) = 1994$

$\frac{1994}{a}$

Nhận xét : 1. Hầu hết các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn đều giải bài toán theo cách của lời giải trên. Không ít bạn cho lời giải thiếu chính xác, do các bạn đã vội kết luận $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ khi mới chỉ chứng minh được dãy $\{x_n\}$ là dãy tăng !

2. Danh sách các bạn có lời giải tốt : *Đoàn Trung Sơn, Phạm Đình Trường, Ngô Đức Duy*

(10CT và 11CT PTTHNK Trần Phú, Hải Phòng) ; *Nguyễn Minh Tuấn* ($12A_1$ PTTH Chu Văn An, Hà Nội), *Phan Linh, Nguyễn Sĩ Phong, Nguyễn Vũ Hưng* (9A, 11D PT Chuyên Ngữ ĐHSPNN Hà Nội), *Trần Tiến Dũng* (10T PTTH Amsterđam Hà Nội), *Đặng Thanh Hà* (12CT ĐHSPHN1), *Lương Tuấn Anh* (12A PTCT ĐHTH Hà Nội) ; *Đinh Trung Hàng* (11M PTDL Marie Curie Hà Nội) ; *Lê Văn Mạnh* (12CT PTTH Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình) ; *Nguyễn Quang Nguyên* (10A PTTH Nguyễn Huệ, Hà Tây) ; *Nguyễn Ngọc Hưng, Lê Minh Hiếu, Phạm Minh Tuấn* (10T, 11T, 12T Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Nguyễn Xuân Sơn* (10T Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Trương Vĩnh Lân, Phan Duy Hùng* (10CT, 11CT Đào Duy Từ, Quảng Bình) ; *Cao Thế Anh, Lê Minh Trường, Nguyễn Thị Hải Yến, Lê Anh Vũ* (10CT, $11A_5$, 11CT, 12CT Quốc học Huế) ; *Trịnh Ái Quốc* (12T Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên) ; *Lê Quang Nẫm* (10CT ĐHTH Thành phố Hồ Chí Minh) ; *Nguyễn Nhật Nam* ($11A_1$ Trường Vũng Tàu, Bà Rịa – Vũng Tàu) ; *Võ Chí Hòa* (11CT PTTH Buôn Ma Thuột, Đaklak) ; *Lăng Lâm Huy Hoàng* ($12A_1$ PTTH Bạc Liêu, Minh Hải)

3. Bạn *Lương Tuấn Anh* (12A ĐHTH Hà Nội) đã đề xuất và giải đúng Bài toán sau : *"Cho hai số thực a, b thỏa mãn ab > 0. Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{b} + x_n$ $\forall n \geq 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}}$.*

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/267 *Tìm tất cả các đa thức P(x) thỏa mãn điều kiện*

$$P(x)P(y) = P^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - P^2\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$\forall x, y \in \mathbf{R}$. (*)

Lời giải (*Nguyễn Tuấn Dũng*, Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, *Vũ Duy Tuấn*, Hương Sơn, Lạng Giang, Hà Bắc)

Nhận xét rằng $P(x) \equiv 0$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Xét trường hợp $P(x) \not\equiv 0$. Thay $x = 0$, $y = 0$ vào (*) ta được $P(0) = 0$. Với $y = 3x$ thì từ (*), thu được :

$$P(x)P(3x) = P^2(2x) - P^2(-x)$$

hay $P(x)P(3x) + P^2(-x) = P^2(2x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ (**)

$P(x) = c$ $\forall x$ $(c \neq 0)$ không thỏa mãn (**)

Xét trường hợp $dy\, P(x) = n \geq 1$. Gọi hệ số cao nhất của $P(x)$ là a_o $(a_o \neq 0)$ thì từ (**), ta có :

$$a_o(3^n a_o) + a_o^2 = (2^n a_o)^2$$

$$\Leftrightarrow 3^n + 1 = 4^n \Leftrightarrow n = 1$$

Vậy $P(x) = a_o x$, $a_o \in \mathbf{R}$, $a_o \neq 0$.

Nhận xét rằng đa thức bậc nhất này thỏa mãn điều kiện (*).

Kết luận :

$P(x) = ax$, $a \in \mathbf{R}$.

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Lương Tuấn Anh, Vũ Đức Minh, Đinh Trung Hàng* (Hà Nội) *Vũ Duy Tuấn* (Long Giang, Hà Bắc, *Hoàng Xuân Bách, Trương Xuân Thung, Nguyễn Xuân Sơn* (Phan Bội Châu, Nghệ An), *Trần Công Cường* (Thái Bình); *Trần Anh Tuấn, Nguyễn Văn Duy* (Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); *Võ Quốc Hùng, Nguyễn Chí Linh* (Lê Khiết, Quảng Ngãi); *Phạm Đình Trường* (Trần Phú, Hải Phòng); *Lê Minh Hiếu* (Lạng Sơn, Thanh Hóa) ; *Nguyễn Thị Hải Yến, Cao Thế Anh* (QH Huế) ; *Trương Trọng Khánh* (11CT Vĩnh Lạc, Vĩnh Phú) ; *Nguyễn Giang Nguyên* (Nguyễn Huệ, Hà Tây)

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/217 *Cho tam giác ABC có* $tg\frac{A}{4}, tg\frac{B}{4}$, *là nghiệm của* $x^2 + a_1x + b_1 = 0$, $tg\frac{B}{4}, tg\frac{C}{4}$ *là nghiệm của* $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ *và* $tg\frac{C}{4}, tg\frac{A}{4}$ *là nghiệm của* $x^2 + a_3x + b_3 = 0$. *Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu :*

$$(1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3) = 5616 - 3240\sqrt{3}.$$

Lời giải. Theo giả thiết, ta có :

$$x^2 + a_1x + b_1 = \left(x - tg\frac{A}{4}\right)\left(x - tg\frac{B}{4}\right);$$

$$x^2 + a_2x + b_2 = \left(x - tg\frac{B}{4}\right)\left(x - tg\frac{C}{4}\right);\ (1)$$

$$x^2 + a_3x + b_3 = \left(x - tg\frac{C}{4}\right)\left(x - tg\frac{A}{4}\right);$$

Cho x = –1, ta được :

$$(1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3) = \left(1 + tg\frac{A}{4}\right)^2\left(1 + tg\frac{B}{4}\right)^2\left(1 + tg\frac{C}{4}\right)^2$$

$$= \left[2\left(1 + tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4}\right)\right]^2;\ (2)$$

(Suy từ : $tg\frac{A}{4} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B+C}{4}\right)$)

$$= \frac{1 - tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4} - tg\frac{B}{4} - tg\frac{C}{4}}{1 - tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4} + tg\frac{B}{4} + tg\frac{C}{4}}$$

Từ : $tg\frac{A}{4} + tg\frac{B}{4} + tg\frac{C}{4} + tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4} + tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4} +$

$+ tg\frac{C}{4}tg\frac{A}{4} = 1 + tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4}$ (3)

áp dụng BĐT Côsi đối với ba số, ta được :

$$1 + tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4} \geq 3\sqrt[3]{tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4}} + 3\sqrt[3]{\left(tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4}\right)^2}$$

Đặt $x^3 = tg\frac{A}{4}tg\frac{B}{4}tg\frac{C}{4}$ thì $0 < x < 1$ và ta được :

$$1 + x^3 \geq 3x + 3x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 \geq 0$$

Các nghiệm của bất phương trình này là $x \leq 2 - \sqrt{3}$ và $x \geq 2 + \sqrt{3}$. Vì $0 < x < 1$ nên $x \leq 2 - \sqrt{3}$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi : $tg\frac{A}{4} = tg\frac{B}{4} = tg\frac{C}{4} = 2 - \sqrt{3}$

Vậy :

$$(1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3) \leq (54 - 30\sqrt{3})^2 = 5616 - 3240\sqrt{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là đều.

Nhận xét : 1°) Để giải bài toán trên đây, chỉ đòi hỏi vận dụng định lí (công thức) Viét và sử dụng BĐT Côsi đối với ba số. Tuy nhiên, tuyệt đại đa số các bạn không biết phân tích các tam thức bậc hai $x^2 + a_i x + b_i$ ($i = 1, 2, 3$) ra thành tích các nhị thức bậc nhất (1), do đó phải biến đổi dài dòng mới thu được hệ thức (2).

2°) Một số bạn phải qua biến đổi lượng giác quá phức tạp mới thu được (3) vì không biết sử dụng công thức tg($a \pm b$).

3°) Có một số ít bạn không sử dụng BĐT Côsi mà chuyển qua khảo sát hàm số nên lời giải cũng cồng kềnh.

4°) Bạn *Nguyễn Minh Tuấn*, 12A$_1$ PTTH Chu Văn An, Hà Nội có lời giải tốt hơn cả, gần giống với lời giải trình bày ở trên, tuy không thiết lập các hệ thức (1).

Ngoài ra, đặc biệt bạn *Đào Duy An*, PTTH Lê Quý Đôn, Quảng Nam – Đà Nẵng, đã đề xuất và giải đúng bài toán tổng quát, bằng cách thay $tg\frac{A}{4}, tg\frac{B}{4}, tg\frac{C}{4}$ bởi $tg\frac{A}{2^n}, tg\frac{B}{2^n}, tg\frac{C}{2^n}$ ($n \geq 2$). Bạn An đã thu được kết quả sau đây :

Tam giác *ABC* là đều khi và chỉ khi :

$$(1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3) = \left(1 + tg\frac{\pi}{3.2^n}\right)^6$$

Khi $n = 2$, ta thu được kết quả như đã nêu trong bài toán ở trên.

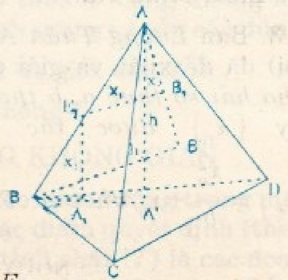
NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/217 *Tứ diện ABCD có độ dài các đường cao là h_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Các mặt phân giác của các nhị diện (của tứ diện) cắt các cạnh đối tương ứng ở các điểm E_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Gọi x_i là khoảng cách từ E_i đến hai mặt bên không chứa E_i. Chứng minh :*

$$\frac{384}{\left(\sum_{i=1}^{4} h_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{x_i^2} \leq 6\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2}\right) \quad (*)$$

Khi nào xảy ra các dấu đẳng thức ?

Lời giải. Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 là độ dài các đường cao của tứ diện lần lượt hạ từ các đỉnh *A, B, C, D* ; S_i là diện tích của mặt ứng với đường cao h_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Giả sử $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ lần lượt thuộc các cạnh *AB, AC, AD, BC, BD, CD* và *V* là thể tích tứ diện. Ta có các hệ thức sau :



$$3V = (S_1 + S_2)x_1 = (S_1 + S_3)x_2 = (S_1 + S_4)x_3 = (S_2 + S_3)x_4 = (S_2 + S_4)x_5 = (S_3 + S_4)x_6 = S_i h_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \ (**)$$

Từ đó ta được : $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$ (1)

và 5 hệ thức tương tự.

Suy ra : $\frac{1}{x_1^2} = \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)^2 \leq 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)$

và 5 hệ thức tương tự. Từ đó, thu được BĐT sau :

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{x_i^2} \leq 6\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2}\right) \quad (2)$$

Mặt khác, ta có :

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_6^2}=\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)^2+\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i}\right)^2$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{16}{\sum_{i=1}^{4} h_i}\right)^2 = \frac{128}{\left(\sum_{i=1}^{4} h_i\right)^2},$$

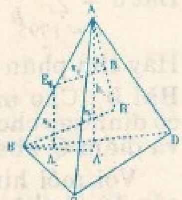
và hai hệ thức tương tự. Cộng vế đối vế ba hệ thức này, ta thu được BĐT sau :

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{x_i^2} \geqslant 3\frac{128}{\left(\sum_{i=1}^{4} h_i\right)^2} = \frac{384}{\left(\sum_{i=1}^{4} h_i\right)^2} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được bất đẳng thức kép (*) cần chứng minh.

Dấu đẳng thức trong (*) xảy ra khi và chỉ khi $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \Leftrightarrow$ tứ diện là gần đều.

Nhận xét : 1°) Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng *phương pháp thể tích*, thiết lập các hệ thức (**) liên quan giữa thể tích V, diện tích S_i các mặt, chiều cao h_i các đường cao của tứ diện $ABCD$ với các khoảng cách x_i $(i = \overline{1,6})$. Tuy nhiên, có thể thiết lập hệ thức (1) và những hệ thức tương tự một cách trực tiếp, không sử dụng phương pháp thể tích. Thật vậy, ta có (xem hình vẽ) :



$$\frac{E_1A_1}{AA'}+\frac{E_1B_1}{BB'}=\frac{E_1B}{AB}+\frac{AE_1}{AB}=1, \text{ nghĩa là :}$$

$$\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_1}{h_2}=1 \Rightarrow \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}=\frac{1}{x_1}$$

2°) Chúng ta đã sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc (BĐT Côsi và Bunhiacốpski) sau đây :

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \quad (\forall\ a, b)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} h_i\right) \geqslant 16$$

3°) Nhiều bạn tham gia giải bài toán trên đây và đã cho lời giải đúng, nhưng nhìn chung lời giải còn rườm rà, cồng kềnh vì không biết chuyển từ (**) về thẳng (1) và thường thiết lập các BĐT liên quan giữa V và các S_i, cuối cùng mới trở lại BĐT cần chứng minh liên quan giữa x_i và h_i.

4°) Rất tiếc, một số bạn không đọc kĩ đầu bài nên không xét trường hợp xảy ra các đẳng thức (mà dù cho đầu bài không đặt ra thì vẫn phải xét). Cũng có một số bạn không chỉ ra được tính chất của tứ diện có các đường cao bằng nhau là *tứ diện gần đều*, thậm chí có bạn lại kết luận sai là tứ diện đều !

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/217. *Hai quả cầu, khối lượng m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một lò xo có chiều dài tự nhiên là l và độ cứng là k. Hệ vật được đặt trên một mặt bàn nằm ngang và nhẵn. Người ta kéo dãn lò xo bằng cách kéo hai quả cầu ra xa nhau, sau đó thả đồng thời hai quả cầu. Hãy xác định tần số dao động của hệ.*

Hướng dẫn giải. Gọi độ dãn của lò xo là x, xét lực tác dụng lên mỗi quả cầu và áp dụng định luật II Niutơn, rút ra được phương trình (vi phân) của dao động ; từ đó suy ra

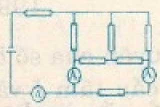
$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{h(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$$

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng : *Nguyễn Quang Trường* 11CL, trường Phan Bội Châu, Vinh (Nghệ An), *Phạm Quang Hưng* và *Nguyễn Hồng Minh*, PTTH chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú.

OK

Bài L2/217. *Cho sơ đồ mạch điện như hình vẽ. Các điện trở mạch ngoài đều bằng R_o, điện trở của các ampe kế không đáng kể. Biết rằng ampe kế A_1 chỉ 0,5A.*

1. Xác định số chỉ của ampe kế A_2 và A.



2. Nguồn có điện trở trong $r = \frac{R_o}{2}$. Tính hiệu suất của nguồn.

Hướng dẫn giải. Vẽ lại mạch điện, áp dụng định luật Ôm đã tìm các dòng điện chạy qua các điện trở và qua các ampe kế. Kết quả tìm được :

$$I_A = 2(A)\ ;\ I_{A2} = 1{,}5(A)\ ;\ H = 75\%$$

Nhận xét : Các em có lời giải tốt : *Đỗ Ngọc Thắng*, 11A$_2$, PTTH chuyên Lí Tự Trọng Cần thơ, *Hồ Văn Hữu*, 11A$_2$, PTTH Lê Quý Đôn Đà Nẵng, *Nguyễn Hồng Minh* 11CT PTTH chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú, *Nguyễn Minh Tâm*, 11T Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, *Trần Thị Quỳnh Liên*, 10L, trường Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An, *Nguyễn Thanh Long*, 10L, trường chuyên Quảng Bình ; *Phạm Quốc Bảo*, 11A, TH chuyên Kontum ; *Phan Đình Vinh* 9A THCS Minh Phương, Việt Trì, Vĩnh Phú, *Đinh Thị Thanh Hải*, 9NK Nam Đàn, Nghệ An ; *Lê Trần Thế Dung*, 10L, trường chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi.

MT

CÁC BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI TOÁN THPT TOÀN QUỐC NĂM 1995

(Bảng B)

I. Đề thi :

Ngày thứ nhất (02-3-1995) :

Bài 1 : Cho đường tròn tâm I bán kính $R > 0$ và một điểm A cố định trên đường tròn. Xét các dây cung BC của đường tròn thỏa mãn điều kiện :

$AB^2 + AC^2 - BC^2 = k$, với k là số cho trước.

Tìm quỹ tích các trung điểm M của BC (biện luận hình dạng quĩ tích theo k và R).

Bài 2 : Giải phương trình :

$2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0$

Bài 3 : Dãy số $\{a_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, được xác định như sau : $a_o = 2$ và $a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 - 96}$ với mọi $n = 0, 1, 2 ...$

1) Tìm công thức của số hạng tổng quát a_n theo n.

2) Chứng minh rằng : $a_n \geq 2.5^n$ với mọi $n \in \mathbf{N}$.

Ngày thứ hai (03-3-1995) :

Bài 4 : Cho số nguyên n với $2000 \leq n \leq 2095$.

Đặt $a = \sum_{k=1995}^{n} \frac{1}{k}$ và $b = \frac{n+1}{1995}$

Hãy tìm phần nguyên của số $b^{1/a}$

Bài 5 : Cho mặt cầu tâm I và hai điểm P, Q cố định sao cho điểm P nằm bên trong mặt cầu và điểm Q khác điểm I.

Với mỗi hình tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu đó và nhận P làm trọng tâm, gọi A' là hình chiếu vuông góc của điểm Q trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại A.

Chứng minh rằng trọng tâm của các hình tứ diện $A'BCD$ luôn nằm trên một mặt cầu cố định.

Bài 6 : Hỏi từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) Trong mỗi số, mỗi chữ số có mặt đúng 2 lần.

2) Trong mỗi số, hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.

II. Lời giải, Hướng dẫn giải.

Bài 1 (Lời giải tóm tắt. *Bạn đọc tự vẽ hình*) : Gọi J là trung điểm của AI. Ta có :

$AB^2 + AC^2 - BC^2 = k \Leftrightarrow 2AM^2 - \frac{BC^2}{2} = k \Leftrightarrow$

$2(AM^2 - BM^2) = k \Leftrightarrow AM^2 + IM^2 - R^2 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow$

$2JM^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{k}{2} \Leftrightarrow JM^2 = \frac{1}{4}\left(R^2 + k\right).$

Suy ra : M là điểm thỏa mãn các điều kiện của đề bài $\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ nằm trong đường tròn } (I, R) \\ JM^2 = \frac{1}{4}(R^2 + K) \quad (1) \end{cases}$

Vì vậy : • Nếu $k < -R^2$ thì quĩ tích cần tìm là tập điểm rỗng.

• Nếu $k = -R^2$ thì quĩ tích cần tìm là tập gồm duy nhất điểm J.

• Nếu $k > -R^2$ thì : (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ nằm trong đường tròn } (I, R) \\ M \in \text{đường tròn } (J, R), \text{ với } r = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + k} \end{cases}$

Từ đó dễ thấy :

+ Nếu $k \geq 8R^2$ ($\Leftrightarrow r \geq \frac{3}{2}R$) thì quĩ tích cần tìm là tập điểm rỗng.

+ Nếu $0 < k < 8R^2$ ($\Leftrightarrow \frac{R}{2} < r < \frac{3}{2}R$) thì quĩ tích cần tìm là cung tròn $\overset{\frown}{EDF}$ của đường tròn (J, r) bỏ đi hai điểm E, F ; ở đây : E, F là các giao điểm của đường tròn (J, r) với đường tròn (I, R) còn D là giao điểm của đường tròn (J, r) với tia AI.

+ Nếu $k = 0$ ($\Leftrightarrow r = \frac{R}{2}$) thì quĩ tích cần tìm là đường tròn (J, r) bỏ đi điểm A.

+ Nếu $-R^2 < k < 0$ ($\Leftrightarrow r < \frac{R}{2}$) thì quĩ tích cần tìm là đường tròn (J, r).

Bài 2 : Điều kiện có nghĩa : $x \in \mathbf{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{4x-4} = t$ (2). Khi đó : $x = \frac{t^3+4}{4}$ và $x^2 = \frac{t^6 + 8t^3 + 16}{16}$

Từ phương trình đã cho ta có phương trình (ẩn t) :

$\frac{1}{8}(t^6 + 8t^3 + 16) - \frac{11}{4}(t^3 + 4) + 21 - 3t = 0$

$\Leftrightarrow t^6 - 14t^3 - 24t + 96 = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)^2(t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 18t + 24) = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)^2[(t^2 + 2t)^2 + 8t^2 + 18t + 24] = 0$ (3)

Dễ thấy, $8t^2 + 18t + 24 > 0$ $\forall t$. Do đó :

(3) $\Leftrightarrow (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (4)

Thay (4) vào (2) ta được : $\sqrt[3]{4x-4} = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 3$.

Bài 3 : 1) Với mọi $n \in \mathbf{N}$ ta có :

$a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 - 96} \Leftrightarrow$

$(a_{n+1} - 5a_n)^2 = 24a_n^2 - 96$

$\Leftrightarrow a_n^2 - 10a_{n+1} \cdot a_n + a_{n+1}^2 + 96 = 0$ (5)

Từ (5) lại có :

$a_{n+2}^2 - 10a_{n+1} \cdot a_{n+2} + a_{n+1}^2 + 96 = 0$

$\forall n \in \mathbf{N}$ (6).

Dễ thấy, dãy $\{a_n\}$ là dãy tăng thực sự. Vì vậy, từ (5), (6) suy ra $\forall n \in \mathbf{N}$ ta luôn có $\{a_n, a_{n+2}\}$ là tập nghiệm của phương trình (ẩn t) : $t^2 - 10a_{n+1} . t + a_{n+1}^2 + 96 = 0$. Do đó, theo định lí Vi-et, ta có $a_{n+2} + a_n = 10a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ hay

$a_{n+2} - 10a_{n+1} + a_n = 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Suy ra, dãy $\{a_n\}$ có phương trình đặc trưng :

$x^2 - 10x + 1 = 0$

Dễ thấy, phương trình trên có tất cả 2 nghiệm là $x_1 = 5 - 2\sqrt{6}$ và $x_2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Từ đó, $a_n = C_1(5 - 2\sqrt{6})^n + C_2(5 + 2\sqrt{6})^n$. Cho $n = 0$ và $n = 1$ ta được :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ (5 - 2\sqrt{6})C_1 + (5 + 2\sqrt{6})C_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$C_1 = C_2 = 1$. Vậy số hạng tổng quát a_n của dãy $\{a_n\}$ là :

$a_n = (5 - 2\sqrt{6})^n + (5 + 2\sqrt{6})^n$

2) Chứng minh bằng phương pháp qui nạp theo n. Với $n = 0$, có $a_0 = 2 = 2.5^0$ Giả sử đã có bất đẳng thức cần chứng minh với $n = k$. Khi đó

$a_{k+1} = 5a_k + \sqrt{24a_k^2 - 96} \geqslant 5a_k \geqslant 2 . 5^{k-1}$,

nghĩa là ta cũng có bất đẳng thức cần chứng minh với $n = k + 1$.

Vậy, theo nguyên lí qui nạp, $a_n \geqslant 2 . 5^n \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Bài 4 : Đặt $n = 1995 + m$, với $5 \leqslant m \leqslant 100$. Khi đó :

$$a = \sum_{k=1995}^{1995+m} \frac{1}{k} \text{ và } \quad b = 1 + \frac{m+1}{1995}.$$

Dễ thấy : $\dfrac{m+1}{1995+m} < a < \dfrac{m+1}{1995}$

Suy ra : $\dfrac{1995}{m+1} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1995+m}{m+1}$. Do đó, theo tính chất của hàm mũ và theo bất đẳng thức Becnuli, ta có :

$$b^{1/a} > \left(1+\frac{m+1}{1995}\right)^{\frac{1995}{m+1}} > 1+\frac{m+1}{1995} . \frac{1995}{m+1} = 2 \quad (7)$$

$$\text{và : } b^{1/a} < \left(1 + \frac{m+1}{1995}\right)^{\frac{1995+m}{m+1}} <$$

$$< \left(1 + \frac{m+1}{1995}\right)\left(1 + \frac{m+1}{1995}\right)^{\frac{1995}{m+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{101}{1995}\right)\left(1 + \frac{m+1}{1995}\right)^{\frac{1995}{m+1}} <$$

$$< 1{,}06 . \left(1 + \frac{m+1}{1995}\right)^{\frac{1995}{m+1}} \quad (8)$$

Vì hàm số $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ là hàm tăng thực sự trên $(0, +\infty)$ và đồng thời $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e$ nên

$f\left(\dfrac{1995}{m+1}\right) = \left(1 + \dfrac{m+1}{1995}\right)^{\frac{1995}{m+1}} < e$. Kết hợp với (8) suy ra :

$b^{1/a} < 1{,}06 \times e < 1{,}06 \times 2{,}8 < 3$ (9)

Từ (7) và (9) ta được : $[b^{1/a}] = 2$.

Bài 5 (*Bạn đọc tự vẽ hình*) : Gọi G_1 và G lần lượt là trọng tâm của tam giác BCD và tứ diện $A'BCD$. Gọi Q_1 là điểm sao cho $\overrightarrow{AQ_1} = \overrightarrow{IQ}$. Dễ thấy $IA \parallel QA'$, và do đó $Q_1 \in QA'$. Xét phép vị tự f tâm G_1 tỉ số $\dfrac{1}{4}$. Ta có $f : A \mapsto P$, $A' \mapsto G$ và $Q_1 \mapsto Q'$. Suy ra : f biến $\overrightarrow{AQ_1}$ thành $\overrightarrow{PQ'}$; $\overrightarrow{AA'}$ thành $\overrightarrow{PG}$; $\overrightarrow{A'Q_1}$ thành $\overrightarrow{GQ'}$. Mà $\overrightarrow{AQ_1} = \overrightarrow{IQ}$ và $\overrightarrow{A'Q_1} \perp \overrightarrow{AA'}$ nên $\overrightarrow{PQ'} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{IQ}$ và $\overrightarrow{GQ'} \perp \overrightarrow{PQ}$. Suy ra Q' cố định và G nhìn đoạn PQ' cố định dưới một góc vuông. Điều này cho thấy G luôn nằm trên mặt cầu cố định đường kính PQ'.

Bài 6 (*Hướng dẫn giải*) : Gọi s là số cần tìm. Gọi A là tập gồm tất cả các số có 10 chữ số, lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, thỏa mãn điều kiện 1) của đề bài. Với mỗi $i = \overline{1,5}$ kí hiệu A_i là tập gồm tất cả các số thuộc A, mà trong mỗi số đều có hai chữ số i đứng cạnh nhau. Khi đó :

$$s = \left|A \setminus \bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| = |A| - \left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| =$$

$$|A| - \sum_{i=1}^{5}|A_i| + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 5}|A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant 5}|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant 5}|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| - \left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| \quad (10).$$

Có $|A| = \dfrac{10!}{2^5}$ (11). Xét k bất kì $\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và xét bộ $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ bất kì thỏa mãn : $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant 5$. Gọi T là tập gồm tất cả các số có $(10 - k)$ chữ số, lập được từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, mà trong mỗi số : mỗi chữ số $i_1, i_2, \ldots i_k$ đều có mặt đúng 1 lần, còn các chữ số khác mỗi chữ số có mặt đúng hai lần. Đặt tương ứng mỗi số $a \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ với số nhận được từ a bằng cách bỏ đồng thời ở a một chữ số i_1, một chữ số i_2, ..., một chữ số i_k.

Tiếp theo, hãy chứng minh tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ đến T. Điều này sẽ cho ta : $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = T = \dfrac{(10-k)!}{2^{5-k}}$ (12)

Từ (10), (11), (12) ta được :

$$s = \frac{10!}{2^5} - C_5^1 . \frac{9!}{2^4} + C_5^2 \frac{8!}{2^3} - C_5^3 . \frac{7!}{2^2} + C_5^4 . \frac{6!}{2^1} - \frac{5!}{2^o} = 39480.$$

NGUYỄN KHẮC MINH

ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp THCS

Bài T1/221 : Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho số 1995 bằng tổng của n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ trong đó các số a_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ đều là hợp số.

NGÔ HÂN (Hà Bắc)

Bài T2/221 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x(1 + x + x^2) = 4y\,(y + 1)$

TRẦN DUY HINH (Bình Định)

Bài T3/221 : Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geqslant 3\,\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

trong đó a, b, c là các số dương.

TRẦN XUÂN ĐÁNG (Nam Hà)

Bài T4/221 : Dựng ΔABC vuông ở A biết cạnh BC và độ dài phân giác AD.

VŨ HỮU BÌNH (Hà Nội)

Bài T5/221 : Cho ΔABC, O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua O cắt tia CB, các cạnh AC, AB lần lượt tại các điểm M, N, P. Chứng minh rằng biểu thức :

$$\frac{AB}{PA\,.\,PB} + \frac{AC}{NA\,.\,NC} - \frac{BC}{MB\,.\,MC}$$

không phụ thuộc vào vị trí của l.

HOÀNG NGỌC CẢNH (Hà Tĩnh)

Các đề THCB

Bài T6/221 : Cho ba số x, y, z nguyên dương thỏa mãn $x^4 + y^4 + z^4 = 1984$.

Chứng minh rằng số $A = 20^x + 11^y - 1996^z$ không thể là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp

NGUYỄN ĐỨC TẤN (TP Hồ Chí Minh)

Bài T7/221 : Cho các dãy $(a_n) n \in N^*$, $(b_n) n \in N^*$ thỏa mãn các công thức sau :

$$a_n = 1 + \frac{n(1 + n)}{1 + n^2} + \ldots + \frac{n^n(1 + n^n)}{1 + n^{2n}}$$

$$b_n = \left(\frac{a_n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} \forall n \in N^*$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

HỒ QUANG VINH (Nghệ An)

Bài T8/221 : Chứng minh bất đẳng thức sau đây :

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \leqslant 3\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$$

với a, b, c là các số dương.

NGUYỄN LÊ DŨNG (TP Hồ Chí Minh)

Bài T9/221 : Cho O là điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng OA, OB, OC cắt BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Hãy tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm O sao cho :

$$(\text{dt}\Delta OAC')^2 + (\text{dt}\Delta OBA')^2 + (\text{dt}\Delta OCB')^2 = (\text{dt}\Delta OBC')^2 + (\text{dt}\Delta OCA')^2 + (\text{dt}\Delta OAB')^2$$

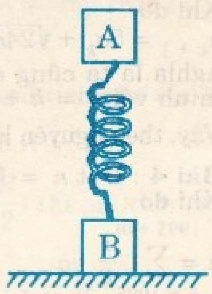
TRỊNH BẰNG GIANG (TP Hồ Chí Minh)

Bài T10/221 : Cho 2 đường thẳng d, d' chéo nhau. M, N là 2 điểm lần lượt thuộc d và d' thay đổi sao cho đường thẳng MN hợp với d và d' những góc bằng nhau. Gọi K là trung điểm của đoạn MN. Tìm tập hợp điểm K.

ĐỖ THANH SƠN (Hà Nội)

Các đề Vật lí

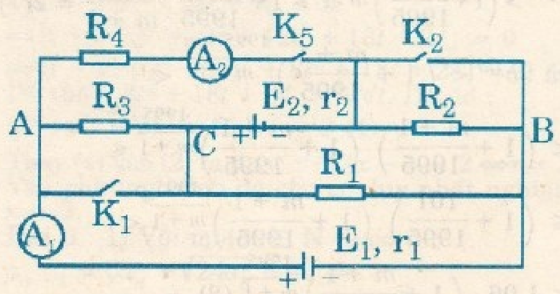
Bài L1/221 : Một vật A khối lượng m_1 và vật B khối lượng m_2 nối với nhau bằng một lò xo có khối lượng không đáng kể. Vật A thực hiện những dao động tự do với biên độ A và tần số góc ω. Để hệ thống không tách khỏi mặt sàn biên độ dao động A phải là bao nhiêu ?



NGUYỄN VĂN MINH (Quảng Ngãi)

Bài L2/221 : Cho mạch điện như hình vẽ :
Biết $E_1 = 10V$, $r_1 = r_2$, $E_2 = 5V$, $R_1 = 2r_2$.
Khi K_1 *và* K_2 đóng A_2 chỉ 3,6A

Khi K_2 đóng A_1 chỉ $\frac{9}{7}A$.



Khi K_3 đóng A_2 chỉ 2,5A, A_1 chỉ 3A. Bỏ qua điện trở của dây nối và ampe kế.
Hãy tính R_4, R_2 và cường độ qua R_2 *khi* K_3 đóng.

NGUYỄN NGHIÊM TOÀN (Long An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools.

T1/221 Find the greatest natural number n such that 1995 is the sum of n composite numbers.

T2/221 Find integral roots of the equation

$$x(1+x+x^2) = 4y(y+1).$$

T3/221 Prove the inequality

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geqslant 3\,\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

where a, b, c are positive numbers.

T4/221 Construct the triangle ABC, the angle A of which is right, knowing the lengths of BC and the angled-bisector AD.

T5/221 Let be given a triangle ABC with incenter O. A movable line l passing through O cuts the semi-line CB and the sides AC, AB respectively at M and N, P. Prove that the expression

$$\frac{AB}{PA\,.\,PB} + \frac{AC}{NA\,.\,NC} - \frac{BC}{MB\,.\,MC}$$

does not depend on the position of l.

For Upper Secondary Schools.

T6/221 The integers x, y, z satisfy the relation $x^4+y^4+z^4 = 1984$. Prove that the number $A = 20^x + 11^y - 1996^z$ can not be the product of two consecutive natural numbers.

T7/221 The sequences $(a_n)_{n\in N^*}$, $(b_n)_{n\in N^*}$ are defined by :

$$a_n = 1 + \frac{n(1+n)}{1+n^2} + \dots + \frac{n^n(1+n^n)}{1+n^{2n}},$$

$$b_n = \left(\frac{a_n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}},\ \forall n \in N^*.$$

Find $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

T8/221. Prove the inequality

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \leqslant 3\,.\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c},$$

where a, b, c are positive numbers.

T9/221 Find the locus of points O inside a given triangle ABC such that the lines OA, OB, OC cut respectively BC, CA, AB at A', B', C' so that (area $\Delta OAC'$)^2 + (area $\Delta OBA'$)^2 + (area $\Delta OCB'$)^2 = (area $\Delta OBC'$)^2 + (area $\Delta OCA'$)^2 + (area $\Delta OAB'$)^2.

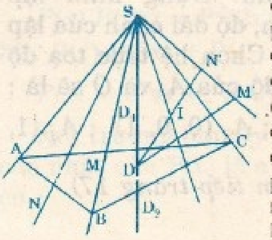
T10/221 Let d and d' be two given non-coplanar lines, M and N be two moving points on d and d' respectively so that the angles between MN and d and d' are equal. Find the locus of the midpoints of MN.

ỐNG KÍNH CẢI CÁCH DẠY VÀ HỌC TOÁN

Hóa ra "ở ngoài đường" cũng như "ở trong nhà"

Trong sách hình học 11 của đồng tác giả Nguyễn Gia Cốc – Bùi Bình (NXBGD 1992) trang 83 có trình bầy : "... Nói khái quát : những điểm nằm cùng phía đối với tất cả các mặt phẳng chứa mỗi mặt của đa diện *lồi* ? hình *đa diện* là những điểm bên trong của hình đa diện đó...".

Xét hình chóp tam giác $S.ABC$. Lấy một điểm D bên trong ΔABC và các điểm D_1, D_2 sao cho D_1 nằm giữa S, D; và nằm giữa D_1, D_2, ta có D_1, D_2 nằm khác phía đối với (ABC) (1). Trước hết, ta chứng minh với mọi điểm M bên trong ΔABC, tia SM (trừ S) gồm toàn những điểm nằm cùng phía với D đối với mỗi mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA). Do M, D thuộc (ABC) nên đường thẳng MD chỉ có thể cắt các mặt phẳng đang xét tại các giao tuyến AB, BC, CA của chúng với (ABC). Mà M, D đều là điểm bên trong của ΔABC nên đoạn thẳng MD không có điểm chung với bất cứ đường thẳng nào trong ba đường thẳng AB, BC, CA. Suy ra, đoạn thẳng MD không có điểm chung với bất kỳ mặt phẳng nào trong ba mặt phẳng đang xét, hay hai điểm M, D nằm cùng phía đối với mỗi mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) (2). Xét điểm N ($\not\equiv S$) trên tia SM, ta có đường thẳng MN cắt ba mặt phẳng đang xét tại điểm S. Mà S nằm ngoài đoạn thẳng MN (hình học 6) nên hai điểm M, N nằm cùng phía đối với mỗi mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) (3). Từ (2), (3), ta có N nằm cùng phía với D đối với mỗi mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) (4) Đảo lại, lấy điểm M' trên (ABC) sao cho M' không phải là điểm bên trong của ΔABC, ta có đoạn thẳng DM' cắt ΔABC tại một điểm I. Nếu $I \equiv M'$ thì tia SM' gồm toàn những điểm thuộc hợp của ba mặt phẳng đang xét nên không chứa điểm nào cùng phía với D đối với ba mặt phẳng đó. Nếu $I \not\equiv M'$, ta có tia SI nằm giữa hai tia SD, SM' nên với điểm N' ($\not\equiv S$) lấy tùy ý trên tia SM', ta luôn luôn có đoạn thẳng DN' cắt tia SI. Suy ra N' nằm khác phía với D đối với ít nhất một trong ba mặt phẳng đang xét (5). Ngoài ra, với mỗi tia gốc S nhưng không cắt (ABC), ta dễ dàng chứng minh mỗi điểm $P \not\equiv S$) của nó đều nằm khác phía với D đối với ít nhất trong ba mặt phẳng đang xét (6). Từ (4), (5), (6), ta có quĩ tích của những điểm nằm cùng phía với D đối với mỗi mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA) là hợp các tia SM (trừ S) trong đó M là mỗi điểm bên trong của ΔABC (7). Quĩ tích đó lại bị chia thành hai phần bởi mặt phẳng (ABC) (không kể các điểm bên trong của ΔABC), kết hợp với (1), ta có một phần gồm toàn điểm nằm cùng phía với D_1 đối với (ABC), phần còn lại gồm toàn điểm nằm cùng phía với D_2 đối với (ABC). Kết hợp điều vừa nêu với (7) và căn cứ vào điều trình bầy trong sách nêu trên, ta có mỗi phần đó đều gồm toàn điểm bên trong của hình chóp $S.ABC$ (!).



DẶNG KỲ PHONG

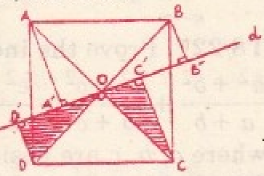
TẬP MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN

TRỊNH BẰNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh)

Bài toán mở đầu :

Trong mặt phẳng cho đường thẳng d quay quanh tâm O của hình vuông ABCD. Chứng minh tổng bình phương các khoảng cách từ 4 đỉnh hình vuông đến d chỉ phụ thuộc kích thước của hình vuông.

Cách giải quen thuộc (xem h.1)

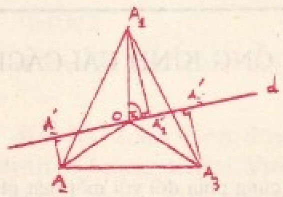


Chiếu vuông góc (A, B, C, D) xuống d thành (A', B', C', D'), các tam giác vuông sau đây phải bằng nhau : $\Delta DD'O$, $\Delta OC'C$, $\Delta BB'O$, $\Delta OA'A$ $\to D'D^2 + C'C^2 + B'B^2 + A'A^2 = 2OA^2 \to$ (đpcm)

Câu hỏi : những hình nào cũng có tính chất đó (tạm gọi là tính chất (T)) giống như hình vuông ?

1. MỞ RỘNG TRONG MẶT PHẲNG

Dự đoán 1. Đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geqslant 3)$ cũng có tính chất (T).



Chứng minh. Chiếu vuông góc A_i xuống d thành A_i' $(i = \overline{1, n})$, để đơn giản ta xét $n = 3$ (xem h. 2).

Đặt $OA_1 = 1$. x là góc tạo bởi OA_1 và d.

$$\to \sum_{i=1}^{3} A_i'O^2 = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

Tổng này không phụ thuộc $x \to \sum_{i=1}^{3} A_i'A_1'^2$ cũng không phụ thuộc x $\to$ "dự đoán 1" đúng với $n = 3$.

Trong trường hợp tổng quát, làm tương tự ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i'O^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(x + k\frac{2\pi}{n}\right)$$ tổng này cũng không phụ thuộc x (bạn đọc tự kiểm tra), $\sum_{i=1}^{n} A_i'A_1'^2$ cũng không phụ thuộc x "dự đoán 1" là đúng.

Nhận xét. Lý do khiến : $\sum A_i'O^2$ tổng bình phương tất cả các hình chiếu của OA_i xuống d, không phụ thuộc vào d là : các đoạn OA_i bằng nhau và tạo với d những góc lập thành cấp số cộng công sai $\frac{2\pi}{n}$.

Trong khi đó các cạnh A_1A_2 ; A_2A_3 ; . . . ; A_nA_1 cũng phản ánh một "hình ảnh" tương tự cho nên ta có *hệ quả :* tổng bình phương hình chiếu của tất cả các cạnh của một đa giác đều xuống một đường thẳng bất kỳ, chỉ phụ thuộc vào kích thước của đa giác đều đó mà thôi.

Các tính chất tương tự như t/c (T) ở trong mặt phẳng còn nhiều, xin nêu một số vấn đề để các bạn tìm hiểu thêm :

d là đường thẳng quay quanh tâm O của tam giác đều ABC. d' là một đường thẳng bất kỳ.

1) Chứng minh : tổng lũy thừa bậc 4 của hình chiếu tất cả các cạnh của ΔABC xuống d', cũng như của khoảng cách từ tất cả các đỉnh của ΔABC đến d, chỉ phụ thuộc kích thước của ΔABC.

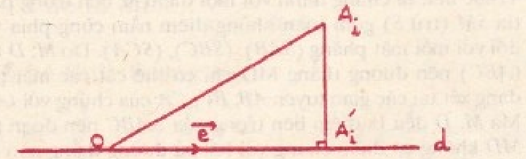
2) Có thể thay "lũy thừa 4" bằng những lũy thừa nào, để khẳng định tương tự vẫn còn đúng.

3) Thay ΔABC bởi đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_n$ kết quả có thay đổi không ?

2. MỞ RỘNG TRONG KHÔNG GIAN

Dự đoán 2. Dựa theo sự mở rộng trong mặt phẳng ta nhận thấy đặc điểm quyết định (then chốt) để một hình có tính chất (T) là các đoạn nối tâm với đỉnh phải có vai trò như nhau (bình đẳng), nhìn vào không gian ta cũng thấy rất nhiều đa diện cũng có đặc điểm đó, ví dụ : tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ cũng có tính chất (T).

Bổ đề. Gọi $\vec{e} = (x, y, z)$ là vectơ đơn vị của đường thẳng d. Chiếu vuông góc A_i $(i = \overline{1, 4})$ xuống d thành A_i'. Ta có : $A_i'O = |\vec{e}.\overrightarrow{OA_i}|$ (xem hình 3).



Chứng minh dự đoán. Dựng hình lập phương ngoại tiếp tứ diện, độ dài cạnh của lập phương coi như bằng 1. Chọn hệ trục toạ độ $IXYZ$ (xem h.4) thì tọa độ của A_i và O sẽ là : A_1 (1, 0, 0) ; A_2 (0, 1, 0) ; A_3 (0, 0, 1) ; A_4 (1, 1, 1) : $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. *(Xem tiếp trang 17)*

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ ĐỂ PHÁT HIỆN MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC VỀ TAM GIÁC

NGUYỄN VĂN LỘC

Trong bài báo này chúng ta tìm hiểu một ứng dụng của phương pháp vectơ, đó là sử dụng các phép toán trên các vectơ để lập các bất đẳng thức lượng giác. Điều này không những giúp ích cho chúng ta tìm thấy "cội nguồn" của một số bất đẳng thức lượng giác về tam giác mà còn thấy phương pháp chung, để chứng minh đồng thời một số bất đẳng thức lượng giác, để sáng tạo ra bài toán mới.

Bài toán : Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là:

$\overrightarrow{OA}\sin 2A + \overrightarrow{OB}\sin 2B + \overrightarrow{OC}\sin 2C = \overrightarrow{0}$ (1)

Điều kiện cần : Các bạn có thể tham khảo trong cuốn sách : "Hàn Liên Hải, Phan Huy Khải, Đào Ngọc Nam, Lê Tất Tốn, Đặng Quan Viên : Toán bồi dưỡng học sinh hình học 10. Hà Nội 1994 trang 21".

Điều kiện đủ : Giả sử O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, theo điều kiện cần ta có :

$\overrightarrow{O_1A}\sin 2A + \overrightarrow{O_1B}\sin 2B + \overrightarrow{O_1C}\sin 2C = \overrightarrow{0}$ (2).

Lấy (2) trừ (1) áp dụng định lí hàm số sin và côsin cho ΔABC ta có $\overrightarrow{O_1O}\cdot\dfrac{2S_{ABC}}{R^2} = \overrightarrow{0}$, do $\dfrac{S_{ABC}}{R^2} \neq 0$ nên $\overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{0}$ do đó $O \equiv O_1$ tức là O thỏa mãn (1) thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Từ hệ thức (1) dễ chứng minh được bất đẳng thức sau :

$(\overrightarrow{OA}\sin 2A_1 + \overrightarrow{OB}\sin 2B_1 + \overrightarrow{OC}\sin 2C_1)^2 \geqslant 0$ (3)

dấu đẳng thức chỉ có trong trường hợp ΔABC đồng dạng với $\Delta A_1B_1C_1$. Sử dụng hệ thức (1) và bất đẳng thức (3) chúng ta lập được các bất đẳng thức sau :

1) Nếu $\Delta A_1B_1C_1$ đều, nội tiếp trong đường tròn tâm O_1 thì $\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1B_1} + \overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{0}$. Khi đó đối với ΔABC tùy ý nội tiếp trong đường tròn tâm O theo (3) : $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geqslant 0$. Từ đó ta có $3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geqslant 0$ hay $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\dfrac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi ΔABC đều.

2) Xét $\Delta A_1B_1C_1$ có $A_1 = B_1 = 30^o$, $C_1 = 120^o$. Theo (1) :

$\overrightarrow{O_1A_1}\sin 60^o + \overrightarrow{O_1B_1}\sin 60^o + \overrightarrow{O_1C_1}\sin 240^o = \overrightarrow{0}$ hay $\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1B_1} - \overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{0}$. Xét ΔABC tùy ý nội tiếp (O) thì theo (3) $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^2 \geqslant 0$. Suy ra : $3R^2 + 2R^2(\cos 2C - \cos 2A - \cos 2B) \geqslant 0$ hay $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \leqslant \dfrac{3}{2}$. Dấu "=" có khi $A = B = 30^o$, $C = 120^o$

3) Xét $\Delta A_1B_1C_1$ có $A_1 = 15^o$, $B_1 = 60^o$, $C_1 = 105^o$. Theo (1) :

$\overrightarrow{O_1A_1}\sin 30^o + \overrightarrow{O_1B_1}\sin 120^o + \overrightarrow{O_1C_1}\sin 210^o = \overrightarrow{0}$

hay $\overrightarrow{O_1A_1} + \sqrt{3}\overrightarrow{O_1B_1} - \overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{0}$.

Xét ΔABC tùy ý nội tiếp (O) theo (3) : $(\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^2 \geqslant 0$. Suy ra : $5R^2 + 2\sqrt{3}R^2\cos 2C - 2R^2\cos 2B - 2\sqrt{3}R^2\cos 2A \geqslant 0$

hay $\sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos 2B \leqslant \dfrac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra chỉ khi $A = 15^o$, $B = 60^o$, $C = 105^o$.

4) Xét $\Delta A_1B_1C_1$ có $A_1 = 45^o$, $B_1 = 60^o$, $C = 75^o$. Theo (1) : $2\overrightarrow{O_1A_1} + \sqrt{3}\overrightarrow{O_1B_1} + \overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{0}$. Xét ΔABC tùy ý nội tiếp (O) Theo (3) : $(2\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geqslant 0$

hay $8R^2 + 4\sqrt{3}R^2\cos 2C + 4R^2\cos 2B + 2\sqrt{3}R^2\cos 2A \geqslant 0$

Suy ra : $\sqrt{3}\cos 2A + 2\cos 2B + 2\sqrt{3}\cos 2C \geqslant -4$

Dấu "=" xảy ra chỉ khi $A = 45^o$, $B = 60^o$, $C = 75^o$.

5) Xét $\Delta A_1B_1C_1$ có $A_1 = B_1 = 36^o$, $C_1 = 108^o$. Theo (1) :

$(\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1B_1})\sin 72^o - \overrightarrow{O_1C_1}\sin 36^o = \overrightarrow{0}$

hay $2(\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1B_1})\cos 36^o - \overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{0}$.

Do $\cos 36^o = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$ nên

$(\sqrt{5} + 1)(\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1B_1}) - 2\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{0}$.

Xét ΔABC tùy ý nội tiếp (O), theo (3) : $[(\sqrt{5} + 1)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - 2\overrightarrow{OC}]^2 \geqslant 0$, do đó : $2R^2(6 + 2\sqrt{5})(1 + \cos 2C) + 4R^2 - 4(\sqrt{5} + 1)^2R^2(\cos 2A + \cos 2B) \geqslant 0$

hay : $(\sqrt{5} + 1)(\cos 2A + \cos 2B) - (3 + \sqrt{5})\cos 2C \leqslant 4 + \sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra chỉ khi $A = B = 36^o$, $C = 108^o$

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM 1994

Vào năm thứ 30 của mình, tạp chí *Toán học và tuổi trẻ* được đông đảo bạn đọc hưởng ứng giải bài. Mỗi tháng hàng nghìn bài gửi đến dự thi.

Rất nhiều bạn đã giải được gần hết số bài ra trên tạp chí. Một số bạn học sinh THCS đã giải được các bài dành cho cấp THPT. Các bạn học sinh lớp 9 gửi bài về nhiều nhất. Bạn Phạm Thị Thanh Vân (Hải Phòng) là người ít tuổi nhất trong số các bạn đoạt giải.

Cuộc thi giải bài vật lí cũng được nhiều bạn tham gia.

Sau đây là danh sách các bạn đoạt giải.

A. MÔN TOÁN

1. GIẢI XUẤT SẮC

1. *Lê Anh Vũ*, 11 Chuyên toán Quốc học Huế, Thừa Thiên – Huế
2. *Phạm Đình Trường*, 10 Chuyên toán Trần Phú, Hải Phòng
3. *Nguyễn Thị Hải Yến*, 10 Chuyên toán Quốc học Huế, Thừa Thiên – Huế
4. *Bùi Quang Minh*, 9A$_1$ Giảng Võ II, Hà Nội
5. *Phạm Huy Tùng*, 8A Bế Văn Đàn, Hà Nội
6. *Lê Quang Nẫm*, 8T Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi
7. *Nguyễn Lê Lực*, 8A Đầm Dơi, Minh Hải.

2. GIẢI NHẤT

1. *Lê Huy Khanh*, 12T Phan Bội Châu, Nghệ An
2. *Nguyễn Tuấn Hải*, 11M Mari Quyri, Hà Nội
3. *Phan Hoàng Việt*, 11A Quốc học Quy Nhơn, Bình Định
4. *Đinh Thành Trung*, 10 CT Đại học Tổng hợp Hà Nội
5. *Nguyễn Xuân Thắng*, 10 CT Đông Hà, Quảng Trị
6. *Nguyễn Ngọc Đông*, 9 Năng khiếu Thuận Thành, Hà Bắc
7. *Nguyễn Phú Bình, 9A Bế Văn Đàn, Hà Nội*
8. *Trần Bằng*, 8H Trưng Vương, Hà Nội
9. *Trần Lê Nam*, 8T Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
10. *Mai Thanh Bình*, 7M Mari Quiri, Hà Nội
11. *Phạm Thị Thanh Vân*, 6H Minh Khai, Hải Phòng

3. GIẢI NHÌ

1. *Phan Hoàng Việt*, 12A Quốc học Quy Nhơn, Bình Định
2. *Võ Hoàng Trung*, 11 PTTH Chuyên Trà Vinh
3. *Tô Đông Vũ*, 11 Chuyên Đại học Tổng hợp Hà Nội
4. *Nguyễn Vũ Hưng*, 10C PT Chuyên Ngoại ngữ, ĐHSPNN Hà Nội
5. *Phạm Tuấn Anh*, 9T Phan Bội Châu, Nghệ An
6. *Phạm Thái Hà*, 9T Phạm Huy Quang, Đông Hưng, Thái Bình
7. *Phạm Lê Hùng*, 9A Trưng Nhị, Hà Nội
8. *Nguyễn Bá Hùng*, 9A Trưng Vương, Hà Nội
9. *Trần Nguyên Ngọc*, 9K Lê Lợi, Hà Đông, Hà Tây
10. *Nguyễn Đức Phương*, 9H Trưng Vương, Hà Nội
11. *Nguyễn Ngọc Tân*, 9M Mari Quyri, Hà Nội
12. *Trần Việt Bình, 8H Trưng Vương, Hà Nội*
13. *Trần Thị Ngọc Hải*, 8T Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
14. *Viên Ngọc Quang*, 8E Ba Đình, Thanh Hóa
15. *Đoàn Minh Đức*, 7 Chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình

4. GIẢI BA

1. *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Chuyên Đào Duy Từ, Quảng Bình
2. *Nguyễn Việt Kiên*, 11 PTTH Nga Sơn II, Thanh Hóa
3. *Vũ Thị Bích Hà*, 11 PTTH Chuyên Thái Bình
4. *Vũ Thành Long*, 11CT Phổ thông năng khiếu Hải Hưng
5. *Nguyễn Hoàng Công*, 10 Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
6. *Nhữ Quý Thơ*, 10T Lam Sơn, Thanh Hóa
7. *Phạm Minh Phương*, 10A Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội 1
8. *Lê Văn An*, 9T Phan Bội Châu, Nghệ An
9. *Trần Hữu Nhơn*, 9T Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long
10. *Trịnh Kim Chi*, 8 Năng Khiếu Hà Tĩnh
11. *Cao Trần Kiên*, 8H Trưng Vương, Hà Nội
12. *Nguyễn Hồng Hà*, 8H Trưng Vương, Hà Nội
13. *Nguyễn Long*, 8H Trưng Vương, Hà Nội
14. *Đỗ Hồ Nga*, 8D Đống Đa, Hà Nội
15. *Đặng Anh Tuấn*, 7T Chu Văn An, Hà Nội

5. GIẢI KHUYẾN KHÍCH

1. *Lê Công Sơn,* 12 Việt Đức, Hà Nội
2. *Hồng Cẩm,* 12T, PTTH Hạ Long, Quảng Ninh
3. *Lê Như Thạch,* 12 CT Ngô Quyền, Đồng Nai
4. *Nguyễn Long Quỳnh,* 12 Chuyên Lạng Sơn
5. *Nguyễn Kỳ Quốc,* 12A3, Nguyễn Trãi, Phan Rang – Tháp Chàm, Bình Thuận
6. *Lê Trường Giang,* 12 CT Đại học Sư phạm Hà Nội 1
7. *Đinh Trung Hàng,* 11M Mari Quyri, Hà Nội
8. *Đặng Thanh Hà,* 11A Chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội 1
9. *Phan Duy Hùng,* 11 Chuyên Đào Duy Từ, Quảng Trị
10. *Lê Văn Mạnh,* 11 Chuyên toán Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình
11. *Vũ Huy Phương,* 11 Chuyên Phổ thông năng khiếu Hải Hưng
12. *Nguyễn Minh Thọ,* 11A Quốc học Quy Nhơn.
13. *Từ Minh Hải,* 11 PTTH Buôn Mê Thuột, Đắc Lắc
14. *Lê Quang Minh,* 11 K5 Phổ thông năng khiếu Bắc Thái
15. *Nguyễn Trọng Nghĩa,* 11A1 PTTH Việt Trì, Vĩnh Phú
16. *Lê Minh Hiếu,* 10T Lam Sơn, Thanh Hóa
17. *Đào Thị Thiên Hương,* 10 PTTH Đông Hà, Quảng Trị
18. *Nguyễn Nhật Nam,* 10A PTTH Vũng Tàu, Bà Rịa – Vũng Tàu
19. *Phạm Minh Tuấn,* 10T Lam Sơn, Thanh Hóa
20. *Ngô Đức Duy,* 10 Chuyên Trần Phú, Hải Phòng
21. *Nguyễn Chí Linh,* 10 Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
22. *Nguyễn Việt Linh,* 10 Trần Phú, Hải Phòng
23. *Phạm Mạnh Quang,* 10T Lam Sơn, Thanh Hóa
24. *Phạm Công Thiện,* 10 Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
25. *Đàm Khánh Hòa,* 9A Lương Văn Chánh, Phú Yên
26. *Hồ Sĩ Hiền,* 9 Năng khiếu Vĩnh Linh, Quảng Trị
27. *Phạm Hồng Linh,* 9T Phan Bội Châu, Nghệ An
28. *Trần Thanh Quang,* 9CT Quốc học Huế, Thừa Thiên – Huế
29. *Đỗ Đăng Tạo,* 9B Chuyên Ứng Hòa, Hà Tây
30. *Nguyễn Xuân Tương,* 9T Phan Bội Châu, Nghệ An
31. *Lê Tuấn Anh,* 9K Lê Lợi, Hà Đông, Hà Tây
32. *Nguyễn Thái Hà,* 9M Mari Quyri, Hà Nội
33. *Lê Huy,* 9 NK Đông Hà, Quảng Trị
34. *Trần Trung Nghĩa,* 9T Trần Đăng Ninh, Nam Hà
35. *Trần Đức Quyền,* 9 Trần Đăng Ninh, Nam Hà
36. *Trần Thị Khuê,* 9B Quang Trung, Thanh Hóa
37. *Võ Thị Ly,* 9A Lương Văn Chánh, Phú Yên
38. *Võ Như Quỳnh,* 9T Phan Bội Châu, Nghệ An
39. *Trần Hải Sơn,* 9A1 Giảng Võ II, Hà Nội
40. *Vương Vũ Thắng,* 9A1 Giảng Võ II, Hà Nội
41. *Nguyễn Hữu Hội,* 8T Lê Khiết, Quảng Ngãi
42. *Lưu Văn Thịnh,* 8 Chuyên Thiệu Yên, Thanh Hóa
43. *Phạm Anh Tuấn,* 9T Lam Sơn, Thanh Hóa
44. *Nguyễn Hồng Dung,* 8T Trần Đăng Ninh, Nam Hà
45. *Bùi Thị Phương Uyên,* 8T Lê Khiết, Quảng Ngãi
46. *Bùi Nam Phương,* 8A2 Chuyên Phong Châu, Vĩnh Phú
47. *Trần Phương,* 8 Giảng Võ II, Hà Nội.

B. VẬT LÍ

Giải nhất :

Vũ Thị Bích Hà, 11C PTTH Chuyên Thái Bình

Giải nhì :

Phan Hoàng Việt, 12A Quốc học Quy Nhơn, Bình Định

Nguyễn Hữu Hải, 11A PTTH số II Hoài Nhơn, Bình Định

Lê Thanh Minh, 9[1] Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên – Huế

Giải ba :

Đạo Lý, 11A PTTH Chuyên Thái Bình

Nguyễn Quỳnh Nam, 10M Mari Quyri, Hà Nội

Nguyễn Đình Thịnh, 10 CL Phan Bội Châu, Nghệ An

Lê Hồng Nam, 9L Năng khiếu Thái Thụy, Thái Bình

Phạm Anh Dũng, 9 LT Phổ thông năng khiếu Hải Hưng

Giải khuyến khích :

Nguyễn Trọng Nghĩa, 12A Quốc học Quy Nhơn, Bình Định

Trần Hồng Quang, 12A PT Dân lập Xuân Hòa, Vĩnh Phú

Trương Hàm Yêng, 11A$_1$ Lý Tự Trọng, Cần Thơ

Ngô Thành Trung, 11A$_1$ Lý Tự Trọng, Cần Thơ

Võ Thanh Tùng, 10 Chuyên PTTH Huế, Thừa Thiên – Huế.

Nguyễn Đức Phương, 9H Trưng Vương, Hà Nội

Lê Quang Thành, 9NK Đông Hà, Quảng Trị

Nguyễn Quang Trường, 9 CLNK Vinh, Nghệ An

Để khỏi thất lạc Bằng danh dự giải toán trên tạp chí và Giải thưởng, đề nghị các bạn gửi địa chỉ cụ thể chỗ ở hiện nay về tòa soạn. Ngoài phong bì ghi rõ : "*Địa chỉ hiện nay của độc giả*" dưới địa chỉ tòa soạn.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tìm hiểu sâu thêm Toán học phổ thông

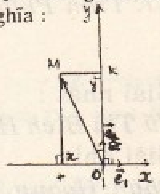
DÙNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH

NGUYỄN PHI PHÚC
(Giáo viên THPT Phương Lâm – Đồng Nai)

Với nhiều bài toán hình học có chứa yếu tố "Khoảng cách", "Cùng phương" và đặc biệt là yếu tố "vuông góc", nếu khéo chọn hệ trục tọa độ thì có thể chuyển được thành bài toán đại số có nhiều hứa hẹn cho khả năng tìm ra lời giải. Đó là ý tưởng sử dụng phương pháp tọa độ để giải toán.

Trong bài viết này xin trình bày việc sử dụng "Phương pháp tọa độ" để tìm tòi lời giải một số bài toán với kiến thức cơ bản không vượt quá chương trình toán lớp 10 PTTH.

Trong Chương I – §5, Chương II – §1 Sách giáo khoa (SGK) Hình học 10 (*), ta có các định nghĩa :



1. $M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = \overrightarrow{OH}\vec{e_1} + \overrightarrow{OK}\vec{e_2}$
2. $\vec{a} = (a_1, a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$
3. $x = OM\cos\alpha$
4. $y = OM\sin\alpha$ $(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$

Kết hợp định nghĩa và các tính chất được nêu trong SGK Hình học 10, ta chứng minh được hai kết quả quan trọng sau :

Bổ đề 1 : Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

Ta có : $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

Chứng minh : 1. $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ Hiển nhiên đúng

2. $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$

Nếu $b_1 = 0$: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

Nếu $b_2 = 0$: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

Nếu $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases} (k \neq 0) \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Bổ đề 2 : Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

Ta có : $\vec{a} . \vec{b} = (a_1, a_2).(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$

Chứng minh : Ta có $\begin{cases} |\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1 \\ \vec{e_1} \perp \vec{e_2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \vec{e_1}^2 = \vec{e_2}^2 = 1 \\ \vec{e_1} . \vec{e_2} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó : $\vec{a}.\vec{b} = (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}).(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2})$

$= a_1b_1\vec{e_1}^2 + a_1b_2\vec{e_1}.\vec{e_2} + a_2b_1\vec{e_2}.\vec{e_1} + a_2b_2\vec{e_2}^2$

$= a_1b_1 + a_2b_2$

Sau đây là một số bài tập minh họa.

Bài 1 : (SGK HH10, Trang 60)

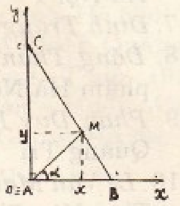
Cho Δ ABC vuông tại A, các cạnh góc vuông là b và c, M là một điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = \alpha$. Chứng minh rằng : $AM = \dfrac{bc}{c\cos\alpha + b\sin\alpha}$

Lời giải : Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó : A(0, 0), B(b, 0), C(0, c), M(x, y).

Từ định nghĩa : $x = AM\cos\alpha$, $y = AM\sin\alpha$

Nên $M(AM\cos\alpha, AM\sin\alpha)$



Do $M \in BC \Rightarrow \overrightarrow{CM}$ cùng phương với $\overrightarrow{CB} \Rightarrow \begin{vmatrix} AM\cos\alpha & AM\sin\alpha - c \\ b & -c \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow AM(c\cos\alpha + b\sin\alpha) = bc$

$\Rightarrow AM = \dfrac{bc}{c\cos\alpha + b\sin\alpha}$ (đcpcm)

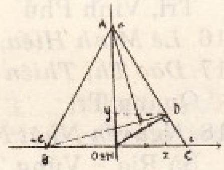
(*) Hình học 10, Trần Văn Hạo chủ biên, NXBGD 1993.

Bài 2 : (SGK HH 10, trang 50)

Cho ΔABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh AM vuông góc với BD.

Lời giải : Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Khi đó : H(0, 0), A(c, a), B(−c, 0), C(c, 0), D(x, y)



Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x, -y)(c, -a) = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y-a \\ c & -a \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cx - ay = 0 \\ ax + cy = ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2c}{a^2+c^2} \\ y = \dfrac{c^2a}{a^2+c^2} \end{cases}$$

Vậy $D\left(\dfrac{a^2c}{a^2+c^2}, \dfrac{c^2a}{a^2+c^2}\right)$, M là trung điểm của HD nên

$M\left(\dfrac{a^2c}{2(a^2+c^2)}, \dfrac{c^2a}{2(a^2+c^2)}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BD} . \overrightarrow{AM} = \left(\frac{2a^2c + c^3}{a^2+c^2}, \frac{c^2a}{a^2+c^2}\right)\left(\frac{a^2c}{2(a^2+c^2)}, \frac{-c^2a - 2a^3}{2(a^2+c^2)}\right)$$

$$= \frac{2a^4c^2 + a^2c^4}{2(a^2+c^2)^2} + \frac{-c^4a^2 - 2a^4c^2}{2(a^2+c^2)^2} = 0$$

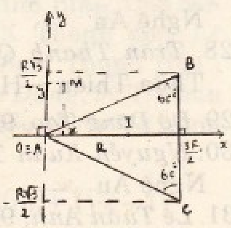
Vậy BD ⊥ AM (đcpcm)

Bài 3 : (Đề thi học sinh giỏi toàn quốc – Năm 1979)

Điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Chứng minh giá trị của $MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí của M.

Lời giải. Gọi I, R là tâm và bán kính đường tròn $\mathscr{C}$ ngoại tiếp Δ đều ABC. Ta có : A(0, 0), $B\left(\dfrac{3R}{2}, \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{3R}{2}, -\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$, I (R, 0) $M(x, y) \in \mathscr{C} \Rightarrow MI = R$

$\Rightarrow MI^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2Rx$



Ta có :

$MA^4 + MB^4 + MC^4 =$

$$= (x^2 + y^2)^2 + \left[\left(x - \frac{3R}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2 + \left[\left(x - \frac{3R}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2$$

$=(2Rx)^2 + (3R^2 - Rx - R\sqrt{3}y)^2 + (3R^2 - Rx + R\sqrt{3}y)^2$
$= 6R^2x^2 + 6R^2y^2 + 18R^4 - 12R^3x$
$= 6R^2(x^2 + y^2) + 18R^4 - 12R^3x$
$= 6R^2.2Rx + 18R^4 - 12R^3x = 18R^4$
Vậy giá trị $MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí M.

Bài 4 : (Đề thi vô địch Anh – năm 1983)
Cho ΔABC. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. D là trung điểm cạnh AB, E là trọng tâm của ΔACD. Chứng minh rằng nếu AB = AC thì IE vuông góc với CD.

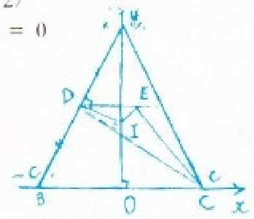
Lời giải: Chọn hệ trục như hình vẽ (O là trung điểm BC)

Khi đó O(0, 0) A(0, a), B(−c, 0), C(c, 0).

D $\left(-\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right)$, E $\left(\frac{c}{6}, \frac{a}{2}\right)$ (*)

$$\begin{cases}\vec{DI} \perp \vec{BA} \\ \vec{OI} \perp \vec{BC}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x + \frac{c}{2}, y - \frac{a}{2}\right).(c, a) = 0 \\ (x, y).(2c, 0) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 0 \\ y = \dfrac{a^2 - c^2}{2a}\end{cases}$$



Vậy I $\left(0, \frac{a^2 - c^2}{2a}\right)$

$\Rightarrow \vec{IE}.\vec{DC} = \left(\frac{c}{6}, \frac{c^2}{2a}\right)\left(\frac{3c}{2}, -\frac{a}{2}\right) = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = 0$

⇒ IE ⊥ DC (đpcm)

Lưu ý : (*) : Công thức tọa độ trọng tâm tam giác. Xem bài tập 4 trang 33 SGK HH10.

Bài 5 : (Đề thi vô địch Bungari – năm 1981)

Đường phân giác trong và ngoài của góc C của ΔABC cắt đường thẳng AB ở L và M. Chứng minh rằng nếu CL = CM thì $AC^2 + BC^2 = 4R^2$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

Lời giải : Nếu CL = CM thì ΔCML vuông cân (do CL ⊥ CM theo tính chất hai đường phân giác của góc)
Chọn hệ trục như hình vẽ (O là trung điểm của ML)
Khi đó : O(0, 0), A(a, 0), B(b, 0), C(0, c), L(c, 0), M(−c, 0)
Theo tính chất đường phân giác ta có :

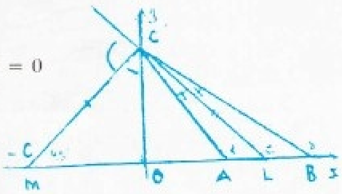
$\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{AL^2}{LB^2} = \frac{AC^2}{CB^2} \Leftrightarrow$

$\frac{(c-a)^2}{(b-c)^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}$

$\Leftrightarrow ab^2 + ac^2 - a^2b - c^2b = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(c^2 - ab) = 0$

$\Leftrightarrow b = \frac{c^2}{a}$



Vậy B $\left(\frac{c^2}{a}, 0\right)$ nên

$$AC^2 + BC^2 = (a^2 + c^2) + \left(c^2 + \frac{c^4}{a^2}\right) = \left[\frac{a^2 + c^2}{a}\right]^2 (1)$$

Gọi I(x, y) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có :

$$\begin{cases}AI = CI \\ AI = BI\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = BI^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-c)^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = \left(x - \frac{c^2}{a}\right)^2 + y^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2ax - 2cy = a^2 - c^2 \\ x = \dfrac{a^2 + c^2}{2a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{a^2 + c^2}{2a} \\ y = c\end{cases}$$

Vậy I $\left(\frac{a^2 + c^2}{2a}, c\right)$

nên $4R^2 = 4CI^2 = 4\left(\frac{a^2 + c^2}{2a}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + c^2}{a}\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) : $\Rightarrow AC^2 + BC^2 = 4R^2$ (đpcm)

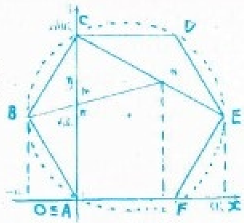
Bài 6 : (Đề thi toán quốc tế lần thứ 23)
Trên các đường chéo AC và CE của lục giác đều ABCDEF, ta lấy hai điểm M và N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$

Biết rằng B, M, N thẳng hàng. Tìm k.

Lời giải : Đặt 2R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều ABCDEF. Chọn hệ trục như hình vẽ.
Khi đó A(0, 0), B(−R, $\sqrt{3}$R), C(0, $2\sqrt{3}$R), E(3R, $\sqrt{3}$R). M(0, m), N(x, y) với $\sqrt{3}R < m < 2\sqrt{3}R$

Ta có : MN cùng phương với BM

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\begin{vmatrix} x & y - m \\ R & m - \sqrt{3}R\end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y - 2\sqrt{3}R \\ -3R & \sqrt{3}R\end{vmatrix} = 0\end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m - \sqrt{3}R)x + 3Ry = -mR \\ x + \sqrt{3}y = 6R\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{6R^2 - \sqrt{3}mR}{\sqrt{3}m - 2R} \\ y = \dfrac{7mR - 6\sqrt{3}R^2}{\sqrt{3}m - 2R}\end{cases}$$

Vậy N $\left(\frac{6R^2 - \sqrt{3}mR}{\sqrt{3}m - 2R}, \frac{7mR - 6\sqrt{3}R^2}{\sqrt{3}m - 2R}\right)$

Theo bài toán ta có :

$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} \Leftrightarrow AM = CN$ (do AC = CE)

$\Leftrightarrow AM^2 = CN^2$

$\Leftrightarrow m^2 = \left(\frac{6R^2 - \sqrt{3}mR}{\sqrt{3}m - 2R}\right)^2 + \left(\frac{7mR - 6\sqrt{3}R^2}{\sqrt{3}m - 2R} - 2\sqrt{3}R\right)^2$

$\Leftrightarrow 3m^4 - 4\sqrt{3}Rm^3 + 16\sqrt{3}R^3.m - 48R^4 = 0$

$\Leftrightarrow (m - 2R)(3m^3 + (6 - 4\sqrt{3})Rm^2 + (12 - 8\sqrt{3})R^2m + 24R^3) = 0 \Leftrightarrow m = 2R.$

Vậy $k = \frac{AM}{AC} = \frac{m}{2\sqrt{3}R} = \frac{2R}{2\sqrt{3}R} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Đặt $f(m) = 3m^3 + (6 - 4\sqrt{3})Rm^2 + (12 - 8\sqrt{3})R^2m + 24R^3$.

Ta có : $\sqrt{3}R < m2\sqrt{3}R \Rightarrow (m + R)^2 < (2\sqrt{3} + 1)^2R^2$

$\Rightarrow -m^2 - 2Rm + (2\sqrt{3})^2R^2 > 0 \Rightarrow$

$(6 - 4\sqrt{3})Rm^2 + (12 - 8\sqrt{3})R^2m + 24R^3 >$

$> 96R^3 - 48\sqrt{3}R^3 > 0 \Rightarrow f(m) > 0$

Để kết thúc, xin mời các bạn giải một số bài toán sau bằng phương pháp tọa độ.

Bài 1 : Cho Δ ABC cân tại A, BC = a, đường cao AH = h. Gọi K là hình chiếu của B lên cạnh AC. Tìm điều kiện giữa a, h để K thuộc cạnh AC, khi đó tính AK.

Bài 2 : Gọi M là trọng tâm của ΔABC. Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2)$

Bài 3 : Cho ΔABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\vec{AM}.\vec{AB} = \vec{AC}.\vec{AB}$

Bài 4 : Các đường cao của Δ nhọn ABC cắt nhau ở O. Trên đoạn OB và OC người ta lấy hai điểm B_1, C_1 sao cho $\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^o$.

Chứng minh rằng $AB_1 = AC_1$ (Đề thi vô địch New York 1976).

Bài 5 : Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, người ta lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R, S là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AD, AB, BC, CD. Chứng minh rằng : PQ vuông góc RS và giao điểm của chúng nằm trên một trong hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD (Đề thi vô địch Nam Tư 1983).

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài

Trò chơi thay số

Giả sử người đi trước muốn phương trình
$ax^3 + bx^2 + cx + 1995 = 0$
có hai nghiệm nguyên là m và −m ($m \in N^+$). Khi thay x = m và x = −m vào phương trình ta sẽ được

$am^3 + bm^2 + cm + 1995 = 0$ (1)

$-am^3 + bm^2 - cm + 1995 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta rút ra $b = -\dfrac{1995}{m^2}$ (3)

Thay giá trị của b ở (3) vào (1) ta có
$am^3 + cm = 0$
hay $am^2 + c = 0$(4)

Hệ thức (4) cho phép ta tìm được một trong hai số a và c khi biết một số. Từ đó suy ra cách thay số của người đi trước đảm bảo họ sẽ thắng cuộc như sau :

Người đi trước thay b theo (3), trong đó m là một số nguyên tùy chọn.

Sau khi người đi sau thay a hoặc c bởi một số tùy chọn thì người đi trước thay chữ còn lại bằng một số sao cho (4) được thỏa mãn. Khi đó phương trình sẽ có hai nghiệm nguyên phân biệt là m và −m.

Thí dụ : với m = 1 ta có :

– Người đi trước thay b = −1995

– Người đi sau thay a = α (một số tùy chọn)

– Đến lượt người đi trước thay c = − α

Khi đó phương trình sẽ là
$\alpha x^3 - 1995x^2 - \alpha x + 1995 = 0$
hay $(x^2 - 1)(\alpha x - 1995) = 0$

Phương trình có 2 nghiệm nguyên phân biệt là 1 và −1

BÌNH PHƯƠNG

Cô giáo phạt ai ?

Một trong ba học sinh Đông, Nam, Bắc đã vẽ bậy lên tường của lớp học. Khi cô giáo hỏi thì các em trả lời như sau :

Em Đông nói : Thưa cô em không vẽ ạ.

Em Nam nói : Thưa cô bạn Bắc không vẽ ạ.

Em Bắc nói : Thưa cô bạn Đông và bạn Nam không vẽ ạ.

Cô giáo biết một trong ba câu trên là nói dối bèn phạt hai em về tội vẽ bậy hoặc nói dối. Các bạn hãy tìm xem cô giáo đã phạt những ai ?

NGÔ HÂN

TẬP MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN

(Tiếp theo trang 12)

Ta chỉ cần chứng minh $\sum A_iO^2$ là hằng số, từ đó suy ra dự đoán 2.

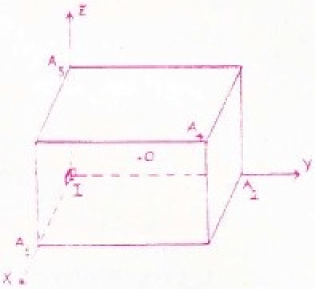
Ta có :

$$\overrightarrow{OA_1} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \overrightarrow{OA_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OA_3} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \overrightarrow{OA_4} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} A_iO^2 = \sum_{i=1}^{4} (\vec{e}\,.\,\overrightarrow{OA_i})^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Nhận xét. Gọi S_i là diện tích mặt đối diện với A_i trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Trên OA_i chọn điểm M_i sao cho $OM_i = S_i$. Gọi S_i' là diện tích hình chiếu của S_i xuống mặt phẳng (P) bất kỳ, có pháp vecteur đơn vị là $\vec{e}$. Khi đó :



$$S_i' = S_i \mid cos(\vec{e}\,.\,\overrightarrow{OM_i}) \mid = \mid \vec{e}\,.\,\overrightarrow{OM_i} \mid$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{4} S_i'^2 = \sum_{i=1}^{4} (\vec{e}\,.\,\overrightarrow{OM_i})^2$$ tổng này không phụ thuộc $\vec{e}$ (theo chứng minh dự đoán 2) do đó ta có : "Tổng bình phương diện tích hình chiếu 4 mặt của tứ diện đều xuống mặt phẳng bất kỳ, chỉ phụ thuộc kích thước tứ diện đó".

Qua đây chắc các bạn cũng dễ đồng ý với tôi rằng : tìm được lời giải nêu bật được đặc điểm cơ bản quyết định cho sự đúng đắn trong kết luận của đề toán đó là một công việc đáng quí, bởi vì từ lời giải như vậy ta mới dễ dàng phát hiện ra những kết quả mới tương tự, tổng quát hoặc đặc biệt hơn.

Cuối cùng, mời các bạn chứng minh :

1. Tổng bình phương hình chiếu 6 cạnh của một tứ diện đều xuống một đường thẳng bất kỳ hoặc một mặt phẳng bất kỳ đều chỉ phụ thuộc kích thước tứ diện đó.

2. Tổng bình phương khoảng cách từ 4 đỉnh của một tứ diện đều đến một mặt phẳng quay quanh tâm O của tứ diện đó. Chỉ phụ thuộc kích thước của tứ diện.

3. Hình lập phương cũng có tất cả các tính chất như hình tứ diện mà các bạn vừa thấy trong toàn bộ bài viết này.

4. Hình bát diện đều cũng có những tính chất tương tự.

5. Những đa diện đều khác thì sao ?

ISSN : 0866 – 8035 Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục **Giá : 2000đ**
Chỉ số 12884 In tại Xưởng in Nhà xuất bản Giáo dục **Hai nghìn đồng**
Mã số : 8BT23M5 In xong và nộp lưu chiểu tháng 11/ 1995.