BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

10 (220)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

50 UNITED NATIONS 1945 - 1995

Học sinh Việt Nam thi tin học Quốc tế 1995. Từ trái sang phải :
Phan Thị Thu Hương, Phạm Bảo Sơn, Lê Sĩ Quang, Lê Thụy Anh, Bùi Thế Duy

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : THANH LONG

ISSN : 0866 – 8035
Chỉ số 12884
Mã số : 8BT22M5

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục
In tại Xưởng in Nhà xuất bản Giáo dục
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 / 1995.

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng

NGUYÊN TẮC DIRICHLET với một số bài toán hình học

HÀ ĐỨC VƯỢNG *(Nam Hà)*

Nguyên tắc mang tên nhà toán học người Đức: Dirichlet (1805 – 1859), được phát biểu như sau:

Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi lồng có không quá 2 con thỏ.

Ở đây ta chỉ thấy có hai đối tượng là "lồng" và "thỏ". Những người làm toán đã khéo léo từ những đối tượng khác nhau dựng thành những "chiếc lồng" và những "chú thỏ" để vận dụng nguyên tắc Dirichlet, tìm ra lời giải của bài toán khá nhanh và khá lí thú. Ở các bài toán số học ta đã gặp khá nhiều bài toán giải bằng cách vận dụng nguyên tắc này. Do đó trong khuôn khổ của bài viết này chúng ta đề cập đến việc vận dụng nguyên tắc Dirichlet để giải các bài toán hình học:

Để dễ hiểu và dễ vận dụng nguyên tắc này, ta phát biểu nó dưới dạng sau đây :

k, m, n là các số nguyên dương thỏa mãn $km < n$. Nếu nhốt n thỏ vào m lồng thì tồn tại ít nhất một lồng được nhốt không ít hơn $k + 1$ thỏ.

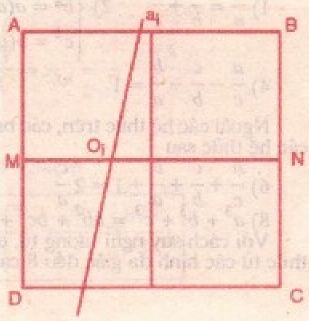
Bài toán 1. Trong hình vuông cạnh 1, ta lấy 51 điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tìm được ít nhất 3 điểm nằm trong một hình tròn bán kính $R = \frac{1}{7}$

Giải : Ta chia hình vuông thành 25 hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{1}{5}$. Ta coi 51 điểm là 51 thỏ và 25 hình vuông cạnh $\frac{1}{5}$ là 25 lồng. Ta có 2.25 < 51. Vậy theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất có 3 điểm thuộc một hình vuông cạnh $\frac{1}{5}$. Hình tròn ngoại tiếp hình vuông này có bán kính $R = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$ ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 2. Trong mặt phẳng cho hình vuông. Người ta vẽ 9 đường thẳng sao cho mỗi đường thẳng chia hình vuông thành 2 tứ giác có tỉ số diện tích $\frac{2}{3}$.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 3 đường thẳng đồng quy.

Giải : Vì đường thẳng a_i ($i = 1, ..., 9$) chia hình vuông $ABCD$ thành 2 tứ giác nên a_i không thể đi qua đỉnh hình vuông và khi đó mỗi tứ giác là một hình thang vuông. Gọi M, N thứ tự là trung điểm AD và BC (hình vẽ). a_i cắt MN tại O_i. Từ công thức tính diện tích và tính chất của đường trung bình hình thang ta có $O_i M / o_i N = 2/3$. Do tính chất đối xứng của hình vuông nên có 4 điểm O_i (như hình vẽ)



Ta coi 9 đường thẳng là 9 thỏ và 4 điểm O_i ($i = 1, ..., 4$) là 4 lồng. 2.4 < 9. Vậy theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng được nhốt 3 thỏ. Hay ít nhất 3 trong các đường thẳng đó đồng quy.

Bài toán 3. Cho đa giác lồi n – Cạnh ($n \geqslant 5$) được đặt trong hệ tọa độ vuông góc. Biết 5 đỉnh của đa giác có tọa độ là những số nguyên, hãy chứng minh rằng ít nhất có một điểm thuộc miền trong hoặc trên cạnh của đa giác có tọa độ là các số nguyên.

Giải : Chia tập hợp T gồm tất cả các điểm có tọa độ là những số nguyên thành 4 tập sau :

Tập T_1 gồm tất cả các điểm có tọa độ (x, y) mà x chẵn và y chẵn. Tập T_2 gồm tất cả các điểm có tọa độ (x, y) mà x chẵn và y lẻ. Tập T_3 gồm tất cả các điểm có tọa độ (x, y) mà x lẻ và y lẻ. Tập T_4 gồm tất cả các điểm có tọa độ (x, y) mà x lẻ và y chẵn.

Ta coi các tập T_1, T_2, T_3, T_4 là các lồng và 5 đỉnh có tọa độ nguyên của đa giác là những chú thỏ. Do 1.4 < 5 nên theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất 1 lồng được nhốt ít nhất 2 thỏ. Hay, ít nhất có 2 đỉnh $A_i\ (x_i, y_i)$ và $A_j\ (x_j, y_j)$ mà x_i, x_j có cùng tính chẵn lẻ ; y_i, y_j có cùng tính chẵn lẻ. Suy ra trung điểm M của đoạn A_iA_j có tọa độ $\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2}\right)$ là những số nguyên.

Vì đa giác là lồi nên M hoặc là điểm thuộc miền trong hoặc là điểm nằm trên cạnh của đa giác.

Tuy nhiên khi vận dụng nguyên tắc Dirichlet bạn cũng cần lưu ý : Nguyên tắc này không cho phép ta chỉ ra "lồng nào" nhốt mấy con thỏ.

Sau đây là một số bài toán dành cho bạn đọc tự giải :

1. Trên mặt phẳng cho 6 điểm tùy ý, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta nối 2 trong các điểm đã cho với nhau bằng một đoạn thẳng có màu đỏ hoặc màu xanh.

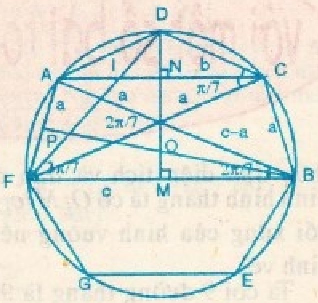
Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác có 3 cạnh là 3 đoạn thẳng cùng màu.

2. Chứng minh rằng một mặt phẳng cắt một khối tứ diện tạo thành 2 phần, thì mặt phẳng đó cắt nhiều nhất 4 cạnh tứ diện và ít nhất là cắt 3 cạnh của tứ diện.

3. Một rừng thông mọc trên lô đất hình vuông cạnh 1km. Biết rằng tất cả rừng có 4500 cây thông, mỗi cây chu vi 50cm. Chứng minh rằng có thể chọn trong khu rừng đó 60 mảnh đất hình chữ nhật có kích thước 10m × 20m, mà trong đó không có một cây thông nào mọc.

SUY NGHĨ TỪ MỘT HÌNH THẤT GIÁC ĐỀU

MAI XUÂN THẮNG
(Thái Bình)



Trong 1 lần suy nghĩ về các tính chất của hình đa giác đều 7 cạnh ; tôi thấy từ đó có thể suy ra 1 số bài toán thú vị về các hệ thức trong tam giác. Thật vậy :

Giả sử $ADCBEGF$ là đa giác đều nội tiếp đường tròn tâm O. Ta thấy mỗi cạnh của đa giác trương 1 cung là $\frac{2\pi}{7}$ và góc nội tiếp chắn cung này là $\frac{\pi}{7}$. Nếu gọi cạnh của đa giác là a và $AB=c$, $AC = b$. Gọi I là giao điểm của AC và FD. Nối OD cắt AC ở N và BF ở M. Từ đó suy ra $OD \perp AC$; $OD \perp BF$; đồng thời N, M là trung điểm của AC, BF. Gọi K là giao điểm của AB và CF suy ra $K \in OD$. Ta thấy tứ giác $ACBF$ là hình thang cân và $\widehat{AKF} = \widehat{KAC} + \widehat{ACK} = \frac{2\pi}{7}$

Mà $AFK = \frac{2\pi}{7} \Rightarrow \Delta AKF$ cân ở A và $AK = KC = AF = a$

$\Rightarrow KF = KB = c - a$ và $BF = CF = AB = c$

Trong ΔKNC vuông ta có : $\cos\frac{\pi}{7} = \frac{NC}{KC} = \frac{b}{a}$ (1)

Trong ΔKMB ta có : $\cos\frac{\pi}{7} = \frac{BM}{BK} = \frac{c}{2(c-a)}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{b}{2a} = \frac{c}{2(c-a)} \Leftrightarrow bc - ab = ac \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow bc = ab + ac \Leftrightarrow \frac{bc}{abc} = \frac{ab+ac}{abc} \Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ (3)}}$

Vậy ta có bài toán sau :

Bài 1 : Trong ΔABC có $BC = a$, $AC = b$, $BA = c$ và $4\hat{A} = 2\hat{B} = \hat{C}$

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(Đề 137 và đề 107 của bộ đề tuyển sinh môn Toán)

Tiếp tục suy nghĩ ta có : CI là phân giác của $\widehat{DCF} \Rightarrow \frac{ID}{IF} = \frac{CD}{CF} = \frac{a}{c} \Rightarrow ID = \frac{ab}{a+c}$.

Đồng thời $\widehat{CID} = \widehat{DCF} = \frac{2\pi}{7} \Rightarrow \Delta IDC \backsim \Delta CDF$.

$\Rightarrow \frac{ID}{CD} = \frac{DC}{DF} \Leftrightarrow DC^2 = ID.DF$ hay $a^2 = \frac{ab^2}{a+c} \Leftrightarrow b^2 = a(a+c)$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - \frac{c}{b}$ (4)

Mặt khác, trong ΔFDC có

$\cos\widehat{DFC} = \frac{MF}{DF} \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{c}{2b}$ (5)

Gọi D là trung điểm của $AF \Rightarrow BP \perp AF$ và có $\cos\widehat{BAP} = \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{AP}{AB} = \frac{a}{2c}$. vậy : $\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{a}{2c}$ (6)

Từ (1), (5) và (6) ta có :

$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$ (7)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \left(\frac{b}{a} - \frac{c}{b}\right) + \frac{a}{c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (8)

Từ đó : $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ (9)

(Thay (8) vào (7) ta có hệ thức 9). Vậy ta có bài toán :

Bài 2 : Trong ΔABC có $4\hat{A} = 2\hat{B} = \hat{C}$. Chứng minh rằng :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{a) } \frac{a}{c} - \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 1 ; \\ &\text{b) } \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \text{ (9)} \end{aligned}}$$

(Thi vô địch toán quốc tế tại Ba Lan)

Tiếp tục khai thác các quan hệ giữa a, b, c ta có :

$(4) \Leftrightarrow b^2 = (a(a+c) \Leftrightarrow b^2 - a^2 = ac \Leftrightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{a}{b-a}$ (*)

$(3) \Leftrightarrow ab + ac = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{b}$ (**)

Từ (*) và (**) ta có $\frac{a+b}{c} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c^2 = b(a+b)$ (10)

Lại thấy :

$$\left.\begin{aligned} (10) &\Leftrightarrow \frac{c-b}{a} = \frac{b}{c+b} \\ (3) &\Leftrightarrow \frac{b}{c+b} = \frac{a}{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{c-b}{a} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a^2 = c(c-b) \text{ (11)}$$

$$\left.\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \frac{c}{a} = 1 + \frac{c}{b} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 - \frac{a}{c} \\ \text{và } & -\frac{b}{c} = -\frac{b}{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2 + \left(\frac{c}{b} - \frac{a+b}{c}\right) = \\ &= 2 + \frac{c^2 - b(a+b)}{bc} = \\ &= 2 + 0 = 2 \text{ (Theo (10))} \end{aligned}$$

Vậy ta lại có hệ thức : $\boxed{\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2 \text{ (12)}}$

Khi đó (8) $\Leftrightarrow$

$\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} - 2 \times 2 = 1$ (Theo 12) $\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = 5$ (13)

$(13) \Leftrightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + \left(\frac{a}{2c}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7} = \frac{5}{4} \text{ (14)}}$

Từ (14) ta có bài toán.

Bài 3 : Trong ΔABC có $4\hat{A} = 2\hat{B} = \hat{C}$ thì $\cos^2 A + \cos^2 B = \cos^2 C = \frac{5}{4}$.

(Đề 137 – Bộ đề tuyển sinh môn Toán)

Để kết thúc bài viết này, tôi chỉ muốn nói với các bạn rằng : chỉ bằng kiến thức phổ thông cơ sở đôi khi cũng có thể giải được các bài toán của cấp PTTH. Nếu ta chịu khó suy luận toán học và rèn luyện tư duy lôgic từ một bài toán cụ thể. Tuy nhiên các đẳng thức trên có thể chứng minh dễ dàng bằng lượng giác chẳng hạn :

$\cos\frac{\pi}{7} = -\cos\frac{8\pi}{7} = 1 - 2\cos^2\frac{4\pi}{7}$; $\cos\frac{2\pi}{7} = 2\cos^2\frac{\pi}{7} - 1$

$\cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{4\pi}{7} = 1 - 2\cos^2\frac{2\pi}{7}$

Khi đó : $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} =$

$= 3 - 2\left(\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7}\right)$ (15)

Thay (9) vào (15) ta có : $\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7} = \frac{5}{4}$ (kết quả của 14)

Tóm lại : Trong tam giác ABC có $4\hat{A} = 2\hat{B} = \hat{C} = \frac{4\pi}{7}$ thì ta có các hệ thức giữa các cạnh a, b, c như sau :

1) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 2) $\begin{cases} a^2 = c(c-b) \\ b^2 = a(a+c) \\ c^2 = b(a+b) \end{cases}$ 3) $\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2$

4) $\frac{a}{c} - \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = 1$ 5) $\frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 5$

Ngoài các hệ thức trên, các bạn có thể tự chứng minh được các hệ thức sau

6) $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2\frac{c}{a}$ 7) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{2b}{a}$

8) $a^3 + b^3 + c^3 = ab^2 + bc^2 + ca^2$.

Với cách suy nghĩ tương tự, chúng ta có thể tìm tòi các hệ thức từ các hình đa giác đều 8 cạnh, 12 cạnh, 18 cạnh...

Bài T1/216 : *Tìm 6 chữ số tận cùng của 5^{21}*

Lời giải (của bạn *Nguyễn Anh Tuấn* 6T Bỉm Sơn Thanh Hóa *Nguyễn Trần Phương* 9A Nghi Xuân, Nghi Lộc, Nghệ An)

Ta có $5^{15} = (125)^5 \equiv (-3)^5 \equiv 13 \pmod{2^6}$

Vậy $5^{15} = 2^6k + 13$

Suy ra $5^{21} = 10^6k + 13.5^6$.

Vậy 6 chữ số tận cùng của 5^{21} là 6 chữ số tận cùng của $13.5^6 = 13.15625 = 203125$.

Nhận xét : Bài này được rất nhiều bạn tham gia giải và cho đáp số đúng. Tuy nhiên nhiều bạn giải còn dài dòng. Có hai bạn giải bằng cách "kiên trì" tính 5^{21}. Một bạn cho kết quả $5^{21} = 476837158203125$. Bạn kia cho kết quả $5^{21} = 54964168203125$. Các bạn có lời giải tốt là : *Trần Long Trọng* (Bỉm Sơn Thanh Hóa), *Nguyễn Anh Tú* 9CT Từ Liêm Hà Nội, *Vũ Tuấn Anh*, 8, Bắc Thái, *Đào Mạnh Thắng* 9B, Vĩnh Phú, *Phạm Thị Vân Giang*, 8A, Minh Hải, *Trần Thành Sơn*, 7CT, Ninh Bình, *Nguyễn Minh Hòa*, 7A, Chu Văn An Hà Nội, *Lương Hữu Khoa Luật*, 7 Toán, Quảng Ngãi, *Phạm Bảo Châu*, 6T Bà Rịa – Vũng Tàu, *Lê Hoành Thân* 9 Đắc Lắc v.v.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/216 : *Giải phương trình :*

$$(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$$

Lời giải : (của *Trần Tuấn Anh*, 7T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa.)

Đặt $y = x + 4$ phương trình trở thành :

$(y-2)^2 + (y-1)^3 + y^4 = 2$

$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + y^4 = 2$

$\Leftrightarrow y^4 + y^3 - 2y^2 - y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow y^4 + y^3 - y^2 - (y^2 + y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 + y - 1) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \\ y^2 + y - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Giải các phương trình này ta được

$$y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, y_4 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Từ đó ta rút ra phương trình có 4 nghiệm số là :

$$x_1 = -3, x_2 = -5, x_3 = \frac{-9+\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{-9-\sqrt{5}}{2}$$

Nhận xét : Rất nhiều bạn có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt. *Vũ Tuấn Anh*, 8T, NK Thái Nguyên ; *Nguyễn Văn Mạnh*, 9T, NK Bắc Thái ; *Đặng Công Tiến*, 9A, NK Yên Phong ; *Nguyễn Thu Trang*, 9T, NK Bắc Giang ; *Nguyễn Thu Thủy*, 9T, NK Bắc Ninh ; *Ngô Quang Hưng*, 9A, NK Hà Bắc ; *Bùi Đăng Quang, Hà Ngọc Thành*, 8A, Chuyên Tam Đảo ; *Đỗ Minh Quân*, 8T, Chuyên Tx Phú Thọ, Vĩnh Phú ; *Phạm Hoàng Anh*, 9, Chuyên V–T Thường tín ; *Nguyễn Hà Duy*, 9T, Chuyên V–T Phú Xuyên, *Nguyễn Mạnh Hà*, 8K ; *Hồ Hồng Hải*, 9K, Lê Lợi, Hà Đông, Hà Tây; *Nguyễn Quang Tùng*, 9A, Quang Trung ; *Trần Hồng Linh ; Đỗ Quỳnh Khanh*, 8A, Chu Văn An ; *Vũ Trung Hà*, 8A ; *Đào Phương Nam, Đào Phương Bắc*, 7A, Bế Văn Đàn ; *Triệu Trần Đức*, 8A, Trưng Nhị ; *Đào Thanh Bình*, 9A$_1$, Giảng Võ ; *Nguyễn Sỹ Phong, Lê Quý Sơn*, 9A, Chuyên ngữ, Từ Liêm ; *Phạm Quang Vinh*, 9C, Ngọc Lâm, Gia Lâm ; *Phạm Thế Anh*, 8CT, Nghĩa Tân, Từ Liêm ; *Dương Việt Hùng*, 9A, Nguyên Khê; *Đỗ Minh Châu*, 9T, Chuyên Đông Anh, Hà Nội ; *Ngô Thanh Tùng*, 7T, Hồng Bàng ; *Bùi Hải Nam*, 8A, Lê Hồng Phong ; *Đoàn Mạnh Hà*, 9A, Tiên Lãng, Hải Phòng ; *Bùi Huy Cường*, 8A, Ngô Gia Tự ; *Hoàng Xuân Quý*, 9T, NK Thanh Hà, Nam Thanh ; *Phạm Văn Hải*, 9T, NK Hải Hưng ; *Vũ Thanh Tùng*, 9T, *Phạm Huy Quang*, Đông Hưng ; *Cao Thị Ly*, NK Vũ Thư ; *Nguyễn Thiều Hoa*, 9T, NK Hưng Hà ; *Đoàn Nhật Dương*, 9T, NK Thái Thụy ; *Vũ Duy Hinh*, 9A, Chuyên Quỳnh Phụ ; *Nguyễn Văn Ngọc*, 9A, Đề Thám, Thị xã Thái Bình ; *Trần Minh Toàn*, 8T, Trần Đăng Ninh, *Lê Hữu Đoan*, 9A, Hoàng Văn Thụ, Nam Định ; *Nguyễn Việt Anh*, 9T, NK Ý Yên ; *Nguyễn Thùy Linh, Trần Hoài Thanh*, 8, Tx Hà Nam, Nam Hà ; *Dương Ngọc Sơn*, 8T, NK Thị xã ; *Nguyễn Thanh Sơn*, 8, NK Kim Sơn ; *Nguyễn Sơn Hà*, 9B, NK Yên Mô, Ninh Bình ; *Trịnh Quang Kiên, Trần Long Trọng*, 7CT ; *Trương Công Bằng*, 9T ; *Lê Hoàng Dương*, 8T, *Đỗ Minh Hoàng*, 9T, NK Bỉm Sơn ; *Lê Văn Lịch*, 9, Thiệu Trung ; *Đỗ Huy Dũng*, 9B, Thiệu Vân, Đông Sơn ; *Trịnh Tuấn Hùng*, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Trần Thị Phương Huyền*, 7T, NK ; *Võ Thị Thanh Tú*, 8T, Thị trấn Quán Hành ; *Lê Hải Âu*, 8T, NK Nghi Lộc ; *Nguyễn Viết Đại* ; Nông trường Trịnh Môn, Quỳnh Lưu ; *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A, Lê Mao ; *Vương Vũ Hiệp*, 9C, NK TP Vinh ; *Nguyễn Thịnh*, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Nguyễn Thái Khanh*, 8T, NK Thạch Hà ; *Nguyễn Phương Đông*, 8, NK Hồng Lĩnh ; *Phạm Quang Hùng*, 8, NK Hương Sơn, Hà Tĩnh ; *Nguyễn Viết Thanh*, 8C, Lộc Ninh, *Nguyễn Công Chức*, 8/1, Đông Mỹ, Đồng Hới, Quảng Bình ; *Hồ Ngọc Văn Chương*, 9/2, Thành Cổ ; *Trần Ngọc Lưu, Nguyễn Hữu Nghị*, 9, Chuyên Quảng Trị ; *Nguyễn Phạm Phương Thảo, Trần Như Quang*, 9I, Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên – Huế ; *Lê Hoành Thân*, 9, Krông Năng, Đak Lak. *Lê Tự Nhiên*, 9A, Nguyễn Văn Trỗi, Điện Bàn ; *Lê Kiêm Ái*, 8/1, Trưng Vương ; *Nguyễn Hoàng Thành*, 8/2, Nguyễn Huệ, TP Đà Nẵng, Quảng Nam – Đà Nẵng ; *Lương Hữu Khoa Luật*, 7T, Chuyên Nghĩa Hành ; *Huỳnh Minh Sơn*, 7T; *Lê Quang Nẫm*, 9T, Chuyên Đức Phổ ; *Phạm Phú Nhã Uyên, Võ Chí Thành, Lê Phú Thành*, 9T, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Nguyễn Minh Học*, 8A, Tân Quan Nam, Hoài Nhơn ; *Nguyễn Minh Trung*, 8A, Nhơn Phong, An Nhơn ; *Bùi Văn Hiếu*, 8A, Quốc học Quy Nhơn, Bình Định ; *Trần Văn Nghĩa*, 9A, Lương Văn Chánh, Phú Yên; *Nguyễn Trang Đăng Khoa*, 9T, Biên Hòa ; *Nguyễn Khánh Sơn*, 8, Biên Hòa, Đồng Nai ; *Vũ Nhật*, 8A$_1$, Hồng Bàng ; *Ngô Xuân Huy*, 9$_1$, Colette ; *Lê Thanh Tùng*, 9A$_4$, Đoàn Thị Điểm ; *Võ Quang Tuấn Thọ*, 9A, Trương Công

Định, TP. Hồ Chí Minh; *Trần Hữu Nhơn*, 9T, Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long ; *Ngô Thanh Hùng*, 9_7 Nhựt Tảo, Tân An ; *Lại Quốc Đạt*, 8_1, Phước Vân, Cần Đước, Long An ; *Dương Hải Đăng* 8/1, Lý Tự Trọng, Tx Trà Vinh, Trà Vinh ; *Phạm Thị Vân Giang* 8A, Chuyên Bạc Liêu, Minh Hải.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/216 *Chứng minh bất đẳng thức :*

$$\sqrt[4]{1-a^2} + \sqrt[4]{1-a} + \sqrt[4]{1+a} < 3 \text{ với } |a| < 1$$

Lời giải Do $|a| < 1$ nên các biểu thức trong các dấu căn đều dương, và các căn thức của chúng đều dương, và ta có thể áp dụng định lí Cô-si để có :

$$\sqrt[4]{1-a^2} \leq \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{2}$$

$$\sqrt[4]{1-a} \leq \frac{1+\sqrt{1-a}}{2}$$

$$\sqrt[4]{1+a} \leq \frac{1+\sqrt{1+a}}{2}$$

Từ đó, ta có : $\sqrt[4]{1-a^2}+\sqrt[4]{1-a}+\sqrt[4]{1+a} \leq$ $\leq 1+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}$

Áp dụng tiếp định lí Cô-si, ta lại có $1+\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a} \leq$

$1+\dfrac{1+(1+a)}{2}+\dfrac{1+(1-a)}{2} = 3$. Từ đó, suy ra đpcm.

Nhận xét Có 163 bài giải, trừ một bài giải sai, còn lại đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Lê Tự Nhiên* (9A, Nguyễn Văn Trỗi, Quảng Nam – Đà Nẵng) ; *Trần Hoài Thương* (9, NK Hà Tĩnh) ; *Đỗ Đức Hạnh* (9M Marie Curie, Hà Nội) ; *Nguyễn Hồng Quang* (9, Nguyễn Hữu Huân, TP HCM) ; *Đoàn Mạnh Hà* (9A THCS Tiên Lãng, Hải Phòng)

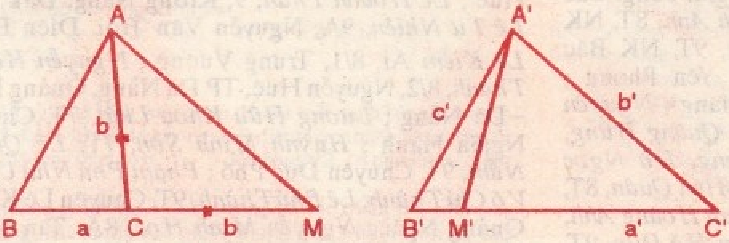
ĐẶNG VIÊN

Bài T4/216 : *Cho hai tam giác ABC và AB'C' trong đó* $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{A} + \hat{A'} = 180^o$. *Chứng minh rằng :*

$(a+b)(a'-b') = c.c'$

$(a = BC, b = CA, c = AB, a' = B'C',$
$b' = C'A', c' = A'B'$ *với* $a' > b')$

Lời giải : Lấy M trên đường thẳng BC sao cho C nằm giữa B, M và $AC = CM$. Lấy M' trên đường thẳng $B'C'$ sao cho M' nằm giữa $B'C'$ và $C'A = C'M'$



Ta có : $\widehat{B'A'M'} = \widehat{A'M'C'} - \widehat{A'B'C'}$

$= \dfrac{\widehat{B'A'C'} + \widehat{A'B'C'}}{2} - \widehat{A'B'C'}$

(Do $\widehat{A'M'C'} = \widehat{B'A'M'} + \widehat{A'B'C'}$)

$= \dfrac{180^o - \hat{A} - \hat{B}}{2}$ (Do $\hat{A} + \hat{A'} = 180^o$)

$= \dfrac{\hat{C}}{2} = \widehat{AMB}$ (Do ΔACM cân)

Mặt khác $\hat{B} = \hat{B'}$. Từ đó $\Delta ABM \backsim \Delta M'B'A'$

Suy ra $\dfrac{AB}{M'B'} = \dfrac{BM}{A'B'}$ hay $c.c' = (a'-b')(a+b)$

Nhận xét :

1) Lời giải trên của bạn *Nguyễn Thịnh*, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An.

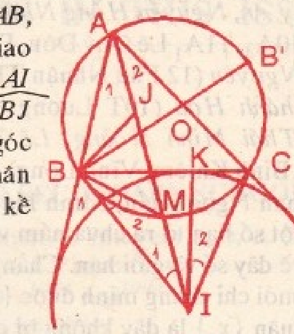
2) Nhiều bạn khác có lời giải tốt, đó là : *Đoàn Mạnh Hà*, 9A THCS Tiên Lãng, Hải Phòng; *Nguyễn Thanh Bình*, 9TL, NK Hải Hưng, *Đào Mạnh Thắng*, 9B Chuyên Việt Trì, *Hà Ngọc Thành*, 8A Chuyên Tam Đảo, Vĩnh Phú; *Nguyễn Thu Hằng*, 8 NK Bắc Ninh, Hà Bắc; *Đoàn Nhật Dương*, 9T PTCS NK Thái Thụy, Thái Bình; *Nguyễn Mạnh Hà*, 8K, cấp II Lê Lợi, Hà Đông, Hà Tây; *Trần Đức*, 8A, THCS Trưng Nhị; *Lê Thành Nam*, 9A, *Đào Phương Bắc*, *Đào Phương Nam*, 9A, Bế Văn Đàn, *Đỗ Quỳnh Khanh*, 8A Chu Văn An, *Nguyễn Quang Lộc* 8CT Từ Liêm; *Nguyễn Sỹ Phong* 9A chuyên NN; *Nguyễn Quang Tùng* 9A THCS Quang Trung; *Trần Anh Sơn*, 9M Mari Quyri; *Đỗ Minh Châu*, 9T chuyên cấp II Đông Anh, Hà Nội; *Đỗ Ngọc Anh*, 9T, *Đoàn Đại An*, 9A Nguyễn Hiền, Nam Ninh; *Văn Thừa Trí*, 9T; *Vũ Trần Cương*, *Trần Minh Toàn*, 8T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, *Nguyễn Tiến Hòa*, 7T, NK Bỉm Sơn, *Đỗ Cao Trung*, 9T Hoằng Hóa, *Mai Thanh Huyền* 9T NK Nga Sơn, *Nguyễn Hữu Tuấn* 8D, NK Thanh Hóa, *Châu Văn Đồng*, 9T Phan Bội Châu, Vinh, *Đinh Thị Thanh Hải*, 9 NK Nam Đàn, Nghệ An, *Nguyễn Phương Đông*, 8 NK Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh, *Nguyễn Công Chức*, 8/1 THCS Đồng Mỹ, Đồng Hới, Quảng Bình, *Nguyễn Phạm Phương Thảo*, 9^1 Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên – Huế, *Lê Tự Nhiên* 9A, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Điện Bàn, Quảng Nam – Đà Nẵng, *Nguyễn Minh Học*, 8A THCS Tam Quan Nam, Hoài Nhơn, Bình Định, *Nguyễn Trung Kiệt*, 9T Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Nguyễn Trang Đăng Khoa*, 9T Bồi dưỡng Giáo dục Biên Hòa, Đồng Nai, *Ngô Xuân Huy*, 9_1 Colette *Nguyễn Viết Cường* 9T, Hoàng Văn Thụ, Q10, *Vũ Đức Phú*, 9T, Nguyễn Du, Gò Vấp, *Huỳnh Tường Nguyên*, 12, Phú Nhuận, *Trần Hữu Nhơn*, 9T, Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long, *Lại Quốc Đạt*, 81 PTCS Phước Vân, Cần Đước, Long An.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/216. *Gọi* $(O\ ;\ R)$, $(I\ ;\ r_a)$ *lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng :*

$IA.IB.IC = 4R.r_a^2$

Lời giải. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ; IH, IK là các đường vuông góc hạ từ I lần lượt xuống AB, BC ; M là giao điểm thứ hai của AI với (O). Ta có $\widehat{IBJ} = \widehat{ICJ} = 90^o$ (góc tạo bởi các phân giác của hai góc kề bù). Ta có :



$\hat{I}_1 = \hat{B}_1 - \hat{A}_1 = \dfrac{\widehat{CBH}}{2} - \hat{A}_1 =$

$\dfrac{180^o - \hat{A} - \hat{C}}{2} - \hat{A}_1 = 90^o - \dfrac{\hat{C}}{2}$

$= 90^o - \hat{C}_1 = \hat{I}_2$.

Hơn nữa $\widehat{IBJ} = 90^o = \widehat{IKC}$, nên $\Delta IBJ \backsim \Delta IKC$, và ta có $\dfrac{IB}{IK} = \dfrac{IJ}{IC}$, hay $IB.IC = IK.IJ = IJ.r_a$ (1). Mặt khác, trong tam giác MBJ, ta lại có $\widehat{JBM} = \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{A}}{2}$ và $\widehat{JMB} = \hat{C}$ nên còn lại $\widehat{BJM} = 180^o - \left(\hat{C} + \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{A}}{2}\right) = \dfrac{\hat{B}}{2} + \dfrac{\hat{A}}{2} = \widehat{JBM}$, nên ΔMBJ cân đỉnh M. Như trên, $\widehat{JBI} = 90^o$ nên $\hat{B}_2 = 90^o - \widehat{JBM} = 90^o - \widehat{BJM} = \hat{I}_1$ và ΔMBI cân đỉnh M. Suy ra $MI = MJ = MB$ hay $IJ = 2MJ = 2MB$. Kẻ đường kính BOB', ta có : $\widehat{MB'B} = \hat{A}_1$ và $\widehat{BMB'} = 90^o$, nên $\Delta MBB' \backsim \Delta HIA$, suy ra $\dfrac{IA}{BB'} = \dfrac{MB}{HI}$ hay

$IA.HI = BB'.MB$. Vậy $IA.r_a = 2R.\dfrac{IJ}{2}$ (2)

Kết hợp (1) với (2), ta có $IA.IB.IC = 4R.r_a^2$ (đpcm).

Nhận xét. Có 58 bài giải, tất cả đều giải đúng. Một số không ít bạn dùng các công thức lượng giác chưa được trình bày ở THCS. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Minh Học* (8A – THCS Hoài Nhơn, Bình Định), *Nguyễn Anh Tú* (9CT, Nghĩa Tân, Từ Liêm – Hà Nội), *Vũ Thanh Tùng* (9T – Đông Hưng, Thái Bình).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/216. *Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng số $5^p - 2^p$ không thể biểu diễn dưới dạng a^m trong đó a, m là các số tự nhiên và $m > 1$.*

Lời giải : (Của bạn Đàm Khánh Hòa 10T, Phú Yên và Phạm Thế Hùng 6CT Nghĩa Tân, Hà Nội).

Với $p = 2, 3$ thử trực tiếp ta có khẳng định đúng. Xét $p > 3$. Giả sử $5^p - 2^p = a^m$. Ta có $5^p - 2^p = 3(5^{p-1} + 5^{p-2}2 + ... + 2^{p-1}) = 3.B$ Ta có $5 \equiv -1$ (mod 3)

$2 \equiv -1$ (mod 3)

Vậy $5^{p-1-i}2^i \equiv (-1)^{p-1-i}(-1)^i = (-1)^{p-1} = 1$ (mod 3) (với mọi $i = 0, 1, 2, ..., p-1$) do $p-1$ chẵn.

Vậy $B \equiv P$ (mod 3)

Vì $a^m = 3B \rightarrow a \vdots 3$. Vì $m > 1 \rightarrow a^m \vdots 9 \rightarrow B \vdots 3 \rightarrow p \vdots 3$ vô lý vì p nguyên tố.

Nhận xét. Nhiều bạn tham gia giải và giải tốt bài này, trong số đó là các bạn : *Đỗ Minh Châu*, 9T, Đông Anh, Hà Nội, *Nguyễn Thanh Hoài*, 9T, *Trần Long Trọng*, 7T, Thanh Hóa, *Nguyễn Khánh Quỳnh* $10A_o$, Nghệ An, *Nguyễn Huyền Trang* 10CT, ĐHTH, Hà Nội, *Lê Anh Minh* 8T Quảng Ngãi, *Hà Ngọc Thành* 8A chuyên Tam Đảo, Vĩnh Phú ; *Nguyễn Lê Dung*, 8T, Hà Bắc, *Đặng Hồng Toan*, 9T, Đông Hưng, Thái Bình.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/216. *Tìm số thực k lớn nhất sao cho*

$$a^3 + b^3 + c^3 + kabc \geq \frac{1}{9} + \frac{k}{27} \quad (*)$$

với mọi a, b, c ≥ 0 thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1.

Lời giải : Chọn $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ thì từ (*) ta được $k \leq 15/4$. Ta chứng minh k lớn nhất bằng 15/4, hay $a^3 + b^3 + c^3 + \dfrac{15}{4}abc \geq \dfrac{1}{9} + \dfrac{15}{4.27}\left(= \dfrac{1}{4}\right)$ (1)

Vì $a, b, c \geq 0$ nên trong ba số $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ có nhiều nhất 1 số < 0 (vì tổng của 2 số tùy ý trong 3 số đó đều ≥ 0).

Nếu $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq 0$.

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$.

Xét trường hợp cả 3 số $a + b - c$, $b + c - a$ và $c + a - b$ đều dương. Khi đó

$(a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2 =$
$= [(a + b - c)(b + c - a)][(b + c - a)(c + a - b)][(c + a - b)(a + b - c)] = [b^2 - (a - c)^2][c^2 - (a - b)^2][a^2 - (b - c)^2] \leq b^2c^2a^2$ hay

$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$ (2)

Như vậy (2) luôn luôn đúng trong mọi trường hợp.

Ta có :

$(2) \leftrightarrow (1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c) \leq abc$

$\leftrightarrow 1 - 2(a + b + c) + 4(ab + bc + ca) - 9abc \leq 0$

$\leftrightarrow \dfrac{3}{4} - 3(ab + bc + ca) + \dfrac{27}{4}abc \geq 0 \leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 3(ab + bc + ca) + \dfrac{27}{4}abc \geq \dfrac{1}{4} \leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + \dfrac{27}{4}abc \geq \dfrac{1}{4}$

$\leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + \dfrac{15}{4}abc \geq \dfrac{1}{4}$, đpcm.

Nhận xét. Có rất nhiều cách giải khác bằng cách sử dụng đạo hàm và các phép biến đổi tương đương. Rất nhiều bạn giải sai dựa trên nhận xét về tính đối xứng của biểu thức. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Minh Phương*, 9A, Minh Phương, Việt Trì, Vĩnh Phú. *Nguyễn Quang Nguyên*, 10A, Nguyễn Huệ, Hà Tây. *Trần Nguyên Ngọc*, 10B ; *Lê Tuấn Anh*, 11B, ĐHTH ; *Nguyễn Sĩ Phong*, 9A ; *Nguyễn Vũ Hưng*, 11D, Chuyên Ngữ, ĐHSPNN, Hà Nội. *Đặng Anh Tuấn*, 9T ; *Phạm Đình Trường*, *Ngô Đức Duy* ; 11CT, NK Trần Phú, Hải Phòng. *Bùi Quang Hải*, 9T, Trần Đăng Ninh, TP Nam

Định ; *Đỗ Ngọc Anh*, 9T, NK Nam Ninh, Nam Hà. *Nguyễn Hữu Tuấn*, 8D, NK Thành phố ; *Đỗ Cao Tùng*, 9T, NK Hoằng Hóa ; *Trần Xuân Giang*, *Lê Minh Thành*, 9T ; *Nguyễn Ngọc Hưng*, 10T, *Nhữ Quý Thơ*, 11T, Lam Sơn, Thanh Hóa. *Nguyễn Hồng Chung*, *Phạm Hồng Lĩnh*, *Phan Đức Lĩnh*, *Nguyễn Xuân Sơn* ; *Dương Văn Yên*, 10T, NK Phan Bội Châu, Nghệ An. *Phan Duy Tùng*, 11CT, Quảng Bình. *Cao Thế Anh*, 10CT, *Đoàn Xuân Vinh*, *Nguyễn Thị Hải Yến*, 11CT, Quốc học Huế, Thừa Thiên – Huế.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/216 : Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn $x_1 = 1$ và $(n+1)(x_{n+1}-x_n) \geqslant 1 + x_n\ \forall n \geqslant 1\ (n \in N)$.
Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ không bị chặn.

Lời giải : Từ giả thiết của bài ra dễ dàng có :

$$x_{n+1} \geqslant x_n + \frac{1+x_n}{n+1}\ \forall n \in N^*\ (1).$$

Bằng quy nạp theo n ta sẽ chứng minh $x_n \geqslant n (2)$ $\forall n \in N^*$.

Với $n = 1$ có $x_1 = 1$ và do đó (2) đúng với $n = 1$.

Giả sử đã có (2) với $n = k \geqslant 1$. Xét $n = k+1$, theo (1) ta có :

$$x_{k+1} \geqslant x_k + \frac{1+x_k}{k+1} \geqslant k + \frac{1+k}{k+1} = k+1.$$

Như vậy, ta cũng có (2) với $n = k+1$. Và do đó, theo nguyên lí quy nạp, ta có (2) $\forall n \in N^*$. Từ đây suy ra dãy $\{x_n\}$ không bị chặn trên và vì thế dãy $\{x_n\}$ là dãy không bị chặn. (Đpcm).

Nhận xét : 1. Đại đa số các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn đã giải bài toán theo cách trên. Các bạn sau có lời giải tốt : *THCS : Nguyễn Sỹ Phong*, *Phan Linh* (9A PT chuyên ngữ ĐHSPNN Hà Nội) ; *Trần Anh Sơn* (9M PTDL Mari Curie Hà Nội) ; *Trần Hữu Lực* (9CT THCS Quảng Trạch, Quảng Bình) ; *Nguyễn Hữu Hội* (9T Lê Khiết, Quảng Ngãi), *Lê Quang Nẫm* (9T Đức Phổ Quảng Ngãi) và *Hoàng Gia Vũ* (9T Nguyễn Du TP Hồ Chí Minh).

THPT : Nguyễn Quang Hải (A_{11CT} Hùng Vương, Vĩnh Phú) ; *Phạm Đình Trưởng* (11CT Trần Phú Hải Phòng) ; *Phạm Văn Khánh* (11T PTNK Hải Hưng) ; *Trần Hải Sơn*, *Lê Tuấn Anh* (10A và 11B khối Chuyên Toán – Tin ĐHTH Hà Nội) ; *Nguyễn Quang Nguyên* (10A Nguyễn Huệ – Hà Tây), *Trần Đức Quyền* (Lê Hồng Phong, Nam Hà) ; *Vũ Đức Sơn* (12T Lương Văn Tụy, Ninh Bình) ; *Vũ Minh Giang* ($11B_1$ Bỉm Sơn Thanh Hóa) ; *Lê Văn Cường*, *Nhữ Quý Thơ* (10T, 11T Lam Sơn Thanh Hóa) ; *Trần Hưởng Nam*, *Nguyễn Khánh Quỳnh* (PTTH Phan Đăng Lưu, Nghệ An) ; *Dương Văn Yên*, *Lê Quang Hưởng* (10T, 11T Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Hoàng Xuân Bách* (11A ĐHSP Vinh) ; *Cao Chí Anh*, *Đoàn Xuân Vinh*, *Nguyễn Thị Hải Yến* (10CT, 11CT Quốc học Huế) ; *Đào Duy An*, *Nguyễn Hồng Nhân*, *Trần Anh Tuấn* ($10A_3$, $10A_4$, $11A_1$ Lê Quý Đôn, Đà Nẵng) ; *Huỳnh Tường Nguyên* (12 Phú Nhuận TP Hồ Chí Minh) ; *Đàm Khánh Hòa* (10T Lương Văn Chánh, Phú Yên) ; *Thái Minh Hoàng*, *Lê Thái Nhân* (11T Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long) và *Trương Thuận* (12A Phan Ngọc Hiển, Minh Hải).

2. Một số bạn tỏ ra chưa nắm vững các kiến thức cơ bản về dãy số và giới hạn. Chẳng hạn, một số bạn sau khi mới chỉ chứng minh được $\{x_n\}$ là dãy tăng đã vội kết luận $\{x_n\}$ là dãy không bị chặn ! Một số bạn khác, xuất phát từ $(n+1)x_{n+1} \geqslant 1 + (n+2)x_n$ đã suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)x_{n+1}] \geqslant \lim\limits_{n\to\infty}[1+(n+2)x_n]$, mà không hề cân nhắc tới sự tồn tại của các giới hạn nói trên.

Có bạn còn cho rằng

$$\lim_{n\to\infty}[(n+1)x_{n+1}] = (n+1)\lim_{n\to\infty} x_{n+1}\ !!!$$

3. Có một bạn đã cho rằng *kết luận của đề ra là không đúng*, và đề nghị phải sửa kết luận của đề bài thành "Chứng minh rằng $\{x_n\}$ không bị chặn trên" (?!).

4. Bạn *Nguyễn Huyền Trang* (10CT ĐHTH Hà Nội) đã nêu ra bài toán tổng quát sau : "Cho các số dương a, b, α, β. Cho dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn : $x_1 = \alpha$ và $(an+b)(x_{n+1}-x_n) \geqslant \beta + x_n$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ không bị chặn".

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/216. *Giả sử M là một điểm bất kì nằm trong một tứ diện gần đều ABCD. Hạ MM_1, MM_2, MM_3 và MM_4 lần lượt vuông góc với các mặt BCD, CDA, DAB và ABC. Gọi r và ρ lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt của tứ diện này, chứng minh các bất đẳng thức sau đây :*

a) $MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2 \geqslant 4p^2 \cos A \cos B \cos C$

b) $\dfrac{r}{\rho} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

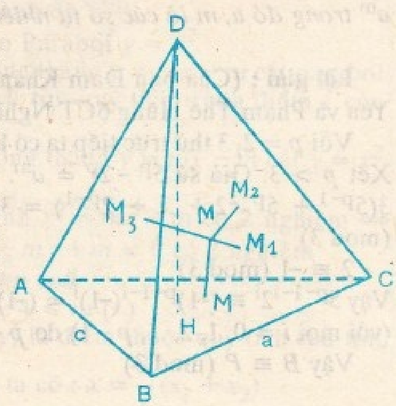
Lời giải (của nhiều bạn)

a) Vì *ABCD* là một tứ diện gần đều (các mặt bằng nhau) nên các cạnh đối diện bằng nhau :

$BC = DA = a,$
$CA = DB = b,$
$AB = DC = c.$

Sử dụng phương pháp thể tích, dễ dàng suy ra :

– Các đường cao (hạ từ các đỉnh) bằng nhau, kí hiệu là h



$MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 = h = \frac{3V}{S}$ *(1)*

trong đó V là thể tích tứ diện, S là diện tích mỗi mặt của nó. Dựng hình hộp ngoại tiếp tứ diện đã cho, hình hộp này là một hình hộp chữ nhật, từ đó dễ dàng tìm được thể tích V của tứ diện gần đều ABCD theo độ dài a, b, c của các cạnh :

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

hay là :

$$V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos A\cos B\cos C} \quad (2)$$

trong đó A, B và C là các góc của tam giác ABC.

Lại vì $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4\rho}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta được :

$$\sum_{i=1}^{4} MM_i = h = 4\rho\sqrt{\cos A\cos B\cos C} \quad (4)$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta được:

$h^2 = (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4)^2 \leq$
$\leq 4(MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2)$; (5)

Từ (4) và (5) ta được bất đẳng thức a) cần chứng minh $\sum_{i=1}^{4} MM_i^2 \geq 4\rho^2\cos A\cos B\cos C$; (a)

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi : $MM_1 = MM_2 = MM_3 = MM_4$, nghĩa là $M \equiv$ Tâm I mặt cầu nội tiếp tứ diện (nó cũng là tâm O mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm G của tứ diện.

b) Theo a), khi $M \equiv I$, ta được :

$4r^2 = 4\rho^2\cos A\cos B\cos C$

hay là : $r = \rho\sqrt{\cos A\cos B\cos C}$ (6)

Mặt khác, vì A, B và C là các góc của một tam giác nên ta có bất đẳng thức (hãy chứng minh) :

$\cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8}$ (7)

(Có thể chứng minh bất đẳng thức này từ bất đẳng thức quen thuộc : $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$)

Từ đó suy ra bất đẳng thức b) cần chứng minh $\frac{r}{\rho} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $\hat{A} = B = C$, nghĩa là $ABCD$ là một *tứ diện đều*.

Nhận xét : 1°) Các bạn tham gia giải bài toán này đều giải đúng, trừ 1 bạn chưa chỉ ra được khi nào thì các B.Đ.T. (a) cũng như (b) trở thành đẳng thức. Nên nhớ rằng để giải được câu b), phải giải được trọn vẹn câu a) vì, phải xuất phát từ đẳng thức (6) và sử dụng bất đẳng thức (7) mới chứng minh được BĐT (b).

2°) Đây là một bài toán chứng minh bất đẳng thức, dựa trên tính toán. Và để tính toán độ dài, ở đây đòi hỏi phải biết sử dụng phương pháp thể tích để tính được chiều cao của một tứ diện gần đều theo độ dài các cạnh của nó. Ngoài ra, kiến thức đại số được sử dụng chỉ là bất đẳng thức Bunhiacốpski, hoặc bất đẳng thức Côsi quen thuộc.

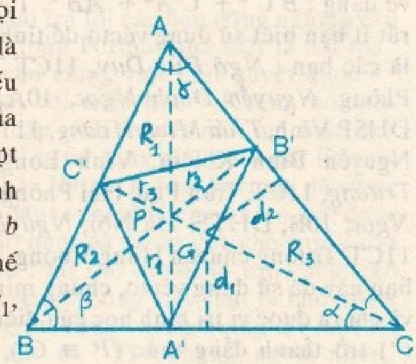
NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/216. *Giả sử P là một điểm tùy ý nằm trong tam giác ABC và α, β, γ là độ lớn các góc của tam giác đó. Ký hiệu R_1, R_2, R_3 là khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh và r_1, r_2, r_3 là khoảng cách từ P đến các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh bất đẳng thức :*

$$R_1^2\sin^2\alpha + R_2^2\sin^2\beta + R_3^2\sin^2\gamma \leq 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \ (*)$$

Khi nào đạt được dấu đẳng thức ?

Lời giải. Gọi A', B' và C' là hình chiếu (vuông góc) của điểm P lần lượt trên các cạnh $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$; thế thì : $PA' = r_1$, $PB' = r_2$, $PC' = r_3$.



Vì $PA = R_1$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C'$ nên ta có : $B'C' = R_1\sin\alpha$. Chứng minh tương tự : $C'A = R_2\sin\beta$ và $AB' = R_3\sin\gamma$. Vậy bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau :

$$B'C'^2 + C'A^2 + AB'^2 \leq 3(PA^2 + PB'^2 + PC'^2)$$

(1) Thật vậy, ta có :

$\overrightarrow{B'C'}^2 + \overrightarrow{C'A'}^2 + \overrightarrow{A'B'}^2 =$
$= (\overrightarrow{PC'} - \overrightarrow{PB'})^2 + (\overrightarrow{PA'} - \overrightarrow{PC'})^2 + (\overrightarrow{PB'} - \overrightarrow{PA'})^2$
$= 2(\overrightarrow{PA'}^2 + \overrightarrow{PB'}^2 + \overrightarrow{PC'}^2) - 2\overrightarrow{PB'}.\overrightarrow{PC'} -$
$- 2\overrightarrow{PC'}.\overrightarrow{PA'} - 2\overrightarrow{PA'}.\overrightarrow{PB'}$
$= 3(\overrightarrow{PA'}^2 + \overrightarrow{PB'}^2 + \overrightarrow{PC'}^2) - (\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'})^2$

Do đó :

$\overrightarrow{B'C'}^2 + \overrightarrow{C'A}^2 + \overrightarrow{AB'}^2 = 3(PA^2 + PB'^2 + PC'^2)$
$-(\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'})^2$; (2)

Từ (2) ta suy ra ngay (1), đồng thời :

$B'C'^2 + \overrightarrow{C'A}^2 + \overrightarrow{AB'}^2 = 3(PA'^2 + PB'^2 + PC'^2)$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'} = 0$; (3)

$\Leftrightarrow P \equiv G'$ (Trọng tâm tam giác $AB'C'$)

Nhưng $P \equiv G' \Leftrightarrow$

$s(\overset{\Delta}{PB'C'}) = s(\overset{\Delta}{PC'A'}) = s(\overset{\Delta}{PA'B'}) \left(= \frac{1}{3}s(\overset{\Delta}{A'B'C'})\right)$

$\Leftrightarrow \frac{r_1}{\sin\alpha} = \frac{r_2}{\sin\beta} = \frac{r_3}{\sin\gamma}$

$\Leftrightarrow r_1 : r_2 : r_3 = a : b : c$; (4)

Mặt khác, nếu gọi d_1, d_2, d_3 là khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC lần lượt đến các cạnh BC, CA và AB, ta có ngay hệ thức :

$ad_1 = bd_2 = cd_3 \left(= \frac{2}{3} s(ABC) \right)$, và do đó :

$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$

Từ (4) và (5) dễ dàng suy ra : $\widehat{BAG'} = \widehat{CAG}$, $\widehat{CBG'} = \widehat{ABG}$ và $\widehat{ACG'} = \widehat{BCG}$, nghĩa là AG' đối xứng với AG, BG' đối xứng với BG và CG' đối xứng với CG lần lượt qua phân giác các góc A, B và C của tam giác ABC. Vậy G' là điểm đồng quy của ba đường đối trung (*điểm Lemoine* hay còn gọi là *điểm đối trọng tâm*) của tam giác ABC. (6)

Nhận xét : 1°) Đa số các bạn biết sử dụng định lý hàm số sin, do đó đưa ngay vế trái của BĐT (*) về dạng : $B'C'^2 + C'A^2 + AB'^2$. Tuy nhiên, chỉ có rất ít bạn biết sử dụng véctơ để tính tổng trên. Đó là các bạn : *Ngô Đức Duy*, 11CT Trần Phú, Hải Phòng, *Nguyễn Danh Ngọc*, 10A_1 chuyên toán ĐHSP Vinh, *Thái Minh Hoàng*, 11T_1, T.H. chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long, *Phạm Đình Trường*, 11CT, Trần Phú, Hải Phòng, *Trần Nguyên Ngọc*, 10B, ĐHTH Hà Nội, *Nguyễn Quang Hải*, 11CT, Trường chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú. Các bạn này đã sử dụng véctơ, chứng minh (2), (3), (4) và chỉ ra được vị trí hình học của điểm phải tìm khi (*) trở thành đẳng thức ($P \equiv G'$), tuy chưa nêu được nhận xét (5) và do đó kết luận (6) cuối cùng mới chỉ là nhận xét, chưa có chứng minh cụ thể (*Ngô Đức Duy*, *Nguyễn Danh Ngọc*)

2°) Nhiều bạn không sử dụng véctơ, nhưng biết sử dụng công thức Lépnít :

$PA^2 + PB'^2 + PC'^2 = G'A^2 + G'B'^2 + G'C'^2 + 3G'P^2 = \frac{1}{3}(B'C'^2 + C'A^2 + AB'^2) + 3G'P^2$

từ đó suy ra (1) và (3). Theo hướng này, các bạn : *Viên Ngọc Quang*, *Trịnh Hữu Trung*, lớp 10T, Lam Sơn, Thanh Hóa và *Đỗ Cao Trung*, 9T, trường NK Hoằng Hóa, Thanh Hóa có lời giải tốt. Bạn *Viên Ngọc Quang* còn chứng minh được kết luận (6).

3°) Đại đa số các bạn áp dụng định lý hàm số cosin vào các tam giác $PB'C'$, $PC'A$ và PAB', chứng minh rằng :

$R_1^2\sin^2\alpha + R_2^2\sin^2\beta + R_3^2\sin^2\gamma =$

$B'C'^2 + C'A^2 + AB'^2 =$

$=2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + 2(r_2r_3\cos\alpha + r_3r_1\cos\beta + r_1r_2\cos\gamma)$

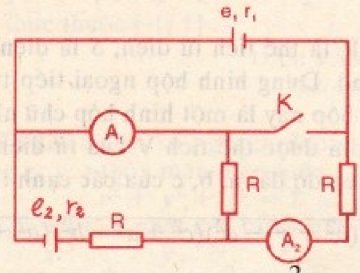
Rồi biến đổi : $2(r_2r_3\cos\alpha + r_3r_1\cos\beta + r_1r_2\cos\gamma)$ $= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - (r_1\sin\beta - r_2\sin\alpha)^2 - (r_2\cos\alpha + r_1\cos\beta - r_3)^2 \leq r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$. Từ đó được (*).

Tuy nhiên, nhiều bạn không chứng minh được (4), hoặc chứng minh không chặt chẽ.

4°) Đáng tiếc, cũng còn nhiều bạn không giải được phần cuối của bài toán hoặc giải sai.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/216 *Cho mạch điện như hình vẽ :*



$e_1 = 10V$; $r_1 = 0$, $e_2 = 5V$; $r_2 = \frac{2}{5}R$. *Bỏ qua giá trị điện trở các dây nối và khóa K. Khi K đóng A_2 chỉ 0,5A.*

1) Xác định số chỉ của A_1 khi K đóng.

2) Xác định số chỉ của A_1 và A_2 khi K mở.

Biết rằng hai ampe kế A_1 và A_2 có điện trở R_A như nhau, và R và R_A có giá trị nguyên dương.

Hướng dẫn giải. Với mỗi trường hợp, vẽ lại sơ đồ và áp dụng định luật Ôm, suy ra :

– Khi K đóng : tìm được phương trình $150 = 12R_A + 19R$, rút ra $R_A = 3\Omega$, $R = 6\Omega$ và từ đó $i_{A_1} = \frac{10}{3}A$.

– Khi K mở, áp dụng định luật Ôm suy ra $i_{A_1} = \frac{65}{387} \approx 0{,}17A$ và $i_{A_2} = \frac{365}{387} \approx 0{,}94A$.

Nhận xét. Có 2 em có lời giải đúng và gọn : *Võ Đình Hiếu*, 11 Lí, PTTH Đào Duy Từ, Đồng Hới, Quảng Bình ; *Nguyễn Kiều Cương*, B_o11B Đại học Tổng hợp Hà Nội.

MT

Bài L2/216. *Sức cản không khí tỉ lệ với vận tốc của một vật theo hệ số k. Một vật rơi từ độ cao h xuống mất thời gian là t_o. Người ta nhận thấy cũng vật ấy nhưng được ném lên độ cao h với vận tốc v_o thì cũng mất thời gian là t_o. Chứng minh rằng t_o và v_o liên hệ với nhau mà không phụ thuộc vào h.*

Hướng dẫn giải. Lúc xuống, áp dụng định luật Niutơn $kv - mg = m\frac{dv}{dt}$, rút ra

$$kh = mg\left(\frac{m}{k}e^{\frac{kt_o}{m}} - t_o - \frac{m}{k}\right) \text{ (A)}$$

Trường hợp ném lên : $-kv - mg = m\frac{dv}{dt}$, rút ra

$$kh = -(kv_o + mg)\frac{m}{k}e^{-\frac{kt_o}{m}} - mgt_o + (kv_o + mg)\frac{m}{k} \text{ (B)}$$

Từ (A) và (B) suy ra

$$kv_o + 2mg = kv_oe^{-\frac{kt_o}{m}} + mg(e^{\frac{kt_o}{m}} + e^{-\frac{kt_o}{m}})$$

Nhận xét. Vì phải vận dụng phép lấy tích phân nên các em đều lúng túng trong việc giải bài toán.

OK

LẠI NÓI VỀ ĐỊNH LÍ LỚN FERMAT

HÀ HUY KHOÁI

Trong phần kết luận của bài viết "Định lí lớn Fermat đã được chứng minh" (Toán Học và Tuổi Trẻ, 9-1993) có câu : "Tuy nhiên hầu hết các chuyên gia lớn nhất trong lĩnh vực này cho rằng, nếu Wiles phạm sai lầm nào đó trong chứng minh thì sai lầm đó cũng chỉ mang tính chất kĩ thuật". Và quả thật, Wiles đã phạm, và đã khắc phục một sai lầm "kĩ thuật". Cho đến hôm nay, ta có thể khẳng định rằng, định lí lớn Fermat đã được chứng minh !

Trong bài viết này, tôi sẽ không trình bày tư tưởng của chứng minh, vì điều đó đã được làm trong bài báo vừa nhắc đến, mà chỉ xin nói vắn tắt về những gì xẩy ra sau ngày Wiles công bố chứng minh của mình, tháng 6 năm 1993.

Vào khoảng tháng 12 năm 1993, thế giới toán học xôn xao vì một "lỗ hổng" tìm thấy trong chứng minh của Wiles. Nhiều người thất vọng, vì một lần nữa, "bài toán Fermat" lại chiến thắng trí tuệ con người. Cũng không ít người tỏ ra vui mừng, bởi vì, thế là "con gà đẻ trứng vàng của toán học" vẫn chưa bị làm thịt ! Tuy nhiên, ngay lúc đó, Wiles đã nói, ông tin tưởng rằng mình sẽ khắc phục được chỗ sai lầm trong chứng minh.

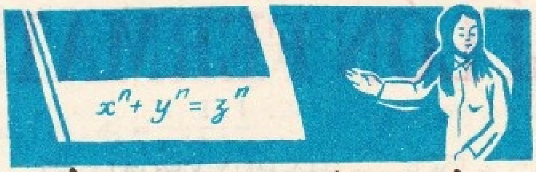
Giữa tháng 10 năm 1994, ở nhiều trung tâm toán học lớn trên thế giới xuất hiện một bản thảo chỉ dài 25 trang, đề ngày 07.10.1994, trong đó đã hoàn thiện chứng minh định lí lớn Fermat của Wiles. Bài báo kí tên R. Taylor và A. Wiles. Lần này, các nhà toán học tỏ ra rất thận trọng, vì không muốn vui mừng quá sớm một lần nữa. Mãi đến gần đây, sau khi đã kiểm tra hết sức kĩ lưỡng, người ta mới hoàn toàn tin chắc rằng, định lí lớn Fermat đã được chứng minh chặt chẽ. Chứng minh này sẽ được công bố trên tạp chí toán học uy tín nhất thế giới "Annales of Mathematics", trong hai bài báo : một của Wiles, dài 200 trang, và một của Wiles và Taylor, dài 25 trang. Khi được hỏi về quá trình sửa chữa sai lầm trong chứng minh. Wiles trả lời như sau. Cách đây 4 năm, ông ta nghĩ rằng, mình đã hoàn tất chứng minh định lí lớn Fermat. Tuy nhiên, khi kiểm tra công trình trước lúc công bố, ông ta rất thất vọng nhận ra một sai lầm : đã sử dụng một tính chất của đại số Hecke của các dạng môđula, mà thực chất là chưa được chứng minh. Vài năm sau, Wiles tìm ra cách "đi vòng" qua chỗ khó khăn đó, bằng cách sử dụng "đối đồng điều Ole". Và đó chính là chứng minh mà ông công bố năm 1993. Sau khi phát hiện ra lỗ hổng trong chứng minh, mà thực chất là nằm trong lí thuyết đối đồng điều Ole. Wiles quyết định quay về con đường cũ mà ông đã bỏ dở vài năm trước đó. Biết rằng đơn thương độc mã trên một con đường chông gai thì khó thành công, ông tìm một người bạn đường, đó là R. Taylor. Theo "Nữu ước thời báo", Wiles đã suy nghĩ rất nhiều khi chọn bạn đường. Nếu mời một nhà toán học nổi tiếng cùng hợp tác, ông có nguy cơ bị chia sẻ một nửa vinh quang ! Vì thế, ông quyết định chọn R. Taylor, một học trò cũ của mình, tuy chưa thật nổi tiếng, nhưng là người rất có khả năng. Và ông đã không nhầm : tên tuổi hai thầy trò, A. Wiles và R. Taylor, sẽ vĩnh viễn đi vào lịch sử toán học với chiến công giải được một trong những bài toán nổi tiếng nhất.

Tôi thường phải trả lời các bạn đồng nghiệp câu hỏi sau đây : bài toán Fermat quả thật là bài toá lớn, nhưng nói cho cùng, việc giải quyết được n có ý nghĩa gì đối với toán học ? Không nói đến những phương pháp và lí thuyết mới mà toán họ có được khi người ta cố gắng giải bài toán Fermat (xin đọc thêm bài "Định lí lớn Fermat đã được chứng minh"), ở đây ta chỉ nói đến sự kiện giải được nó. Trong số các bạn, đã có ai đặt cho mình câu hỏi sau này chưa : tại sao người ta tìm cách trèo lên đỉnh núi Everest ? Công việc thật là khó khăn, mà nói cho cùng thì cũng chẳng mang lại một lợi ích "thiết thực" nào cả ! Thế nhưng, ngoài những nhu cầu về vật chất, con người rất cần đến lòng tin vào sức mạnh và ý chí của mình. Và còn gì thể hiện rõ hơn ý chí và sức mạnh đó bằng việc chinh phục những đỉnh núi cao nhất thế giới bằng chính đôi chân của mình ? Định lí lớn Fermat chính là một "đỉnh Everest" của trí tuệ. Và cũng giống như đỉnh Everest đã được nhiều người đặt chân đến, tôi nghĩ rằng, rồi đây cũng sẽ xuất hiện nhiều chứng minh khác nhau của định lí lớn Fermat. Chỉ có điều, sẽ không ai quên tên người đã chinh phục đỉnh cao đó đầu tiên.

Trên thế giới này, có lẽ chỉ có một đỉnh Everest (với giả thiết là trái đất không hoạt động quá mạnh để đến nỗi thay đổi hẳn địa hình của nó trong tương lai !). Chắc có nhiều bạn trẻ lấy làm tiếc là khi lớn lên, mình sẽ không có được cái vinh quang của người chinh phục đỉnh cao nhất thế giới lần đầu tiên ! Tôi xin nhắc lại câu chuyện sau đây. Ngày xưa, mỗi lần nghe tin bố mình chinh phục một thành trì nào đó, Alexandro Maxêđoan thường than rằng : "Sau này, còn thành trì nào để cho ta chinh phục nữa !". Thế nhưng rồi Maxêđoan vẫn còn đủ thành trì để thử thách ý chí và tài thao lược của mình, và ông đã trở thành nhà quân sự kiệt xuất bậc nhất của thời cổ đại. Các bạn trẻ ngày nay khi đi vào toán học cũng sẽ có cái may mắn của Maxêđoan : những đỉnh cao mới của trí tuệ luôn luôn chờ đón các bạn.

Tôi muốn dành một bài viết tiếp theo để nói về một trong những đỉnh cao mới có thể nhìn thấy sau khi định lí lớn Fermat được chứng minh, và nhân tiện trả lời điều mà các đồng nghiệp thường hỏi tôi : "Sau Fermat, chúng ta còn lại những gì ?"

Hà Nội, tháng 9-1995



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/220 : Các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn hệ thức $ab = cd$. Chứng minh rằng số $a^{1994} + b^{1994} + c^{1994} + d^{1994}$ là hợp số.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Hà)

Bài T2/220 : Có tồn tại hay không 3 số khác nhau a, b, c thỏa mãn đẳng thức :
$$(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = 0$$

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

Bài T3/220 : Tìm bộ ba số nguyên không âm x, y, z sao cho $3x^2 + 54 = 2y^2 + 4z^2$; $5x^2 + 74 = 3y^2 + 7z^2$ và tổng $x + y + z$ nhỏ nhất.

PHẠM NGỌC QUANG
(Thanh Hóa)

Bài T4/220 : Cho đường tròn (O) và 2 đường kính AB, CD vuông góc với nhau. P là một điểm bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AD}$. Nối CP, BP cắt OA và OD tương ứng tại M và N. Chứng minh rằng tích $\dfrac{OM}{MA} \cdot \dfrac{ON}{ND}$ là một hằng số

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

Bài T5/220 : Cho tam giác ABC, ba đường phân giác trong của các góc A, B, C cắt các cạnh BC, CA, AB của tam giác lần lượt ở D, E, F. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là
$$S_{DEF} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

NGỌC ĐẠM
(Hà Tây)

CÁC LỚP THCB

Bài T6/220 : Cho trước số nguyên tố p và số nguyên dương a với $a \leqslant p$. Giả sử
$$A = \sum_{k=0}^{p-1} a^k$$

Chứng minh rằng với mọi ước nguyên tố q của A ta đều có $q - 1 \; ⋮ \; p$.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

Bài T7/220 : Cho $\{a_o, a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ và $\{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9\} = \{-2, -4, -6, -8, -10\}$.

Chứng minh rằng phương trình $a_o x^9 + a_1 x^8 + \ldots + a_8 x + a_9 = 0$ không thể có 9 nghiệm thực thuộc $[-1, 1]$

ĐÀM VĂN NHỈ
(Thái Bình)

Bài T8/220 : Cho số nguyên dương n. Xét các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$T = \frac{x}{1 - x^{2n}} + \frac{y}{1 - y^{2n}} + \frac{z}{1 - z^{2n}}$$

TRẦN VĂN HẠNH
(Quảng Ngãi)

Bài T9/220 : Kí hiệu l_a, l_b, l_c ; m_a, m_b, m_c và h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các phân giác trong, các trung tuyến và các đường cao được kẻ tới các cạnh a, b, c của tam giác. Chứng minh rằng :
$$\frac{m_a}{l_b + h_b} + \frac{m_b}{l_c + h_c} + \frac{m_c}{l_a + h_a} \geqslant \frac{3}{2}$$

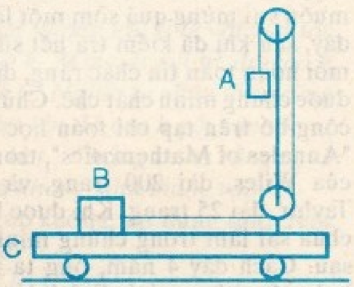
PHẠM HIẾN BẰNG
(Bắc Thái)

Bài T10/220 : Hãy tìm điều kiện mà tứ diện trực tâm $ABCD$ phải thỏa mãn để $A'B'C'D'$ là một tứ diện đều, trong đó A, B', C', D' lần lượt là điểm đối xứng với A, B, C, D qua BCD, CDA, DAB, ABC.

TRỊNH BẰNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh)

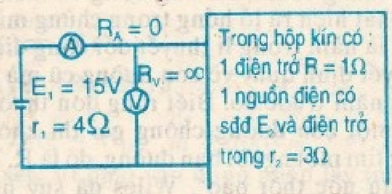
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/220 : Hệ vật được bố trí như hình vẽ. Các vật ABC lần lượt có khối lượng là $m_1 = 0{,}4$kg, $m_2 = 1$kg, $m_3 = 1$kg. Hệ số ma sát giữa B và C là $k = 0{,}3$. Ma sát giữa C và sàn, ma sát ở các ròng rọc được bỏ qua. Dây nối không giãn. Thả tay khỏi A cho hệ vật chuyển động. Tìm gia tốc mỗi vật.



PHẠM HÙNG QUYẾT
(Hà Nội)

Bài L2/220 : Ampe kế chỉ $2A$. Tính E_2 và số chỉ vôn kế.



TRẦN VĂN MINH
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS.

T1/220. The positive integers a, b, c, d satisfy the relation $ab = cd$. Prove that

$a^{1994} + b^{1994} + c^{1994} + d^{1994}$

is a composite number.

T2/220. Do there exist three distinct numbers a, b, c satisfying the equation

$(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = 0$?

T3/220. Find three positive integers x, y, z satisfying $3x^2 + 54 = 2y^2 + 4z^2$; $5x^2 + 74 = 3y^2 + 7z^2$ and such that the sum $x + y + z$ attains its least value.

T4/220 Let be given a circle (0) and two its diameters AB, CD, perpendicular to each other. P is an arbitrary point on the small arc $\overset{\frown}{AD}$. The lines CD, BP cut respectively OA and OD at M and N. Prove that the product $\frac{OM}{MA} \cdot \frac{ON}{ND}$ is constant.

T5/220. The three angled inbisectors issued from A, B, C of a triangle ABC cut the sides BC, CA, AB respectively at D, E, F. Prove that the triangle ABC is equilateral if and only if $S_{DEF} = \frac{1}{4} S_{ABC}$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS.

T6/220. Let be given a prime p and a positive integer $a \leqslant p$. Prove that $q-1 \vdots p$ for every prime divisor q of $A = \sum_{k=0}^{p-1} a^k$

T7/220. Let $\{a_o, a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ and $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 = \{-2, -4, -6, -8, -10\}$.

Prove that the equation

$a_o x^9 + a_1 x^8 + \ldots + a_8 x + 9 = 0$

can not have 9 real roots in $[-1, 1]$.

T8/220. Let be given a positive integer n. Consider the positive number x, y, z satisfying $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Find the least value of

$$T = \frac{x}{1 - x^{2n}} + \frac{y}{1 - y^{2n}} + \frac{z}{1 - z^{2n}}$$

T9/220. Let l_a, l_b, l_c; m_a, m_b, m_c and h_a, h_b, h_c be respectively the lengths of the angled-inbisectors, the medians and the altitudes corresponding to the sides a, b, c of a triangle. Prove that

$$\frac{m_a}{l_b + h_b} + \frac{m_b}{l_c + h_c} + \frac{m_c}{l_a + h_a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

T10/220. Find condition on orthocentral tetrahedron $ABCD$ in order that $AB'C'D'$ be a regular tetrahedron, where A, B', C', D' are respectively the symmetric point of A, B, C, D through the planes BCD, CDA, DAB, ABC.

CÙNG BẠN ĐỌC

1) Thể lệ gửi bài giải :

– Bài viết hoặc đánh máy sạch sẽ trên một mặt giấy. Nếu 1 bài giải có nhiều tờ thì dán chúng vào nhau. Hình vẽ đi liền với bài giải.

– Mỗi bài đều ghi họ tên, lớp, trường, huyện, tỉnh ở góc trên bên phải. Góc trên bên trái ghi số của bài.

– Không viết chung nhiều bài trên một tờ giấy.

– Mỗi phong bì chỉ gửi các bài của một số tạp chí.

– Ngoài phong bì đề rõ ràng :

Tạp chí Toán học và tuổi trẻ
45B Hàng Chuối
Hà Nội
(Bài giải của số ...)

– Không gấp bài quá phức tạp, không dán nhiều hồ.

– Tòa soạn nhận bài giải trong thời hạn 2 tháng kể từ cuối tháng ra số tạp chí đó.

– Tòa soạn không nhận bài giải tập thể, không tính điểm cho những bài chỉ ghi bút danh không ghi tên thật.

2) Gần đây tòa soạn nhận được một số thư đề nghị cho xin tem cũ để chơi. Rất tiếc là chúng tôi không thỏa mãn yêu cầu đó của các bạn được.

3) Bạn đọc có thể tìm mua **Toán học và tuổi trẻ** tại các cửa hàng sách trung tâm thành phố, thị xã, huyện lị, các Công ti phát hành sách. Bạn cũng có thể đặt mua tại các Bưu điện trong cả nước.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học

QUỸ TÍCH ĐẠI SỐ

NGUYỄN PHÚ CHIẾN
(Hà Nội)

Trong các kỳ thi vào đại học, chúng ta thường gặp những bài toán có dạng : Tìm quỹ tích điểm M (x, y) thỏa mãn tính chất T.

Người ta gọi đó là bài toán quỹ tích đại số.

Để hiểu rõ hơn về lớp bài toán này, chúng tôi đưa ra một số phương pháp giải bài toán quỹ tích đại số.

A. LÝ THUYẾT :

1. Quỹ tích các điểm trên mặt phẳng tọa độ gọi là quỹ tích đại số.

2. Bài toán quỹ tích bao gồm 3 yếu tố :

– Điểm chạy $M(x, y)$

– Điều kiện quỹ tích T mà điểm chạy M phải thỏa mãn.

– Quỹ tích Q.

Trong đó : Q có thể là 1 đường, 1 miền nào đó trên mặt phẳng tọa độ hoặc chỉ gồm một số điểm rời rạc.

Nếu Q là 1 đường thì giữa các tọa độ (x, y) của các điểm thuộc Q phải có 1 mối liên hệ

Ví dụ $F(x, y) = 0 (1)$

(1) chính là phương trình của đường Q và gọi là phương trình quỹ tích.

Nếu Q là 1 miền trên R^2 thì giữa các tọa độ (x, y) của các điểm thuộc Q thường có liên hệ dưới dạng bất đẳng thức. Để chỉ ra miền Q, ta phải viết được phương trình các đường biên của Q.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH ĐẠI SỐ.

Bài toán : Tìm quỹ tích các điểm $M(x, y)$ thỏa mãn điều kiện T.

Trường hợp 1 : Điểm chạy $M(x, y)$ phụ thuộc tham số m

Bước 1 : Biểu diễn các tọa độ của điểm chạy qua tham số m dựa vào điều kiện T, ta có hệ :

$$\begin{cases} x = x(m)(\alpha) \\ y = y(m)(\beta) \end{cases} \text{(I)}$$

Bước 2 : Khử m từ hệ (I) được hệ thức liên hệ giữa x, y :

$F(x, y) = 0$ (1)

(1) chính là phương trình quỹ tích.

Bước 3 : Giới hạn quỹ tích.

–Nếu tham số m biến thiên tùy ý thì quỹ tích là toàn bộ đường cong cho bởi phương trình (1). (Ký hiệu d_1)

–Nếu tham số m chỉ biến thiên trong miền (*) thì từ ($\alpha \Rightarrow x$ chỉ biến thiên trong miền (*1)

$(*_1 = [\min\limits_{(*)} x(\mathrm{m}), \max\limits_{*} x(\mathrm{m})])$ và quỹ tích chỉ là phần của đường (d_1) vẽ trong (*1)

Trường hợp 2 : Điểm $M(x, y)$ không phụ thuộc tham số m.

Bước 1 : Chuyển từ điều kiện quỹ tích T đối với điểm chạy $M(x, y)$ về điều kiện đối với các tọa độ (x, y) của nó.

Bước 2 : Giải điều kiện ấy được biểu diễn quỹ tích cần tìm.

Chú ý : Quỹ tích trong trường hợp này thường là miền.

C – CÁC THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1 : Cho họ đường cong $y = x - 2 + \dfrac{m}{x}$ (1)

Tìm quỹ tích cực đại, cực tiểu của đồ thị.

Lời giải : Miền xác định $\forall x \neq 0$.

Ta có : $y' = 1 - \dfrac{m}{x^2} = \dfrac{x^2 - m}{x^2}$

Để tồn tại cực đại, cực tiểu, phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt : $\Leftrightarrow x^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq 0$.

$\Leftrightarrow m > 0$ (*)

Khi đó : $y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{m}$ hoặc $x = -\sqrt{m}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	$+\sqrt{m}$	∞
y'	+	0	– ‖ –	0	+
y	↗	CĐ	↘ ‖ ↘	CT	↗

Quỹ tích điểm cực đại : Từ bảng ⇒ điểm cực đại có hoành độ $x = -\sqrt{m}\ (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ m = x^2 \end{cases} (*_1)$

Do điểm cực đại nằm trên đồ thị hàm số (1) nên ta có phương trình quỹ tích là $y = x - 2 + \dfrac{x^2}{x} = 2x - 2$

Do x phải thỏa mãn $(*_1)$ nên quỹ tích điểm cực đại là phần đường thẳng $y = 2x - 2$ có hoành độ < 0.

Quỹ tích điểm cực tiểu : Từ bảng ⇒ điểm cực tiểu có hoành độ $x = \sqrt{m} (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ m = x^2 \end{cases} (*_2)$

Do điểm cực tiểu nằm trên đồ thị hàm số (1) nên ta có phương trình quỹ tích : $y = x - 2 + \dfrac{x^2}{x} = 2x - 2$. Do x phải thỏa mãn $(*_2)$ nên quỹ tích điểm cực tiểu là phần đường thẳng $y = 2x - 2$ có hoành độ > 0.

Thí dụ 2 : Cho Parabol $y = x^2$.

Tìm m để đường thẳng $y = mx - m$ cắt parabol tại 2 điểm A, B và tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Lời giải : Đường thẳng $y = mx - m$ cắt $y = x^2$ tại 2 điểm AB

$\Leftrightarrow$Phương trình $x^2 = mx - m$ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - mx + m = 0$ có 2 nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4m \geqslant 0$

$\Leftrightarrow m \leqslant 0$ hoặc $4 \leqslant m$ (*)

+) Gọi $I(x, y)$ là điểm thuộc quỹ tích cần tìm với điều kiện (*) ta có : $x = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$

Trong đó : x_1, x_2 là nghiệm của phương trình : $x^2 - mx + m = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{m}{2}$ (theo định lý Viet)

$\Rightarrow m = 2x$

Do $I\ (x,\ y)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = mx - m$ nên ta được quỹ tích điểm $I\ (x, y)$ là :

$y = 2x(x - 1) = 2x^2 - 2x$

m thỏa mãn (*) $\Rightarrow \frac{m}{2} \leqslant 0$ hoặc $0 \leqslant \frac{m}{2} \Rightarrow x \leqslant 0$ hoặc $2 \leqslant x$ (*1). Vậy quỹ tích cần tìm là phần Parabol

$y = 2x^2 - 2x$ vẽ trong (*1)

Thí dụ 3 : Tìm quỹ tích giao điểm của họ đường cong $y = \dfrac{x^2 + (2m-1)x + m^2 + m + 1}{x^2 + m^2 - m + 1}$ với Ox, Oy

Lời giải : Gọi $A\ (O,\ y)$ là giao điểm của đồ thị đã cho với Oy. Khi đó phương trình $y = \dfrac{O^2 + (2m-1)\,O + m^2 + m + 1}{O^2 + m^2 - m + 1}$ (ẩn m) có nghiệm

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(m^2 - m + 1)y = m^2 + m + 1$ có nghiệm

(vì $m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall\, m$)

$\Leftrightarrow$Phương trình $(y-1)m^2 - (y+1)m + y - 1 = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ y + 1 \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y - 1 \neq 0 \\ \Delta = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = 1$ hoặc $\begin{cases} y \neq 1 \\ (y-3)(3y-1) \leqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = 1$ hoặc $\begin{cases} y \neq 1 \\ \frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 3$ (*)

Vậy quỹ tích giao điểm của họ đường cong với Oy là đoạn trên trục Oy có tung độ thỏa mãn (*).

Gọi $B\ (x,\ O)$ là giao điểm của đồ thị với Ox. Khi đó phương trình

$\dfrac{x^2 + (2m-1)x + m^2 + m + 1}{x^2 + m^2 - m + 1} = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow$phương trình $x^2 + (2m-1)x + m^2 + m + 1 = 0$ có nghiệm

(vì $x^2 + m^2 - m + 1 = x^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ $\forall\, x, m$)

$\Leftrightarrow$Phương trình $m^2 + (2x+1)m + x^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta = (2x+1)^2 - 4(x^2 - x + 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{8}$ ($*_1$)

Vậy quỹ tích giao điểm của họ đường cong với Ox là khoảng trên trục Ox có hoành độ thỏa mãn ($*_1$)

Thí dụ 4. Tìm quỹ tích những điểm trên mặt phẳng tọa độ có khoảng cách đến $y = -\frac{1}{4}$ và đến điểm $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ bằng nhau.

Lời giải. Gọi $A(x,\ y)$ là điểm thuộc quỹ tích

Khi đó $\left|\, y + \frac{1}{4} \right| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$ (Do cả 2 vế $\geqslant 0$).

$\Leftrightarrow y = x^2$

Vậy quỹ tích cần tìm là parabol $y = x^2$.

Thí dụ 5. Cho hàm số $y = x^2$

a) Tìm quỹ tích những điểm mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị. b) Tìm quỹ tích những điểm mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau tới đồ thị.

Lời giải. a) Gọi $M(x_o, y_o)$ là điểm thuộc quỹ tích

Tiếp tuyến là đường thẳng qua $M(x_o, y_o)$ nên có phương trình $y = K(x - x_o) + y_o$ (d)

(d) là tiếp tuyến tới đồ thị đã cho

$\Leftrightarrow$phương trình $x^2 = K(x - x_o) + y_o$ có nghiệm kép.

$\Leftrightarrow$phương trình $x^2 - Kx + Kx_o - y_o = 0$ (1) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta = K^2 - 4(Kx_o - y_o) = 0$

$\Leftrightarrow K^2 - 4Kx_o + 4y_o = 0$ (2)

Ta cần tìm x_o, y_o để (1) có nghiệm kép với 2 giá trị của K.

$\Leftrightarrow$Ta cần tìm x_o, y_o để (2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = (2x_o)^2 - 4y_o > 0$

$\Leftrightarrow y_o < x_o^2$

Vậy quỹ tích những điểm mà từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị là những điểm nằm dưới parabol $y = x^2$

b) Gọi $A(x_o, y_o)$ là những điểm mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau tới đồ thị.

Khi đó phương trình (1) có nghiệm kép với K_1, K_2 thỏa mãn $K_1 \cdot K_2 = -1$

$\Leftrightarrow$phương trình (2) có 2 nghiệm K_1, K_2 thỏa mãn $K_1K_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{4y_o}{1} = -1$

$\Leftrightarrow y_o = -\frac{1}{4}$

Vậy quỹ tích cần tìm là đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$.

D. BÀI TẬP TỰ GIẢI.

1. Tìm quỹ tích tâm đối xứng của họ đường cong $y = \dfrac{mx + 2}{x + m - 1}$

2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

a) Tìm quỹ tích những điểm có thể kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị.

b) Tìm quỹ tích những điểm có thể kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau tới đồ thị.

3) Cho họ đường cong $y = \dfrac{2mx + m^2 + 2m}{2(x + m)}$ (Hm)

Tìm quỹ tích những điểm trên mặt phẳng tọa độ mà có đúng 1 đường cong của họ Hm đi qua.

4) a, b thay đổi sao cho hệ $\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + b \end{cases}$ luôn có nghiệm duy nhất.

Gọi nghiệm đó là $(x_o, y_o$

Tìm quỹ tích của điểm $M\ (x_o, y_o)$ khi a, b biến thiên.

5) Cho $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$. Tìm quỹ tích những điểm thuộc Oy mà từ đó có thể kẻ được ít nhất 1 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.

ĐỀ THI QUỐC GIA CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM 1995

MÔN TOÁN

Ngày thi : 2-3-1995
(Thời gian làm bài : 180 phút)

BẢNG A

Bài 1. a) Chứng minh rằng số N sau đây là số chính phương :
$N = \underbrace{111.........11}_{\text{có 1995 chữ số 1}}.\underbrace{1000..........00}_{\text{có 1994 chữ số 0}}5 + 1$

b) Tìm số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn điều kiện :
$(1994\,!)^{1995} \vdots\ 1995^k$.

Bài 2. a) Chứng minh bất đẳng thức sau đây đúng với x, y là các số thực bất kì khác 0 :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

b) Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 \\ x^2 + z^2 + xz = 28 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \end{cases}$$

Bài 3 : Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh bằng 4 có cho trước 33 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng $\sqrt{2}$, có tâm là các điểm đã cho.

Hỏi có hay không 3 điểm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó ?

Bài 4 : Tam giác ABC có góc nhọn A và có độ dài các cạnh $AB = c$, $AC = b$. Một cát tuyến quay quanh trọng tâm G của tam giác ABC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N.

a) Gọi độ dài đoạn thẳng AM là x, diện tích tứ giác $BMNC$ là S. Hãy tính S theo b, c, A cho trước và x.

b) Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số S theo biến số x trong khoảng xác định của nó và tính giá trị lớn nhất của hàm số S trong khoảng xác định đó.

c) Dựng tam giác cân AMN sao cho M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, $AM = AN$ và MN đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

BẢNG B

Bài 1 : a) Tìm số dư trong phép chia sau đây :
$(1995 + 1)(1995 + 2)(1995 + 3) \ldots (1995 + 3990) : 3^{1995}$.

b) Tìm các giá trị của n để $P = (n + 5)(n + 6)$ chia hết cho $6n$.

Bài 2 : a) Phương trình bậc hai $x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2.

Chứng minh rằng $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$, biết rằng $n \leq m - 1$.

b) Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2(\sqrt{2x + 2y} + \sqrt{2x - 3y}) = 3\sqrt{(2x + 2y)(2x - 3y)} \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

Bài 3 : Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh bằng 4 có cho trước 33 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có b[illegible] đều bằng $\sqrt{2}$, có tâm là các điểm đã cho.

Hỏi có hay không 3 điểm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó ?

Bài 4 : Tam giác ABC có góc nhọn A và có độ dài các cạnh $AC = b$, $AB = c$. Một cát tuyến quay quanh trọng tâm G của tam giác ABC, cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN}$ có giá trị không đổi.

b) Dựng tam giác cân AMN sao cho M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, $AM = AN$ và MN đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

ĐÁP ÁN

BẢNG A

Bài 1 a) Từ $N = \underbrace{111..........11}_{\text{1995 chữ số 1}}.\underbrace{1000........000}_{\text{1994 chữ số 0}}5 + 1$, ta có :

$$N = \frac{10^{1995} - 1}{9}.(10^{1995} + 5) + 1 =$$

$$= \frac{(10^{1995})^2 + 4.10^{1995} - 5}{9} + 1 =$$

$$= \frac{(10^{1995})^2 + 4.10^{1995} + 4}{9} = \frac{(10^{1995} + 2)^2}{9}$$

hay $N = \left(\dfrac{10^{1995} + 2}{3}\right)^2$ (*)

Mà $10^{1995} + 2 \vdots 3$ (Do tổng các chữ số là 3

Suy ra N là số chính phương

b) Ta có :

$(1995)^k = (3.5.7.19)^k = 3^k.5^k.7^k.19^k$.

Trước hết ta phải tìm xem số mũ lớn nhất của mỗi thừa số 3 ; 5 ; 7 ; 19 trong số $(1994\,!)^{1995}$ là bao nhiêu.

1) Đặt A = 1994 ! = 1. 2. 3. 4. 5.... 1994.

Ta thấy rằng, 3 chia hết A khi nó chia hết một trong các thừa số của A và ngược lại. Trong A chỉ có các thừa số là bội của 3 mới chia hết cho 3, đó là các thừa số có dạng sau :

3. 1, 3. 2, 3. 3, 3. 4, 3. 5, ... 3. m, m là thương của 1994 chia cho 3. Ở đây m = 664 (1994 = 3. 664 + 2).

Số mũ của 3 trong A là số mũ của 3 trong tích A_1.

$A_1 = (3.1)(3.2)(3.3) \ldots (3.664) = 3^{664}.664\,!$

Vậy số mũ của 3 trong A bằng số mũ 664 cộng với số mũ của 3 trong A_2, với $A_2 = 1.2.3.4. \ldots 664$.

Đến đây ta có thể lập luận tương tự như trên để tìm số mũ của 3 trong A_2.

– Số mũ của 3 trong A_2 bằng thương của phép chia 664 cho 3, tức là 221, cộng với số mũ của 3 trong tích $A_3 = 1.2.3....221$.

– Số mũ của 3 trong tích A_3 bằng thương của phép chia 221 cho 3, tức là 73, cộng với số mũ của 3 trong tích $A_4 = 1.2.3...73$.

– Số mũ của 3 trong tích A_4 bằng thương của phép chia 73 cho 3, tức là 24, cộng với số mũ của 3 trong tích $A_5 = 1.2.3....24$.

– Số mũ của 3 trong tích A_5 bằng thương của phép chia 24 cho 3, tức là 8, cộng với số mũ của 3 trong tích $A_6 = 1.2.3...8$.

– Số mũ của 3 trong tích A_6 bằng thương của 8 chia cho 3, tức là 2, cộng với số mũ của 3 trong tích 1. 2. Số mũ của 3 trong tích này bằng 0.

Vậy số mũ của 3 trong 1994 ! bằng :
664 + 221 + 73 + 24 + 8 + 2 = 992.

Thuật toán tìm số mũ của 3 trong 1994! như sau :

```
1994 | 3
     |______
      664 | 3
          |______
           221 | 3
               |______
                 73 | 3
                    |______
                      24 | 3
                         |______
                            8 | 3
                              |______
                                2 | 3
                                  |____
                                     0
```

Số mũ của 3 trong 1994 ! bằng
664 + 221 + 73 + 24 + 8 + 2 + 0 = 992

2) Với thuật toán trên ta nhanh chóng tìm được số mũ của 5 ; 7 ; 19 trong 1994 !

Trong 1994 ! Có các thừa số : 5^{495} ; 7^{329} ; 19^{109}.

$A^{1995} = (1994\,!)^{1995} = (B.\,3^{992}.\,5^{495}.\,7^{329}.\,10^{109})^{1995}$, trong đó B là tích của các thừa số không chứa các thừa só nguyên tố 3, 5, 7, 19.

Với k = 109. 1995 thì $(1994\,!)^{1995} \,\vdots\, 1995^k$

Với k = 109. 1995 + 1 thì $(1994\,!)^{1995} \not\vdots\, 1995^k$.

Vậy l = 109. 1995 là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn điều kiện $(1994\,!)^{1995} \,\vdots\, 1995^k$.

Bài 2 :

a) $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 4 \geqslant 3\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$ (*)

$\Leftrightarrow P = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 4 - 3\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) \geqslant 0$, với x, y là số thực khác 0.

Đặt $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, ta có :

$z^2 = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2\dfrac{x}{y}.\dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2.$

Từ đó $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = z^2 - 2$. Thay giá trị của $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}$ vào P, ta có :

$P = z^2 - 2 + 4 - 3z = z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$

Vì x, y khác 0 theo giả thiết, ta có :

* Với x, y trái dấu thì $\dfrac{x}{y}$ *và* $\dfrac{y}{x}$ cùng âm, do đó $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} < 0$, cho đó $P = (z-1)(z-2) > 0$ (vì hai thừa số đều âm)

* Với x, y cùng dấu thì $\dfrac{x}{y}$ và $\dfrac{y}{x}$ cùng dương, do đó $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.

Từ đó $z - 2 \geqslant 0$; $z - 1 > 0$, suy ra $P = (z-1)(z-2) \geqslant 0$.

Kết hợp cả hai trường hợp trên ta có kết luận

$P = (z-1)(z-2) \geqslant 0$ với mọi x, y là số thực khác 0. Đẳng thức chỉ xẩy ra khi $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}$ với x, y cùng dấu. Từ đó suy ra $x = y$ (đpcm).

b) Từ hệ phương trình đã cho :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 \ (1) \\ x^2 + z^2 + xz = 28 \ (2) \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \ (3) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ đi (2) được

$y^2 - z^2 + x(y-z) = 9 \Rightarrow (y-z)(x+y+z) = 9$ (*)

Lấy (2) trừ đi (3) được

$x^2 - y^2 + z(x-y) = 9 \Rightarrow (x-y)(x+y+z) = 9$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $y - z = x - y$. hay $2y = x + z$, hay $x + y + z = 3y$

Từ (**) ta có :

$(x-y)(x+y+z) = (x-y)3y = 9$ hay $x - y)y = 3$.

Tính được : $\boxed{x = \dfrac{3}{y} + y}$

Thay x (tính theo y) vào phương trình (1) của hệ ta có :

$\left(\dfrac{3}{y} + y\right)^2 + y^2 + \left(\dfrac{3}{y} + y\right)y = 37.$

$\Leftrightarrow \boxed{3y^4 - 28y^2 + 9 = 0}$

Đặt $y^2 = X$, với $X \geqslant 0$, ta có phương trình $3X^2 - 28X + 9 = 0$

Giải ra ta được : $X_1 = 9$; $X_2 = \dfrac{1}{3}$

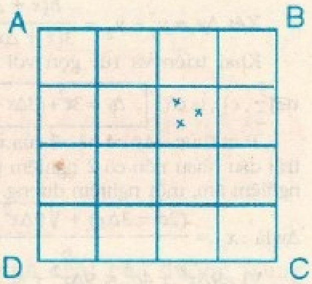
Với $y^2 = 9 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 3 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 2$

Với $y^2 = 3 \Rightarrow y_{3,4} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_{3,4} = \pm\dfrac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ $z_{3,4} = \mp\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm

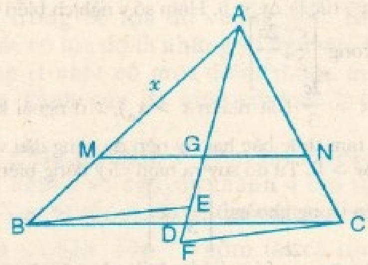
$$\boxed{(\pm 4 \,;\, \pm 3 \,;\, \pm 2) \text{ và } \left(\pm\dfrac{10\sqrt{3}}{3} \,;\, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \,;\, \mp\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right)}$$

Bài 3 : Chia hình vuông đã cho thành 16 hình vuông cạnh là 1 (xem hình vẽ). Do có 33 điểm được chứa trong 16 hình vuông, nên theo nguyên tắc Diriclê ít nhất có một hình vuông chứa không ít hơn 3 điểm. Khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong hình vuông đơn vị không vượt quá đường chéo của nó, nghĩa là không lớn hơn $\sqrt{2}$.



Gọi O_1 ; O_2 ; O_3 là ba điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó, có thể rơi vào cạnh hình vuông. Vẽ 3 đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 bán kính $\sqrt{2}$, chắc chắn 3 điểm O_1, O_2, O_3 đều nằm trong cả 3 đường tròn này, nghĩa là nằm trong phần chung của 3 hình tròn có tâm cũng chính là các điểm O_1, O_2, O_3 (đpcm).

Bài 4 : a) Từ B, C kẻ các đường thẳng song song với MN, chúng cắt trung tuyến AD ở E và F (Hình 2)



$MN \,//\, BE$ và $MN \,//\, CF$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AE}{AG} \\ \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AF}{AG} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AE + AF}{AG} \ (1)$$

Do $\Delta BED = \Delta CFD$ (g.c.g) $\Rightarrow DE = DF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE + AF = (AD - DE) + (AD - DF) = 2AD$.

và do đó $\dfrac{AB}{AM} + \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{2AD}{AG} = 3$ (*vì* $AG = \dfrac{2}{3}AD$).

Với $AB = c$; $AC = b$; $AM = x$, ta có : $\dfrac{c}{x} + \dfrac{b}{AN} = 3 \Rightarrow AN = \dfrac{bx}{3x - c}$ (*).

Gọi diện tích tứ giác $BMNC$ là S, ta có :

$S = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}bc\sin A - \dfrac{1}{2}AM\,.\,AN\,.\,\sin A =$

$\dfrac{1}{2}\sin A(bc - AM\,.\,AN) = \dfrac{1}{2}\sin A(bc - x\,.\,\dfrac{bx}{3x - c})$

hay $\boxed{S = \dfrac{1}{2}\sin A\left(bc - \dfrac{bx^2}{3x - c}\right)}$

b) Tứ giác $BMNC$ chỉ xác định được khi $M \in AB, N \in AC$ (theo gt), do đó $\dfrac{c}{2} \leqslant x \leqslant c$. Vậy khoảng xác định của hàm S là $\left[\dfrac{c}{2} ; c\right]$

Để xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số S, ta xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm $y = \dfrac{bx^2}{3x - c}$ trong khoảng xác định nói trên.

Ta đã biết với $\Delta x = x_1 - x_2 > 0$ nếu $\Delta y = y_1 - y_2 > 0$ thì hàm số đồng biến, nếu $\Delta y < 0$ thì hàm số nghịch biến.

Giả sử $x_1 > x_2$, x_1, x_2 thuộc khoảng xác định $\left[\dfrac{c}{2}, c\right]$

Ta đặt $x_1 = x + \Delta x$ thì $x_2 = x$ với $\Delta x > 0$,

$y_1 = \dfrac{b(x + \Delta x)^2}{3(x + \Delta x) - c}$; $y_2 = \dfrac{bx^2}{3x - c}$

Xét $\Delta y = y_1 - y_2 = \frac{b(x+\Delta x)^2}{3(x+\Delta x)-c} - \frac{bx^2}{3x-c}$.

Khai triển và rút gọn với chú ý rằng $3x - c > 0$ (vì $x\in[\frac{c}{2}, c]$), ta có : $\boxed{\Delta y = 3x^2+(3\Delta x - 2c)x - c.\Delta x\ (*)}$

Tam thức : Δy có hệ số của x^2 là 3 và số hạng tự do $-c.\Delta x$ trái dấu nhau nên có 2 nghiệm phân biệt và trong đó có một nghiệm âm, một nghiệm dương. Nghiệm dương của tam thức Δy là : $x_o = \frac{(2c-3\Delta x)+\sqrt{9\Delta x^2+4c^2}}{6}$

Vì : $9\Delta x^2 + 4c^2 \le 9\Delta x^2+4c^2+12c.\Delta x = (2c+3\Delta x)^2$

nên $x_o \le \frac{(2c-3\Delta x)+\sqrt{(2c+3\Delta x)^2}}{6}$ $= \frac{2c-3\Delta x+2c+3\Delta x}{6} = \frac{2c}{3}$.

Từ đó thấy rằng :

a) Với $\frac{c}{2} \le x < x_o$ (và do đó $\frac{c}{2}\le x<\frac{2c}{3}$) thì x ở trong khoảng hai nghiệm của tam thức bậc hai Δy nên Δy trái dấu với hệ số 3 của x^2, tức là $\Delta y<0$. Hàm số y nghịch biến và do đó S đồng biến trong $\left[\frac{c}{2};\frac{2c}{3}\right]$.

b) Với $x \ge \frac{2c}{3}$ (tất nhiên $x > x_o$), x ở ngoài khoảng hai nghiệm của tam thức bậc hai Δy nên Δy cùng dấu với hệ số 3 của x^2, tức $\Delta y > 0$. Từ đó suy ra hàm số y đồng biến, và do đó S nghịch biến trong khoảng $\left[\frac{2c}{3}; c\right]$.

Tại giá trị $x=\frac{2c}{3}$ hàm S xác định nên từ trên suy ra S lấy giá trị lớn nhất tại $x = \frac{2c}{3}$. Thay $x=\frac{2c}{3}$ vào S ta tính được :

$\boxed{S_{max} = \frac{5}{18}bc\sin A.}$

c) *Dựng tam giác cân AMN*

– Giả sử dựng được ΔAMN thỏa mãn đầu bài. Theo chứng minh trên ta có $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3$ hay $\frac{c}{AM}+\frac{b}{AN}=3$.

Với $AM = AN$, tính được $AM = \frac{b+c}{3}$.

– Cách dựng : Dựng trên AB đoạn $AM=\frac{b+c}{3}$, được M. Nối MG cắt AC ở N ta được ΔAMN thỏa mãn đầu bài.

– Chứng minh : Từ $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3$ và $AM=\frac{b+c}{3}$, tính được $AN=\frac{b+c}{3}$.

Vậy ΔAMN cân và có MN qua G.

– Biện luận : Bài toán có nghiệm khi $\frac{b+c}{3}\le c$ và $\frac{b+c}{3}\le b$

Từ đó suy ra $b \le 2c$ và $c \le 2b$.

Chú ý : Có thể dựng đường phân giác của góc A rồi từ G dựng đường vuông góc với phân giác cắt AB ở M, AC ở N. Nhưng cách dựng này khó biện luận.

BẢNG B

Bài 1

Câu a : Đặt $A = (1995+1)(1995+2)\ ...\ (1995+3990)$, ta có :

$A = \frac{1.2.3...1995.(1995+1)(1995+2)...(1995+3990)}{1.2.3...1995}$,

hay $A = \frac{(3.1995)!}{1995} = \frac{3.6.9...(3.1995).B}{1995}$,

Trong đó $B = 1.2.4.5.7.8\ ...\ (3.1995 - 1)$, nghĩa là gồm tích các thừa số trong (3.1995) ! nhưng không chia hết cho S.

Từ đó :

$A = \frac{3^{1995}.1995.B}{1995} = 3^{1995}.B$

$A \vdots 3^{1995}$. Vậy số dư trong phép chia đã cho bằng 0.

Câu b : Ta xét hai trường hợp ($n > 0$; $n < 0$).

*) *Trường hợp $n > 0$:*

Ta phải tìm n để $P = (n+5)(n+6) \vdots 6n$.

$P = (n+5)(n+6) = n^2+11n+30 = 12n + (n^2-n+30)$.

P chia hết cho $6n \Leftrightarrow n^2 - n + 30$ chia hết cho $6n$ (*). Do (*), để tìm n sao cho $P \vdots 6n$ ta chỉ cần tìm n sao cho $n^2-n+30 \vdots 6n$ (**).

Từ (**), $n \backslash n^2 - n$ nên $n \backslash 30$; $6 \backslash 30$ nên $6 \backslash n^2 - n = n(n-1)$

Tích này chẵn, vì là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Tích này chia hết cho 3 khi và chỉ khi : n là bội của 3 hoặc $n - 1$ là bội của 3, nghĩa là n là bội của 3 cộng thêm 1.

Tóm lại để $P \vdots 6n$ thì n phải là ước của 30 và là bội của 3 hoặc là bội của 3 cộng thêm 1.

Vậy n chỉ có thể là các số 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30.

Thay các giá trị trên vào $P = (n+5)(n+6)$ và $6n$ chỉ có các giá trị 1, 3, 10, 30 thỏa mãn điều kiện bài toán đề ra.

*) *Trường hợp $n < 0$.*

Đặt $n = -n'$, ta phải tìm n' sao cho $P = (-n'+5)(-n'+6) \vdots -6n'$ hay $(5-n')(6-n') \vdots 6n'$. Cách giải tương tự như trên ta tìm được thêm các giá trị của n : $n = -2, -5, -6, -15$.

Đáp số : n lấy 8 giá trị sau : 1, 3, 10, 30 ; −2, −5 ; −6 và −15.

Bài 2

Câu a : Ta phải chứng minh với $n \le m - 1$ và x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc hai $x^2+mx+n=0$ thì $x_1^2+x_2^2\ge 1$.

Thật vậy, theo định lí Vi-ét ta có : $\begin{cases} x_1+x_2 = -m\ (*) \\ x_1x_2 = n \end{cases}$

Từ đó : $(x_1+x_2)^2 = x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 = m^2$ hay $x_1^2+x_2^2 = m^2-2x_1x_2 = m^2-2n$.

Để chứng minh $x_1^2+x_2^2\ge1$, ta phải chứng minh $m^2-2n\ge 1$. (*)

Theo giả thiết ta có $n \le m-1$ nên $2n \le 2(m-1)$

Từ đó $m^2-2n \ge m^2-2(m-1)$

$m^2-2n-1 \ge m^2-2(m-1)-1 = m^2-2m+1 =$ $= (m-1)^2\ge0$ Vậy : $m^2-2n-1\ge0$ hay $m^2-2n\ge1$ (đpcm).

Câu b : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa : $2x + 2y \ge 0$ và $2x - 3y \ge 0$. Đặt $X = 2x + 2y$ và $Y = 2x - 3y$, ta có $X + Y = 4x - y = 5$. Thay vào hệ pt đã cho được

$\begin{cases} 2(\sqrt{X}+\sqrt{Y}) = 3\sqrt{XY}\ (1) \\ X+y=5\ (2) \end{cases}$

Bình phương hai vế của (1) ta được : $4(X+Y+2\sqrt{XY}) = 9XY$ (*) Thay $X + Y = 5$ vào phương trình (*) được : $4(5+2\sqrt{XY}) = 9XY$ (**) Đặt $\sqrt{XY}=Z$, thay vào (**), được : $4(5+2Z)=9Z^2$. Rút gọn được $9Z^2-8Z-20=0$ (***)

Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Tính được nghiệm dương $Z_1 = 2$ ($Z_2<0$ loại)

Với $Z=\sqrt{XY}=2 \Rightarrow XY=4$.

Cuối cùng ta có hệ phương trình $\begin{cases} X+Y=5 \\ XY=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=4 \\ Y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} X=1 \\ Y=4 \end{cases}$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} X=2x+2y=4 \\ Y=2x-3y=1 \end{cases}$, được nghiệm $x_1=7/5, y_1=3/5$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} X=2x+2y=1 \\ Y=2x-3y=4 \end{cases}$, được nghiệm $x_2 = \frac{11}{10}, y_2=-\frac{3}{5}$

Thử lại cả hai nghiệm trên đều thỏa mãn phương trình đã cho.

Bài 3 và 4 : Xem đáp án của bảng A.

NGUYỄN HỮU THẢO

ỐNG KÍNH CẢI CÁCH DẠY VÀ HỌC TOÁN

XÂY DỰNG CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TRỤC TỌA ĐỘ

PHẠM CÔNG MINH
(Hải Hưng)

Trong sách đại số lớp 10 ban Khoa học tự nhiên, bài : "Hàm số bậc hai" phần công thức biến đổi trục tọa độ các tác giả viết : "Cho hệ trục tọa độ Oxy và điểm $I(x_o y_o)$ trong mặt phẳng tọa độ (điểm I không trùng điểm gốc O).

Lấy I làm góc, ta dựng hệ trục tọa độ mới IXY sao cho $X'X$ song song cùng chiều và cùng đơn vị với $x'x$, $Y'Y$ song song cùng chiều và cùng đơn vị với $y'y$.

Gọi M là một điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Điểm M có các tọa độ (x, y) trong hệ trục tọa độ Oxy và các tọa độ (X, Y) trong hệ tọa độ IXY. Ta hãy tìm mối liên hệ giữa các cặp tọa độ (x, y) và (X, Y).

Ta có : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$ chiếu lên các trục Ox và Oy ta được :

$$\begin{cases} x = x_o + (x - x_o) = x_o + X \\ y = y_o + (y - y_o) = y_o + Y \end{cases}$$

Vậy ta có công thức : $\begin{cases} x = x_o + X \\ y = y_o + Y \end{cases}$

Các công thức này được gọi là các công thức biến đổi trục tọa độ".

Trong thực tế, ý tưởng trên của các tác giả gây không ít băn khoăn cho người dạy và học. Trong các giáo trình khác vấn đề vẫn được trình bày dựa trên hình vẽ, vẫn là vấn đề gây nhầm lẫn trong quá trình giải toán. Theo tôi có thể sửa lại đôi chút :

"Cho hệ tọa độ trực chuẩn Oxy có hệ vectơ đơn vị $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Một điểm $I(x_o, y_o)$ trong mặt phẳng tọa độ. Lấy I làm gốc, dựng hệ tọa độ mới IXY có cùng hệ vectơ đơn vị $\vec{i}$ và $\vec{j}$ với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy. Khi đó với điểm M tùy ý trên mặt phẳng tọa độ :

+ Xét trong hệ tọa độ Oxy điểm M có tọa độ $M(x, y)$ và $\overrightarrow{IM} = (x - x_o, y - y_o) = (x - x_o)\vec{i} + (y - y_o)\vec{j}$

+ Xét trong hệ tọa độ IXY điểm M có tọa độ $M(x, y)$ và $\overrightarrow{IM} = (X, Y) = X\vec{i} + Y\vec{j}$

Nhưng vectơ $\overrightarrow{IM}$ biểu diễn qua sơ đồ trực chuẩn $\vec{i}, \vec{j}$ là duy nhất nên :

$$\begin{cases} x - x_o = X \\ y - y_o = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + x_o \\ y = Y + y_o \end{cases}$$

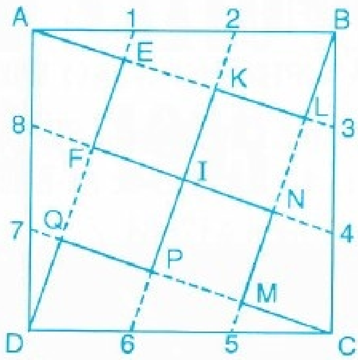
đó là công thức biến đổi trục tọa độ

Trình bày theo hướng này rõ ràng hơn, không phụ thuộc vào hình vẽ, tránh được nhầm lẫn và tạo được cảm xúc hòa nhập giữa đại số với hình học.

Giải đáp bài

CẮT GHÉP HÌNH VUÔNG

Giả sử ta có hình vuông ABCD. Chưa các cạnh của hình vuông thành 3 phần bằng nhau bởi các điểm 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Nối các đường : $A3$, 84, $7C$, $D1$, 62, $5B$ như hình vẽ. Các đường này cắt nhau tại các điểm : $E, F, I, K, L, M, N, P, Q$. Dựa vào đó ta vẽ hai đường gấp khúc chia hình vuông thành 4 mảnh bằng nhau như sau :



Đường thứ nhất : $AEFIKLB$

Đường thứ hai : $CMNIPQD$

Cắt hình vuông $ABCD$ theo hai đường này ta được 4 mảnh $AEFIKLB$, $BLKINMC$, $CMNIPQD$, $DQPIFEA$ bằng nhau và ghép bất kì hai mảnh lại theo cạnh của hình vuông ta đều được một hình chữ thập.

BÌNH PHƯƠNG

AI BẮN TRÚNG VÒNG 10 ?

Ba anh bộ đội Mạnh, Hùng, Dũng tập bắn bia. Mỗi người bắn 3 phát vào cùng một bia. Kết quả như sau : Tất cả các vòng bia từ 2 đến 10 đều được bắn trúng và ba người đều có tổng số điểm bằng nhau. Biết rằng Hùng bắn trúng vòng 4, Dũng bắn trúng vòng 7. Các bạn hãy xét xem ai đã bắn trúng vòng 10 và mỗi người đã bắn trúng những vòng nào ?

NGÔ HÂN
(Hà Bắc)

VIỆN CÔNG NGHỆ VI ĐIỆN TỬ (IMET)

TỔNG ĐẠI DIỆN KỸ THUẬT VÀ PHÂN PHỐI SẢN PHẨM Wearnes TẠI VIỆT NAM

- **VĂN PHÒNG GIAO DỊCH TẠI HÀ NỘI :**

  39 Lý Thường Kiệt, Hoàn Kiếm Hà Nội
  Tel. : 84 4 250767 ; 84 4 267645
  Fax : 84 4 267645

- **VĂN PHÒNG GIAO DỊCH TẠI TP HỒ CHÍ MINH :**

  4 Đặng Tất Quận 1, TP Hồ Chí Minh
  Tel.: 84 8 439734 ; 84 8 437064
  Fax : 84 8 437064

☞ Máy tính Wearnes là sản phẩm của Wearnes Thakral (USA) - là một trong năm nhà cung cấp máy tính lớn nhất.

☞ Máy tính Wearnes đạt tiêu chuẩn ISO 9002 do Cơ quan Tiêu chuẩn chất lượng quốc tế cấp.

☞ Máy tính Wearnes được bảo hành 03 năm

☞ Máy tính Wearnes được Bộ Giáo dục và Đào tạo chọn là loại máy sẽ trang bị cho các Trường phổ thông trong năm 1995

Wearnes COMPUTERS