

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

9 (219)

1995

NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG



**50 NĂM CÁCH MẠNG THÁNG 8
VÀ QUỐC KHÁNH 2 - 9**

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

	Trang
• <i>Dành cho các bạn Trung học Cơ sở</i> <i>For Lower Secondary School Level Friends</i> Nguyễn Đức Tấn – Từ một bài toán quen thuộc	1
• Vũ Kim Thủy – Hội thi tin học trẻ không chuyên toàn quốc.	1
• Ngô Hàn – Cách giải hay, độc đáo	2
• <i>Giải bài kì trước</i> <i>Solutions of Problems in Previous Issue</i> Các bài của số 215	4
• <i>Đề ra kì này</i> <i>Problems in This Issue</i>	10
• <i>Giải trí toán học.</i> <i>Fun with Mathematics</i> Bình Phương – Giải đáp bài Trò chơi viết số.	11
Ngô Hàn – Trò chơi thay số.	11
• Đề thi học sinh giỏi lớp 9 Hà Nội 1994–1995	12
• <i>Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học.</i> <i>For College and University Entrance Exam Preparers</i> Phạm Bảo – Bậc của tham số và hình bao của họ đường $y = f(x, m)$	13
• <i>Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông</i> <i>Helping Young Friends Gain Better</i> <i>Understanding in Secondary school Maths</i> Trịnh Vinh Ngọc – Phương pháp trải tứ diện	15

Tổng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :

NGÔ ĐẠT TỬ

HOÀNG CHÚNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP :

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng
Chúng, Ngô Đạt Tử, Lê Khắc
Bảo, Nguyễn Huy Doan,
Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang
Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan
Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê
Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu,
Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc
Minh, Trần Văn Nhung,
Nguyễn Đăng Phát, Phan
Thanh Quang, Tạ Hồng
Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ
Dương Thụy, Trần Thành
Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô
Việt Trung, Đặng Quan Viễn.

Trụ sở tòa soạn :

45B Hàng Chuối, Hà Nội

ĐT: 213786

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY

231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

ĐT: 356111

Trình bày : TRỌNG THIỆP

ISSN : 0866 – 8035

Chỉ số 12884

Mã số : 8BT21M5

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục

In tại Xưởng in Nhà xuất bản Giáo dục

In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 / 1995.

Giá : 2000đ

Hai nghìn đồng

Dành cho các bạn Trung học Cơ sở

TỪ MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Trong việc học toán có những điều thật đơn giản, thật quen thuộc nhưng nếu chúng ta tiếp tục suy nghĩ và không ngừng suy nghĩ thì chắc chắn sẽ đem đến cho chúng ta nhiều điều thú vị.

Bài viết này xin cùng bạn đọc về với một bài toán quen thuộc.

Bài toán : Cho hình vuông $ABCD$. Đặt một hình vuông $A'B'C'D'$ sao cho tâm hai hình vuông đó trùng nhau.

Chứng minh trung điểm của AA' , BB' , CC' , DD' là đỉnh của một hình vuông khác.

Xin được nêu 3 cách giải trong số các cách giải

Cách 1 :

$$\triangle BOB' = \triangle AOA' \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BB' = AA'$$

Xét tương tự ta có

$$AA' = BB' = CC' = DD'$$

$$\Rightarrow OM = ON = OP = OQ.$$

Tứ giác $BB'DD'$ là hình bình hành (vì $B'D'$ và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường) $\Rightarrow BB' \parallel DD' \Rightarrow BMDP$ là hình bình hành $\rightarrow O$ là trung điểm MP .

Tương tự trên O là trung điểm QN .

Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật

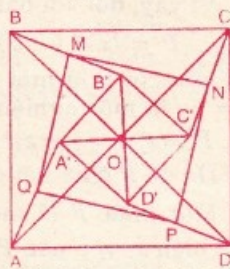
$$\triangle CON = \triangle DOP \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{CON} = \widehat{DOP} \Rightarrow \widehat{NOP} = 90^\circ$$

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Cách 2 : Nối $B'C$, $C'D$, AD' , $A'B$.

Gọi E , F , G , H lần lượt là các trung điểm.

Từ đó vận dụng kiến thức đường trung bình của tam giác, tam giác bằng nhau $\Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.



Cách 3 : Thực hiện phép quay tâm O , góc quay 90° cùng chiều kim đồng hồ thì các đoạn AA' , BB' , CC' , DD' sẽ lần lượt trùng với BB' , CC' , DD' , AA' do đó các điểm M , N , P , Q lần lượt trùng với N , P , Q , M . Từ đó $QM = ON = OP = OQ$ và $\angle MON = \angle NOP = \angle POQ = \angle QOM = 90^\circ$. Vậy $MNPQ$ là hình vuông.

Với lời giải theo cách 3 chúng ta giải được bài toán rất độc đáo. Bài toán tổng quát của bài toán trên.

Bài 1 : Cho đa giác đều n cạnh $A_1 A_2 \dots A_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ đặt một đa giác đều n cạnh $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ sao cho tâm hai đa giác đều đó trùng nhau. Gọi $A''_1 A''_2 \dots A''_n$ lần lượt là trung điểm của $A_1 A'_1$, $A_2 A'_2$, $\dots$, $A_n A'_n$. Chứng minh rằng đa giác $A''_1 A''_2 \dots A''_n$ là đa giác đều.

Và chắc chắn rằng với cách giải này nếu "đứng ở vị trí này hoặc nọ" ta sẽ có các bài toán mới khác nữa.

Nhưng với cách giải 1, 2 có tìm được điều gì lý thú không? Với cách giải chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành không cần đến O là tâm chung mà cách giải 3 "bị hạn chế" ta "nảy" ra bài toán 2 sau đây :

Bài toán 2 : Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt một hình bình hành $A'B'C'D'$ nằm trong hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng trung điểm của AA' , BB' , CC' , DD' sao cho các đỉnh của hình bình hành $A'B'C'D'$ là các đỉnh của một hình bình hành. Bây giờ đến lượt các bạn nhé. Hãy giải bài toán trên bằng cách khác. Tìm các bài toán mới suy từ bài toán này.

Chúc các bạn gặp nhiều điều thú vị.

HỘI THI TIN HỌC TRẺ KHÔNG CHUYÊN TOÀN QUỐC

Sau bốn tháng chuẩn bị và tiến hành thi từ cơ sở đến thi tỉnh với hàng ngàn thí sinh tham dự, Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần đầu tiên được tổ chức tại Hà Nội vào ngày 17.8.1995. Đã có 17 em học sinh tiểu học, 23 em phổ thông trung học cơ sở, 27 em phổ thông trung học và 18 em là thanh niên dưới 18 tuổi của 27 tỉnh, thành, ngành tham dự. Ngày 19.8.1995 Lễ trao giải cuộc thi đã được tổ chức tại Hội trường Bảo tàng Hồ Chí Minh. 36 em đã đoạt giải và 8 em được giải phần mềm sáng tạo tự làm. Em Nguyễn Quang Uy, Khánh Hòa nhất khối tiểu học, Nguyễn Đình Hiếu, An

Giang nhất khối trung học cơ sở, Lý Tiểu Bằng, Sông Bé nhất khối trung học phổ thông và Nguyễn Tất Đắc, Hải Phòng nhất khối thanh niên dưới 18 tuổi. Thành phố cảng Hải Phòng có cả 4 em đoạt giải. Em Đặng Vũ Tùng (Hải Hưng) 7 tuổi là thí sinh trẻ nhất. Em Vũ Đức Trung (Hòa Bình) 9 tuổi là thí sinh trẻ tuổi nhất đoạt giải. Các địa phương đạt kết quả cao là Hải Phòng, TP Hồ Chí Minh, Hà Nội, Hà Tây, Khánh Hòa, Nam Hà. Qua cuộc thi cho thấy phong trào tin học không chuyên ở các tỉnh miền núi phía Bắc còn chưa phát triển.

VŨ KIM THỦY

CÁCH GIẢI HAY, ĐỘC ĐÁO

NGÔ HÀN

(Hà Nội)

Sau khi đã biết cách giải một bài toán, các bạn hãy cố gắng tìm thêm những cách giải khác (nếu có) để chọn ra cách giải hay nhất, đôi khi độc đáo.

Xin nêu một số bài toán dưới đây cùng với cách giải hay hoặc độc đáo để chúng ta cùng học tập.

Bài toán 1 : *Vừa gà vừa chó 36 con. Tróí lại cho tròn đếm đủ 100 chân. Hỏi có mấy gà, mấy chó ?*

Đây là một bài toán cổ ở nước ta mà các học sinh phổ thông đều biết cách giải bằng các phương pháp : giả thiết tạm, phương trình, hệ phương trình, v.v..

Sau đây là cách giải rất hay và độc đáo của G.Pôlya, một nhà toán học và tâm lý học nổi tiếng của Pháp :

Giả sử những con gà và chó giống như những con vật ở rạp xiếc biết thực hiện theo lệnh của người điều khiển là phải đứng ở một tư thế rất đặc biệt : Mỗi con gà chỉ được đứng bằng một chân, mỗi con chó chỉ được đứng bằng 2 chân sau (tức là mỗi con phải co một nửa số chân của mình lên khỏi mặt đất).

Như vậy theo đề toán, ta suy ra tổng số chân chạm đất của 36 con vừa gà, vừa chó là 50 chân (vì có tất cả là 100 chân).

Nếu 36 con toàn là gà thì chỉ có 36 chân chạm đất. Do đó số chân thừa ra là :

$$50 - 36 = 14 \text{ (chân)}$$

Số chân này ứng với số chó vì mỗi con chó so với mỗi con gà được tính thêm một chân chạm đất.

Vậy có 14 chó và còn lại là 22 gà.

Cách giải này thật đơn giản, dễ hiểu và như "xiếc" vậy !

Bài toán 2 : *Cho 3 số bất kì x, y, z . Chứng minh đẳng thức :*

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

Cách giải thông thường của bài toán này là thực hiện các phép toán ở vế trái bằng cách dùng các hằng đẳng thức, rồi nhóm các hạng

tử để có nhận tử chung và cuối cùng được kết quả là vế phải của đẳng thức cần chứng minh.

Có một cách giải hơi "lạ" đối với các bạn học sinh phổ thông cơ sở là dựa vào mối liên quan giữa nghiệm của một đa thức với phép chia đa thức cho nhị thức :

Đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = a$ khi và chỉ khi đa thức $P(x)$ chia hết cho nhị thức $x - a$.

Vì vậy, đối với bài toán đã nêu, ta đặt :

$$P = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 \quad (1)$$

và nếu coi P là một đa thức với biến số x thì $x = -y$ là một nghiệm, vì khi $x = -y$ ta có :

$$P = (-y + y + z)^3 - (-y)^3 - y^3 - z^3 = 0$$

Do đó P chia hết cho $(x + y)$

Mặt khác P là một đa thức đối xứng giữa các biến x, y, z nên P cũng chia hết cho $(y + z)$ và $(z + x)$, tức là P được phân tích thành nhân tử, có dạng :

$$P = (x + y)(y + z)(z + x) Q \quad (2)$$

Vì P viết ở dạng (1) là đẳng cấp bậc 3 và P viết ở dạng (2) muốn là đẳng cấp bậc 3 thì Q phải là một hằng số.

Do đó nếu cho $x = y = z = 1$ thì giá trị của P viết ở dạng (1) sẽ là :

$$P = (1 + 1 + 1)^3 - 1^3 - 1^3 - 1^3 = 24 \quad (3)$$

và giá trị của P viết ở dạng 2 sẽ bằng :

$$P = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)Q = 8Q \quad (4)$$

So sánh (3) và (4) suy ra : $Q = 3$.

Vậy : $P = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

Bài toán 3 : *Cho các số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh bất đẳng thức :*

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Nó trở thành đẳng thức khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ở thế kỉ III trước công nguyên, Óclit, nhà toán học cổ ở Ai Cập, bằng phương pháp hình học đã tìm ra bất đẳng thức nêu trên trong trường hợp $n = 2$ và gọi là bất đẳng thức Óclit.

Năm 1821, Côsi, nhà toán học lỗi lạc Pháp đã chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp tổng quát, nên ta gọi bất đẳng thức trong bài toán 3 là bất đẳng thức Côsi.

Nhiều nhà toán học khác đã chứng minh bất đẳng thức Côsi theo các cách khác nhau, tuy rằng cũng dùng phương pháp chứng minh qui nạp và đều phải chứng minh dài. Ngay chứng minh của Côsi cũng khá dài nên không nêu ra ở đây.

Cách đây không lâu, Kong-Ming-Chong dól ở Maylaysia đã đưa ra một cách giải khác, tương đối ngắn gọn như sau :

Trước hết, đặt : $T = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ Khi đó bất đẳng thức ở trên tương đương với bất đẳng thức :

$$T^n \geq a_1 a_2 \dots a_n \quad (1)$$

Nếu $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ thì (1) trở thành đẳng thức, vì : $T^n = T \cdot T \dots T = a_1 a_2 \dots a_n$.

Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ không bằng nhau tất cả thì phải có bất đẳng thức thực sự :

$$T^n > a_1 a_2 \dots a_n \quad (2)$$

Ta chứng minh (2) bằng qui nạp.

Để thấy (2) đúng với $n = 2$, tức là :

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow T^2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 > a_1 a_2$$

Giả sử (2) đúng với $n - 1$ số không bằng nhau tất cả có trung bình cộng bằng T . Ta phải chứng minh (2) đúng với n .

Thật vậy, trong các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ không bằng nhau tất cả phải có một số bé hơn T và một số lớn hơn T , giả sử là a_1 và a_2 :

$$a_1 < T < a_2$$

Do đó ta có :

$$(T - a_1)(a_2 - T) > 0$$

hay là :

$$a_1 + a_2 - T > \frac{a_1 a_2}{T} \geq 0$$

Ta xét $n - 1$ số không âm sau đây :

$$a_3, a_4, \dots, a_n, (a_1 + a_2 - T)$$

Để thấy $n - 1$ số nói trên không bằng nhau tất cả nên theo giả thiết qui nạp ta có :

$$T^{n-1} > \frac{a_3 a_4 \dots a_n (a_1 + a_2 - T)}{a_1 a_2} > a_3 a_4 \dots a_n \frac{a_1 + a_2 - T}{T}$$

$$\text{Vậy : } T^n > a_1 a_2 \dots a_n$$

- **Bài toán 4 :** Cho 2 đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau và gọi A là một trong các giao điểm của chúng. Hai chất điểm M_1 và M_2 chuyển động trên (C_1) và (C_2) tương ứng, xuất phát từ A cùng một lúc, theo cùng một chiều và

có vận tốc không đổi. Sau một vòng M_1 và M_2 trở về A cùng một lúc.

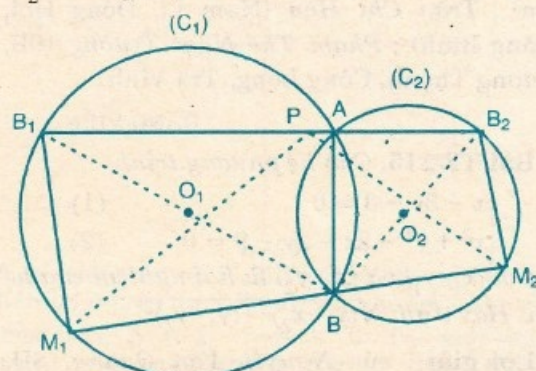
Chứng minh rằng có một điểm P trong mặt phẳng sao cho ở bất kì thời điểm nào trong quá trình chuyển động thì hai chất điểm M_1 và M_2 luôn cách đều P .

Bài toán này là bài toán số 3, do Liên Xô (cũ) đề xuất trong kì thi Toán quốc tế lần thứ 21, tổ chức tại Luân Đôn (Anh) năm 1979.

Cách giải do Ban giám khảo nêu ra là dựa vào các phương trình chuyển động theo vận tốc góc và dùng các công thức lượng giác để biến đổi thành hệ phương trình, nhưng giải không đơn giản.

Lê Bá Khánh Trình trong đoàn dự thi Việt Nam đã có cách giải "rất đẹp, rất độc đáo" như lời ca ngợi của ông Chủ tịch Hội đồng giám khảo quốc tế trong kì thi thứ nhất. Cách giải đó như sau.

Vì sau một vòng M_1 và M_2 trở về A cùng một lúc nên ở một thời điểm bất kì thì độ lớn của cung mà M_1 đã đi qua bằng độ lớn của cung mà M_2 đã đi qua (xem hình vẽ).



Do đó nếu gọi B là giao điểm thứ hai của hai đường tròn và ta nối AB , M_1B , M_2B thì có : $\widehat{M_1BA} + \widehat{M_2BA} = 180^\circ$, tức là 3 điểm M_1 , M_2 và B thẳng hàng.

Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua tâm O_1 , B_2 là điểm đối xứng với B qua tâm O_2 .

Ta có hình thang $M_1 M_2 B_2 B_1$ vuông tại M_1 và M_2 . Do đó nên P là trung điểm của cạnh bên $B_1 B_2$ thì P sẽ cách đều M_1 và M_2 vì P nằm trên đường trung bình của hình thang vuông (tức là P nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $M_1 M_2$).

Vì B_1 và B_2 cố định (do B cố định) nên trung điểm P cũng cố định.

Các bạn hãy tìm các cách giải khác đối với 4 bài toán đã nêu xem có cách giải nào hay hơn không và khi gặp các bài toán khác, các bạn cũng nên làm như vậy !



Bài T1/215. Tìm tám chữ số tận cùng của 5^{1995}

Lời giải. Ta có $5^{1995} = 5^{11} (5^{1984} - 1) + 5^{11}$. Ta sẽ chứng minh $5^{11} (5^{1984} - 1)$ chia hết cho 10^8 để suy ra các số 5^{1995} và 5^{11} có cùng 8 chữ số cuối tương ứng như nhau. Thật vậy, bằng cách áp dụng liên tiếp $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Ta có: $5^{1984} - 1 = (5^{31} - 1)(5^{31} + 1)(5^{62} + 1)(5^{124} + 1)(5^{248} + 1)(5^{496} + 1)(5^{992} + 1)$. Mà $5^{31} - 1 : 4$ và $5^k + 1 : 2 \forall k \in \mathbb{N}$. Suy ra $5^{1984} - 1$ chia hết cho 2^8 . Vậy $5^{11} (5^{1984} - 1) : 5^8 : 2^8 : 10^8$. Vậy tám chữ số cuối cần tìm là 48828125 ($= 5^{11}$).

Nhận xét. Có 110 bài giải trong số đó có 11 bài giải sai (10 bài sai đáp số; một bài chứng minh sai công thức tổng quát). Các bạn sau đây có lời giải tốt: Đào Mạnh Thắng (9B, Trường chuyên Việt Trì, Vĩnh Phú); Nguyễn Thịnh (9T, Phan Bội Châu, Nghệ An); Lương Hữu Tình (9T, Trường năng khiếu Bim Sơn, Thanh Hóa); Trần Chí Hòa (Nam Lí, Đồng Hới, Quảng Bình); Phạm Thế Nhật Trường (9B, Phương Thạnh, Công Long, Trà Vinh).

ĐẶNG VIỄN

Bài T2/215. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Gọi (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là hai nghiệm của hệ trên. Hãy tính: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Lời giải: của Nguyễn Văn Quang, 8D, Năng khiếu, TP Thanh Hóa.

Từ (1) suy ra $x = 3(y + 1)$ (3). Thay x ở (3) vào (2) ta có:

$$5y^2 + 5y - 3 = 0 \quad (4)$$

Do (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là hai nghiệm của hệ phương trình trên nên y_1 và y_2 cũng là nghiệm của (4). Theo định lý Viet ta có

$$y_1 + y_2 = -\frac{5}{5} = -1$$

$$y_1 y_2 = -\frac{3}{5}$$

Mặt khác từ (3) ta suy ra: $x_1 - x_2 = 3(y_1 - y_2)$

$$\text{Vậy: } \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{10(y_1 - y_2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Nhưng ta có: } (y_1 - y_2)^2 &= (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 \\ &= 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{5} \end{aligned}$$

Cuối cùng ta tính được

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{10 \cdot \frac{17}{5}} = \sqrt{34}$$

Nhận xét: Rất nhiều bạn giải được bài này. Các bạn sau đây có lời giải tốt: Nguyễn Văn Quý, 9A, NK Tiên Sơn, Hà Bắc; Vũ Mạnh Hùng 9A, chuyên Tam Đảo; Hà Thanh Tùng, 8T, chuyên Phú Thọ; Nguyễn Minh Phương, 9A, Việt Trì; Dương Huy Trung, 8, NK, Vĩnh Yên, Vĩnh Phú; Phạm Trần Quân, 8A, Bế Văn Đàn; Nguyễn Hồng Hà, 9H, Trưng Vương; Nguyễn Quốc Thắng, 9C, Hải Bối, Hà Nội; Bùi Duy Hùng, 9A, Tô Hiệu, Hải Phòng; Vương Đức Nghi, 9A, chuyên Quỳnh Phụ; Đặng Hồng Toàn, 9T, Phạm Huy Quang, Thái Bình; Trần Thành Sơn, 7T, Đinh Hữu Toàn, 8T, NK thị xã Ninh Bình; Nguyễn Tiến Hòa, 7T, NK Bim Sơn; Đỗ Huy Dũng, 9B, Thiệu Văn; Lê Minh Thành, 9T, Lam Sơn; Cao Quốc Hiệp, 9T; Lê Văn Tuấn, 9A, NK Hoàng Hóa, Thanh Hóa; Trần Phúc Nguyên, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An, Trần Chí Hòa, Nam Lí, Đồng Hới, Quảng Bình. Lê Tự Nhiên, 9A, Nguyễn Văn Trỗi, Điện Bàn, Quảng Nam - Đà Nẵng; Nguyễn Thị Thanh Thủy, Trần Thị Ngọc Hải, Lương Lê Tú, 9T, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi; Mai Đức Thanh, Buôn Ma Thuột, Đak Lak; Trịnh Anh Vũ, 9T, chuyên Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai; Trần Hữu Nhơn, 9T, chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long.

TỐ NGUYỄN

Bài T3/215. Cho dãy số $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$a_n = \frac{2}{(2n+1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0)$$

Chứng minh rằng:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{n}{n+2}$$

Lời giải (của bạn Cao Quốc Hiệp 9T Hoàng Hóa)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a_n &= \frac{2}{(2n+1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \\ &= \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{4n^2 + 4n + 1}} < \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{2\sqrt{n(n+1)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Từ đó

$$= S_n < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{4n+4}}$$

$$= < 1 - \frac{2}{\sqrt{n^2+4n+4}} = 1 - \frac{2}{n+2} = \frac{n}{n+2}.$$

Nhận xét : Nhiều bạn giải tốt bài toán này, trong số đó có : Nguyễn Hứa Khán Minh, Nguyễn Tri Phương Huế, Trịnh Bảo Trung, 8A Bế Văn Đàn Hà Nội, Trần Quang Bình, lớp 9A Long An, Nguyễn Quốc Thắng, 9C Đồng Anh, Hà Nội, Hà Thế Hùng, 9 chuyên Thanh Sơn, Vĩnh Phú, Nguyễn Việt Thanh, 8 Lộc Ninh, Quảng Bình, Mai Ngọc Kha, 8 Trần Đăng Ninh, Nam Hà, Nguyễn Trần Phương, 9 Nghi Lộc Nghệ An, Đào Trọng Thế, 9NK Hà Tĩnh, Trần Nam Dũng 9CT, Vĩnh Nghệ An, Nguyễn Minh Quân, 8T Quảng Ngãi, Nguyễn Thị Kim Phương 6, Đức Phổ Quảng Ngãi, Trần Thành Sơn, 7CT Ninh Bình.

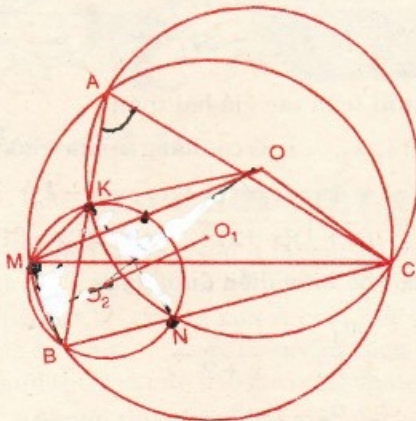
DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/215 : Cho tam giác ABC và một đường tròn tâm O đi qua A và C. Gọi K và N là các giao điểm của đường tròn O với các cạnh AB, BC tương ứng. Đường tròn tâm O_1 , O_2 ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle KBN$ cắt nhau tại B và M. Chứng minh rằng $O_1O_2 \parallel OM$.

Lời giải :

Nối M với K, C với O, K với O và K với C. Ta có :

$\widehat{KOC} = 2\widehat{KAC}$ (1)
 $\widehat{KMC} = \widehat{KMB} - \widehat{BMC} = (180^\circ - \widehat{KNB}) - \widehat{BMC}$ (Do tứ giác BMKN nội tiếp). Mặt khác tứ giác AKNC nội tiếp nên $\widehat{KAC} = \widehat{KNB}$



Từ đó $\widehat{KMC} = (180^\circ - \widehat{KAC}) - \widehat{BAC} = 180^\circ - 2\widehat{BAC}$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có :

$\widehat{KOC} + \widehat{KMC} = 180^\circ$. Do đó tứ giác MKOC nội tiếp.

Suy ra $\widehat{OMC} = \widehat{OKC}$

$$\text{Mà } \widehat{OKC} = \frac{180^\circ - \widehat{KOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{BAC}$$

(theo (1)) $\Rightarrow \widehat{OMC} = 90^\circ - \widehat{BAC}$.

Lại có $\widehat{BMC} = \widehat{BAC}$.

Do đó $\widehat{OMC} + \widehat{CMB} = 90^\circ$ hay $OM \perp BM$.
 Để thấy $O_1O_2 \perp BM$. Vậy $O_1O_2 \parallel OM$.

Nhận xét :

Giải tốt bài này có các bạn : Cao Sơn Đông, 9A, cấp II Xuân Sơn, Đồng Triều, Quảng Ninh; Phạm Thu Hương, 8A₁ THCS Hồng Bàng, Bùi Duy Hùng, 9A THCS Tô Hiệu, Hải Phòng; Nguyễn Công Nguyên 9, NK Việt Yên, Lê Xuân Hoàng 9A NK Hiệp Hòa, Hà Bắc; Vũ Mạnh Hùng, 9A chuyên cấp II Tam Đảo, Hà Thế Hùng 9T chuyên Thanh Sơn, Hà Thanh Tùng, 8T chuyên cấp II Phú Thọ, Vĩnh Phú; Đào Phương Bắc 7A Bế Văn Đàn, Nguyễn Hoàng Lam 7A₁ Chu Văn An, Nguyễn Quốc Thắng 9C, Hải Bối, Đồng Anh, Phạm Thế Anh, 8CT Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội; Đỗ Ngọc Anh, 9A NK Nguyễn Hiến, Đỗ Quốc Bảo, Mai Ngọc Kha, Nguyễn Hồng Hạnh, 8T, Đặng Việt Cường, Nguyễn Anh Hoa 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Hà Mạnh Hùng, 8T NK Ý Yên, Nam Hà; Phạm Minh Đức, Trần Ngọc Thanh, Nguyễn Minh Thanh, Viên Ngọc Quang 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa, Đặng Đức Hạnh, Nguyễn Thịnh, 9T Phan Bội Châu, Nghệ An; Trần Lệ Thủy, 8T NK Thạch Hà, Hà Tĩnh; Nguyễn Việt Thanh 8C, THCS Lộc Ninh, Đồng Hới, Quảng Bình; Tân Đạt, 9 Thực hành SP Hòa Khánh, Hòa Vang, Quảng Nam - Đà Nẵng; Trần Thị Ngọc Hải, Nguyễn Trung Kiệt, 9T chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi; Mai Đức Thanh, Buôn Mê Thuật, Đắc Lắc, Trịnh Anh Vũ, 9T Chuyên Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai; Ngô Xuân Huy, 9₁, Nguyễn Đức Thành 9₂ trường Colette Q3 TP HCM, Trần Hữu Nhơn, 9T Chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long

VŨ KIM THỦY

Bài T5/215 Cho tam giác ABC. Hai điểm M và N theo thứ tự di động trên hai cạnh AB và AC sao cho $BN = CM$. Gọi T là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng đường phân giác trong của góc BTC luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. Dựng hình bình hành BACD. Do $\triangle ABC$ đã cho nên D xác định và do đó cố định (1). Gọi S là diện tích hình bình hành ACDB. Ta có :

$$S_{(NBD)} = S_{(CBD)} = \frac{S}{2} (\text{vì } BD \parallel AC)$$

$$S_{(MCD)} = S_{(BCD)} = \frac{S}{2} (\text{vì } AB \parallel CD)$$

Vậy $S_{(NBD)} = S_{(MCD)}$

Hơn nữa

các tam giác

NBD , MCD

lại có $NB =$

MC (gt) nên

các đường

cao tương

ứng là DI ,

DK phải

bằng nhau.

Vậy D nằm

trên đường

phân giác 1 góc tạo bởi hai đường thẳng BN ,

CM (2). Mặt khác, do M, N lần lượt di động trên

các cạnh AB, AC nên giao điểm T của BN, CN

nằm trong $\triangle ABC$ suy ra tứ giác $BTCD$ lồi và

các đường chéo BC, TD cắt nhau tại điểm E

nằm giữa B, C , hay tia TD nằm giữa hai tia TB ,

TC (3). Kết hợp (3) với (2), ta có TD là tia phân

giác của góc BTC ; kết hợp với (1) ta có đpcm.

Nhận xét. Có 1 lời giải sai cho rằng điểm

cố định cần tìm là trung điểm của BC , còn lại

đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có: Nguyễn Thị

Phương Thảo (8A, THCS Chu Văn An, Hà

Nội), Nguyễn Tấn Quân (PT chuyên Gia Lai,

Pleiku), Hồ Bảo Lâm (8C2 THCS Kim Đồng,

TX Bà Rịa), Mai Ngọc Kha (8T, Trần Đăng

Ninh, Nam Định) Nguyễn Tuấn Anh (7 toán

THCS Vũng Tàu)

DẶNG VIỄN

Bài T6/215: a, b là các số thực thỏa mãn

$4b > a^2$. Hai dãy số $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ và $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$

được xác định như sau:

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ và } b_{n+1} = b_n^2,$$

$$a_{n+1} = 2b_n - a_n^2 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng tồn tại một số $n \geq 0$ mà $a_n > 0$.

Lời giải (của Vũ Quang Đông, 11 CT DHTH Hà Nội): Từ $4b > a^2$ và từ cách xác định dãy $\{b_n\}$ suy ra $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Từ các hệ thức xác định $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ ta có:

$$\frac{a_{n+1}}{2b_n} = 1 - \frac{a_n^2}{2b_n} = 1 - 2 \left(\frac{a_n}{2b_{n-1}} \right)^2 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $c_n = \frac{a_{n+1}}{2b_n}$, từ (1) ta có:

$$c_{n+1} = 1 - 2c_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2) \text{ và } c_0 = \frac{2b - a^2}{2b}$$

Từ $4b > a^2 \Rightarrow 2b \geq 2b - a^2 > -2b \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2b - a^2}{2b} > -1 \Rightarrow \exists \varphi \in (0, \pi]$ sao cho $\frac{2b - a^2}{2b} = -\cos \varphi$. Với $c_0 = -\cos \varphi$, bằng quy nạp theo n , từ (2) dễ dàng có $c_n = -\cos(2^n \varphi) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Do $\varphi \in (0, \pi]$ nên $\exists k \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{\pi}{2^{k+1}} < \varphi \leq \frac{\pi}{2^k}$, hay $2^k \cdot \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Khi đó $c_k = -\cos(2^k \varphi) > 0$ và do vậy $a_{k+1} > 0$ (đpcm).

Nhận xét: Cùng với bạn Đông, bạn Phạm Đình Trường (11 CT Trần Phú Hải Phòng) cũng có lời giải tốt.

NGUYỄN KHẮC MINH.

Bài T7/215

Chứng minh rằng

$$a) \frac{1}{1} C_n^1 C_n^0 - \frac{1}{3} C_n^2 C_{n+1}^1 + \frac{1}{5} C_n^3 C_{n+2}^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} C_n^n C_{2n-1}^{n-1} = 1$$

$$b) C_n^1 1^n - \frac{1}{3} C_n^2 2^2 + \frac{1}{5} C_n^3 3^n + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} C_n^n n^n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$$

Lời giải (của tác giả bài toán)

Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các hằng số cho trước. Xét

$$F(x) = \frac{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)}{(x + 1)(x + 2) \dots (x + n)(2x + 1)}$$

$F(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$F(x) = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a^2}{x+2} + \dots + \frac{a_n}{x+n} + \frac{a_{n+1}}{2x+1}$$

Quy đồng mẫu số và cho x lần lượt các giá trị

$$x = \frac{1}{2}, -1, -2, \dots, -n \text{ ta thu được}$$

$$a_1 = \frac{(\lambda_1 + 1) \dots (\lambda_n + 1)}{(n-1)!} (-1)^{n-1}$$

$$a_2 = \frac{(\lambda_1 + 2 \dots (\lambda_n + 2))}{3 \cdot (n-2)!} (-1)^{n-2}$$

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)!} \frac{(\lambda_1 + n)(\lambda_2 + n) \dots (\lambda_n + n)}{(n-1)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(2\lambda_1 + 1) \dots (2\lambda_n + 1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} (-1)^n$$

$$\text{Kí hiệu } \varphi(x) = \prod_{i=1}^n (x + \lambda_i)$$

Từ (1) cho $x = 0$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(1)}{(n-1)!} (-1)^{n-1} &= \frac{\varphi(2)}{3 \cdot 2! (n-2)!} (-1)^{n-2} + \dots \\ &+ \frac{\varphi(n)}{(2n-1)n!} \frac{(2\lambda_1 + 1) \dots (2\lambda_n + 1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} (-1)^n = \\ &= \frac{(-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{hay } -c_n^1 \varphi(1) + \frac{1}{3} c_n^2 \varphi(2) + \dots + \frac{(-1)^n c_n^n \varphi(n)}{2n-1} \\ + n! \frac{(2\lambda_1 + 1) \dots (2\lambda_n + 1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

Cho $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \dots, \lambda_n = n-1$

ta thu được đẳng thức a)

Cho $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ ta được b).

Nhận xét : Chỉ có hai bạn gửi lời giải.

Tuy nhiên lời giải của hai bạn quá dài và có chỗ chưa chính xác.

ĐẶNG HÙNG THẮNG.

Bài T8/215. Với mọi x sao cho $tgx, tg2x, tg3x$ xác định. Chứng minh rằng

$$3(tg^2x + tg^22x + tg^23x) \geq (tgxtg2xtg3x)^2$$

Lời giải (của đa số các bạn)

Ta có

$$tgx + tg2x = tg3x(1 - tgxtg2x)$$

Do vậy

$$tg3x - tgx - tg2x = tgxtg2xtg3x$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunliacôpski, ta được

$$\begin{aligned} (tgxtg2xtg3x)^2 &= (tg3x - tgx - tg2x)^2 \leq \\ &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(tg^23x + tg^2x + tg^22x), \text{ đpcm} \end{aligned}$$

Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$tgx = tg2x = -tg3x \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \pi)$$

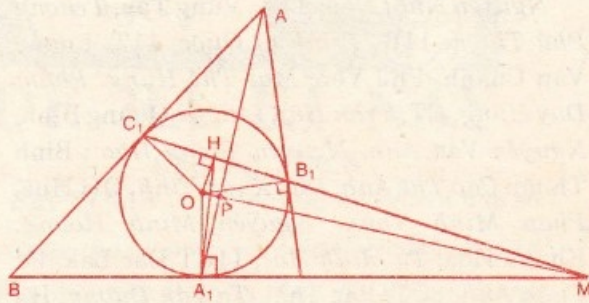
Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng

Nguyễn Nhật Nam 11A₁ Vũng Tàu, Trương Phú Thiện, 11B₃ Trịnh ái Quốc, 11T, Lương Văn Chánh, Phú Yên, Mai Thế Hùng, Phạm Duy Hùng, CT, Trần Hữu Lực, 9c Quảng Bình, Nguyễn Văn Anh, Nguyễn Trọng Hào ; Bình Thuận Cao Thế Anh, Đào Xuân Vinh, QH Huế, Phan Minh Tuấn, Nguyễn Minh Hoàng, Khánh Hòa, Từ Minh Hải, 11CT Đắc Lak, Vũ Tuấn Anh, 8CT, Bắc Thái, Tạ Văn Dương, Hà Tây, Nguyễn Ngọc Biên, LHP, Hồ Chí Minh, Lê Văn Mạnh, 11CT, Hòa Bình, Nguyễn Hải Yên, 10 Tin học, Tiền Giang, Lê Hoài Phong 11A TV Quy Nhơn, Lí Hoàng 10T, Đông Hà, Quảng Trị Nguyễn Ngọc Hải, Tứ Kỳ, Phạm Anh Đức 10T Hải Hưng, Vũ Trang Nhung, Vũ Duy Hải, Trần Đức Quyền, Nguyễn Anh Hoa, Đỗ Ngọc Anh, Trần Văn Tư, Nguyễn Xuân Hòa, Nam Hà, Hà Anh Tuấn, Nguyễn Đỗ Hải Nam, Phạm Quang Hưng, Nguyễn Hồng Minh, Bùi Xuân Thịnh, Vĩnh Phú, Tạ Thiện Toàn, Ngô Đức Dung, Phạm Đình Trường, Lê Quốc Việt Hải Phòng, Nguyễn Ngọc Kiên, Bùi Ngọc Long, Thái Bình, Lê Anh Tuấn, Lê Hoàng, Lê Hoàng Giang, Lê Xuân Hùng, Nhu Quý Thơ, Mai Đức Kha, Lê Quốc Trình, Sao Đỏ, Đặng Minh Hải, Đinh Trường Sơn Thanh Hóa, Hồ Sỹ Hiến, Đặng Minh Lâm, Lê Văn An, Phạm Quốc Khánh, Nguyễn Cảnh Hào, Nguyễn Xuân Sơn, Phạm Xuân Hải, Hoàng Xuân Bách, Dương Văn Yên, Nghệ An, Nguyễn Văn Dung, Nguyễn Thanh Hải, Phan Anh Huy, Nguyễn Huỳnh Hải, Lê Tự Thiên, Nguyễn Hồng Nhơn, Võ Minh Huy, Lê Văn Cảnh (Quảng Nam, Đà Nẵng), Nguyễn Vũ Hưng, Đào Việt Hưng, Nguyễn Hoàng Anh, Vũ Đức Nghĩa, Hoàng Đức Quang, Lương Tuấn Anh, Nguyễn Tuấn Ngọc, ĐHQG, Hà Nội, Trần Tiên Phong (11A₁ Trần Phú, Hà Nội)

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/215 : Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn nội tiếp tam giác có tâm O và tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng ở A₁, B₁, C₁. Gọi M là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng B₁C₁. Chứng minh rằng MO vuông góc với AA₁.

Lời giải 1 (của Lê Anh Tú, 10A, PTTH Liên Hà, Đông Anh, Hà Nội và Mai Đức Khoa, 12A, PTTH Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa).



Gọi H là giao điểm của OA và B_1C_1 , thế thì $OA \perp B_1C_1 = H$. Ta có :

$$\begin{aligned}\vec{OM} \cdot \vec{AA_1} &= \vec{OM} (\vec{OA_1} - \vec{OA}) = \\ &= \vec{OM} \vec{OA_1} - \vec{OM} \vec{OA} = \\ &= OM \cdot OA_1 \cos \widehat{MOA_1} - OM \cdot OA \cos \widehat{MOH} \\ &= OA_1^2 - OA \cdot OH = OB_1^2 - OA \cdot OH = 0\end{aligned}$$

Vậy : $OM \perp AA_1$ (đ.p.c.m)

Nhận xét : 1) Nhiều bạn cũng sử dụng vectơ để giải bài toán này, nhưng trình bày thường quá dài dòng do không nắm thật vững tính chất (hoặc định nghĩa) của tích vô hướng của hai vectơ.

2) Ngoài phương pháp vectơ, bài toán trên còn có nhiều cách giải khác, thậm chí chỉ cần sử dụng kiến thức toán phổ thông cơ sở. Sau đây là mấy cách giải khác.

Lời giải 2 (của Mai Ngọc Kha, lớp 8 Toán, Trần Đăng Ninh, Nam Hà, Nguyễn Quang Lộc, 8CT, Từ Liêm, Hà Nội và nhiều bạn khác)

Gọi : $H = OA \perp B_1C_1$, $P = OM \cap AA_1$; thế thì ta có : $OA \cdot OH = OB_1^2 = OA_1^2$, hay là : $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OH}{OA_1}$ và $\triangle AOA_1 \sim \triangle A_1OH$. Do đó : $\widehat{OAA_1} = \widehat{OA_1H}$; Tứ giác OA_1MH nội tiếp, nên $\widehat{OA_1H} = \widehat{OMH}$; Suy ra : $\widehat{OAA_1} = \widehat{OMH}$, cũng tức là : $\widehat{PAH} = \widehat{PMH}$ và do đó $AHPM$ là tứ giác nội tiếp. Vì vậy : $\widehat{APM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$, hay $AA_1 \perp OM$.

Lời giải 3 (của Nguyễn Việt Dũng, 9CT Phan Bội Châu, Nghệ An và Phan Duy Hùng, 11CT Đào Duy Từ, Quảng Bình).

Ta có :

$$MA^2 - MO^2 = B_1A^2 - BO^2 (= HA^2 - HO^2)$$

$$\text{và : } MO^2 - MA_1^2 = OA_1^2 - OB_1^2.$$

Từ đó ta được :

$$MA^2 - MA_1^2 = AB_1^2 = OA^2 - OB_1^2, \text{ hay là :}$$

$$MA^2 - MA_1^2 = OA^2 - OA_1^2$$

Suy ra : $OM \perp AA_1$

Lời giải 4 (của Hoàng Xuân Bách, 11CT DHSP Vinh)

Dựng $OK \perp AA_1 = K$, kí hiệu (O_1) và (O_2) lần lượt là các đường tròn đường kính OA_1 và đường kính OA . Thế thì các đường thẳng (BC) , (B_1C_1) và (OK) lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn : (O) và (O_1) ; (O) và (O_2) ; (O_1) và (O_2) . Bởi vậy đường thẳng (OK) đi qua $M = (BC) \cap (B_1C_1)$ là tâm đẳng phương của ba đường tròn (O) , (O_1) và (O_2) , nghĩa là $OM \perp AA_1 = K$.

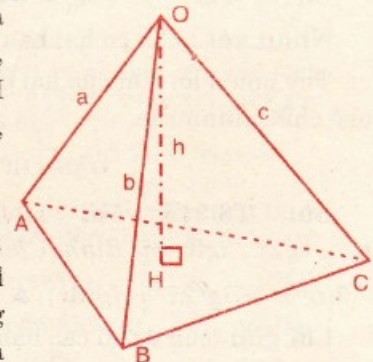
NGUYỄN DĂNG PHÁT

Bài T10/215. Tứ diện $OABC$ vuông ở O (tức là có góc tam diện $O(ABC)$ vuông có đường cao $OH = h$ và ngoại tiếp một hình cầu bán kính r). Hỏi trong số những tứ diện vuông $OABC$, tứ diện vuông nào đạt giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{h}{r}$?

Lời giải (Dựa theo Vũ Đức Sơn, 12CT, PTTH Lương Văn Tuy, Ninh Bình)

Đặt :

$OA = a$, $OB = b$, $OC = c$; thế thì giữa các đường cao h , a , b , c và



bán kính r mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ có hệ thức sau : $\frac{1}{h} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{r}$; (1)

Mặt khác, trong tứ diện $OABC$ vuông ở O , lại có :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}; \quad (2)$$

Nhưng, theo bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2; \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta được :

$$\frac{h}{r} = 1 + h \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq$$

$$\leq 1 + h \left(\frac{\sqrt{3}}{h} \right) = 1 + \sqrt{3}.$$

Như vậy :

$\frac{h}{r} = \max = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = c$, tức là khi và chỉ khi tứ diện $OABC$ là vuông cân ở O .

Nhận xét : 1) Ở bài toán này, kiến thức hình học không gian chỉ đòi hỏi thiết lập hệ thức (1) đối với một tứ diện bất kì (sử dụng phương pháp thể tích) và hệ thức (2) đối với một tứ diện vuông (tương tự với một hệ thức trong tam giác vuông).

2) Nhiều bạn không biết hoặc không đưa về sử dụng (1) và (2) nên tính toán dài dòng.

3) Đáng tiếc rằng, có đến 13 bạn đã giải sai, không chỉ ra được giá trị lớn nhất của $\frac{h}{r}$ là $1 + \sqrt{3}$.

NGUYỄN DẰNG PHÁT

Bài L1/215. Một dòng sông rộng l , dòng nước chảy với vận tốc không đổi v_1 . Người chèo thuyền theo một hướng xác định với vận tốc không đổi v_2 so với dòng nước. Hãy tìm khoảng thời gian sang sông. Biết rằng thời gian sang sông là ngắn nhất.

Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục Oxy , với Ox hướng dọc theo dòng nước, suy ra $x = (v_1 + v_2 \sin \alpha) t$ và $y = v_2 \cos \alpha \cdot t$. Từ đó

$$t = \frac{l}{v_2 \cos \alpha} \rightarrow t_{\min} = \frac{l}{v_2}.$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Hoàng Mạnh Cường 10CT, Đồng Hới, Quảng Bình ; Vũ Duy Hải, 10A3, Lê Hồng Phong, Nam Định ; Lê Thành Nam, 9A, THCS Bế Văn Đàn, Đống Đa, Hà Nội.

OK

Bài L2/215. Cho mạch điện vẽ bên.

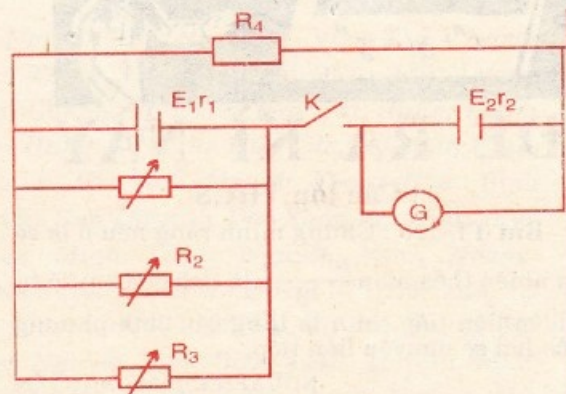
Cho biết $E_1 = 60V$; $r_1 = 30\Omega$

$E_2 = 20V$; $r_2 = 10\Omega$;

$g = 10\Omega$; $R_1 = 18\Omega$;

$R_2 = 45\Omega$; $R_3 = 90\Omega$;

$R_4 = 6\Omega$.



1) K mở, nếu chỉ thay đổi thì cho nó giá trị R'_1 nhỏ để công suất tiêu thụ ở R_1 đạt giá trị cực đại.

2) Cũng hỏi như vậy với R_2 ;

3) Cũng hỏi như vậy với R_3 . Tính công suất cực đại P_{3max} đó.

4) Với mạch điện vẽ bên, thay R_3 bằng một vôn kế lí tưởng rồi đóng K . Tính số chỉ của vôn kế đó và của điện kế. Tính hiệu suất H_1 và H_2 của mỗi nguồn điện.

Hướng dẫn giải

Khi K mở, mạch điện gồm 2 phần độc lập ; phần cần nhận xét là nguồn E_1 mắc với mạch ngoài gồm $R_1 // R_2 // R_3$ ở câu 1 với R_1 là một ẩn số, tính điện trở mạch ngoài, hiệu điện thế mạch ngoài, từ đó tính P_1 và tìm điều kiện để P_1 cực đại, rút ra $R'_1 = 15\Omega$. Giải tương tự với câu 2 và câu 3, rút ra : $R'_2 = 10\Omega$; $R'_3 = 9\Omega$ và $P_3 = 9W$.

Với câu 4, thay R_3 bằng vôn kế và đóng K , vẽ lại mạch điện, và áp dụng định luật Ôm cho đoạn mạch, tìm được các phương trình xác định các cường độ dòng điện qua các điện trở (kể cả qua điện kế). Từ đó rút ra $I_g = 0,3A$; $U_v = 5,4A$. Để tính hiệu suất của nguồn điện,

áp dụng công thức $H = \frac{U_N}{E}$ với U_N là hiệu điện thế giữa 2 cực của nguồn ; rút ra $H_1 = 9\%$ và $H_2 = 15\%$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng : Nguyễn Xuân Hào 12A, PTTH Ngô Quyền, Nam Định ; Phạm Quang Hưng, PTTH Hùng Vương, Vĩnh Phú ; Nguyễn Hồng Minh, 11CT, PTTH chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú ; Nguyễn Văn Tiến, 10A2, PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.

MT



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp THCS

Bài T1/219 : Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên thỏa mãn $\frac{n^2 - 1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp thì n là tổng các bình phương của hai số nguyên liên tiếp.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(Hải Phòng)

Bài T2/219 : Có tồn tại hay không các số nguyên x, y sao cho $2x^2 + y^2 = 1999$? Tại sao?

VŨ KIM THỦY
(Hà Nội)

Bài T3/219 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = \frac{698}{81} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Thái Bình)

Bài T4/219 : Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Lấy điểm I trên MN sao cho $\frac{IM}{IN} = \frac{1}{2}$. Gọi O là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh IO vuông góc với BN .

TRẦN BÁ SĨ
(Thanh Hóa)

Bài T5/219 : Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh rằng :

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3} (AB + BC + CA)$$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hải Phòng)

Các lớp THPT

Bài T6/219 : Dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau :

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3\sqrt{a_n}} \quad (n \geq 1)$$

Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy $\{U_n\}$

xác định bởi $\{U_n\} = \frac{a_n^\alpha}{n}$ $n \geq 1$ hội tụ và giới hạn của nó khác không.

TRẦN XUÂN DÁNG
(Nam Hà)

Bài T7/219 : Cho n, p là các số tự nhiên và $3p = n^2 + n$. Tìm giá trị của S

$$S = \frac{7 \sum_{k=1}^n k^6 + 5(p+1) \sum_{k=1}^n k^4 + p \sum_{k=1}^n k^2}{7 \sum_{k=1}^n k^6 - 5(p+1) \sum_{k=1}^n k^4 - p \sum_{k=1}^n k^2}$$

ĐÀM VĂN NHÌ
(Thái Bình)

Bài T8/219 : Cho $x, y, z \geq 0, x + y + z = 1, n \in \mathbb{N}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^n y + y^n z + z^n x$.

TRINH BẢNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T9/219 : Cho tam giác ABC , hãy tìm vị trí của điểm M trong tam giác sao cho $\frac{BC}{MA_1} + \frac{CA}{MB_1} + \frac{AB}{MC_1}$ nhận giá trị nhỏ nhất, trong đó MA_1, MB_1, MC_1 là các khoảng cách từ M tới các cạnh BC, CA và AB .

THÁI VIỆT THẢO
(Nghệ An)

Bài T10/219 : Cho tứ diện gần đều $ABCD$ ($AB = CD = c, AC = BD = b, BC = AD = a$). Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện này. Chứng minh bất đẳng thức sau đây :

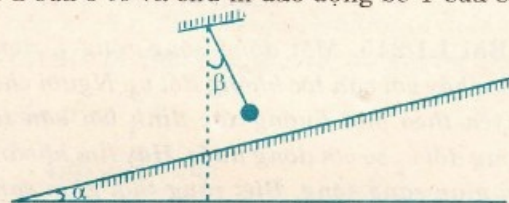
$$\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} \leq \frac{9}{S^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi nào

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Các đề Vật lý

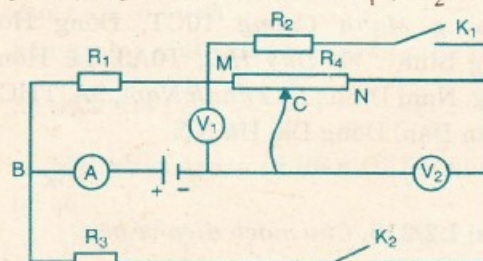
Bài L1/219 : Một con lắc đơn chiều dài $l = 0,4m$ được treo vào trần ô tô đang chuyển động lên dốc (góc nghiêng $\alpha = 30^\circ$). Hãy xác định gia tốc a của ô tô và chu kỳ dao động bé T của con



lắc, biết rằng vị trí cân bằng của con lắc lệch phương thẳng đứng (về phía trước xe) một góc $\beta = 10^\circ$. Lấy $g = 9,8 m/s^2$.

ĐỖ VĂN TOÀN
(Nghệ An)

Bài L2/219 : Cho một mạch điện như hình vẽ. Nguồn điện có suất điện động E , điện trở trong $r = \frac{8}{3} \Omega$, các điện trở $R_1 = 6\Omega, R_3 = 12\Omega$; ampe kế, dây nối và các khóa K_1, K_2 có điện



trở không đáng kể, điện trở các vôn kế rất lớn. Khi khóa K_1 ngắt, K_2 đóng và con chạy C ở đầu N thì ampe kế chỉ $0,5A$. Khi K_1 và K_2 đều đóng, con chạy C ở trong đoạn MN sao cho hai vôn kế có số chỉ như nhau và ampe kế chỉ $0,41A$ (lấy $0,41 = 9/22$). Tìm suất điện động E của nguồn và điện trở R_4 của vật dẫn MN .

NGUYỄN ĐỨC PHI
(Quảng Ngãi)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower secondary schools

T1/219. Prove that if the natural number n satisfies the condition that $\frac{n^2 - 1}{3}$ is the product of two consecutive natural numbers then n is the sum of two squares of two consecutive integers

T2/219 Does there exist integers x, y such that $2x^2 + y^2 = 1999$?

Explain.

T3/219 Solve the system of equations :

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = 698/81 \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

T4/219 Let ABC be an isosceles triangle ($AB = AC$) M and N be respectively the midpoints of AB and AC , I be the point on MN such that $\frac{IM}{IN} = \frac{1}{2}$ and O be the circumcenter of ABC . Prove that IO is perpendicular to BN .

T5/219 Let be given an acute-angled triangle ABC with orthocenter H . Prove that :

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA).$$

For Upper Secondary Schools.

T6/219 The sequence of numbers $\{a_n\}$ is

defined by $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ ($n \geq 1$).

Find all real numbers α such that the sequence $\{u_n\}$ defined by $u_n = \frac{a_n^\alpha}{n}$ ($n \geq 1$) is convergent and its limit is distinct from 0 .

T7/219 n and p are natural numbers such that $3p = n^2 + n$. Find the value of S :

$$S = \frac{7 \sum_{k=1}^n k^6 + 5(p+1) \sum_{k=1}^n k^4 + p \sum_{k=1}^n k^2}{7 \sum_{k=1}^n k^6 - 5(p-1) \sum_{k=1}^n k^4 - p \sum_{k=1}^n k^2}$$

T8/219 Let be given $x, y, z \geq 0$, $x + y + z = 1$ and $n \in \mathbb{N}$. Find the greatest value of P :

$$P = x^n y + y^n z + z^n x.$$

T9/219. Let be given a triangle ABC . Find the position of M inside ABC so that $\frac{BC}{MA_1} + \frac{CA}{MB_1} + \frac{AB}{MC_1}$ attains the least value, where MA_1, MB_1, MC_1 are respectively the distances from M to the sides BC, CA, AB .

T10/219 Consider a tetrahedron $ABCD$ such that $AB = CD = c$, $AC = BD = b$, $BC = AD = a$, and its area is S . Prove that

$$\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} \leq \frac{9}{S^2}.$$

When does equality occur ?



Giải đáp bài

TRÒ CHƠI VIẾT SỐ

Ta biết rằng : Nếu A là một số chẵn và chia hết cho 3 thì A chia hết cho 6. Thêm nữa. Nếu tổng của 25 chữ số của A chia hết cho 3 thì A chia hết cho 3. Từ đó ta suy ra cách viết số của người thứ nhất để bao giờ cũng thắng như sau :

- Người thứ nhất phải viết chữ số hàng đơn vị (a_{25}) là số chẵn (0, 2, 4, 6, 8)

- Tiếp đến người thứ hai viết chữ số hàng chục (a_{24}) tùy ý (0, 1, 2, ..., 9)

- Đến lượt người thứ nhất lại viết một chữ số hàng trăm (a_{23}) sao cho tổng của ba chữ số đã viết phải chia hết cho 3.

- Tiếp đó người thứ hai lại viết tiếp một chữ số tùy ý (0, 1, 2, ..., 9) thì người thứ nhất lại viết tiếp một chữ số sao cho tổng của chữ số này với chữ số người thứ hai vừa viết trước đó chia hết cho 3. v.v... cứ tiếp tục như vậy cho đến chữ số cuối cùng (a_1) thì số A viết được sẽ là số chia hết cho 6.

Viết như vậy thì người thứ nhất luôn luôn thắng (Bích Tứ, 9CV, Vĩnh Phú, Vĩnh Lộc, Thanh Hóa)

BÌNH PHƯƠNG

TRÒ CHƠI THAY SỐ

Hai học sinh chơi một trò chơi như sau : Cho phương trình bậc ba với ẩn số là x :

$$ax^3 + bx^2 + cx + 1995 = 0$$

Cách chơi được tiến hành theo nguyên tắc : Mỗi người đến lượt mình được chọn một số nào đó để thay cho một trong 3 hệ số a, b, c của phương trình. Nếu ai tạo ra một phương trình có hai nghiệm nguyên phân biệt thì người đó thắng.

Các bạn hãy giúp người đi trước thay số như thế nào để bao giờ cũng thắng.

NGÔ HÂN

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI NĂM HỌC 1994-1995

Thời gian làm bài : mỗi vòng 150 phút

Vòng 1 :

Bài 1 (4 điểm).

Xét số $A = \frac{444 \dots 4}{1995 \text{ chữ số } 4}$ và số $B = 1644428$.

Hỏi số A có chia hết cho số B hay không, tại sao ?

Bài 2 (4 điểm).

Bạn Việt nói với bạn Nam : "Nếu một tứ giác có hai góc đối bằng nhau đồng thời có một đường chéo đi qua trung điểm của đường chéo kia thì tứ giác đó là hình bình hành". Bạn Nam nói : "Điều bạn nói là sai rồi !". Ai đúng, ai sai, tại sao ?

Bài 3 (4 điểm).

Giải phương trình :

$$8x^2 + \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$$

Bài 4 (4 điểm).

Cho tam giác ABC vuông góc tại A , một đường tròn (O) thay đổi luôn luôn đi qua hai điểm A, B và cắt các cạnh AC, BC tại các điểm thứ hai tương ứng D, E . Gọi F là điểm đối xứng với E qua OD và I là giao điểm của BF với đường trung trực của AF . Tìm quỹ tích của điểm I .

Bài 5 (4 điểm).

Trên mặt phẳng có 1994 điểm tô xanh sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có thể kẻ được hai đường thẳng cắt nhau tạo thành các cặp góc đối đỉnh sao cho với mỗi cặp góc đối đỉnh đó, số điểm xanh trên miền trong góc này bằng số điểm xanh trên miền trong góc kia.

Vòng 2

Bài 1 (4 điểm)

Xét 1995 số tự nhiên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1995}$ có tổng bằng 1994×1995 . Đặt $P = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_{1995}^3$. Chứng minh rằng P chia hết cho 3.

Bài 2 (4 điểm)

Cho ngũ giác $ABCDE$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, EA . Biết rằng $AB = BC = DE = R$, chứng minh rằng tam giác BMN đều.

Bài 3 (4 điểm)

Giải phương trình :

$$(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$$

Bài 4 (4 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi $A'B'C'D'$ là ảnh của tứ giác $ABCD$ trong một phép quay tâm D . Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm.

Bài 5 (4 điểm).

Cho lục giác đều $ABCDEF$, các điểm M, N, P theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng : AB với CD ; CD với EF ; EF với AB . Người ta tô các điểm $A, B, C, D, E, F, M, N, P$ hoặc xanh hoặc đỏ. Hỏi có cách nào tô sao cho bất cứ ba điểm nào cùng màu cũng đều không phải là ba đỉnh của một tam giác vuông hay không, tại sao ?

Vòng 3 :

Bài 1 (4 điểm)

Xét biểu thức :

$$N + a^{1995} + b^{1995} + c^{1995} + d^{1995}$$

trong đó a, b, c, d là các số tự nhiên sao cho $ab = cd \neq 0$.

Chứng minh rằng N là hợp số.

Bài 2 (4 điểm)

Cho hai đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại hai điểm A, B , hai cát tuyến MAN, PAQ bằng nhau ($M, P \in (O); N, Q \in (O')$). Gọi I, K lần lượt là giao điểm của các đường thẳng MN, PQ với đường thẳng OO' . So sánh BI với BK .

Bài 3 (4 điểm)

Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} - 1 = 0$$

Bài 4 (4 điểm)

Cho góc xOy có độ lớn bằng α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$) và điểm P ở bên trong góc ấy. Dựng góc $x'Py'$ có độ lớn bằng 2α ; Px' cắt Ox tại điểm A ; Py' cắt Oy tại điểm B sao cho hai tam giác OPA, OPB có diện tích bằng nhau.

Bài 5 (4 điểm)

Người ta dùng m màu để tô các mặt của hai hình lập phương sao cho trong mỗi hình không có hai mặt nào cùng màu, đồng thời không có ba màu nào đôi một kề nhau trong cả hai hình (hai màu kề nhau trong một hình nếu chúng được tô trên hai mặt kề nhau của hình ấy). Hãy tìm số m bé nhất.

DẶNG VIỄN

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học

BẬC CỦA THAM SỐ VÀ HÌNH BAO CỦA HỌ ĐƯỜNG $y = f(x, m)$

PHẠM BẢO

Khi nghiên cứu hàm số đa thức $y = f(x, m)$ ta đã biết nếu bậc cao nhất của đối số x là bậc nhất, đồ thị là một họ đường thẳng; bậc hai, đồ thị là một họ đường cong parabol; bậc ba, đồ thị là một họ đường cong bậc ba, v. v... Như vậy bậc của đối số x quyết định dạng của đồ thị. Còn bậc của tham số m , nếu thay đổi nó có ý nghĩa gì đối với họ đồ thị?

Để trả lời cho câu hỏi này ta hãy nghiên cứu họ đường thẳng $y = f(x, m)$ và cũng chỉ cần nghiên cứu đối với họ đường thẳng; những họ đường cong khác cũng nghiên cứu tương tự.

1. Họ đường thẳng có tham số bậc nhất.

Họ đường thẳng này có một trong hai dạng sau:

$$y = mx + a \quad (I) \text{ hoặc } y = ax + m \quad (II)$$

(a là hằng số, m : tham số).

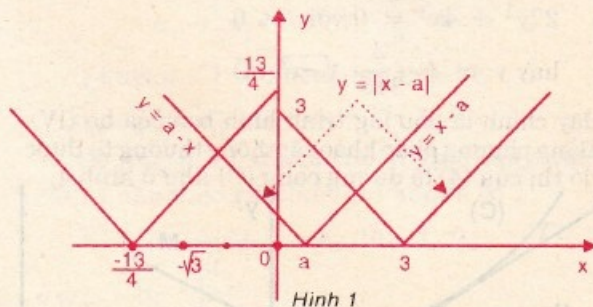
Khi m thay đổi họ (I) là một chùm đường thẳng quay quanh điểm $A(0, a)$ cố định; họ là một dãy đường thẳng song song có cùng độ dốc a . Cả hai họ đường thẳng đều phủ kín mặt phẳng tọa độ. Nhờ tính chất này ta có thể giải được những bài toán chẳng hạn như:

Bài toán 1: Tìm những giá trị của a sao cho ứng với mỗi giá trị đó của a biết phương trình sau đây có nghiệm âm

$$3 - |x - a| > x^2 \quad (1)$$

Giải: từ (1) ta có $3 - x^2 > |x - a|$.

Vì vế phải dương nên bất phương trình chỉ có nghiệm âm là $-\sqrt{3} < x < 0$. Bảng đồ thị vế trái của bất phương trình là một cung của parabol $y = 3 - x^2$ với $-\sqrt{3} < x < 0$. Vế phải $y = |x - a|$ là họ đường gấp khúc hình chữ "V" có đỉnh $(a, 0)$ chạy trên trục hoành. Nghiệm của bất phương trình là những giá trị của x làm cho đường gấp khúc nằm phía dưới cung parabol.



Hình 1

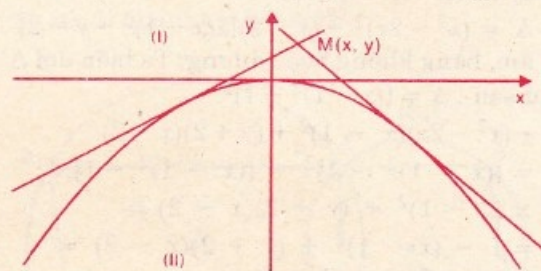
Nhánh $y = x - a$ của đường gấp khúc nằm dưới parabol khi $a > -\frac{13}{4}$ (khi $a = -\frac{13}{4}$, $y = x - a$ tiếp xúc với $y = 3 - x^2$) nhánh $y = a - x$ của đường gấp khúc nằm phía dưới parabol khi $a < 3$. Vậy đáp số của bài toán là $-\frac{13}{4} < a < 3$.

2. Họ đường thẳng có tham số bậc hai

Họ đường thẳng này có một trong hai dạng sau $y = mx + m^2$ (III) hoặc $y = m^2x + m$.

Ta cũng chỉ xét dạng (III). Với một cặp số (x, y) ứng với tọa độ một điểm M trong mặt phẳng tọa độ phương trình III: $m^2 + mx - y = 0$ nếu có 2 nghiệm phân biệt m_1, m_2 ta có hai đường thẳng d_1, d_2 cùng đi qua M . Nếu III có nghiệm kép $m_1 = m_2$ hai đường thẳng d_1, d_2 cùng đi qua M . Nếu (III) vô nghiệm, không có đường thẳng nào qua M . Vậy các đường thẳng d có đi qua P hay không tùy thuộc vào dấu của biệt thức $\Delta = x^2 + 4y$. Khi $\Delta = 0$ ta có $y = -\frac{x^2}{4}$ đồ thị là parabol P . Parabol này chia

mặt phẳng tọa độ thành hai miền: miền I là tập hợp những điểm M ở phía trên parabol ứng với những giá trị của x, y thỏa mãn bất đẳng thức $\Delta = x^2 + 4y > 0$. Tại mọi điểm trong miền này đều có thể kẻ được hai đường thẳng



Hình 2

d_1, d_2 tiếp xúc với P . Miền II là tập hợp những điểm M ở phía dưới P ứng với những giá trị x, y thỏa mãn $\Delta = x^2 + 4y < 0$. Tại mọi điểm trong miền này không thể kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với P . Còn chính trên P là tập hợp những điểm M có tọa độ (x, y) thỏa mãn phương trình $\Delta = x^2 + 4y = 0$. Tại mỗi điểm của P có một đường thẳng duy nhất tiếp xúc với P (xem hình 2). Trong trường hợp này người ta gọi P là hình bao của họ đường thẳng $y = mx + m^2$. Suy rộng ra ta có định nghĩa

Hình bao của họ đường $y = f(x, m)$ là đường mà tại mỗi điểm của nó đều tiếp xúc với ít nhất một đường của họ.

Từ những hiểu biết này ta hãy giải các bài toán sau:

Bài toán 2: Cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số α :

$$(x - 1)\cos\alpha + (y - 1)\sin\alpha - 4 = 0 \quad (2)$$

1) Tìm tập hợp các điểm của mặt phẳng không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ.

2) Chứng minh rằng mọi đường thẳng của họ đều tiếp xúc với một tròn cố định.

(Đề số 141 câu IVa Đề thi tuyển sinh vào đại học)

Giải : Phương trình (2) thực chất là phương trình lượng giác dạng $Asin\alpha + Bcos\alpha = C$. Phương trình này có hai nghiệm phân biệt khi $A^2 + B^2 > C^2$ và có một nghiệm kép khi $A^2 + B^2 = C^2$. Do đó hình bao của họ (2) phải thỏa mãn phương trình

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$$

đây chính là phương trình đường tròn có tâm $I(1, 1)$ bán kính $R = 4$. Và cũng rõ ràng là mọi điểm của mặt phẳng nằm trong vòng tròn đều không có đường thẳng nào của họ đi qua.

Bài toán 3 : Cho hàm số

$$y = x^3 + 2(m - 1)x^2 +$$

$+(m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$ (3) có bao nhiêu đồ thị của họ hàm số (3) đi qua $P(a, b)$? (Đề thi vào đại học năm 1986).

Giải : với tham số m phương trình (3) là phương trình bậc hai :

$$(x - 2)m^2 + 2(x^2 - 2x)m +$$

$$+ x(x - 1)^2 - y - 2 = 0 \quad (3)$$

tọa độ (a, b) của P có thể xem là (x, y) của (3). Số lượng đường cong đi qua P là 0 ; 1 hoặc 2 tùy thuộc vào biệt thức

$$\Delta' = (x^2 - 2x)^2 - (x - 2)[x(x - 1)^2 - y - 2]$$

âm, bằng không hoặc dương. Ta biến đổi Δ' như sau : $\Delta = [(x - 1)^2 - 1]^2 -$

$$- (x^2 - 2x)(x - 1)^2 + (y + 2)(x - 2)$$

$$= [(x - 1)^2 - 1]^2 - [(x - 1)^2 - 1] \times$$

$$\times (x - 1)^2 + (y + 2)(x - 2) =$$

$$= 1 - (x - 1)^2 + (y + 2)(x - 2) =$$

$$= (x - 2)(y + 2 - x)$$

cho $\Delta' = 0$ ta được $x = 2$ và $y = x - 2$ là hai đường thẳng D_1, D_2 . Hai đường thẳng này chia mặt phẳng thành bốn miền (xem hình 3). Miền II và IV là tập hợp những điểm $M(x, y)$ thỏa mãn $\Delta' < 0$. Trong hai miền này không có đường cong nào đi qua. Miền I và III là tập hợp những điểm M thỏa mãn $\Delta' > 0$. Tại mỗi điểm trong miền này luôn có 2 đường cong đi qua. Chẳng hạn tại $B(0, -4)$ phương trình (3')

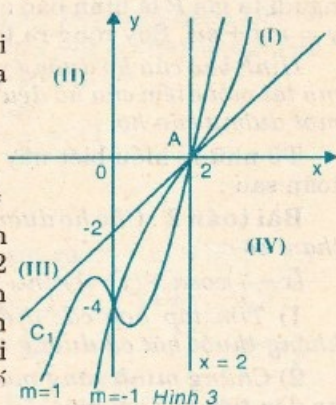
$$-2m^2 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$m = \pm 1$ ta có hai đường cong của phương trình :

$$y = x^3 - 2x - 4 \quad (C)$$

$$y = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

Những điểm trên đường thẳng $x = 2$ trừ điểm $y = 0$ làm cho phương trình (3') vô nghiệm đối với m : không có đường cong nào



Hình 3

họ đi qua. Tại điểm $A(2, 0)$ phương trình (3') được nghiệm đúng với mọi m : mọi đường cong của họ đều đi qua A hay điểm A là điểm cố định của họ đường cong với mọi m . Những điểm nằm trên đường thẳng $y = x - 2$ là tập hợp những điểm thỏa mãn $\Delta' = 0$ qua đó chỉ có những đường cong độc nhất của họ (3). Vậy đường thẳng $y = x - 2$ trừ điểm $A(2, 0)$ là hình bao của họ (3). Bạn đọc có thể kiểm tra lại điều này chẳng hạn với điểm $B(3, 2)$ khi đó $m = -3$.

Vậy trong mặt phẳng tọa độ tại mỗi điểm của miền I và III luôn có hai đồ thị đi qua, tại mỗi điểm của miền II và IV kể cả đường thẳng $x = 2$ trừ điểm A , không có đồ thị nào đi qua. Tại những điểm trên đường thẳng $y = x - 2$ trừ điểm A luôn chỉ có một đồ thị đi qua.

3. Họ đường thẳng có tham số bậc ba. Họ đường thẳng này có các dạng sau đây :

$$y = mx + m^3 ; y = m^2x + m^3 ; y = m^3x + m$$

Ta cũng chỉ cần xét dạng $y = mx + m^3$ (IV) Tương tự như trên ứng với một cặp số (x, y) ; tọa độ của $M(x, y)$ phương trình (IV) $m^3 + mx - y = 0$ nếu có ba nghiệm phân biệt m_1, m_2, m_3 thì qua M có thể kẻ được ba đường thẳng phân biệt. Nếu (IV) có hai nghiệm trong đó ít nhất phải có nghiệm kép (bạn đọc tự suy luận lấy) qua M có hai đường thẳng. Nếu (IV) có một nghiệm duy nhất, qua M có một đường thẳng. Để tìm được hình bao của họ (IV) ta hãy tìm điều kiện để phương trình (IV) có nghiệm kép.

Theo định lý Bézout nếu α là nghiệm kép của phương trình $f(x) = 0$ thì $f(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$

Do đó α cũng là nghiệm của phương trình $f'(x) = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2 Q'(x) = 0$ từ đó nếu m là nghiệm kép của (IV) thì nó thỏa mãn hệ :

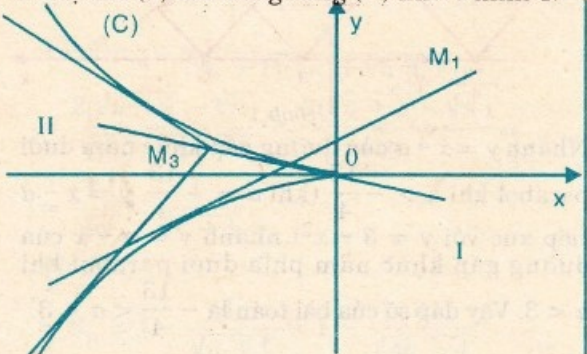
$$\begin{cases} m^3 + mx - y = 0 \\ 3m^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3m^2 \\ y = -2m^3 \end{cases}$$

Khử m giữa tọa độ x, y ta được

$$27y^2 + 4x^3 = 0 \text{ với } x \leq 0$$

$$\text{hay } y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{-x^3} \quad (4)$$

đây chính là phương trình hình bao của họ (IV). Bằng phương pháp khảo sát thông thường ta được đồ thị của (4) là đường cong (C) như ở hình 4.



Hình bao (C) chia mặt phẳng thành hai miền : miền I bên phải (C) là tập hợp những điểm $M(x, y)$ thỏa mãn $4x^3 + 27y^2 > 0$ tại mỗi điểm trong miền này chỉ có một đường thẳng tiếp xúc với (C). Miền II bên trái (C) là tập hợp những điểm $M(x, y)$ thỏa mãn $4x^3 + 27y^2 < 0$ tại mỗi điểm trong miền này có thể kẻ được ba đường thẳng tiếp xúc với (C) ứng với ba nghiệm m_1, m_2, m_3 . Còn chính trên (C) với mỗi $M(x, y)$ $4x^3 + 27y^2 = 0$ có thể kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) ứng với hai nghiệm m_1 và $m_2 = m_3$.

Từ sự nghiên cứu hình bao của họ đường thẳng (IV) ta được kết quả "thứ vị" sau đây :
Phương trình bậc ba $x^3 + px + q = 0$ (xem p như x , q như $-y$ trong phương trình IV) có nghiệm hay không tùy thuộc ở biệt thức $\delta = 4p^3 + 27q^2$. Nếu

$\delta > 0$ phương trình V có 1 nghiệm duy nhất
 $\delta = 0$ phương trình V có 2 nghiệm (1 đơn, 1 kép)
 $\delta < 0$ phương trình V có 3 nghiệm phân biệt.

Bài toán 4 :

1. Tìm giá trị của m để phương trình

$$\frac{x^3}{3} - x(x + 1) = 0 \quad (5)$$

có 3 nghiệm khác nhau.

(Đề thi đại học năm 1976)

2. Với giá trị nào của m đồ thị hàm số

$$y = x^3 - 1 + m(x - 1) \quad (6)$$

tiếp xúc với trục hoành.

(Đề thi đại học năm 1975)

3. Với giá trị nào của k phương trình

$$kx^3 + (2 - k)x + 2 = 0 \quad (7)$$

có một nghiệm duy nhất.

Giải : 1. Phương trình (5) viết lại là

$$x^3 - 3mx - 3m = 0 \text{ để có 3 nghiệm phân biệt thì biệt thức } \delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-3m)^3 + 27(-3m)^2$$

$$\text{hay } m^2(9 - 4m) < 0 \Rightarrow m > \frac{9}{4}.$$

2. Để đồ thị hàm số (6) tiếp xúc với trục hoành thì phương trình

$$x^3 - 1 + m(x - 1) = 0 \text{ hay } x^3 + mx - (m + 1) = 0 \text{ phải có nghiệm kép, do đó biệt thức } \delta = 4m^3 + 27(m + 1)^2 = 0 \text{ để thấy được phương trình này có nghiệm } m = -3 \text{ và } m = -\frac{3}{4}$$

3. Để phương trình (7) có 1 nghiệm duy nhất ta xét :

a) nếu $k = 0$ (7) là $2x + 2 = 0$ nghiệm duy nhất $x = -1$.

b) nếu $k \neq 0$ (7) viết lại là :

$$x^3 + \left(\frac{2}{k} - 1\right)x + \frac{2}{k} = 0$$

để nó có nghiệm duy nhất thì biệt thức

$$\delta = 4\left(\frac{2}{k} - 1\right)^3 + 27\left(\frac{2}{k}\right)^2 > 0 \text{ đặt } \frac{2}{k} = t$$

ta được

$$4t^3 + 15t^2 + 12t - 4 = (4t - 1)(t + 2)^2 > 0$$

$$\text{do đó } t > \frac{1}{4} \text{ hay } \frac{2}{k} > \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < k < 8$$

vậy phương trình (7) có nghiệm duy nhất khi

$$0 \leq k < 8$$

Một số bài tập áp dụng :

1. Cho hàm số

$$y = \frac{(m - 2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m}$$

a. Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

b. Tìm các điểm trên mặt phẳng mà đồ thị không đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào.

Đề số 57 - Đề thi tuyển sinh vào đại học

2. Xác định m để phương trình $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ có một nghiệm duy nhất. Hướng dẫn đặt $t = x + \frac{m}{3}$.

3. Cho một góc vuông xoy. Một đường thẳng D thay đổi cắt ox tại A, oy tại B tạo thành tam giác ABC có diện tích không đổi S. Chứng minh rằng các đường thẳng D đó luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

Tìm hiểu sâu thêm Toán học phổ thông

PHƯƠNG PHÁP TRÁI TỨ DIỆN

TRỊNH VINH NGỌC

Khi giải các bài toán về tứ diện, ngoài những loại tứ diện với tính chất của nó mà học sinh đã được làm quen trong bộ đề thi tuyển sinh đại học môn Toán như tứ diện vuông, đều, gần đều, trục giao..., còn có những tứ diện với dữ kiện mà cách giải nó tương đối đặc biệt. Nó đòi hỏi học sinh tư duy sắc sảo, biết tìm mối quan hệ trong dữ kiện mới tìm ra lời giải hoặc lời giải đơn giản hơn. Trong bài viết này trình bày suy nghĩ về cách giải đó mà tôi đặt tên là : phương pháp trái tứ diện.

Nội dung chủ yếu của phương pháp này là : dựa vào dữ kiện của bài toán đã cho nhất là dữ kiện tổng các góc phẳng bằng 90° hoặc 180° , từ đó khai triển tứ diện, trái tứ diện đó lên một mặt phẳng sao cho phù hợp, tức là được một đa giác có tính chất đặc biệt và giải bài toán đó trên đa giác mới tạo thành.

Bài toán 1 :

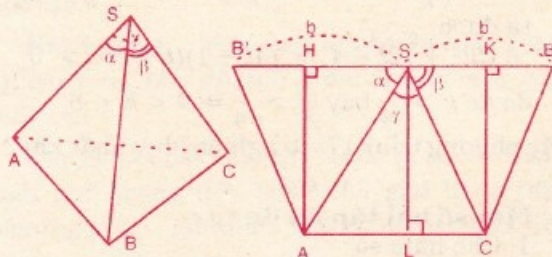
Tứ diện SABC có các mặt SAB, SBC, SCA tương đương và tổng các góc phẳng ở đỉnh S bằng 180° . Chứng minh tứ diện SABC là tứ diện gần đều. (Đề 138 bộ đề thi DH)

Bài toán này đã có cách giải trong hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh, nhưng tương đối dài và khó hiểu đối với học sinh.

Sau nhiều đêm suy nghĩ khai thác giả thiết tổng các góc phẳng ở đỉnh S bằng 180° , tôi đã có cách giải sau :

Giải : Cắt tứ diện theo các cạnh SB, AB, BC rồi trải lên mặt phẳng (SAC). Gọi SA = a, SB = b, SC = c. Do dt (SB, C) = dt (SAB) nên đường cao AH của ΔSAB bằng đường cao CK của ΔSCB .

Mặt khác vì $\widehat{ASB} + \widehat{BSC} + \widehat{CSA} = 180^\circ$ nên B', S, B₁ thẳng hàng $\Rightarrow$ tứ giác AHKC là hình chữ nhật $\Rightarrow SL = CK = AH$ (SL là đường cao của ΔSAC) $\Rightarrow AC = SB = b$ (do dt (SAC) = dt (SCB₁)) $\Rightarrow$ tứ giác SB₁AC là hình bình hành $\Rightarrow AB = SC = c$. Tương tự SA = B₁C = a. Vậy tứ diện SABC là tứ diện gần đều



Bài toán 2 : Tứ diện ABCD có các góc phẳng ở đỉnh A bằng 1 vuông và $AB = AC + AD$. Chứng minh rằng tổng các góc phẳng ở đỉnh B bằng 1 vuông.

(Hình học không gian Sarugin)

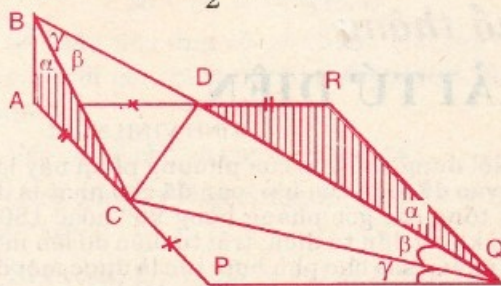
Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp lượng giác bằng cách gọi α, β, γ là 3 góc phẳng ở đỉnh S thì $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ và ta chỉ việc

chứng minh $\cos(\alpha + \beta) = \sin \gamma$ như việc xét các tam giác vuông là xong. Điều này không khó khăn lắm xin nhường bạn đọc.

Ở đây tôi muốn trình bày cách giải thứ 2.

Bài toán yêu cầu chứng minh $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ nghĩa là tổng $\alpha + \beta + \gamma$ bằng 1 góc vuông của 1 hình vuông, 1 hình chữ nhật... Và với giả thiết $AB = AC + AD$ gọi cho ta "lắp ghép" các mặt bên của tứ diện đã cho, và ta có một kết quả thú vị.

Giải : Cắt các mặt bên của tứ diện ABCD rồi ghép lại hình vẽ. Rõ ràng APQR là hình vuông $\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{CBD} + \widehat{DBA} = \widehat{RQD} + \widehat{DQC} + \widehat{CQP} = \frac{\pi}{2}$ (dpcm)



Cách chứng minh đơn giản-xin nhường các bạn

Bài toán 3 : Hình chóp đều SABC đỉnh S có $\angle ASB = 30^\circ$, $AB = a$. Lấy B', C' lần lượt thuộc cạnh SB, SC. Xác định vị trí của B', C' sao cho chu vi tam giác AB'C' nhỏ nhất. (Đề 27 bộ đề thi ĐH)

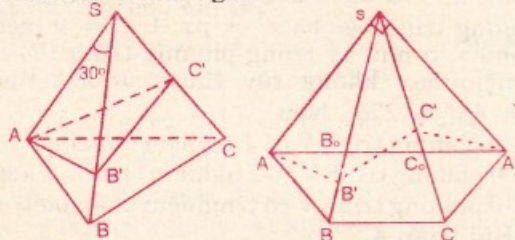
Giải : Cắt tứ diện theo các cạnh SA, AC, AB rồi trải mặt xung quanh (hình vẽ) ta có :

$\Delta SAA'$ là tam giác vuông cân. Độ dài chu vi của $\Delta AB'C'$ bằng độ dài đường gấp khúc $AB'C'A'$. Độ dài này ngắn nhất khi và chỉ khi A, B', C', A' thẳng hàng tức là khi B' = B₀, C' = C₀, tức là ta đã xác định được vị trí của B', C' trên SB, SC.

Để chặt chẽ hơn ta cần tính BB₀, CC₀ : Do $\angle ASA' = 90^\circ \Rightarrow \angle SAB_0 = 45^\circ \Rightarrow \angle BAB_0 = 30^\circ \Rightarrow \Delta ABB_0$ cân tại A. Áp dụng định lý hàm số sin

cho ΔABB_0 ta tính được $BB_0 = \frac{2a}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Cuối cùng để kết thúc bài viết này, tôi xin nêu lên một bài toán mà chắc các bạn yêu toán đã biết nó và cách giải.



Bài toán 4 : Đề thi học sinh giỏi quốc gia môn Toán 12 năm học 91-92

Giải tứ diện ABCD thỏa mãn các điều kiện

1) $\angle ACD + \angle BCD = 180^\circ$

2) Tổng các góc phẳng ở đỉnh A bằng tổng các góc phẳng ở đỉnh B và bằng 180° . Hãy tính diện tích toàn phần của tứ diện theo $\angle ACB = \alpha$ và $\angle ACB = \alpha$.

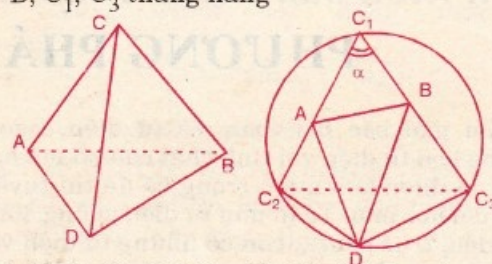
Bài toán này đã được giải bằng cách quay các ΔCAB , ΔCAD , ΔCBD theo thứ tự quanh các trục AB, AD, BD đến nằm trên mặt phẳng (ABD) để thành các ΔC_1AB , ΔC_2AD , ΔC_3BD sao cho C₁, D nằm khác phía đối với AB; C₂, B nằm khác phía đối với đường thẳng AC, v.v... (Các bạn có thể xem lời giải trong số 1/1993).

Ở đây do điều kiện tổng các góc phẳng ở đỉnh A và B đều bằng 180° gọi cho ta tính thẳng hàng của các đỉnh sau khai triển và điều kiện $\angle ACD + \angle BCD = 180^\circ$ gọi cho ta điều kiện cho 1 tứ giác phẳng nội tiếp. Bởi vậy ta có thể giải nó bằng cách trải như sau :

Giải : Cắt tứ diện theo các cạnh CA, CB, CD rồi ghép các ΔCAD , ΔCBD , ΔCAB xuống mặt phẳng (ABD) ta có :

A, C₁, C₂ thẳng hàng

B, C₁, C₃ thẳng hàng



Tứ giác C₁C₂DC₃ nội tiếp (hình vẽ)

Đến đây cách tính S_{tp} giống như lời giải ở số 1/1993.

Tôi xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp trong Tổ toán trường PTTH năng khiếu Hà Tĩnh đã góp ý cho bài báo nhỏ này của tôi.

Bạn Muốn Trở Thành Người Học Trò

**KHÁ
?**

**GIỎI
?**

**XUẤT
SẮC
?**

HÀNG ĐƠN ĐỌC SÁCH

Kính Mời Các Thầy Cô giáo,
Các Bạn Học Trò, Các Đại Lý,
Đến Với Chúng Tôi :

CÁC BẠN SẼ HÀN LÒNG



TỔNG ĐẠI LÝ PHÁT HÀNH

Hà Nội : 37 Nguyễn Hữu Huân - ĐT : 246605 và 30 Ấu Triệu - ĐT : 251257
TP. Hồ Chí Minh : 2A Đinh Tiên Hoàng - ĐT : 251277

VIỆN CÔNG NGHỆ VI ĐIỆN TỬ (IMET)

TỔNG ĐẠI DIỆN KỸ THUẬT VÀ PHÂN PHỐI SẢN PHẨM Wearnes TẠI VIỆT NAM

● VĂN PHÒNG GIAO DỊCH TẠI HÀ NỘI :

39 Lý Thường Kiệt, Hoàn Kiếm Hà Nội

Tel. : 84 4 250767 ; 84 4 267645

Fax : 84 4 267645

● VĂN PHÒNG GIAO DỊCH TẠI TP HỒ CHÍ MINH :

4 Đặng Tất Quận 1, TP Hồ Chí Minh

Tel.: 84 8 439734 ; 84 8 437064

Fax : 84 8 437064

✎ Máy tính Wearnes là sản phẩm của Wearnes Thakral (USA) - là một trong năm nhà cung cấp máy tính lớn nhất.

✎ Máy tính Wearnes đạt tiêu chuẩn ISO 9002 do Cơ quan Tiêu chuẩn chất lượng quốc tế cấp.

✎ Máy tính Wearnes được bảo hành 03 năm

✎ Máy tính Wearnes được Bộ Giáo dục và Đào tạo chọn là loại máy sẽ trang bị cho các Trường phổ thông trong năm 1995



 **Wearnes**
COMPUTERS