BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

8(218)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

* HỌ ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM
* KÌ THI ÔLIMPIC TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 36
* ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY
* HÌNH CHỮ NHẬT VÀNG
* ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN TỈNH MINH HẢI

Đoàn học sinh Việt Nam dự thi Toán Quốc tế lần thứ 36 tại Canada : Từ trái qua phải, hàng trên : **Nguyễn Thế Phương, Ngô Đắc Tuấn, Đào Hải Long** *; hàng dưới :* **Nguyễn Thế Trung, Cao Văn Hạnh, Phạm Quang Tuấn.**

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

- **Dành cho các bạn Trung học Cơ sở**
  For Lower Secondary School Level Friends
  Lê Quốc Hán – Họ đường thẳng đi qua một điểm cố định 1
- **Giải bài kì trước**
  Solution of Problems in Previous Issue
  Các bài của số 214 3
- *Nguyễn Văn Mậu* – Kì thi Ôlympic Toán Quốc tế lần thứ 36. 9
- **Đề ra kì này** – *Problems of this issue*
  Các bài từ T1/218 đến T10/218, L1/218, L2/218 10
- **Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông**
  Helping Young Friends Gain Better Understanding in Secondary School Maths
  Trần Xuân Đáng – Đa thức bất khả quy 12
- *Lê Quang Ánh* – Hình chữ nhật vàng 14
- *Hoàng Chúng* – Đề thi học sinh giỏi Toán tỉnh Minh Hải
- **Giải trí toán học**
  Fun with Mathematics
  Bình Phương – Giải đáp bài : Điền số vào tam giác
  Phạm Hùng – Cắt ghép hình vuông.

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ – TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : NGUYỄN TIẾN DŨNG
VŨ KIM THỦY

HỌ ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM

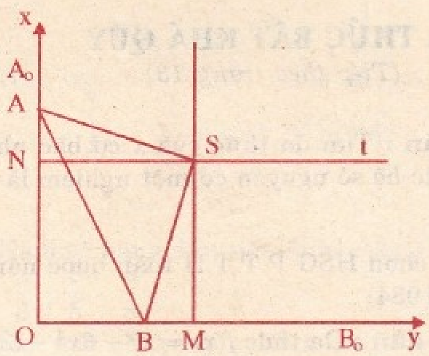
Lê Quốc Hán (Nghệ An)

Bài toán chứng minh họ đường thẳng đi qua một điểm cố định là bài toán thú vị và thường gặp trong các kì thi dành cho học sinh phổ thông Trung học cơ sở. Có hai phương hướng chính để giải lớp bài toán này : sử dụng công cụ hình học và công cụ đại số. Trong bài báo này, tôi xin trao đổi với các bạn vài hướng suy nghĩ để tiếp cận với vấn đề trên.

1) Phán đoán điểm cố định :

Để xác định điểm cố định, ta lấy hai đường thẳng của họ (thường chọn vị trí đặc biệt) và tìm giao S của chúng. Khi đó S là điểm cố định cần tìm. Sau đó, chứng minh một đường thẳng bất kì của họ đi qua S.

Thí dụ 1 : Cho góc vuông xOy và hai điểm A và B chuyển động trên Ox và Oy sao cho $OA + OB = a$ (a là độ dài cho trước). Chứng minh đường trung trực của đoạn AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.



Để chứng minh, ta xét hai vị trí đặc biệt của A và B. Khi $A \equiv 0$ thì $B \equiv B_0$ ($B_0 \in Oy$ và $OB_0 = a$) $\Rightarrow$ đường trung trực của AB trở thành Mz, trung trực của đoạn OB_0.

Khi $B \equiv 0$ thì $A \equiv A_0$ ($A_0 \in Ox$ và $OA_0 = a$) $\Rightarrow$ đường trung trực của AB trở thành Nt, trung trực đoạn OA_0.

Gọi S là giao của Mz và Nt thì $SAN = \triangle SBM$ (c.g.c) $\Rightarrow SA = SB \Rightarrow$ trung trực đoạn AB đi qua S.

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, việc xác định điểm cố định dựa vào hai trường hợp đặc biệt không dễ dàng. Chúng ta, thậm chí chỉ cần xét một trường hợp đặc biệt, nhưng thêm vào đó là cả kho tàng kinh nghiệm giải toán của mình.

Thí dụ 2 : Cho tam giác ABC và hai điểm M, N chuyển động trên AB và AC sao cho $BM = CN$. Chứng minh đường trung trực (Δ) của MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Ở đây, có một trường hợp đặc biệt của (Δ) là khi $M \equiv B$, $N \equiv C$ thì (Δ) chính là trung trực của đoạn BC. Có thể, khi $AB \neq AC$, lấy thêm một vị trí nữa (Δ) (khi $AB = AC$ thì bài toán là tầm thường).

Giả sử $AB < AC$. Trên AC lấy điểm N_0 sao cho $CN_0 = BA$. Khi đó điểm cố định S là giao điểm của đường trung trực đoạn BC và đường trung trực đoạn AN_0. Tuy nhiên, việc chứng minh đường trung trực của đoạn MN bất kì đi qua S gặp khó khăn.

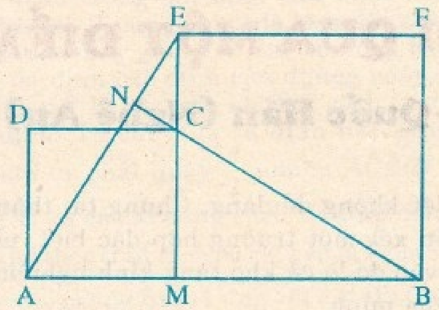
Ta chỉ giữ một trường hợp đặc biệt, khi (Δ) là trung trực đoạn BC và một trường hợp tổng quát. Khi đó, S, giao điểm của chúng sẽ là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BAC}$. Để tránh khó khăn, ta chứng minh gián tiếp : lấy điểm giữa S của cung BAC rồi chứng minh trung trực của MN đi qua S. Điều này cực dễ : $\Delta SMB = \Delta SNC$ (c.g.c) $\Rightarrow SM = SN \Rightarrow$ trung trực đoạn MN đi qua S (các bạn tự vẽ lấy hình).

2) Sử dụng bài toán phụ :

Có nhiều bài toán phụ giúp cho việc giải lớp bài toán này. Tôi xin nêu một trong các bài toán đó (đề nghị các bạn bổ sung thêm danh sách của chúng).

Cho dây AB cố định của một đường tròn (O) và một điểm C chuyển động trên cung AB nào đó đã xác định. Khi đó, phân giác $\widehat{ACB}$ luôn luôn đi qua điểm giữa của cung AB còn lại.

Thí dụ 3 : Cho đoạn thẳng AB cố định và một điểm M chuyển động trên đoạn AB. Dựng các hình vuông $AMCD$ và $BMEF$ sao cho chúng ở cùng một nửa đường mặt phẳng với bờ AB. Gọi N là giao điểm của AE và BC. Chứng minh đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.



Trước hết, ta thấy $\triangle MAE = \triangle MCB \Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{MBC} \Rightarrow AE \perp BC \Rightarrow N$ nằm trên đường tròn đường kính AB.

Mặt khác, $ANCM$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ANM} = \widehat{ACM} = 45^o \Rightarrow MN$ là phân giác $\widehat{ANB}$. Áp dụng bài toán phụ, ta có điều phải chứng minh.

3) Sử dụng công cụ đại số :

Ta lập phương trình của họ đường thẳng (Δ), chúng thường phụ thuộc vào 1 tham số m nào đó. Viết phương trình (Δ) dưới dạng :

$$mf(x, y) + g(x, y) = 0$$

Khi đó họ đường thẳng (Δ) luôn luôn đi qua điểm cố định có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Các thí dụ trên đều có thể giải bằng phương pháp đại số. Ta xét lại thí dụ 1. Lập hệ tọa độ vuông góc có trục hoành chứa Ox và trục tung chứa Oy. Không mất tổng quát, giả sử $a = 1$. Nếu tọa độ $A(M, O)$ thì tọa độ $B(0, 1 - m)$. Phương trình trung trực (Δ_M) của AB có dạng :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$

hay $(x - m)^2 + y^2 = x^2 + [y - (1 - m)]^2$

$$\Leftrightarrow 2m(x + y - 1) + (1 - 2y) = 0.$$

Vậy họ đường thẳng (Δ_M) luôn luôn đi qua điểm cố định S có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 1 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ x = y = \frac{1}{2}. \right.$$

Vì khuôn khổ của một bài báo, tôi xin dừng lại tại đây và mong các bạn tiếp tục hành trình với các bài toán sau :

Bài toán 1 : Cho góc vuông xOy. Trên Ox và Oy có hai điểm A, B chuyển động sao cho $OA + OB = a$ (a là độ dài cho trước). Gọi G là trọng tâm ΔOAB và (α) là đường thẳng đi qua G và $(d) \perp AB$. Chứng minh (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 2 : Cho góc vuông xOy. Trên Ox lấy điểm A cố định. Trên Oy có một điểm B chuyển động. Đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác OAB tiếp xúc với AB tại M và BO tại N. Chứng minh đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 3 : Cho đường tròn (O, R) và dây AB cố định. C là một điểm chuyển động trên đường tròn. M là trung điểm AC. Kẻ $MH \perp BC$ chứng minh đường thẳng MH luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 4 : Cho đường tròn (O, R) và dây AB cố định. C là một điểm chuyển động trên cung AB xác định trước. Gọi CD và CM là phân giác trong và trung tuyến của ΔCDM. Đường tròn ngoại tiếp ΔCDM cắt AC và CB tại M và N. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn luôn đi qua 1 điểm cố định.

Bài toán 5 : Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB và một điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Dựng (về phía ngoài đường tròn (O, R)) hình vuông $BCDE$.

1) Chứng minh EC luôn luôn đi qua một điểm cố định.

2) Tìm tập hợp I, tâm hình vuông đó.

ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY

(Tiếp theo trang 13)

Bài toán : Tìm đa thức của x có bậc nhỏ nhất với các hệ số nguyên có một nghiệm là $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

(Đề thi chọn HSG P.T.T.H toàn quốc năm học 1983–1984)

Hướng dẫn : Đa thức $f(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ sẽ là một đa thức của x có bậc nhỏ nhất với các hệ số nguyên có một nghiệm là $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc :

Bài 1 : Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là n là số nguyên khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng đa thức $(x - a_1)(x - a_2) ... (x - a_n) - 1$ bất khả quy trên Q.

Bài 2 : Tìm đa thức có bậc nhỏ nhất với các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là :

$$\sqrt[3]{\sqrt{2 + 3\sqrt{3}} + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{2 + 3\sqrt{3}} - \sqrt{2}}$$

(Đáp số : $x^4 - 4x^2 - 23$)

Bài T1/214 :

Với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 1 sao cho $2^n - 2$ chia hết cho n, hãy tìm UCLN
$$(2^{2^n - 1} - 2,\ 2^n - 1).$$

Lời giải :

Ta có : $2^{2^n - 1} - 2 = 2(2^{2^n - 2} - 1)$

Theo giả thiết $2^n - 2 \vdots n$ nên $2^n - 2 = nk$ $(k \in N^*)$

Do đó $2^{2^n - 2} - 1 = 2^{nk} - 1$

Mà $2^{nk} - 1 \vdots 2^n - 1$

Suy ra $(2^{2^n - 1} - 2,\ 2^n - 1) = 2^n - 1$

Nhận xét :

1. Bạn *Nguyễn Đức Trung*, 8A, trường NK Hoằng Hóa, Thanh Hóa cho rằng bài này không cần đến giả thiết $2^n - 2 \vdots n$ mà vẫn có kết quả là $2^n - 1$. Khẳng định này là sai. Chẳng hạn với $n = 4$ thì $(2^{2^4 - 1} - 2,\ 2^4 - 1) \neq 2^4 - 1$.

2. Nhiều bạn đã giải tốt bài này :

Lê Quang Huy, 9T Năng khiếu Thái Nguyên, Bắc Thái ; *Nguyễn Anh Dũng*, 9CT, THCS Cửu Long, Lương Sơn, Hòa Bình ; *Lê Minh Đức*, 6A NK Thuận Thành, *Nguyễn Lê Dung* 8T NK Bắc Ninh, Hà Bắc ; *Phùng Đức Tuấn*, 9T NK Thanh Hà, Nam Thanh, Hải Hưng ; *Nguyễn Hà Duy* 8T, chuyên Phú Xuyên, Hà Tây ; *Nguyễn Minh Việt*, 9C Ngọc Lâm, Gia Lâm, *Phan Thanh Tùng*, 7CT Nghĩa Tân, *Nguyễn Quốc Thắng*, 9C Hải Bối, Đông Anh ; *Ngô Đắc Tùng*, 7A1, Giảng Võ, *Đỗ Đức Hạnh*, 8M, *Đặng Quang Nguyên* 9M Marie Curie, *Khuất Minh Đức*, 6H, *Nguyễn Hồng Hà*[A], THCS Trưng Vương, Hà Nội ; *Phạm Thu Hương* 8A1, Hồng Bàng, *Hoàng Vũ Mạnh*, 46 Phan Bội Châu, Hải Phòng ; *Hà Thanh Tuấn, Vũ Trần Cương*, 7T, *Nguyễn Tiến Trung, Đỗ Diệu Ngọc* 8T, *Nguyễn Anh Hoa, Nguyễn Thanh Nga*, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà ; *Hoàng Minh Thành*, 8D THCS NK Thanh Hóa, *Nguyễn Thị Như Quỳnh* 8T NK Hoằng Hóa, *Phạm Anh Tuấn, Lê Minh Thành* 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Nguyễn Việt Dũng*, 9CT Phan Bội Châu, *Nguyễn Quang Hợp* 8A NK Quỳnh Lưu, Nghệ An ; *Lê Văn Hào* 9T, NK Hương Khê, *Trần Hoài Thương, Lê Ngọc Hồng Vũ, Trịnh Kim Chi, Nguyễn Trung Thành* 9T NK Hà Tĩnh ; *Trần Đức Sơn*, 7 chuyên Ba Đồn, Quảng Trạch, *Trần Quế Lâm*, Đào Duy Từ, Đồng Hới, Quảng Bình, *Nguyễn Hữu Nghị*, 8T chuyên Quảng Trị, *Lê Chí Thành*, 8 chuyên Nguyễn Tri Phương, *Lưu Thị Phương Nga*, 9[11] Nguyễn Tri Phương, Huế ; *Trần Việt Dũng*, 9/2 THCS Chu Văn An, Đà Nẵng ; *Lê Quang Nẫm* 9T chuyên Đức Phổ, *Nguyễn Minh Quân*, 7T chuyên Nghĩa Hành, Quảng Ngãi ; *Ngô Quốc Anh*, 6T chuyên Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc ; *Nguyễn Quan Long*, 9/8 Nguyễn An Ninh, Vũng Tàu, Bà Rịa – Vũng Tàu ; *Phan Thị Thu Hằng*, 8T Bồi dưỡng GD, Biên Hòa, *Trịnh Anh Vũ*, 9T chuyên Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai ; *Phan Huy Vũ*, 8CT, Ngô Quyền, TP HCM ; *Trần Hữu Nhơn*, 9T chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long ; *Nguyễn Lê Lực*, 9A1, Đầm Dơi, Minh Hải.

VŨ KIM THỦY

Bài T2/214. *Cho $\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in Q)$*

Tìm các nghiệm còn lại.

Lời giải. Vì $\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$
nên ta có
$$3\sqrt{3} + 3a + \sqrt{3}b + c = 0$$
hay
$$\sqrt{3}(3 + b) + 3a + c = 0 \qquad (2)$$
Do $a, b, c \in Q$ nên từ (2) suy ra
$$3 + b = 0 \text{ và } 3a + c = 0$$
Nghĩa là ta có : $b = -3$ và $c = -3a$.

Thay các giá trị này của b và c vào (1) ta có :
$$x^3 + ax^2 - 3x - 3a = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^3 - 3x) + (ax^2 - 3a) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 3)(x + a) = 0$$
Từ đó ta thấy ngoài nghiệm $x = \sqrt{3}$ phương trình (1) còn có các nghiệm $x = -\sqrt{3}$, $x = -a$ với $a \in Q$.

Nhận xét. 1. Đa số các bạn giải theo cách trên.

2. Các bạn : *Vũ Tuấn Anh*, 8T, NK Thái Nguyên, Bắc Thái ; *Đinh Hữu Toàn*, 8T, NK Thị xã Ninh Bình ; *Nguyễn Trung Thành, Trần Tiên Giang*, 9T, NK Hà Tĩnh đã phát biểu và giải tốt bài toán tổng quát hóa sau đây : *Cho $\sqrt{n}$ là nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in Q$, n là số tự nhiên không chính phương. Tìm các nghiệm còn lại.*

3. Các bạn có lời giải tốt : *Lê Quang Huy*, 9T, NK Thái Nguyên, Bắc Thái ; *Hà Ngọc Thành*, 8A, Chuyên Tam Đảo ; *Nguyễn Minh Phương*, 9A, Minh Phương, Việt Trì, Vĩnh Phú ; *Phạm Huy Tùng*, 9A, Bế Văn Đàn ; *Nguyễn Minh Việt*, 9C, Ngọc Lâm, Gia Lâm ; *Tống Ngọc Tú, Đỗ Đức Hạnh*, 8M ; *Đặng Quang Nguyên*, 9M, Marie Curie ; *Nguyễn Quốc Thắng*, 9C, Hải Bối ; *Vũ Thanh Hùng*, 8T, Chuyên, Đông Anh ; *Đặng Quang Linh, Trần Hữu Đức*, 8CT ; *Võ Quỳnh Anh*, 9CT, Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội ; *Bùi Thế Trung*, 7A1, Hồng Bàng ; *Đặng Anh Tuấn*, 9T, Trần Phú, Hải Phòng ; *Tô Hạnh*, Đông Hoàng, Đông Hưng ; *Đoàn Minh Đức*, 8D, Chuyên Quỳnh Phụ ; *Phùng Thanh Tùng, Trịnh Xuân Dương*, 9T, Chuyên, Thái Bình ; *Hà Mạnh Hùng*, 8T, NK Ý Yên ; *Nguyễn Tiến Trung, Bùi Anh Tuấn*, 8T ; *Bùi Quang Hải*, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà. *Nguyễn Tiến Hòa*, 7T, NK Bỉm Sơn ; *Nguyễn Khuyến Lân*, 8D, NK Thành phố, *Đỗ Hồng Sơn, Lê Minh Thành*, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Trần Nam Dũng; Nguyễn Anh Tuấn; Nguyễn Thái Thọ; Nguyễn Thịnh*, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Trịnh Kim Chi; Nguyễn Anh Sơn*, 9T, NK ; *Lê Ngọc Hồng Vũ*, 9T, NK Hương Khê, Hà Tĩnh ; *Hoàng Mạnh Cường*, 9[1], Đông Mĩ, Đồng Hới ; *Trần Hữu Lực*, 9CT, Chuyên Quảng Trạch, Quảng Bình ; *Nguyễn Hữu Nghị*, 8CT, Chuyên, Quảng Trị ; *Phan Huy Vũ*, 8CT, Ngô Quyền ; *Nguyễn Đức Thành*, 9_2, Chuyên Colette, TP. Hồ Chí Minh ; *Trần Hữu Nhơn*, 9T, Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/124. *Trên mặt phẳng cho 5 điểm A, B, C, D, E sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta nối tất cả các đoạn thẳng có hai đầu là hai trong các điểm đó, rồi tô các* *đoạn thẳng này hoặc xanh, hoặc vàng, hoặc đỏ một cách hú họa. Chứng minh rằng luôn luôn thu được ít nhất một tứ giác (lồi, lõm hoặc không đơn) với số màu của các cạnh không vượt quá 2.*

Lời giải. Do 4 đoạn thẳng AB, AC, AD, AE được tô bởi *nhiều nhất* ba màu nên, theo nguyên lí Dirichlet, phải tồn tại ít nhất 2 đoạn được tô cùng màu. Không mất tổng quát, giả sử AB và AC cùng được tô đỏ. Khi đó :

- Nếu ít nhất một trong 4 đoạn DB, DC, EB, EC được tô đỏ thì hoặc tứ giác $ABDC$ hoặc tứ giác $ABEC$ sẽ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.
- Nếu cả 4 đoạn DB, DC, EB, EC cùng không được tô đỏ thì tứ giác $DBEC$ sẽ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

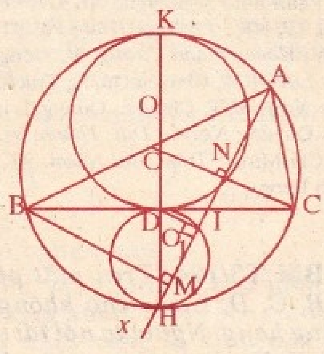
Nhận xét. 1. Tất cả các bài gửi lời giải tới T.S. đều không hiểu rằng, với cách phát biểu của bài ra thì *không nhất thiết tất cả các đoạn thẳng phải được tô bởi ba màu.* Tuy nhiên, do kết luận của bài toán là hiển nhiên trong trường hợp tất cả các đoạn thẳng được tô bởi tối đa 2 trong 3 màu đã cho, nên sơ suất của các bạn được bỏ qua.

2. Nhiều bạn lập luận quá dài dòng, một số ít bạn lập luận thiếu chính xác và có 2 bạn cho lời giải sai.

3. Các bạn có lời giải ngắn gọn : *Mai Đức Thanh* (9CT Phan Chu Trinh, Ban Mê Thuột, Daklak) ; *Tấn Đạt* (9B Trường Thực hành sư phạm, Hòa Khánh, Hòa Vang, Quảng Nam Đà Nẵng) ; *Trương Vĩnh Lân* (9CT Xuân Ninh, Quảng Bình) ; *Nguyễn Việt Dũng, Đặng Đức Hạnh* (9CT Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Nguyễn Minh Thanh, Vũ Thị Trọng, Phạm Anh Tuấn, Lê Minh Thành, Phạm Minh Đức* (9T Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Nguyễn Khuyến Lân* (8D THCSNK, Thanh Hóa) ; *Nguyễn Đức Trung, Nguyễn Minh Thuấn*, (8A, 9T Trường NK Hoằng Hóa, Thanh Hóa) ; *Lê Xuân Trung* (8 Toán Trường NK Triệu Sơn, Thanh Hóa) ; *Vũ Trần Cương, Nguyễn Anh Hoa* (7T, 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định) ; *Phạm Huy Tùng* (9A Bế Văn Đàn, Hà Nội), *Nguyễn Hồng Hà A* (9H Trưng Vương, Hà Nội), *Nguyễn Quốc Thắng* (9C THCS Hải Bối, Đông Anh, Hà Nội) và *Đặng Anh Tuấn* (9T Trần Phú, Hải Phòng).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T4/214. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O), trong đó B, C cố định, Ax là tia phân giác của góc A. M ; N theo thứ tự là hình chiếu của B ; C lên Ax. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.*



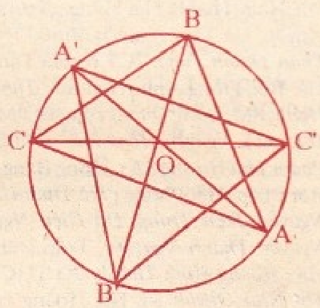
Lời giải. Gọi H là giao điểm thứ hai của tia Ax với (O), ta có $\overset{\frown}{HB} = \overset{\frown}{HC}$; gọi D là giao điểm của OH với BC, ta có D là trung điểm của BC (1). Hạ $DE \perp Ax$, ta có $DE//BM//CN$ (vì cùng $\perp Ax$). Áp dụng định lí Ta-lét, kết hợp với (1), ta có E là trung điểm của MN, do đó E trùng với I, hay $\widehat{DIH} = 90^o$. Vậy I nằm trên đường tròn đường kính DH (tâm O_1). Gọi K là điểm chính giữa cung BC không chứa H, ta có I, thuộc đường tròn đường kính DK (tâm O_2) khi A di động trên cung $\overset{\frown}{BHC}$. Vậy I thuộc đường tròn (O_1) hay đường tròn (O_2). Đảo lại, lấy điểm $I' \in (O_1) \cup (O_2)$, hạ BM', $CN' \perp Ax$. Nếu I không trùng D, ta có $\widehat{DI'H} = 90^o$ hoặc $\widehat{DI'K} = 90^o$ hay $DI'//CM'$. Mà D là trung điểm của BC và $DI'//CM'//CN'$ (vì cùng $\perp Ax$) nên I' là trung điểm của $M'N'$, và I' là một điểm thuộc quỹ tích. Vậy quỹ tích cần tìm là $(O_1) \cup (O_2)$.

Nhận xét. Có 145 lời giải. Không ít bài quên đường tròn (O_2). Lời giải tốt gồm có : *Trần Hoài Thương* (9T, Năng khiếu Hà Tĩnh) ; *Lê Quang Huy* (9T Năng khiếu Thái Nguyên, Bắc Thái) ; *Phạm Duy Hùng* (11CT, Quảng Bình) ; *Nguyễn Lê Lực* (9A – THCS thị trấn Đầm Dơi, Minh Hải) ; *Đoàn Minh Đức* (8D chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình) ; *Mai Tùng Long* (9T Trường THNK Hà Tĩnh) ; *Phan Thị Thu Hằng* (8T Trường Bồi dưỡng Giáo dục Biên Hòa, Đồng Nai) ; *Phạm Thị Thuận* (7T Năng khiếu thị xã Bỉm Sơn Thanh Hóa).

ĐẶNG VIỄN

Bài T5/214. *Cho tam giác ABC với các góc đều nhỏ hơn 120^o. Hãy dựng điểm M trong tam giác thỏa mãn $MA.BC = MB.CA = MC.AB$.*

Lời giải. Giả sử đã dựng được điểm M trong tam giác ABC thỏa mãn điều kiện của bài toán, ta có $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{BA}{BC}$ (1).



Gọi A', B', C' theo thứ tự là giao điểm của các tia AM, BM, CM với đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Từ các góc nội tiếp bằng nhau do cùng chắn một cung, ta có $\Delta AMB \backsim \Delta B'MA'$ và $\backsim \Delta C'MB'$ (t.h.1), do đó $\dfrac{MA}{MB'} = \dfrac{AB}{A'B'}$, và $\dfrac{MC}{MB'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, suy ra $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{AB \cdot B'C'}{BC \cdot A'B'}$ (2). Từ (2) và (1), ta có $A'B' = B'C'$. Một cách tương tự, ta cũng có $B'C' = C'A'$, suy ra $\Delta A'B'C'$ đều. Vậy $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{A'B'}) = \hat{C} = 60^o$. Tương tự, ta cũng có $\widehat{BMC} = \hat{A} = 60^o$. Và, ta dựng như sau : dựng giao điểm thứ hai M của các cung chứa góc $\hat{C} + 60^o$; $\hat{A} + 60^o$ vẽ trên các đoạn tương ứng AB, BC về phía có chứa miền trong của ΔABC (3). Do $\hat{B} < 120^o$ nên $\hat{A} + \hat{C} = 180^o - \hat{B} > 60^o$ hay $(\hat{A} + 60^0) + (\hat{C} + 60^o)$

$>180^o$ hơn nữa, từ (3) ta có M nằm trong góc ABC, suy ra M nằm ở bên trong ΔABC. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm thứ hai của các tia AM, BM, CM với đường tròn (O). Tương tự trên, ta cũng có (2). Hơn nữa, từ (3) ta lại có sđ $B'C'$ = sđ $A'B' = 60^o$ hay $\Delta A'B'C'$ đều, suy ra $B'C' = A'B'$ (4). kết hợp (4) với (2), ta có $\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC}$ hay $MC.AB = MB.CA$. Mặt khác, do M nằm ở bên trong ΔABC nên $\widehat{AMC} = 360^o - (\widehat{AMB} + \widehat{BMC}) = B + 60^o$ nên M còn nằm trên cung chứa góc $B + 60^o$ vẽ trên đoạn AC (phía có chứa miền trong ΔABC). Do đó, tương tự như trên, ta cũng có $MB.CA = MA.BC$, và M là điểm cần dựng. Do các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ ở (3) đã có B chung nên M là điểm chung duy nhất cần tìm.

Nhận xét. Có 53 bạn giải bài này trong số đó không ít bạn có lời giải hay dựa vào định lí Apolloniûs, chỉ tiếc rằng định lí này đã bị loại ra khỏi các sách giáo khoa CCGD (!). Các bạn có lời giải tốt là : *Hà Ngọc Thành* (Chuyên C2 Tam Đảo, Vĩnh Phú), *Trương Cao Dũng* (9T NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa), *Đỗ Đức Hạnh* (8M - Marie-Curie, Hà Nội), *Phùng Thanh Tùng* (9CT thị xã Thái Bình), *Nguyễn Thịnh* (9T, Phan Bội Châu, Nghệ An).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/214 *Chứng minh rằng*

$$(x-y)(2-(x+y)) < 2\ \ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$$

với $x > y > 0$

Lời giải : *Cách 1.* (của đa số các bạn). Bất đẳng thức tương đương với

$2ln\ (1+y) + y^2 - 2y < 2ln\ (1+x) + x^2 - 2x$

Xét hàm số $f(t) = 2ln\ (1+t) + t^2 - 2t$

Ta có $f'(t) = \frac{2t^2}{1+t} > 0 \quad \forall t > -1$

Dó đó f đồng biến trên $(-1, +\infty)$. Suy ra nếu $x > y > 0$, thì $f(x) > f(y)$ (đpcm) (Rõ ràng BĐT còn đúng với $x > y > -1$)

Cách 2 : Xét hàm số $f(t) = lnt - 2\frac{t-1}{t+1}$

ta có $f'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geqslant 0$ với $t > 0$ Vậy f đồng biến trên $(0, \infty)$ suy ra $f(t) > f(1) = 0$ nếu $t > 1$ hay $lnt > 2\frac{t-1}{t+1}$ với $t > 1$. Thay $t = \frac{1+x}{1+y}$ ta được

$2ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right) > 4\frac{x-y}{2+x+y} > (x-y)(2-(x+y))$.

Như vậy theo cách 2 ta thu được bất đẳng thức mạnh hơn : $2ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right) > \frac{4(x-y)}{2+x+y}$

Nhận xét : Các bạn tham gia đều giải đúng. Lời giải tốt thuộc về các bạn : *Tô Huy Cường* 11A Thái Bình, *Nguyễn Hồng Nhân*, Đà Nẵng, *Hồ Sỹ Hiến* 11 Vinh, *Phan Duy Hùng* Quảng Bình, *Nguyễn Minh Phương* 9A Vĩnh Phú, *Nguyễn Lê Lực* 9A Minh Hải, *Đinh Trung Hằng* 11 Mary Quyry, *Phan Anh Huy* 10 A1 Lê Quý Đôn Đà Nẵng, *Nguyễn Quang Nguyên* 10A ĐHTH Hà Nội. Bạn *Nguyễn Lê Lực* mặc dù mới học lớp 9 đã sử dụng định lý Công (suy rộng định lý Lagrăng) của chương trình Đại học để giải ngắn gọn bài toán này.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/214. *Tồn tại hay không tồn tại hàm số f(x) xác định và liên tục trong $(-\infty, \infty)$ và thỏa mãn các điều kiện sau.*

a) $f(1995) < f(1996)$

b) $f(f(x)) = 1995^{-x} \quad \forall x \in R$

Lời giải : Giả sử tồn tại hàm $f: R \to R$ thỏa mãn các điều kiện trên. Ta thấy rằng f là đơn ánh. Thật vậy giả sử $f(x) = f(y) \to f(f(x)) = f(f(y)) \to 1995^{-x} = 1995^{-y} \to x = y$.

Hàm số f đơn ánh và liên tục nên nó đơn điệu. Do điều kiện $a > f$ là đơn điệu tăng khi đó $f(f(x))$ cũng đơn điệu tăng, trong khi đó 1995^{-x} lại đơn điệu giảm. Vậy không tồn tại hàm f với các tính chất đã nêu.

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Thị Hải Yến*, 11CT Quốc học Huế, *Mai Đức Khoa* 12A Thanh Hóa, *Nguyễn Vũ Hưng* 11CT ĐHSP Hà Nội, *Vũ Đức Sơn* 11T Ninh Bình, *Lê Anh Vũ* 11CT Quốc học Huế, *Nguyễn Tiến Dũng* 10A Lê Quý Đôn Đà Nẵng, *Đinh Trung Hằng* 11M Mary Quyri, *Lê Tuấn Anh* 10B ĐHTH Hà Nội, *Phạm Đình Trường* 11 Trần Phú Hải Phòng, *Nguyễn Ngọc Tân* 11CT ĐHTH Hà Nội, *Đào Thị Thiên Hương* 11 Đông Hà, Quảng Trị, *Trần Thanh Tú* 10CT Quảng Bình, *Trịnh Hữu Trung* 10T Lam Sơn Thanh Hóa.

Một số bạn có lời giải sai, hoặc không chặt chẽ do không biết sử dụng kết quả : "Hàm liên tục và đơn ánh sẽ là hàm đơn điệu"

ĐẶNG HÙNG THẮNG

T8/214. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$x_2 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-x_n^2}}$$

a) *Chứng minh rằng tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *và tìm giới hạn đó.*

b) *Chứng minh rằng có duy nhất số A sao cho* $L = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{A^n}$ *là một số hữu hạn khác không. Hãy biểu thị L theo giá trị của A.*

Lời giải. (của đa số các bạn).

a) Nhận xét rằng $0 < x_n \leqslant 1$. Nếu $\sin\alpha_n = x_n$ với $0 < \alpha_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ thì

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha_n}} = \sin\frac{\alpha_n}{2}.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $0 < x_{n+1} < x_n$. Vì $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ nên $\alpha_n = \frac{\pi}{2^{n-1}}$. Vậy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2^{n-1}} = 0.$$

b) Giả sử tồn tại A sao cho $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{A^n}$ hữu hạn và khác 0. Sử dụng hệ thức $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$, ta thu được

$$0 \neq \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{A^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{A^n}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\right) =$$

$$= 2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2A)^n}$$

Từ đó suy ra $A = \frac{1}{2}$ và $L = 2\pi$.

Có vô số cách biểu thị L theo A, nhưng đa số các bạn đều viết $L = 4\pi A$.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/214. *Trong mặt phẳng, trên hai đường tròn đã cho $v_1(O_1, r_1)$ và $v_2(O_2, r_2)$ có hai động tử chuyển động đều theo cùng một chiều (chẳng hạn, ngược chiều kim đồng hồ): M_1 trên (v_1) và M_2 trên (v_2). Chúng xuất phát lần lượt từ hai điểm A_1 và A_2 cho trước trên (v_1) và (v_2) sao cho $O_1A_1 \not\parallel O_2A_2$ và sau một vòng, lại trở về A_1 và A_2 cùng một lúc.*

Chứng minh rằng trong mặt phẳng, nói chung không tồn tại một điểm P cố định luôn luôn cách đều hai động tử M_1 và M_2 ở mọi thời điểm, trừ hai trường hợp đặc biệt mà ta sẽ xác định.

Lời giải. Thực chất bài toán này là một bài toán dựng hình: Tìm trong mặt phẳng một điểm P sao cho $PM_1 = PM_2$ $(\forall t)$.

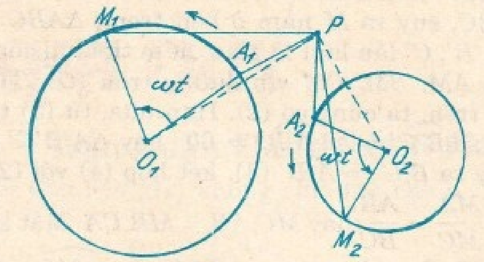
Đặt: $\begin{cases} O_iP = d_i \\ (\overrightarrow{O_iA_i}, \overrightarrow{O_iP}) = \alpha_i \end{cases}$ $(i = 1,2)$

Theo giả thiết, các chuyển động của hai động tử M_i trên hai đường tròn (v_i) là chuyển động tròn đều với cùng một vận tốc góc ω nào đó, do đó ta được:

$$(\overrightarrow{O_1A_1}, \overrightarrow{O_1M_1}) = (\overrightarrow{O_2A_2}, \overrightarrow{O_2M_2}) = \omega t$$

Thế thì ta có (hình 1):

$$(\overrightarrow{O_iP}, \overrightarrow{O_iM_i}) = (\overrightarrow{O_iA_i}, \overrightarrow{O_iM_i}) - $$
$$-(\overrightarrow{O_iA_i}, \overrightarrow{O_iP}) = \omega t - \alpha_i \quad (i = 1,2)$$



Hình 1

Giả sử có điểm P mà:

$$PM_1 = PM_2\ (\forall t) \Leftrightarrow PM_1^2 = PM_2^2,\ (\forall t)\ (*)$$

Áp dụng định lý hàm số cosin vào hai tam giác O_iPM_i $(i = 1,2)$, ta được:

$$d_1^2 + r_1^2 - 2d_1r_1\cos\widehat{PO_1M_1} =$$
$$= d_2^2 + r_2^2 - 2d_2r_2\cos\widehat{PO_2M_2},$$

hay là:

$$d_1^2 + r_1^2 - 2d_1r_1\cos(\omega t - \alpha_1) =$$
$$= d_2^2 - r_2^2 - 2d_2r_2\cos(\omega t - \alpha_2).$$ Như vậy:

$$(*) \Leftrightarrow f(t) = d_1^2 + r_1^2 - (d_2^2 + r_2^2) -$$
$$-2d_1r_1\cos(\omega t - \alpha_1) + 2d_2r_2\cos(\omega t - \alpha_2) = 0;$$
$(\forall t)$ $(**)$.

$$= d_1^2 + r_1^2 - (d_2^2 + r_2^2) -$$
$$-2d_1r_1(\cos\omega t\cos\alpha_1 + \sin\omega t\sin\alpha_1) +$$
$$+2d_2r_2(\cos\omega t\cos\alpha_2 + \sin\omega t\sin\alpha_2) = 0$$
$$= a\cos\omega t + b\sin\omega t + c,$$

trong đó ta đã đặt:

$$\begin{cases} a = 2d_2r_2\cos\alpha_2 - 2d_1r_1\cos\alpha_1 \\ b = 2d_2r_2\sin\alpha_2 - 2d_1r_1\sin\alpha_1 \\ c = d_1^2 + r_1^2 - (d_2^2 + r_2^2) \end{cases}$$

Biến đổi ta được (nếu đặt $tg\,\varphi = \frac{a}{b}$):

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t + c =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(\omega t + \varphi) + c.$$

Như vậy thì:

$$PM_1 = PM_2\ (\forall t) \Leftrightarrow f(t) = 0\ (\forall t)$$
$$\Leftrightarrow a = b = c = 0,$$

hay là:

$$\begin{cases} d_2^2 + r_2^2 = d_1^2 + r_1^2 \\ d_2r_2\cos\alpha_2 = d_1r_1\cos\alpha_1 \\ d_2r_2\sin\alpha_2 = d_1r_1\sin\alpha_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ d_1 + r_1 = d_2 + r_2 \\ |d_1 - r_1| = |d_2 - r_2| \end{cases} (***)$$

Tóm lại:

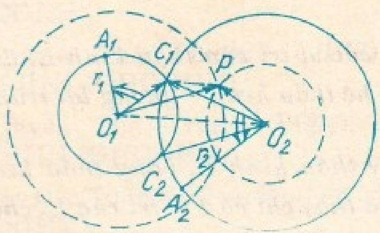
$PM_1 = PM_2, (\forall t) \Leftrightarrow$

1°) Hoặc : $\alpha_1 = \alpha_2, d_1 = r_2, d_2 = r_1$;

2°) Hoặc : $\alpha_1 = \alpha_2, r_1 = r_2, d_1 = d_2$.

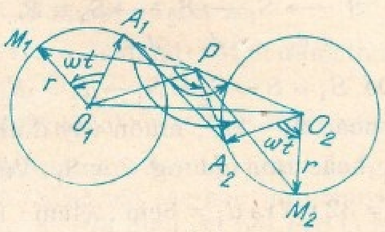
Vậy điểm P tồn tại chỉ một trong hai trường hợp sau đây :

Trường hợp 1 : Hai đường tròn $v_1\ (O_1, r_1)$ và $v_2\ (O_2, r_2)$ cắt nhau ở hai điểm, chẳng hạn C_1 và C_2, đồng thời $(\overrightarrow{O_1C_1}, \overrightarrow{O_1A_1}) = (\overrightarrow{O_2C_1}, \overrightarrow{O_2A_2}) \neq 0$ hay đặc biệt $= 0$ (khi đó $A_1 \equiv A_2 \equiv C_1$) ; *$P$ là điểm đối xứng với C_1 qua trung trực của O_1O_2* (Hình 2)



Hình 2

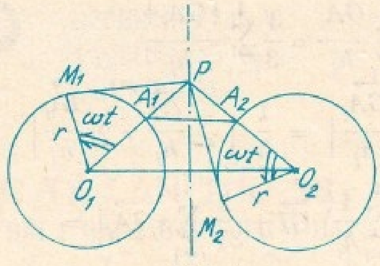
Trường hợp 2 : Hai đường tròn $v_1\ (O_1, r_1)$ và $v_2\ (O_2, r_2)$ có bán kính bằng nhau : $r_1 = r_2 = r$ (nhưng không đồng tâm). Khi đó điểm P phải tìm là giao điểm các đường trung trực của hai đoạn thẳng O_1O_2 và A_1A_2, và do đó, P là tâm quay biến $v_1\ (O_1, r)$ thành $v_2\ (O_2, r)$ trong đó A biến thành A_2. Đó là trường hợp A_1A_2 không song song với O_1O_2 (Hình 3).



Hình 3

Nếu $A_1A_2 // O_1O_2$ thì vì $O_1A_1 // O_2A_2$ (giả thiết) nên $O_1O_2A_2A_1$ là một hình thang cân. Khi đó các trung trực của O_1O_2 và A_1A_2 trùng nhau, nhưng điểm P duy nhất tìm được là giao điểm của O_1A_1 và O_2A_2 nằm trên trung trực chung của O_1O_2 và A_1A_2 (Hình 4).

Chú thích : Trường hợp $A_1A_2 // O_1O_2$ và $O_1A_1 // O_2A_2$ thì $O_1O_2A_2A_1$ là một hình bình



Hình 4

hành, nên các trung trực của O_1O_2 và A_1A_2 song song với nhau, bài toán không có lời giải.

Nhận xét : 1°) Bài toán trên đây là sự khái quát hóa một bài toán trong kỳ thi Toán quốc tế ở Anh (IMO, 1979), tương ứng với trường hợp 1.

2°) Chỉ có hai bạn giải tương đối tốt bài toán này là *Đoàn Xuân Vinh*, 10CT Quốc học Huế và *Phạm Đình Trường*, 11CT Trần Phú, Hải Phòng.

3°) Hầu hết các bạn tham gia giải bài toán này đều không đạt điểm tối đa vì chưa hiểu được thực chất đây là một bài toán dựng hình mà kết luận nêu trong bài chính là kết quả phần biện luận của bài toán đó. Nhiều bạn tỏ ra rất lúng túng trước điều kiện $PM_1 = PM_2\ (\forall t)$, chưa hiểu được rằng độ dài của các đoạn PM_1 hoặc PM_2 là một hàm của t (thời gian) và do đó không đặt vấn đề tính các đoạn thẳng đó. Hầu hết lời giải đều thiếu chặt chẽ và bỏ sót không xét trường hợp $A_1A_2 // O_1O_2$ kể cả hai bạn *Vinh* và *Trường*.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/214. *Gọi G, I và r lần lượt là trọng tâm, tâm và bán kính hình cầu nội tiếp của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$; h_i và m_i lần lượt là độ dài đường cao và trọng tuyến (nối mỗi đỉnh với trọng tâm mặt đối diện) phát xuất từ đỉnh A_i. Chứng minh rằng :* $\max \dfrac{m_i}{h_i} > \dfrac{GI}{3r}$

Lời giải.

Gọi V là thể tích tứ diện, $s_i = s(\widehat{A_jA_kA_l})$ là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i $(i = 1,2,3,4)$; thế thì ta có : $3V = s_ih_i = (\sum s_i)r$; từ đó suy ra :

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h} = \frac{1}{r} \qquad (1)$$

Sau nữa, cần chứng minh hệ thức sau đây :

$$\sum_{i=1}^{4} s_i \overrightarrow{IA_i} = \overrightarrow{O} \qquad (2)$$

Từ đó sử dụng (1), (2) và thay $m_i = \dfrac{4}{3}GA_i$, ta được :

$$\max\left\{\frac{m_1}{h_1}, \frac{m_2}{h_2}, \frac{m_3}{h_3}, \frac{m_4}{h_4}\right\} \geqslant \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{m_i}{h_i}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}\frac{GA_i}{h_i} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}\frac{|\overrightarrow{GA_i}|}{h_i}$$

$$> \frac{1}{3}\left|\sum_{i=1}^{4}\frac{\overrightarrow{GA_i}}{h_i}\right| = \frac{1}{3}\left|\sum\frac{\overrightarrow{GI}}{h_i} + \sum\frac{\overrightarrow{IA_i}}{h_i}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\left|\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i}\right)\overrightarrow{GI} + \frac{1}{3V}\sum_{i=1}^{4}s_i\,\overrightarrow{IA_i}\right| =$$

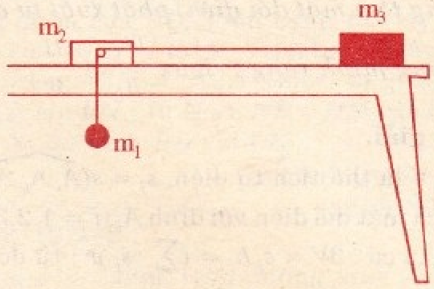
$$= \frac{1}{3}\left(\sum\frac{1}{h_i}\right)GI = \frac{GI}{3r} \quad \text{(đ.p.c.m)}$$

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Phạm Đình Trường* 11 CT Trần Phú, Hải Phòng, *Nguyễn Minh Tuấn*, 11A1 Chu Văn An Hà Nội, *Lê Anh Vũ* và *Nguyễn Thị Hải Yến* , 11CT, Quốc học Huế, *Đinh Trung Hằng*, 11M Marie curie, Hà Nội, *Phan Duy Hùng*, 11CT, Đào Duy Từ, Quảng Bình. Rất tiếc còn có bạn vô ý không đọc kỹ đầu bài nhầm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp nên đã giải sai. Để hoàn chỉnh lời giải bài toán, các bạn hãy chứng minh hệ thức véctơ (2), xem như một bài toán phụ bổ sung kiến thức cần thiết.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/214.

Hệ vật được bố trí như hình vẽ : m_1 được treo bằng dây mảnh không dãn, dây được vắt qua ròng rọc cố định gắn trên m_2, đầu kia của dây gắn với m_3. Buông tay khỏi m_1 thì hệ vật chuyển động làm cho dây treo m_1 bị lệch 30° so với phương thẳng đứng. Cho m_2 = 0,2 kg m_3 = 0,4 kg. Bỏ qua ma sát. Tính : khối lượng m_1 ; gia tốc các vật.



Hướng dẫn giải. m_1 tham gia hai chuyển động : chuyển động theo phương nằm ngang, sang phải với gia tốc $\overrightarrow{a_2}$; chuyển động theo phương của sợi dây lệch 30° so với phương thẳng đứng với gia tốc $\overrightarrow{a_3}$: $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}$. Viết phương trình định luật II Niutơn cho m_2, m_3 và chiếu lên phương ngang suy ra lực căng $T = 0{,}4\,a_2 = 0{,}4\,a_3$ và chú ý tới góc lệch của dây treo m_1 là 30° suy ra $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Viết phương trình của định luật II Niutơn cho m_1, rồi chiếu lên phương ngang suy ra $T = m_1 a_2$ (chú ý $a_{1x} = \frac{a_2}{2}$). Từ đó rút ra $m_1 = 0{,}4kg$. Vì độ giảm thế năng của m_1 bằng tổng độ động năng của cả 3 vật rút ra $a = 3{,}46\,m/s^2$ (chú ý $v_1 = v_2 = v_3\,at$)

Nhận xét. Các em có lời giải gần hoàn chỉnh :

Nguyễn Quang Tường, 11CL, *Bùi Phước* 10CL, *Lê Quang Vinh* 10CL, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An.

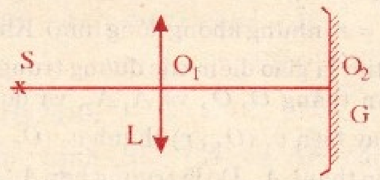
MT

Bài L2/214.

Điểm sáng S ở trên trục chính của gương cầu lõm G, bán kính R = 6cm, cách đỉnh gương 32 cm. Đặt thấu kính hội tụ L_1 tiêu cự f_1 = 6cm, đồng trục trong khoảng giữa S và G :

1. Tìm các vị trí của thấu kính L_1 để ảnh của S qua hệ thấu kính – gương lại trùng với S.

2. Thay thấu kính L_1 bằng thấu kính L_2 tiêu cự f_2 ta thấy chỉ có 1 vị trí của L_2 cho ảnh của S qua hệ thấu kính – gương lại trùng với S. Xác định f_2 và vị trí đặt L_2.



Hướng dẫn giải. Sơ đồ tạo ảnh qua hệ :

$$S \xrightarrow[d_1\,d_1']{L} S_1 \xrightarrow[d_2\,d_2']{G} S_2 \xrightarrow[d_3\,d_3']{L} S_3 \equiv S.$$

1) Để $S_3 \equiv S \rightarrow S_2 \equiv S_1 \rightarrow d_2' = d_2$, rút ra $d_2 = 0$ hoặc $d_2 = 2f_g$; muốn vậy đỉnh gương $O_2 \equiv S_1$ hoặc tâm gương $C \equiv S_1$. Vận dụng $d_1 + d_1' = 32$ rút ra d_1 = 8cm ; 24cm ; 16,6cm ; 9,4 cm.

2) Muốn cho chỉ có 1 vị trí của L_2 cho ảnh, phải có $l = 4f_2 \rightarrow f_2 = 8cm$.

Nhận xét : Các em có lời giải đúng và gọn :

Nguyễn Nguyệt Minh, 10M Marie Curie Hà Nội ; *Tăng Xuân Trường*, 12C1 PTTH Long Khánh, Đồng Nai ; *Vũ Duy Hải*, 10A3 Lê Hồng Phong Nam Định ; *Nguyễn Xuân Trường* 11A, PTNK Hải Hưng ; *Đặng Thanh Hà*, 11A CT ĐHSP HN 1.

OK

OLYMPIADE INTERNATIONALE DE MATHEMATIQUES

CANADA 1995

INTERNATIONAL MATHEMATIC OLYMPIAD

KÌ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 36

Năm nay, kì thi Olympic Toán quốc tế được tổ chức tại Toronto (Canada) từ 13/7 đến 25/7/1995. Kì thi lần này có 73 đoàn tham dự với 412 học sinh dự thi (một số đoàn không có đủ 6 học sinh trong đội tuyển như Kuwait, Malaysia...).

Đội tuyển Việt Nam gồm 6 học sinh :

Cao Văn Hạnh (VIE1), lớp 12 Lam Sơn (Thanh Hóa),

Đào Hải Long (VIE2), lớp 12A$_0$, ĐHTHHN (ĐHQGHN),

Nguyễn Thế Phương (VIE3), lớp 12 ĐHSPHN1 (ĐHQGHN),

Nguyễn Thế Trung (VIE4), lớp 12A$_0$, ĐHTHHN (ĐHQGHN),

Ngô Đắc Tuấn (VIE5), lớp 11A$_0$, ĐHTHHN (ĐHQGHN),

Phạm Quang Tuấn (VIE6), lớp 12A$_0$, ĐHTHHN (ĐHQGHN).

Cách chọn bài thi năm nay có một số thay đổi so với mọi năm : nước chủ nhà chọn ra 30 bài thuộc các lĩnh vực khác nhau (đại số, hình học, số học và tổ hợp, giải tích) không kèm theo lời giải và tên nước đề nghị các bài đó. Kết quả là đã chọn ra được sáu bài rồi mới công bố tên nước đề nghị :

Bài 1 (Bungaria) về hình học phẳng,

Bài 2 (Russia) về bất đẳng thức đại số,

Bài 3 (Czech Republic) về tổ hợp trong hình học,

Bài 4 (Poland) về dãy số,

Bài 5 (New Zealand) về bất đẳng thức trong hình học,

Bài 6 (Poland) về tổ hợp trong số học.

Các bài thi năm nay đều thuộc dạng cơ bản, rất quen thuộc với các học sinh chuyên toán của nước ta. Một điều rất bất ngờ là học sinh của nhiều đội tuyển giàu truyền thống trong thi Olympic Toán học đã bị gãy bài 2 và bài 5.

Đội tuyển Việt Nam đã đạt kết quả rất xuất sắc trong kì thi năm nay. Cả 6 em đều giành huy chương, hai huy chương vàng và bốn huy chương bạc với số điểm 220/252 sau các đoàn : Trung quốc 236 điểm, Rumani 230 điểm và LB Nga 227 điểm. Sau đây là bảng kết quả chi tiết sẽ cho câu trả lời về những mặt mạnh và những điểm còn yếu của đội tuyển Việt Nam.

Tên	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5	Bài 6
VIE1	7	7	5	7	7	0
VIE2	7	7	7	7	7	5
VIE3	7	7	7	7	7	0
VIE4	7	7	7	7	7	0
VIE5	7	7	7	7	7	7
VIE6	7	7	7	7	7	0

Dưới đây là đề thi

Ngày thứ nhất — Thời gian : $4\frac{1}{2}$ giờ.

19 – 07 – 1995. — Mỗi bài : 7 điểm.

1. Cho A, B, C và D là bốn điểm phân biệt trên một đường thẳng và được sắp theo thứ tự đó. Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại các điểm X và Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại B và N. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, DN và XY đồng quy.

2. Cho a, b và c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

3. Xác định tất cả các số nguyên $n > 3$ sao cho tồn tại n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ trong cùng mặt phẳng và các số thực $r_1, r_2, \ldots, r_n$ thỏa mãn hai điều kiện sau đây :

(i) không có 3 điểm nào trong số $A_1, A_2, \ldots, A_r$ thẳng hàng

(ii) với mỗi bộ i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) các tam giác $A_iA_jA_k$ có diện tích bằng $r_i + r_j + r_k$.

Ngày thứ hai — Thời gian : $4\frac{1}{2}$ giờ

20 – 07 – 1995 — Mỗi bài : 7 điểm.

4. Tìm giá trị lớn nhất của x_0 để tồn tại dãy các số thực dương $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ thỏa mãn hai điều kiện

(i) $x_0 = x_{1995}$

(ii) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

5. Cho $ABCDEF$ là một lục giác lồi có $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ và $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$. Cho G và H là hai điểm nằm bên trong lục giác sao cho $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$. Chứng minh rằng

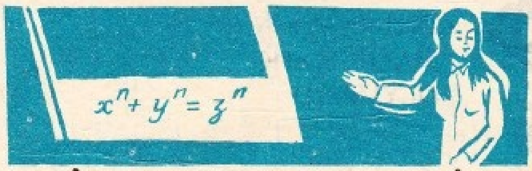
$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$$

6. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, biết rằng

(i) A chứa đúng p phần tử

(ii) tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

NGUYỄN VĂN MẬU



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp THCS

Bài T1/218 :

Hãy tìm số chính phương lớn nhất có chữ số cuối khác 0 sao cho sau khi xóa bỏ hai chữ số cuối thì thu được một số chính phương.

ĐẶNG VĂN HÃNG
(Hải Hưng)

Bài T2/218 :

Cho hai số x, y thỏa mãn đẳng thức :

$$2x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{4}=4$$

Xác định x, y để tích xy đạt giá trị nhỏ nhất.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T3/218 :

Giải phương trình :

$$x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=1$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Hà)

Bài T4/218 :

Cho tam giác ABC với $AC > AB$. Gọi M là trung điểm của BC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD}=\widehat{CAM}$. Trên tia AM lấy điểm N sao cho $\widehat{ABN}=\widehat{ACB}$. Gọi O là giao điểm của AD với BN ; từ N kẻ $NK \parallel OM$ cắt BC tại điểm K. So sánh BD với CK.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(Thanh Hóa)

Bài T5/218 :

Cho nửa đường tròn đường kính AB trên đó có điểm C. Hạ đường cao CH của tam giác ABC. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH, BCH. Tìm vị trí của C để O_1O_2 đạt độ dài lớn nhất.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

Các lớp THCB

Bài T6/218 :

Giải phương trình :

$$2\cos(x-45^o)-\cos(x-45^o).\sin2x-3\sin2x+4=0.$$

NGUYỄN HỮU DƯ
(Nghệ An)

Bài T7/218 :

Cho đa thức :

$$P(x)=(x^2-2)(x^2-3)(x^2-6)$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p đều tìm được số nguyên dương n để $P(n)$ chia hết cho p.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

Bài T8/218 :

Cho số nguyên n lớn hơn 2. Chứng minh rằng tồn tại hai hoán vị khác nhau $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ và $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ của $(1, 2, \ldots, n)$ sao cho

$$s_1+2s_2+3s_3+\ldots+ns_n=t_1+2t_2+3t_3+\ldots+nt_n$$

NGUYỄN LÊ DŨNG
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T9/218 :

Các cạnh AC, AD, BC và BD của tứ diện $ABCD$ tiếp xúc với mặt cầu (S_o) bán kính ρ, tâm I nằm trên cạnh AB. Các cạnh CA, CB, DA và DB tiếp xúc với mặt cầu (S'_o) bán kính r, tâm J nằm trên cạnh CD. Chứng minh hệ thức sau đây :

$$AB^4(CD^2-4r^2)=CD^4(AB^2-4\rho^2)$$

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

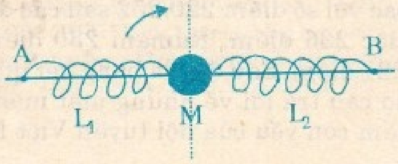
Bài T10/218 :

Lấy các cạnh BC, CA và AB của một tam giác ABC làm đáy, dựng ra phía ngoài tam giác ABC ba tam giác đều $A'BC$, $B'CA$ và $C'AB$. Gọi A_o, A_1 ; B_o, B_1 và C_o, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ và AB, $A'B'$ của hai tam giác ABC, $A'B'C'$. Chứng minh rằng các đoạn thẳng A_oA_1, B_oB_1 và C_oC_1 đồng quy và bằng nhau.

ĐÀM VĂN NHỈ
(Thái Bình)

Các đề Vật lí

Bài L1/218 : Một viên bi khối lượng m có khoan một lỗ xuyên tâm và được lồng trên một thanh cứng thẳng sao cho bi có thể chuyển



động dọc trên thanh với ma sát không đáng kể. Hai lò xo L_1 và L_2 có một đầu gắn chặt với viên bi và đầu còn lại gắn cố định vào các điểm A và B trên thanh cứng. Lúc đầu đặt thanh AB nằm ngang và viên bi đứng yên ở vị trí M, khi đó lò xo L_1 bị nén một đoạn a_1, lò xo L_2 bị nén một đoạn a_2. Tại thời điểm $t = 0$ quay thanh AB xung quanh M tới vị trí thanh thẳng đứng.

1. Hãy chứng minh là viên bi sẽ dao động điều hòa.

2. Cho biết biên độ dao động của viên bi là 9,8cm và gia tốc trọng trường là 9,8m/s^2. Hãy tính chu kì dao động của viên bi.

3. Cho biết $m = 100$g, $a_1 = 15$cm và $a_2 = 10$cm. Hãy tính độ cứng của các lò xo L_1 và L_2.

PHAN TUẤN KHANH
(Hà Nội)

Bài L2/218 :

Có 3 điện trở R_1 : 30Ω - 15A, R_2 : 10Ω - 5A, R_3 : 20Ω - 20A. Trong đó giá trị sau là dòng cao nhất mà các điện trở có thể chịu được.

1. Xác định cụm liên kết, có thể có giữa ba điện trở này, chịu được nguồn U = 180V

2. Giả sử chọn liên kết R_1 // $(R_2 + R_3)$ mắc nối tiếp với cụm bóng đèn loại 30V – 40W. Tìm cách mắc để các bóng đèn sáng bình thường khi mắc toàn cụm vào nguồn điện U = 220V không đổi, sao cho cụm $R = R_1$ // $(R_2 + R_3)$ không bị cháy. Bỏ qua giá trị điện trở của dây nối.

LẠI THẾ HIỂN
(Thái Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools.

T1/218. Find the greatest perfect square the last digit of which is not 0 such that after deleting the two last digits, the remaining number is a perfect square.

T2/218. Determine the numbers x, y satisfying

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$$

such that the product xy attains least value.

T3/218. Solve the equation

$$x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1$$

T4/218. Let be given a triangle ABC with $AC > AB$, and M be the midpoint of BC. Take D on the side BC such that $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$ and take N on the semiline AM such that $\widehat{ABN} = \widehat{ACB}$. Let O be the intersection of AD and BN. The line NK parallel to OM cuts BC at K. Compare BD with CK.

T5/218. Let be given a semi-circle with diameter AB. Consider a point C on the semi-circle. Let CH be the altitude of triangle ABC and O_1 and O_2 be respectively the incenters of triangles ACH, BCH. Determine the position of C so that the length of O_1O_2 is greatest.

For Upper Secondary Schoolls.

T6/218. Solve the equation

$$2\cos(x-45^o) - \cos(x-45^o)\sin2x - 3\sin2x + 4 = 0.$$

7/218. Consider the polynomial

$$P(x) = (x^2-2)(x^2-3)(x^2-6).$$

Prove that for every prime number p, there is a positive integer n such that $P(n)$ is divisible by p.

T8/218. Let be given an integer n greater than 2. Prove that there exist two distinct permutations $(s_1, s_2, ..., s_n)$ and $(t_1, t_2, ..., t_n)$ of (1, 2, ..., n) such that

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ns_n =$$
$$= t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \ldots + nt_n.$$

T9/218. The sides AC, AD, BC and BD of a tetrahedron $ABCD$ touch a sphere (S_o) of radius ρ with center I on the side AB. The sides CA, CB, DA and DB touch a sphere (S'_o) of radius r, with center J on the side CD. Prove the relation :

$$AB^4(CD^2 - 4r^2) = CD^4(AB^2 - 4\rho^2).$$

T10/218. Construct outside a triangle ABC the three equilateral triangles $A'BC$, $B'CA$ and $C'AB$. Let A_o, A_1 ; B_o, B_1 and C_o, C_1 be respectively the midpoints of the sides BC, $B'C'$; CA , $C'A'$ and AB, $A'B'$ of the two triangles ABC, $A'B'C'$. Prove that the lines A_oA_1, B_oB_1, C_oC_1 are concurrent and $A_oA_1 = B_oB_1 = C_oC_1$.

ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY

Trần Xuân Đáng (Nam Hà)

Định nghĩa 1 : Giả sử *f(x)* là một đa thức với các hệ số hữu tỉ. *f(x)* được gọi là bất khả quy trên Q nếu *f(x)* không viết được dưới dạng tích của hai đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 với các hệ số hữu tỉ.

Định nghĩa 2 : Giả sử *f(x)* là một đa thức với các hệ số nguyên. *f(x)* được gọi là bất khả quy trên Z nếu *f(x)* không viết được dưới dạng tích của hai đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 với các hệ số nguyên.

Định nghĩa 3 : Đa thức *f(x)* với các hệ số nguyên được gọi là nguyên bản nếu và chỉ nếu các hệ số của nó nguyên tố cùng nhau.

Chú ý rằng nếu *f(x)* là một đa thức với các hệ số hữu tỉ thì có thể viết nó một cách duy nhất dưới dạng

$$f(x) = \frac{a}{b}f_1(x)$$

trong đó $\frac{a}{b}$ là một phân số tối giản ($a, b \in Z$) và $f_1(x)$ là một đa thức nguyên bản.

Muốn vậy ta quy đồng mẫu số các hệ số của *f(x)* rồi đặt ƯSCLN của các tử số thành nhân tử. Ta thấy rằng *f(x)* và $f_1(x)$ có cùng một bậc.

Để chứng minh cách viết đó là duy nhất (xê xích dấu) giả sử $f(x) = \frac{a}{b}f_1(x) = \frac{c}{d}f_2(x)$ trong đó $f_1(x)$ và $f_2(x)$ đều nguyên bản. Khi đó ta có

$$adf_1(x) = bcf_2(x).$$

Như vậy $|ad|$ và $|bc|$ đều là ƯSCLN của các hệ số của cùng một đa thức với các hệ số nguyên. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bổ đề Gaoxơ : Tích của hai đa thức nguyên bản là một đa thức nguyên bản.

Chứng minh : Thật vậy giả sử đã cho các đa thức nguyên bản

$f(x) = a_o + a_1x + ... + a_ix^i + ... + a_kx^k$ $(a_k \neq 0)$

$g(x) = b_o + b_1x + ... + b_jx^j + ... + b_mx^m$ $(b_m \neq 0)$

và giả sử

$f(x).g(x) = c_o + c_1x + ... + c_{i+j}x^{i+j} + ... + c_{m+k}x^{m+k}$

Nếu $f(x)g(x)$ không nguyên bản thì tồn tại một số nguyên tố p là ước số chung của tất cả các hệ số $c_o, c_1, \dots, c_{m+k}$. Vì tất cả các hệ số của *f(x)* không đồng thời chia hết cho p do *f(x)* là nguyên bản, nên trong các hệ số $a_o, a_1, \dots, a_k$ sẽ có một số đầu tiên, giả sử a_i không chia hết cho p. Tương tự giả sử b_j là hệ số đầu tiên của $g(x)$ không chia hết cho p. Ta có

$$c_{i+j} = \sum_{r+s=i+j} a_rb_s$$

Xét ba trường hợp :

1) $i \geq 1, j \geq 1$. Khi đó

$$\sum_{r+s=i+j} a_rb_s = \sum_{\substack{r+s=i+j \\ r<i}} a_rb_s + \sum_{\substack{r+s=i+j \\ s<j}} a_rb_s + a_ib_j$$

Nếu $r<i$ thì $a_r \vdots\ p$. Nếu $s<j$ thì $b_s \vdots\ p$.

Mặt khác a_ib_j không chia hết cho p. Vậy c_{i+j} không chia hết cho p

2) $i = 0, j \geq 1$. Khi đó

$$c_{i+j} = c_j = a_ob_j + \sum_{\substack{r+s=j \\ s<j}} a_rb_s$$

Vậy c_{i+j} không chia hết cho p

3) $j = 0$, $i \geq 1$. Tương tự như trường hợp 2 ta cũng có c_{i+j} không chia hết cho p.

4) $i = 0$, $j = 0$. Khi đó $c_o = a_o \,.\, b_o$ không chia hết cho p.

Trong mọi trường hợp ta đều có c_{i+j} không chia hết cho p. Điều này trái với giả thiết. Vậy *f(x).g(x)* là nguyên bản.

Định lí 1: Nếu đa thức *f(x)* với các hệ số nguyên có bậc $n > 1$ bất khả quy trên Z thì nó cũng bất khả quy trên Q.

Chứng minh: Thật vậy giả sử ngược lại rằng đa thức *f(x)* khả quy trên Q, tức là $f(x) = f_1(x) \,.\, f_2(x)$ trong đó $f_1(x)$, $f_2(x)$ là các đa thức với các hệ số hữu tỉ và có bậc nhỏ hơn n.

Ta có $f_i(x) = \frac{a_i}{b_i}\, g_i(x)$ $(i = 1, 2)$ trong đó $\frac{a_i}{b_i}$ là một phân số tối giản và $g_i(x)$ là một đa thức nguyên bản.

Từ đó $f(x) = \frac{a_1 \,.\, a_2}{b_1 \,.\, b_2}\, g_1(x) \,.\, g_2(x)$.

Giả sử $\frac{a_1 \,.\, a_2}{b_1 \,.\, b_2} = \frac{q}{r}$ với $(q, r) = 1$. Khi đó ta có $f(x) = \frac{q}{r}\, g_1(x) \,.\, g_2(x)$.

Nếu c_i là một hệ số nào đó của tích $g_1(x) \,.\, g_2(x)$ thì $c_i.q$ phải chia hết cho r vì các hệ số của *f(x)* là những số nguyên. Vì $(q, r) = 1$ nên c_i phải chia hết cho r. Vậy r là một ước số chung của các hệ số của tích $g_1(x) \,.\, g_2(x)$.

Nhưng theo bổ đề Gaoxơ thì $g_1(x) . g_2(x)$ là nguyên bản. Vậy $r = \pm 1$. Từ đó $f(x) = \pm q . g_1(x) . g_2(x)$ với $\pm q . g_1(x)$ và $g_2(x)$ là các đa thức với các hệ số nguyên và có bậc nhỏ hơn n. Vậy $f(x)$ là khả quy trên Z, trái với giả thiết. Vậy $f(x)$ bất khả quy trên Q.

Định lí 2: Cho đa thức $f(x) = a_o + a_1 x + ... + a_n x^n$ $(n > 1)$ trong đó $a_o, a_1, ..., a_n$ là những số nguyên và một số nguyên tố p thỏa mãn các điều kiện sau :

1) a_n không chia hết cho p

2) $a_o, a_1, ..., a_k$ chia hết cho p $(0 \leq k < n)$

3) a_o không chia hết cho p^2

Nếu $f(x)$ viết được dưới dạng tích của hai đa thức với các hệ số nguyên thì bậc của một trong hai đa thức đó không nhỏ hơn $k + 1$.

Chứng minh: Giả sử $f(x) = h(x).g(x)$ trong đó

$$h(x) = b_o + b_1 x + ... + b_m x^m$$

$$g(x) = c_o + c_1 x + ... + c_{n-m} x^{n-m}$$

Ta có $a_o = b_o . c_o$. Vì $a_o \vdots p$ và không chia hết cho p^2 nên trong hai số b_o, c_o có một số chia hết cho p và số còn lại không chia hết cho p. Giả sử $b_o \vdots p$ và c_o không chia hết cho p. Vì $a_n = b_m . c_{n-m}$ không chia hết cho p nên b_m cũng không chia hết cho p. Gọi i_o là số nhỏ nhất trong số các số i thỏa mãn b_i không chia hết cho p thì $0 < i_o \leq m$. Ta có $a_{i_o} = c_o . b_{i_o} + \sum\limits_{\substack{i+j=i_o \\ 0 \leq i < i_o}} b_i . c_j$ không chia hết cho p.

Vậy $i_o \geq k + 1$. Mặt khác $m \geq i_o$, vậy $m \geq k + 1$ (đ.p.c.m) với $k = n - 1$ ta nhận được tiêu chuẩn Aidenstai (Eisenstein) : Cho đa thức $f(x) = a_o + a_1 x + ... + a_n x^n$ $(n \geq 1)$, trong đó $a_i \in Z$ $(i = 0, 1, ..., n)$; $a_o, a_1, ..., a_{n-1}$ chia hết cho số nguyên tố p ; a_o không chia hết cho p^2 và a_n không chia hết cho p. Khi đó $f(x)$ bất khả quy trên Q.

Áp dụng định lí 2 ta có thể giải được bài toán sau :

Bài toán : Giả sử $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ trong đó n là một số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $f(x)$ không viết được dưới dạng tích của hai đa thức có bậc không nhỏ thua 1 với các hệ số nguyên.

(Đề thi toán quốc tế năm 1993)

Giải : Giả sử $f(x) = f_1(x) . f_2(x)$ trong đó $f_1(x)$, $f_2(x)$ là các đa thức với các hệ số nguyên và có bậc không nhỏ thua 1.

Đa thức $f(x)$ thỏa mãn các giả thiết của định lí 2 với $p = 3$, $k = n - 2$. Vậy trong các đa thức $f_1(x)$ và $f_2(x)$ có một đa thức có bậc không nhỏ hơn $n - 1$. Giả sử $f_1(x)$ có bậc không nhỏ hơn $n - 1$. Khi đó $f_2(x)$ có bậc bằng 1. Vậy $f_2(x)$ có nghiệm nguyên ($f_2(x) = x + b$ với $b \in Z$). Giả sử $x = x_o$ $(x_o \in Z)$ là nghiệm nguyên của $f_2(x)$ thì x_o phải là ước số của 3. Từ đó suy ra $x_o = \pm 1, \pm 3$. Mặt khác dễ dàng chứng minh được $f_2(1) \neq 0$, $f_2(-1) \neq 0$, $f_2(3) \neq 0$, $f_2(-3) \neq 0$. Điều vô lí này chứng tỏ rằng $f(x)$ không viết được dưới dạng tích của hai đa thức có bậc không nhỏ thua 1 với các hệ số nguyên.

Định lí 3 : Giả sử $g(x)$ là một đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 và có các hệ số hữu tỉ. Khi đó với mỗi đa thức $f(x)$ với các hệ số hữu tỉ có một và chỉ một cặp đa thức $q(x)$, $r(x)$ với các hệ số hữu tỉ sao cho $f(x) = g(x) . q(x) + r(x)$ và $\deg r(x) < \deg g(x)$ nếu $r(x) \neq 0$.

Chứng minh : Trước hết ta chứng minh bằng quy nạp theo bậc của đa thức $f(x)$ sự tồn tại của cặp đa thức $q(x)$, $r(x)$.

Giả sử $g(x) = b_o + b_1 x + ... + b_m x^m$ $(m \geq 1, b_m \neq 0)$

Nếu $f(x) = 0$ hoặc $\deg f(x) < m$ thì chỉ việc chọn $q(x) = 0$ và $r(x) = f(x)$. Giả sử kết luận đúng với mỗi đa thức có bậc nhỏ hơn n $(n \geq m)$ và giả sử $f(x) = a_o + a_1 x + ... + a_n x^n$ $(a_n \neq 0)$

Đặt $f_1(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m} . x^{n-m} . g(x)$. Ta có ngay $f_1(x) = 0$ hoặc $\deg f_1(x) < n$. Theo giả thiết quy nạp có cặp đa thức $q_1(x)$, $r_1(x)$ sao cho $f_1(x) = g(x) . q_1(x) + r_1(x)$ trong đó $r_1(x) = 0$ hoặc $\deg r_1(x) < m$.

Từ đó $f(x) = g(x) \left[q_1(x) + \dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m} \right] + r_1(x) = g(x)q(x) + r(x)$ với

$$q(x) = q_1 x + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}, \; r(x) = r_1(x)$$

Các bạn hãy tự chứng minh tính duy nhất của $q(x)$, $r(x)$

Định lí 4 : Cho đa thức $f(x)$ khác 0, có các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là a. Nếu $f(x)$ bất khả quy trên Q thì $f(x)$ là một đa thức có bậc nhỏ nhất với các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là a.

Chứng minh : Vì $f(x)$ khác 0 và có một nghiệm là a nên $\deg f(x) \geq 1$. Giả sử $f_o(x)$ là đa thức với các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là a và có bậc nhỏ nhất. Nếu $\deg f(x) > \deg f_o(x)$ thì theo định lí 3 (chú ý rằng $\deg f_o(x) \geq 1$) tồn tại các đa thức $q(x)$, $r(x)$ với các hệ số hữu tỉ, trong đó hoặc $r(x) = 0$ hoặc $\deg r(x) < \deg f_o(x)$ và $\deg q(x) \geq 1$. Vì $f(x)$ bất khả quy trên Q nên $r(x) \neq 0$ và $\deg r(x) < \deg f_o(x)$. Ta cũng có $\deg r(x) \geq 1$ vì $r(a) = 0$. Điều này trái với định nghĩa của $f_o(x)$. Vậy $f(x)$ là một đa thức có bậc nhỏ nhất với các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là a. Áp dụng định lí 4 ta có thể giải được bài toán sau :

(Xem tiếp trang 2)

HÌNH CHỮ NHẬT VÀNG

Lê Quang Ánh (TP Hồ Chí Minh)

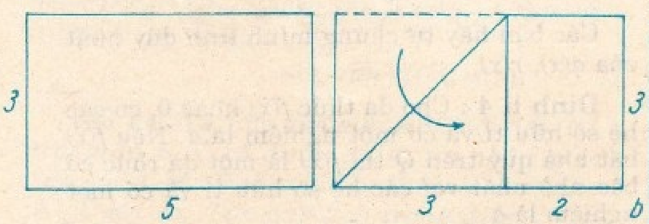
Trong bài này chúng ta sẽ xem xét một số tính chất thú vị của một lớp hình chữ nhật, gọi là hình chữ nhật vàng được người Hy Lạp khám phá ra vào khoảng 500 năm trước Tây lịch mà dấu vết ngày nay vẫn còn thấy trong Hội họa, điêu khắc, kiến trúc. Phép dựng loại hình chữ nhật này dẫn đến số $\sqrt{5}$, con số này là chìa khóa để dựng được ngũ giác đều bằng thước kẻ và compas. Ngũ giác đều lại là mặt của khối 12 mặt đều và là đa giác "nội tiếp" trong khối 20 mặt đều, khối đa diện nổi tiếng nhất trong số 5 khối đa diện đều. Hình chữ nhật vàng được người Hy Lạp đánh giá cao bởi vẻ đẹp riêng của nó và vẻ đẹp của các sự vật toán học có liên quan đến nó.

Ta hãy quan sát dãy số sau đây :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Ta thấy ngay là mỗi số hạng (từ số hạng thứ ba trở đi) bằng tổng hai số hạng đứng ngay trước nó. Dãy số này được Leonard de Pise phát hiện ra từ năm 1200 nhân một bài toán về sự sinh đẻ của một vặp thỏ và từ đó người ta gọi đó là dãy Fibonacci (Fibonacci = con trai của sự giàu có). Mối liên hệ giữa hình chữ nhật vàng và dãy số này đã là nguồn cảm hứng của bao nhiêu khám phá Toán học mà một số sẽ được trình bày trong bài này. Vào thế kỉ 18 người ta còn tìm thấy rằng hình chữ nhật vàng có liên hệ với đường xoắn Logarit mà đường này thì lại có liên hệ với thế giới tự nhiên : cây cỏ, sinh vật...

1. Hình chữ nhật vàng là gì ?



H.1a *H.1b*

Hình 1a cho thấy một hình chữ nhật kích thước 3×5 (một thẻ thư viện chẳng hạn). Nếu ta gấp thẻ theo hình 1b thì một hình chữ nhật mới kích thước 2×3 xuất hiện.

Tỉ số cạnh nhỏ trên cạnh lớn trong hai hình chữ nhật ấy là :

$$\frac{3}{5} = 0{,}6\ ;\ \frac{2}{3} \approx 0{,}67$$

Hai tỉ số gần bằng nhau.

Hình chữ nhật vàng là hình chữ nhật ứng với hai tỉ số ấy bằng nhau. Một cách chính xác hơn : Hình chữ nhật vàng là hình chữ nhật mà khi ta cắt đi hình vuông có cạnh là cạnh nhỏ của hình chữ nhật thì ta được hình chữ nhật mới đồng dạng với hình chữ nhật cũ.

Gọi chiều dài của hai cạnh hình chữ nhật đầu tiên là $a+b$ (lớn) và a (nhỏ).

Các cặp cạnh của các hình chữ nhật được thành lập theo cách trên là (cạnh lớn trên, cạnh nhỏ dưới) :

$$\begin{cases}a+b\\a\end{cases};\ \begin{cases}a\\b\end{cases};\ \begin{cases}b\\a-b\end{cases};\ \begin{cases}a-b\\2b-a\end{cases};\ \begin{cases}2a-3b\\5b-3a\end{cases};\ \begin{cases}5b-3a\\5a-8b\end{cases};\ \dots$$

Qua đó ta thấy cạnh lớn của hình chữ nhật bằng tổng của hai cạnh hình chữ nhật kế tiếp sau nó. Ngoài ra ta còn thấy rằng các hệ số của a và b trong các biểu thức cạnh ở trên có liên hệ mật thiết với các số hạng trong dãy Fibonacci.

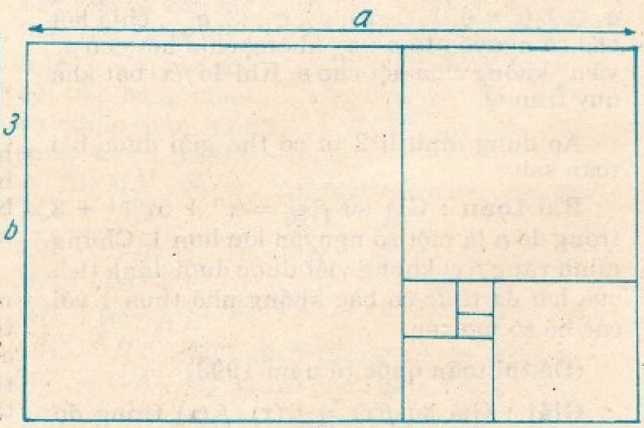
2. Tỉ số vàng.

● Quá trình thành lập liên tiếp các hình chữ nhật này là không thể kết thúc được và điều này nói lên rằng a và b là các đại lượng "không đo lường được". Và tỉ số $m = \frac{b}{a}$ là số vô tỉ. Paccioli (1502) gọi số m là "số thiêng liêng", "số của trời", chính Leonard de Vinci (1452 – 1519) gọi nó là "số vàng". Chứng minh số m là số vô tỉ được Campanus đưa ra vào năm 1260 như sau :

Giả sử m là số hữu tỉ tức là tỉ số của hai số nguyên dương a và b $(a > b)$. Các cạnh của các hình chữ nhật vàng được viết liên tiếp là :

$a, b, a-b, 2b-a, 2a-3b, 3a-5b, 5a-8b, \dots$

Tất cả đều là số nguyên dương tiếp diễn vô tận và giảm dần : điều này không chấp nhận được trong tập hợp $\mathbf{N}$. Vậy m vô tỉ.



h.2

● Tính m : Do tính chất của hình chữ nhật vàng ta có :

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$$

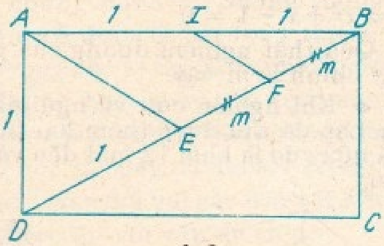
Hay là : $m = \dfrac{1}{1+m} \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0$

Do $m > 0$ nên ta được : $m = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Nếu lấy 9 số thập phân thì ta có :

$$m \approx 0{,}618033989$$

• Có thể dựng m bằng thước kẻ và compas theo hình vẽ sau đây mà bạn đọc có thể kiểm tra dễ dàng :



h.3

$AE \parallel IF$

$EF = FB = m$

3. Xa hơn một chút nữa

• Theo trên ta có : $m = \dfrac{1}{1+m}$

Ta lại thay m vào vế phải của phương trình :

$$m = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+m}}$$

và cứ thế tiếp tục :

$$m = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Như vậy m là giới hạn của dãy số :

$$\frac{1}{1} ; \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} ; \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} ; \ldots$$

Năm số hạng đầu tiên được tính ra là : 1 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{8}$;

Sau một chút suy nghĩ ta có thể viết được số hạng tiếp theo là $\frac{8}{13}$ và cứ thế tiếp tục. Bạn đọc có nhận ra là tử số của các phân số ấy chính là các số hạng của dãy số Fibonacci không ? Và cả các mẫu số nữa. Thử đặt vấn đề ngược lại : Liệu dãy số 1 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{8}$; ... có phải là dãy số hội tụ đến m không ? Simson (1734) đã chứng minh rằng dãy con gồm các số hạng ở vị thứ chẵn giảm và dãy con các số hạng ở vị thứ lẻ tăng và cả hai cùng hội tụ về m, như vậy dãy số ấy hội tụ về m.

• Đến đây bạn đọc nào thích thú vấn đề trên chúng tôi xin giới thiệu hai bài toán có liên quan đến số m và dãy số Fibonacci do Lagrange đặt ra.

1) Kiểm tra lại các đẳng thức :

$m^2 = 1 - m$; $m^3 = m - m^2 = 2m - 1$

$m^4 = 2m^2 - m = 2 - 3m$,...

Liệu có thể đưa ra được một công thức tổng quát không ?

2) • Đem các số hạng của dãy số Fibonacci chia cho 2 ta được các dư số là : 1, 2, 0, 1, 1, 0, ...

Còn nếu chia cho 3 ta được các dư số là :

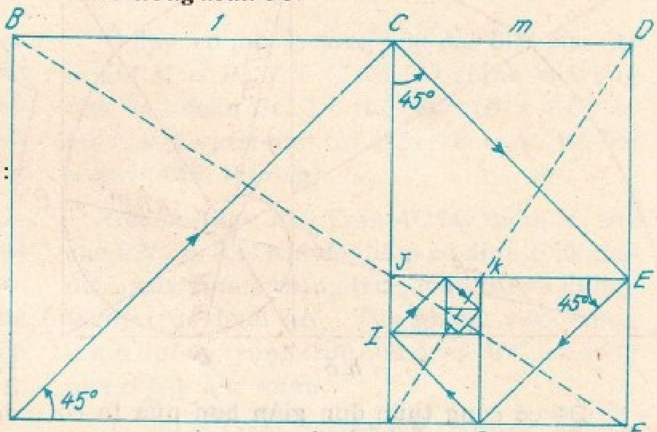
1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2,...

Cả hai dãy số trên đều tuần hoàn chu kì lần lượt là 3 và 8.

Hãy chứng tỏ rằng dãy số có được ứng với phép chia cho 4, cho 5, ... cũng tuần hoàn ?

• Tổng quát, chứng minh mệnh đề sau đây (Lagrange) : Dư số của các số hạng của dãy số Fibonacci cho bất kì số nguyên dương nào cũng tạo nên một dãy số tuần hoàn.

4. Đường xoắn ốc.



h. 4

• Trước hết ta sẽ dựng một đường xoắn zigzag mà các đỉnh thuộc một đường xoắn logarit. Bắt đầu bằng một hình chữ nhật vàng $ABDF$ (h.4) chiều dài là $1 + m$ và chiều rộng là 1. Từ đỉnh thấp nhất – đỉnh A – ta dựng đường thẳng tạo với AF một góc 45°, đường này cắt cạnh trên BD tại C. Hạ CH vuông góc với AF ; Ta được một hình chữ nhật vàng mới là $CDFH$. Từ C vẽ một đường thẳng tạo với cạnh CH một góc 45° ; đường này cắt DF tại E. Hạ EJ vuông góc với CH. Ta lại được một hình chữ nhật vàng mới. Và cứ thế tiếp tục... Ta thu được đường xoắn zigzag $ACEGI$...

Hình chữ nhật vàng thứ nhất $ABDF$ biến thành hình chữ nhật vàng thứ hai $CDFH$ bằng một phép quay 90° tiếp theo là một phép co tỉ số m (tức là một phép đồng dạng tỉ m). Cũng như vậy từ hình chữ nhật thứ hai $CDFH$ sang hình chữ nhật thứ ba $GHJK$,...

Các cạnh của các hình chữ nhật này kể liên tiếp là :

$$1 + m,\ 1,\ m,\ 1 - m,\ 2m - 1, \ldots$$

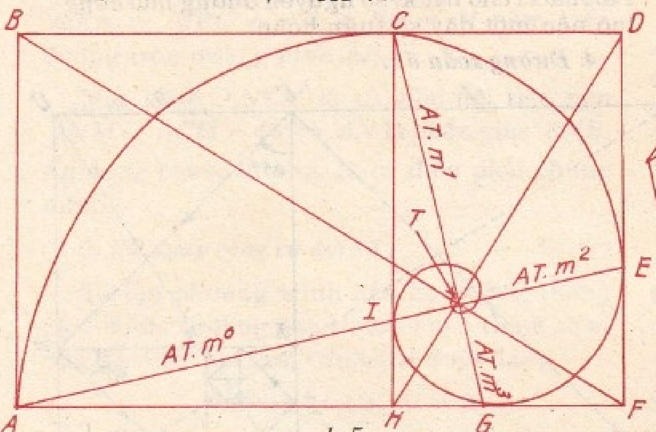
Do $m = \dfrac{1}{1+m}$ ta có thể viết biểu thức các cạnh trên như sau :

$$m^{-1}, m^0, m^1, m^2, m^3, \ldots$$

Như vậy độ dài các cạnh các hình chữ nhật tạo thành một cấp số nhân, công bội $q = m$.

• Ta chứng minh được đường xoắn zigzag $ACEGI$... nói trên "hội tụ" tại điểm T, giao điểm của BF và DH, hai đường chéo tương ứng nhau trong hai hình chữ nhật thứ nhất và thứ hai. T cũng chính là tâm đồng dạng đã nói ở trên. Bây giờ ta sẽ tìm các công thức đơn giản để định các đỉnh của đường xoắn zigzag ấy. Chọn T là gốc, r là khoảng cách từ gốc đến các đỉnh. Ta chú ý là từ đỉnh này sang đỉnh kế tiếp ta phải quay $\frac{\pi}{2}$ (chiều $ACEGI$... như hình 4) và các khoảng cách từ đỉnh đến gốc T bị co lại theo tỉ số m. Nếu chỉ t số lần của $\frac{\pi}{2}$ trong góc quay chẳng hạn A ứng với $t = 0$; C ứng với $t = 1$; E ứng với $t = 2$, ... ta có công thức đơn giản để định các đỉnh của xoắn zigzag là :

$$r = AT \cdot m^t$$



h.5

Để có công thức đơn giản hơn nữa ta có thể đặt : $R = \frac{r}{AT}$ (xem AT là đơn vị).

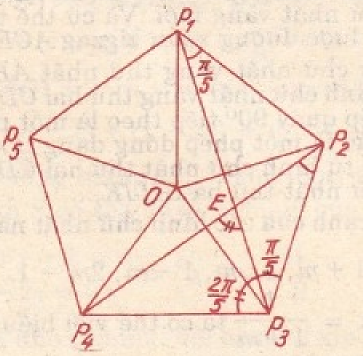
Thế thì ta có phương trình xác định các đỉnh :

$$R = m^t$$

trong đó t lấy các giá trị nguyên không âm : 0, 1, 2, 3, ...

Bây giờ ta cho t lấy các giá trị thực không âm ta sẽ được một đường cong liên tục như h.5 gọi là đường xoắn logarit.

5. Ngũ giác đều



● Ngũ giác đều cũng là một tặng phẩm nữa mà thiên nhiên gửi đến các nhà toán học. Nó có liên quan gì đến số vàng m ? Có và đó là :

Tỉ số của độ dài đường chéo trên độ dài mỗi cạnh bằng m. Thật vậy, xem một ngũ giác đều $P_1P_2P_3P_4P_5$ – Giả sử các đường chéo bằng nhau và bằng 1 ; cạnh của ngũ giác là x. Gọi E là giao điểm của P_1P_3 và P_2P_4. Ta thấy dễ dàng rằng ΔP_4EP_3 cân ở P_4 và :

$$\Delta P_1P_2P_3 \backsim \Delta EP_2P_3 \text{ (h.6)}$$

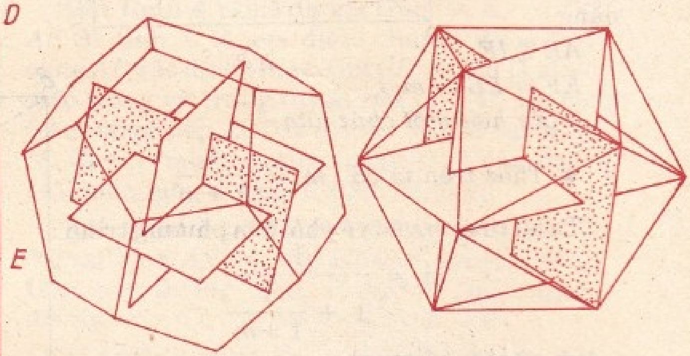
Từ đó :

$$\frac{P_1P_2}{P_1P_3} = \frac{EP_2}{P_2P_3} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Quả thật nghiệm dương của phương trình này chính là m vậy.

● Khi nghiên cứu về ngũ giác đều người Hy Lạp đã thu được thêm hai tặng phẩm quí giá nữa : đó là khối 12 mặt đều và khối 20 mặt đều



Trong khối 12 mặt đều ta chứng minh được khi nối tâm của các mặt thích hợp ta sẽ được 3 hình chữ nhật vàng, còn trong khối 20 mặt đều ta cũng được 3 hình chữ nhật vàng bằng cách nối các đỉnh thích hợp của khối ấy. Tất cả những vấn đề về khối đa diện đều (lồi hoặc lõm) sẽ là nội dung của một bài khác mà có dịp chúng tôi sẽ trình bày.

Bạn đọc nào thích thú vấn đề chúng tôi đã trình bày ở trên xin đọc thêm các bài tập dưới đây và thử tìm cách trả lời xem :

Câu hỏi (1) a. Từ $m^2 = 1 - m$ ta có :

$$m = \sqrt{1-m} = \sqrt{1 - \sqrt{1-m}} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1-m}}} = \ldots$$

ngược lại xem dãy số :

$$\sqrt{1} \ ; \ \sqrt{1 - \sqrt{1}} \ ; \ \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1}}} \ , \ldots$$

Dãy số này có hội tụ đến m không ?

b. Đặt $t = \frac{1}{m}$. Ta có : $t^2 = 1 + t$

Từ đó :

$$t = \sqrt{1+t} = \sqrt{1+\sqrt{1+t}} + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+t}}} = \ldots$$

Dãy số định bởi :

$$\sqrt{1} \ , \ \sqrt{1 + \sqrt{1}} \ , \ \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} \ , \ldots$$

có hội tụ đến t không ?

(2) – Hãy chứng minh hai câu hỏi ở mục 3 (Lagrange gợi ý).

(3) Xem hình 4. Tính chiều dài của hình xoắn zigzag ?

Đáp số : $\frac{\sqrt{2}}{m^2}$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN TỈNH MINH HẢI NĂM HỌC 1994 - 1995

Lớp 8

Thời gian : 120 phút (không kể thời gian chép đề)

Bài 1 : (5 đ) Hãy phân tích số 1328 thành tổng của hai số nguyên X và Y sao cho X chia hết cho 23 và Y chia hết cho 29. Hãy tính X và Y khi $X - Y = 52$.

Bài 2 : (4 đ) Cho đa thức $f(x) = \frac{x^5}{30} - \frac{x^3}{6} + \frac{2x}{15}$

a) Hãy phân tích $f(x)$ thành nhân tử

b) Chứng tỏ rằng $f(x)$ nhận giá trị nguyên khác 17 với mọi giá trị nguyên của x.

Bài 3 : (4 đ) Có bao nhiêu số $\overline{abc}$ (với $1 \leqslant a \leqslant 6$; $1 \leqslant b \leqslant 6$; $1 \leqslant c \leqslant 6$) thỏa mãn điều kiện : "Tích $a.b.c$ là số chẵn".

Bài 4 : (7 đ) Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Gọi E, F là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $ME = MF$. Chứng minh rằng ABC là tam giác cân đỉnh A trong mỗi trường hợp sau :

a) ME và MF lần lượt là phân giác trong của các tam giác AMB và AMC.

b) ME và MF lần lượt là trung tuyến của các tam giác AMB và AMC.

Lớp 11

Thời gian 180 phút (không kể chép đề)

Bài 1 : Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = a \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 1 - \cos a \end{cases} ; \text{ với } a \in R.$$

Bài 2 : Trên mặt phẳng cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Điểm M di động trên cạnh AD ; điểm N di động trên cạnh BC sao cho : $AM + BN = l$ (const) với $a < l < b$.

1) Gọi J là điểm trên đoạn MN thỏa : $JM = \frac{1}{3}NJ$. Chứng minh điểm J di động trên một đường thẳng cố định.

2) Sơn xanh mọi hình $ABNM$. Tính diện tích toàn phần được sơn màu xanh.

Bài 3 : 1) Có hay không dãy tăng : $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ thỏa : $a_i \in N$ với $i = \overline{1,6}$; $a_1 = 1$; $a_4 = a_3 + 1$; $a_6 = 150$ dãy a_1, a_2, a_3 là cấp số cộng ; dãy a_4, a_5, a_6 là cấp số nhân ?

2) Có hay không dãy tăng : $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6$ thỏa : $b_i \in N$ với $i = \overline{1,6}$; $b_1 = 2$; $b_4 = b_3 + 1$; $b_6 = 150$ dãy b_1, b_2, b_3 là cấp số nhân ; dãy b_4, b_5, b_6 là cấp số cộng ?

3) Trong (2) thay $b_1 = 2$ bởi $b_1 = 1$ và giữ nguyên các điều kiện khác. Hãy giải bài toán.

Bài 4 : Trong không gian cho tam giác $A_1A_2A_3$ vuông tại A_1 ; cạnh $A_1A_2 = \sqrt{3}$ và $\widehat{A_1A_2A_3} = 30^\circ$. Chứng minh rằng có thể tìm được phép chiếu vuông góc sao cho hình chiếu của tam giác $A_1A_2A_3$ là một đoạn thẳng có độ dài bằng $\sqrt{3}$ và trung điểm của đoạn thẳng đó lại là hình chiếu của một đỉnh của tam giác $A_1A_2A_3$.

HOÀNG CHÚNG

CẮT GHÉP HÌNH VUÔNG

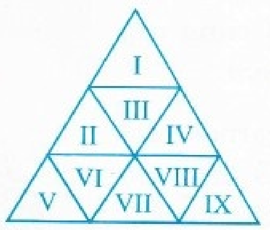
Cho một hình vuông. Hãy vẽ hai đường chia hình vuông đó thành 4 hình bằng nhau sao cho khi cắt hình vuông đó theo hai đường chia ta được 4 mảnh bằng nhau và khi ghép hai mảnh lại ta được một hình chữ thập.

PHẠM HÙNG

TT	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Σ
1	5	7	3	8	1	6	9	2	4	22
2	2	7	6	8	3	4	9	5	1	22
3	4	3	8	6	2	7	9	5	1	24
4	7	3	5	6	1	8	9	4	2	24
5	2	3	9	7	4	6	8	5	1	24
6	6	3	5	7	1	9	8	4	2	24
7	8	1	6	5	7	3	9	4	2	25
8	6	2	7	5	1	9	8	4	3	25
9	9	2	4	5	7	3	8	6	1	25
10	9	3	1	7	8	4	5	2	6	25
11	2	4	9	5	3	7	6	8	1	25
12	8	4	3	5	9	1	6	2	7	25
13	5	1	9	4	8	3	7	6	2	26
14	8	1	6	4	9	2	7	3	5	26
15	6	2	8	3	9	1	7	5	4	26
16	5	2	9	3	4	6	7	8	1	26
17	8	1	6	2	9	4	3	5	7	28
18	9	1	5	2	6	7	3	8	4	28

Giải đáp bài

ĐIỀN SỐ VÀO TAM GIÁC



Ta đánh số các ô trong hình tam giác bởi các chữ số La mã từ I đến IX như trong hình vẽ bên. Kí hiệu $\sum$ là tổng số các ô dọc theo một cạnh của tam giác, ta có 18 cách khác nhau điền số vào tam giác theo thứ tự các ô từ I đến IX như sau :

Ta thấy ở mỗi cách nêu trên, nếu ta đổi chỗ 2 số ở các cặp ô I và III ; V và VI ; VIII và IX với nhau thì ta sẽ được một cách mới. Nghĩa là từ một cách nêu trên ta có thể có được $2 \times 2 \times 2 = 8$ cách mới. Vậy số các cách điền số thỏa mãn yêu cầu của bài ra là $18 \times 8 = 144$ cách (*Hoàng Mạnh Cường*, Đồng Hới, Quảng Bình)

Nhận xét. Các bạn còn có thể điền số theo cách đổi chỗ 2 số ở các cặp ô đối xứng với nhau qua trục đối xứng của tam giác.

BÌNH PHƯƠNG

ISSN : 0866 - 8035.
Chỉ số 12884
Mã số : 8BT20M5

Sắp chữ tại Trung tâm Vi tính và
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 8/1995

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng

VIỆN CÔNG NGHỆ VI ĐIỆN TỬ (IMET)

TỔNG ĐẠI DIỆN KỸ THUẬT VÀ PHÂN PHỐI SẢN PHẨM
Wearnes TẠI VIỆT NAM

- **VĂN PHÒNG GIAO DỊCH TẠI HÀ NỘI :**

  39 Lý Thường Kiệt, Hoàn Kiếm Hà Nội
  Tel. : 84 4 250767 ; 84 4 267645
  Fax : 84 4 267645

- **VĂN PHÒNG GIAO DỊCH TẠI TP HỒ CHÍ MINH :**

  4 Đặng Tất Quận 1, TP Hồ Chí Minh
  Tel.: 84 8 439734 ; 84 8 437064
  Fax : 84 8 437064

☞ Máy tính Wearnes là sản phẩm của Wearnes Thakral (USA) - là một trong năm nhà cung cấp máy tính lớn nhất.

☞ Máy tính Wearnes đạt tiêu chuẩn ISO 9002 do Cơ quan Tiêu chuẩn chất lượng quốc tế cấp.

☞ Máy tính Wearnes được bảo hành 03 năm

☞ Máy tính Wearnes được Bộ Giáo dục và Đào tạo chọn là loại máy sẽ trang bị cho các Trường phổ thông trong năm 1995

Wearnes
COMPUTERS