BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

7 (217)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

- Sự chính xác trong giải Toán
- Hồi ức về giáo sư Tạ Quang Bửu
- ĐỊNH LÍ LAGRANGE VÀ CÁC ỨNG DỤNG
- ĐỘI TUYỂN HỌC SINH VIỆT NAM DỰ THI TOÁN QUỐC TẾ

Một cách giải bài toán hình học không gian

TIẾP NỐI VỀ PHƯƠNG TRÌNH KIỂU FERMA

trò chơi viết số

Ảnh : Giáo sư Hoàng Chúng cùng thầy trò trường THCS thị trấn Đầm Dơi, tỉnh Minh Hải

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trang

- *Dành cho các bạn Trung học Cơ sở*
  For Lower Secondary School Level Friend
  Vũ Hữu Bình – Sự chính xác trong giải toán 1
- *Nguyễn Cảnh Toàn* – Hồi ức về giáo sư Tạ Quang Bửu 2
- *Giải bài kì trước*
  Solution of Problems in Previous Issue
  Các bài của số 213. 3
- *Đề ra kì này*
  Problems in This Issue 10
- *Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học*
  For College and University Entrance Exam Preparers
  Ngô Thế Phiệt – Định lí Lagrange và các ứng dụng 12
- *Nguyễn Việt Hải* – Đội tuyển học sinh Việt Nam dự thi Toán Quốc tế tại Canađa 1995 14
- *Cao Quân* – Một cách giải bài toán Hình học không gian. 15
- *Nguyễn Văn Mậu* – Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên ĐHTH Hà Nội 1994. 15
- *Hoàng Đức Tân* – Tiếp nối phương trình kiểu Fermat. 16
- *Giải trí toán học*
  Fun with Mathematics
  Bình phương – Cắt và ghép hình Bìa 3
  Ngô Hân – Trò chơi viết số Bìa 3
  Hoàng Chúng – Một số kí hiệu toán học khác Bìa 3

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : THANH LONG

Dành cho các bạn Trung học Cơ sở

SỰ CHÍNH XÁC TRONG GIẢI TOÁN

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

1. Một sai lầm dễ mắc

Chúng ta đã quá quen thuộc khi viết 2 thành $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}$, viết 3 thành $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}$. Nhưng hãy cẩn thận : không phải lúc nào cũng viết được a thành $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}$. Chỉ có điều đó với $a \geq 0$, nhưng với $a < 0$ thì $a = -\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-a}$.

Trong chương trình Đại số lớp 9, đã có hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ nhưng nhiều học sinh lớp 9 vẫn mắc sai lầm khi giải bài toán sau :

Rút gọn biểu thức $M = \dfrac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$ (1).

Đa số các bạn biến đổi như dưới đây :

$$M = \frac{\sqrt{x+3}\,.\,\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x+3)(x-3)}}{2\sqrt{x-3}\,.\,\sqrt{x-3}+\sqrt{(x+3)(x-3)}} =$$

$$\frac{\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}(2\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})} = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \quad (2)$$

Cách giải trên hiển nhiên không đúng. Thật vậy với $x = -5$ chẳng hạn thì biểu thức M có nghĩa $\left(M = \dfrac{-5+3+2\,.\,4}{2(-5)-6+4} = \dfrac{6}{-12} = -\dfrac{1}{2}\right)$ nhưng $\sqrt{x+3}$ lại không có nghĩa.

Biểu thức rút gọn $M = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$ cũng không đúng với $x = -5$ khi đó $M = -\dfrac{1}{2}$ nhưng

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = \sqrt{\frac{-5+3}{-5-3}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\ (!)$$

Vì sao có sai lầm trên ? Ta biết rằng tập xác định của biểu thức M là : $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq -3 \end{array}\right.$

Lời giải trên chỉ đúng với $x > 3$. Còn phải xét trường hợp $x \leq -3$.

2. Lời giải đúng

Trường hợp $x > 3$: Giải như trên.

Trường hợp $x \leq -3$:

Ta có $3 - x > -3 - x \geq 0$, do đó :

$$M = \frac{-\sqrt{-x-3}\,.\,\sqrt{-x-3}+2\sqrt{-x-3}\,.\,\sqrt{3-x}}{-2\sqrt{3-x}\,.\,\sqrt{3-x}+\sqrt{-x-3}\,.\,\sqrt{3-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{-x-3}\,(-\sqrt{-x-3}+2\sqrt{3-x})}{-\sqrt{3-x}\,(2\sqrt{3-x}-\sqrt{-x-3})}$$

$$= -\frac{\sqrt{-x-3}}{\sqrt{3-x}} = -\sqrt{\frac{-x-3}{3-x}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \quad (3)$$

Cả hai kết quả (2) và (3) có thể viết chung được dưới dạng $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$.

3. Một lời giải khác

Nhân cả tử và mẫu của M với biểu thức liên hợp của mẫu :

$$M = \frac{(x+3+2\sqrt{x^2-9})\,[2(x-3)-\sqrt{x^2-9}]}{[2(x-3)+\sqrt{x^2-9}][2(x-3)-\sqrt{x^2-9}]}$$

$$= \frac{2(x^2-9)-(x+3)\sqrt{x^2-9}+4(x-3)\sqrt{x^2-9}-2(x^2-9)}{4(x-3)^2-(x^2\ 9)}$$

$$= \frac{(4x-12-x-3)\sqrt{x^2-9}}{(x-3)(4x-12-x-3)} = \frac{3(x-5)\sqrt{x^2-9}}{3(x-5)(x-3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$$

Lời giải này khá gọn, tuy nhiên phải nêu điều kiện rút gọn là $x \neq 5$.

Số 5 ở đâu ra ? Đó chính là giá trị của x làm cho biểu thức liên hợp đem nhân vào bằng 0. Như thế, sau khi đặt điều kiện $x \neq 5$, ta phải xét trường hợp $x = 5$. Với $x = 5$ thì $M = 2$. Do biểu thức kết quả $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ cũng có giá trị bằng 2 khi $x = 5$ nên đáp số $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ là đáp số chung cho cả hai trường hợp $x \neq 5$ và $x = 5$.

4. Đôi lời kết luận

Một bài toán đơn giản, nhưng trình bày lời giải cho chặt chẽ, chính xác lại không đơn giản chút nào !

Sự chính xác trong giải toán, đó là một trong những vẻ đẹp muôn thuở của toán học.

Để luyện tập, các bạn hãy rút gọn các biểu thức sau :

$$A = \frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}};$$

$$B = \frac{(x^2+x-2)+(x+1)\sqrt{x^2-4}}{(x^2-x-2)+(x-1)\sqrt{x^2-4}}$$

Hồi ức về Giáo sư TẠ QUANG BỬU

Lời tòa soạn. *Giáo sư Tạ Quang Bửu sinh ngày 23–7–1910 ở huyện Hưng Nguyên, tỉnh Nghệ An và đã vĩnh biệt chúng ta cách đây chín năm, ngày 21–8–1986. Ông là một nhà trí thức yêu nước, một học giả uyên thâm được giới khoa học, cả tự nhiên và xã hội kính trọng, đã từng được Nhà Nước giao cho những trọng trách trong lĩnh vực quốc phòng, khoa học và giáo dục. Ông là người say mê đọc sách và tiếp cận rất sớm với những thành tựu của khoa học, của toán học hiện đại. Chẳng hạn, khi "lí thuyết tai biến", một lí thuyết toán học mới ra đời (mà người đặt nền móng đầu tiên là nhà toán học Pháp René Thom) thì giáo sư Tạ Quang Bửu đã sớm viết bài giới thiệu trên báo* NHÂN DÂN. *Ông có công lớn trong việc xây dựng cho đất nước đội ngũ các nhà khoa học nói chung, các nhà toán học nói riêng. Ông cũng là một trong những người sáng lập ra Hội Toán học Việt Nam, tạp chí "Toán h.. và tuổi trẻ". Kỉ niệm 85 năm ngày sinh của ông, chúng tôi xin đăng dưới đây hai mẩu hồi kí nhỏ của giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn để độc giả thấy rõ tác dụng nói trên của giáo sư Tạ Quang Bửu.*

Mẩu chuyện thứ nhất

Đó là vào khoảng cuối năm 1962, tôi đã hoàn thành một công trình nghiên cứu toán học mà tự tôi cũng đánh giá được là có tầm vóc lớn hơn nhiều so với luận án phó tiến sĩ của tôi đã bảo vệ năm 1958. Nhưng tôi chưa dám nghĩ đó là một luận án tiến sĩ. Một hôm, lên họp ở Ủy ban Khoa học nhà nước, tình cờ tôi ngồi cạnh giáo sư Nguyễn Khánh Toàn, lúc đó là phó chủ nhiệm Ủy ban, ông hỏi thăm tôi về tình hình nghiên cứu toán học của tôi. Khi biết tôi có công trình đó, ông hỏi :

– Thế anh có định thi tiến sĩ không ?

– Dạ, chưa dám vì sợ ... u chuẩn cao, chưa với tới.

– Thế sao không gửi công trình sang Liên Xô, hỏi thẳng người ta xem như vậy đã đạt tiêu chuẩn chưa ?

– Dạ, nhỡ người ta trả lời : "còn xa" thì xấu hổ lắm.

– Anh sợ xấu hổ thì để Ủy ban hỏi cho.

Giờ giải lao, ông trao đổi gì đó với giáo sư Tạ Quang Bửu, lúc đó cũng là phó chủ nhiệm Ủy ban. Tan họp giáo sư Tạ Quang Bửu giữ tôi lại. Ông nói : "Tôi và anh Toàn vừa bàn với nhau cách giúp đỡ anh. Sắp tới có đoàn của Viện hàn lâm khoa học Liên xô sang đàm phán kí kết hợp tác khoa học với ta. Chúng tôi sẽ đặt vấn đề, từ nay, Liên xô giúp Việt Nam đào tạo cả tiến sĩ nữa, sớm tạo ra cho Việt Nam các nhà khoa học đầu đàn. Chúng tôi sẽ nhờ họ đánh giá công trình của anh xem có triển vọng gì không. Cũng chưa nên đặt vấn đề để anh thi tiến sĩ. Vài tháng nữa, chúng tôi sẽ để anh sang Liên Xô ba tháng, theo kế hoạch trao đổi các nhà khoa học giữa hai nước. Lúc đó, chắc người ta đã đủ thì giờ để có ý kiến về công trình của anh. Anh cố thăm dò xem ý kiến người ta thế nào rồi viết thư về để chúng tôi liệu. Tốt nhất là bảo vệ xong trong ba tháng đi công tác. Tốt vừa là phải gia công thêm. Trong trường hợp này, chúng tôi sẽ ủng hộ để anh kéo dài thời gian ở Liên Xô cho đến khi bảo vệ xong".

Đầu tháng tư 1963, tôi lên đường đi Matxcơva. Giáo sư tiến sĩ Glagôlép ra ga đón. Từ ga về khách sạn, ông cho biết ông được Viện hàn lâm giao cho đọc và sơ bộ đánh giá công trình của tôi. Nói xong, ông đưa cho tôi bản nhận xét công trình mà trước đó một tuần, ông đã gửi để báo cáo với Viện hàn lâm. Tôi đọc lướt nhanh bản nhận xét và vui mừng thấy rằng công trình của tôi đã được đánh giá xứng đáng là một luận án tiến sĩ. Về đến khách sạn, tôi gửi ngay bản nhận xét đó cho giáo sư Tạ Quang Bửu. Ít lâu sau, sứ quán ta cho tôi biết "ở nhà" vừa điện sang đồng ý cho tôi bảo vệ luận án tiến sĩ và đã bảo vệ thắng lợi ngày 28–6–1963. Giáo sư Glagôlép là người đứng đầu phản biện tập thể. Với tư cách đó, ông ghi trong văn bản phản biện một câu : "... Nguyễn Cảnh Toàn là một nhà hình học xạ ảnh tài năng...". Bản nhận xét này, giáo sư Tạ Quang Bửu cho dịch đăng ở Tập san Toán Lí (số ra tháng chín 1963).

Mới đó mà sđã 32 năm trôi qua. Cả hai giáo sư Nguyễn Khánh Toà.. và Tạ Quang Bửu đều đã vĩnh biệt chúng ta, để lại những tấm gương trong sáng của những nhà khoa học hết sức chí công vô tư, chăm lo cho sự trưởng thành của đội ngũ hậu sinh.

Mẩu chuyện thứ hai

Đó là vào khoảng năm 1968, khi tôi là hiệu trưởng trường Đại học sư phạm Hà Nội 2 cũ (về Khoa học tự nhiên). Hồi đó, nhu cầu giáo viên buộc Đại học sư phạm phải lớn lên rất nhanh, bổ sung đội ngũ cán bộ giảng dạy hàng loạt. Nếu chỉ trông chờ vào việc gửi nghiên cứu sinh ra nước ngoài thì quá chậm vì số người được đi là một tỉ lệ quá nhỏ. Tôi cân nhắc và quyết định phải sớm đi đến đào tạo nghiên cứu sinh trong nước. Khó khăn còn nhiều nhưng tôi nghĩ rằng các lĩnh vực khoa học phát triển không đồng đều, có thể lựa chọn lĩnh vực có điều kiện nhất để làm trước, nổ phát súng đầu tiên. Tôi chọn sinh – kĩ thuật nông nghiệp vì nước ta là nước nông nghiệp, lại đương chiến tranh, các cơ quan khoa học đều sơ tán về nông thôn. Ý kiến của tôi được Thường vụ Đảng ủy tán thành nhưng trong trường thì sự nhất trí chưa cao, nhiều người vẫn lo không tìm được phản biện, không lập được hội đồng chấm, lo trường đứng ra làm khi Nhà nước chưa có chủ trương, liệu rồi sau Nhà nước có công nhận không ? Bộ giáo dục là bộ chủ quản lại muốn rằng Đại học sư phạm mà làm luận án đầu tiên thì nên là luận án về khoa học giáo dục để thể hiện đặc thù sư phạm vì bộ vẫn lo trường "nặng về khoa học cơ bản, nhẹ về khoa học giáo dục". Trong trường lại có những người, tự thấy mình khó có khả năng làm luận án, nên muốn để "hầm bà làng". Tình hình quả là không suôn sẻ. Tôi vẫn kiên trì và xin gặp giáo sư Tạ Quang Bửu, lúc đó là Bộ trưởng Đại học và trung học chuyên nghiệp. Giáo sư nói : "Tôi ủng hộ anh nhưng chỉ mới ủng hộ miệng thôi, chưa thể kí văn bản cho phép trường anh làm thử vì chúng tôi chưa có dịp sang bàn với bên Bộ giáo dục là bộ chủ quản cho thật nhất trí. Nhưng anh cứ mạnh dạn làm đi, văn bản sẽ đến sau". Tôi vững tâm hơn, chăm lo chỉ đạo việc chuẩn bị cho thật tốt vì cũng ý thức được rằng "phát súng đầu tiên mà nổ không giòn giã" thì sẽ tai hại vô cùng, nhất là khi vẫn còn những ý kiến không nhất trí. Ngày 23–4–1970, ba luận án phó tiến sĩ về sinh – nông, làm ra ở Đại học sư phạm Hà – nội 2 cũ, đã được bảo vệ thành công lần đầu tiên ở trong nước, ngay tại trường. Các khoa khác ở trong trường, các trường bạn cũng lần lượt làm thử, tạo nên một thực tiễn để Nhà nước cân nhắc, chính thức hóa việc đào tạo nghiên cứu sinh trong nước vào năm 1976. Đến lúc đó, tất cả các luận án đã bảo vệ trong thời kì làm thử đều được xem xét công nhận chính thức và các tác giả đều được cấp bằng phó tiến sĩ. Không có sự ủng hộ của giáo sư Tạ Quang Bửu thì chắc không có ngày 23–4–1970.

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Bài T1/213. *Tìm các chữ số khác không a, b, c thỏa mãn* $\overline{abbc} = \overline{ab} \times \overline{ac} \times 7$

Lời giải : (Của các bạn *Trần Thị Ngọc Hải* 9T Quảng Ngãi, *Lương Tuấn Anh* 9T chuyên Nguyễn Du, *Mai Thịnh Hiệp* 9B Thanh Hóa, *Mai Vinh Quang* 9B Thanh Hóa, *Phạm Thu Hương* 8A Hồng Bàng, Hải Phòng).

Ta có $\overline{abbc} = \overline{ab} . \overline{ac} . 7 \Leftrightarrow$

$$100\overline{ab} + \overline{bc} = 7(\overline{ab})(\overline{ac})$$

$$\Leftrightarrow \overline{ab}(7\overline{ac} - 100) = \overline{bc}$$

$$\Leftrightarrow 7\overline{ac} - 100 = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}}$$

Vì $0 < \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} < 10 \Leftrightarrow 0 < 7\overline{ac} - 100 < 10$

$$\Rightarrow 14 < \frac{100}{7} < \overline{ac} < \frac{110}{7} < 16$$

Vậy $\overline{ac} = 15$. Thay vào ta được

$\overline{1bb5} = \overline{1b} \times 15 \times 7 \Leftrightarrow 1005 + 110b = 1050 + 105b \Leftrightarrow 5b + 45 \Leftrightarrow b = 9$

Thử lại 1995 = 19.15.7

Vậy $a = 1$, $b = 9$, $c = 5$.

Nhận xét : Bài này được rất đông các bạn tham gia giải (gần 250 bài) với nhiều cách khác nhau. Cách giải nêu ở trên là ngắn gọn nhất.

Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt.

Đinh Hữu Toàn, Ninh Bình ; *Đường Ngọc Sơn* 6CT Từ Liêm, Hà Nội ; *Ngô Kiên Cường* 8 Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Trần Trung Dũng*, 8A, Chuyên Phong Châu, Vĩnh Phú ; *Nguyễn Văn Tiện* 9H Thanh Hóa ; *Trần Hữu Nhơn* 9T Vĩnh Long ; *Đào Văn Hà* 9A Nghệ An, *Trần Quang Bình* 9A Cần đuốc Long An ; *Vũ Lê Phương* 7 Toán, Thái Bình ; *Nguyễn Minh Hiếu*, 7 Bắc Ninh, Hà Bắc ; *Lê Đức* 9A Hoàn Kiếm Hà Nội v.v..

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/213. *Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện : a + b + c = 2s. Chứng minh bất đẳng thức :*

$$\frac{ab}{s-c} + \frac{bc}{s-a} + \frac{ac}{s-b} \geqslant 4s \qquad (1)$$

Lời giải. Trước hết, rất hoan nghênh các bạn đều phát hiện sơ suất của đề ra không nêu rõ a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và đã tự bổ sung điều đó.

Đặt $x = a + b - c$; $y = b + c - a$; $z = c + a - b$, ta có $x, y, z > 0$ và $x + y + z = a + b + c = 2S$. Suy ra $(x + y)(x + z) = 4ab$; $(y + z)(y + x) = 4bc$; $(z + x)(z + y) = 4ac$. Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4ab}{2(S-c)} + \frac{4bc}{2(S-a)} + \frac{4ac}{2(S-b)} \geqslant 8s$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x+z)}{x} + \frac{(y+z)(y+x)}{y} + \frac{(z+x)(z+y)}{z} \geqslant 4(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geqslant x + y + z \ (2).$$

Không làm mất tính tổng quát, ta coi như $x \geqslant y \geqslant z \ (> 0)$. Thế thì $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{z}$ và $yz \leqslant zx \leqslant xy$. Áp dụng bất đẳng thức Trê-bư-sép, ta có :

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geqslant \frac{yz}{y} + \frac{zx}{z} + \frac{xy}{x} = x + y + z.$$

Vậy (2) đúng, suy ra (1) đúng.

Nhận xét. Có 85 bạn giải bài này và đều giải đúng với nhiều cách biến đổi đồng nhất khác nhau. Ở đây lời giải vận dụng bất đẳng thức Trê-bư-sép được nêu ra để các bạn làm quen vì nhiều khi rất tiện. Lời giải tốt gồm có : *Hoàng Mạnh Cường* (C2 Đồng Mĩ – Đồng Hới – Quảng Bình), *Mai Đức Thanh* (CT–BMT–Đăk Lăk), *Vũ Đức Phú* (9 toán – Nguyễn Du – Gò Vấp, TP Hồ Chí Minh), *Trương Cao Dũng* (9TNK Bỉm Sơn – Thanh Hóa).

ĐẶNG VIÊN

Bài T3/213 : *Cho* ΔABC *có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng*

$$\frac{52}{27} \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

Lời giải. Theo *Lê Phú Thành*, 8T, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi và *Phạm Nguyễn Thu Trang*, 9CT, Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội.

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác mà $a + b + c = 2$ nên suy ra $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$.

Ta có : $(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0 \qquad (1)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Côsi đối với 3 số dương $(1 - a)$, $(1 - b)$, $(1 - c)$ ta có

$(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant \left(\dfrac{3-(a+b+c)}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$0 < (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 + ab + bc + ca - (a+b+c) - abc \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{27} \Leftrightarrow 1 < ab + bc + ca - abc \leqslant \frac{28}{27}$$

$$\Leftrightarrow 2 < (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2+2abc) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{56}{27} \Leftrightarrow \frac{52}{27} \leqslant a^2+b^2+c^2+2abc < 2 \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{2}{3}$ nghĩa là tam giác ABC là tam giác đều.

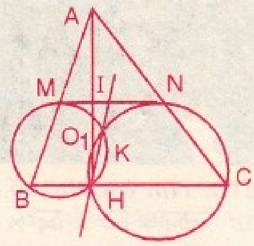
Nhận xét. Có rất nhiều bạn giải đúng bài này. Sau đây là các bạn có lời giải tốt : *Phạm Trần Quân, Trịnh Bảo Trung*, 8A ; *Lê Thành Nam*, 9A, Bế Văn Đàn ; *Thái Duy Hưng* 8CT, *Võ Quỳnh Anh*, 9CT, Nghĩa Tân, Từ Liêm ; *Ngô Văn Sáng*, 9A, Chu Văn An, Ba Đình, Hà Nội ; *Nguyễn Ngọc Đông*, 9NK Thuận Thành, Hà Bắc ; *Vũ Ngọc Linh, Lương Việt Cường, Bùi Thế Trung, Nguyễn Thanh Tùng*, $7A_1$, Hồng Bàng, Hải Phòng ; *Phạm Thành Công* 7I, NK Nam Thanh ; *Lê Thị Hồng Minh, Dương Thị Vân Thanh* 9T, PTNK, Hải Hưng ; *Vũ Xuân Dũng, Bùi Minh Đức*, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà ; *Cao Thị Loan*, 8B, NK Nga Sơn ; *Lê Hoàng Dương*, 8T, NK Bỉm Sơn ; *Mai Vinh Quang*, 9B, NK ; *Lê Đình Duy, Hoàng Văn Hùng, Nguyễn Thanh Hoài*, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Nguyễn Thịnh, Nguyễn Thai Thọ, Hoàng Hải Triều*, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Nguyễn Việt Linh*, 8^1 ; *Hoàng Mạnh Cường*, 9T Đông Mĩ, Đồng Hới, Quảng Bình ; *Nguyễn Đức Linh*, 8, NK Vĩnh Linh, Quảng Trị ; *Phan Huy Vũ*, 8CT, Ngô Quyền ; *Vũ Đức Phú*, 9T, Nguyễn Du, Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh.

TỐ NGUYÊN

Bài T4/213. *Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi M, N là trung điểm của AB và AC. Hãy chứng minh ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBM, HCN và AMN giao nhau tại điểm K và đường HK kéo dài cắt MN tại trung điểm của nó.*

Lời giải. Gọi K là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp ΔABH, ΔACH. Từ các tứ giác nội tiếp $MBHK$, $NCHK$, ta có :

$$\widehat{MKH} = 180^\circ - \widehat{B}$$
$$\widehat{NKH} = 180^\circ - \widehat{C}$$



Suy ra $\widehat{MKN} = 360^\circ - (\widehat{MKH} + \widehat{NKH}) = 360^\circ - (360^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}) = \widehat{B} + \widehat{C}$. Vậy tứ giác $AMKN$ nội tiếp vì có $\widehat{A} + \widehat{MKN} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$, suy ra đpcm thứ nhất. Do HM là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên $MH = MB$ và ΔMBH cân. Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMBH, ta có O_1M là trung trực của BH, hay $O_1M \perp BH$. Do MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN // BH$, do đó $MN \perp O_1M$, hay MN tiếp xúc với (O_1). Tương tự MN cũng tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔNCH. Gọi I là giao điểm của KH với MN, ta có $IM^2 = IK.IH = IN$, hay $IM = IN$, và I là trung điểm của MN, đpcm.

Nhận xét. Có 175 bài giải và đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Võ Quỳnh Anh* (9CT Từ Liêm – Hà Nội), *Hoàng Mạnh Cường* (9I CI Đông Mĩ – Đồng Hới – Quảng Bình), *Nguyễn Đức Linh* (8 Năng khiếu Vĩnh Linh – Quảng trị), *Nguyễn Đức Thành* (9_2 PTCS chuyên Colette – Q3 – Tp HCM), *Trần Hữu Nhơn* (9T Nguyễn Bỉnh Khiêm – Vĩnh Long).

ĐẶNG VIÊN

Bài T5/213 : *Dựng ra phía ngoài tam giác ABC hai tam giác cân đồng dạng ABE, ACF (AB, AC là hai đáy của các tam giác cân). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABE, ACF ; D là trung điểm của BC. Chứng minh tam giác DHF đồng dạng với tam giác DKE.*

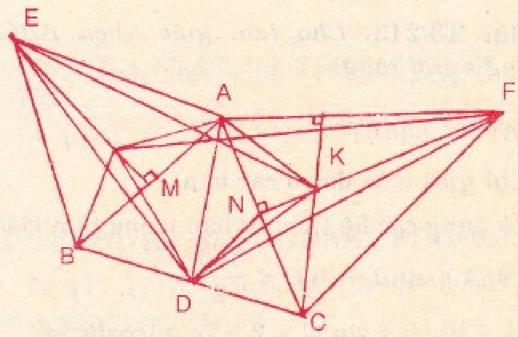
Lời giải : Từ $\Delta ABE \backsim \Delta ACF$ suy ra $\widehat{HBA} = \widehat{HAB} = \widehat{KAC} = \widehat{ACK}$.

Mà $\widehat{ACK} + \widehat{CAF} = 90^\circ$ nên $\widehat{KAC} + \widehat{CAF} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{HAF} = 90^\circ + \widehat{BAC} = \widehat{DNF}$ (Dễ thấy $\widehat{BAC} = \widehat{DNC}$)

Mặt khác $\widehat{CAK} = \widehat{AFN} = \widehat{CFK}$ nên $\Delta AHM \backsim \Delta FAN \backsim \Delta AKN$.

Suy ra $\dfrac{AF}{AH} = \dfrac{FN}{AM} = \dfrac{FN}{ND}$ (Do ND là đường trung bình nên $ND = AM$)



Từ đó $\Delta AHF \backsim \Delta NDF \Rightarrow \widehat{AFH} = \widehat{NFD}$

Suy tiếp ra $\widehat{AFN} = \widehat{HFD}$ và $\frac{AF}{FN} = \frac{HF}{DF} \Rightarrow$

$\Delta AFN \backsim \Delta HFD$ (1)

Tương tự $\Delta AEM \backsim \Delta KED$ (2)

Mà $\Delta AEM \backsim \Delta FAN$ nên từ (1) và (2) suy ra $\Delta EDK \backsim \Delta FHD$

Nhận xét : 1. Lời giải trên của bạn Hồ Từ Vũ, 8T, Lê Khiết, Quảng Ngãi.

2. Các bạn khác có lời giải tốt :

Nguyễn Ngọc Đông, 9NK, Thuận Thành, Hà Bắc ; *Trần Bằng*, 9H, Trưng Vương, *Đỗ Đức Hạnh*, 8M Mari Quyri, *Ngô Văn Sáng*, 9A, Chu Văn An, *Phạm Nguyễn Thu Trang*, *Võ Quỳnh Anh*, 9CT, Nghĩa Tân, *Nguyễn Sĩ Phong*, 9A, PTCNN, Hà Nội ; *Đỗ Trung Kiên*, *Mai Hải An*, *Bùi Quang Hải*, *Nguyễn Thanh Nga*, *Đặng Việt Cường* 9T, *Đỗ Quốc Bảo*, 8T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, *Ngô Mạnh Hà*, 9T, Chu Văn An, Hải Phòng, *Phùng Thanh Tùng*, 9CT TX Thái Bình, *Viên Ngọc Quang*, *Nguyễn Thanh Hoài* 9T, Lam Sơn, *Nguyễn Minh Thuấn*, 9T, NK Hoằng Hóa, Thanh Hóa, *Nguyễn Thị Thảo*, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An, *Mai Tùng Long*, 9T, NK Hà Tĩnh, *Trương Vĩnh Lân*, 9CT, Xuân Ninh, Quảng Ninh, Quảng Bình, *Nguyễn Hứa Khánh Minh* 8^1, Nguyễn Tri Phương, Huế, Thừa Thiên – Huế, *Lê Phú Thành*, 8T, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Nguyễn Long Khánh*, 8A, Chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên ; *Mai Đức Thanh*, 9CT Buôn Mê Thuột, Đắc Lắc ; *Đào Duy Nam*, 8T Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai ; *Phan Huy Vũ*, 8T, Ngô Quyền, *Vũ Đức Phú*, 9T, Nguyễn Du, Gò Vấp, TP Hồ Chí Minh.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/213 : *Ba dãy số $\{x_n\}_{n=o}^{\infty}, \{y_n\}_{n=o}^{\infty}, \{z_n\}_{n=o}^{\infty}$ thỏa mãn x_o, y_o, z_o đều dương và :*

$$x_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n} ; y_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n} ; z_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}$$

với mọi $n \geqslant 0$

Chứng minh rằng, tồn tại các hằng số dương s và t sao cho $s\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant t\sqrt{n}$ với mọi $n \geqslant 1$.

Lời giải (của *Trịnh Hữu Trung*, 10T Lam Sơn – Thanh Hóa) : với mỗi $n \in \mathbf{N}$ đặt $t_n = \max\{x_n, y_n, z_n\}$ và $v_n = \min\{x_n, y_n, z_n\}$.

Từ các giả thiết của bài ra, dễ thấy : $t_{n+1} \leqslant t_n + \frac{1}{v_n}\ \forall n \in \mathbf{N}$ (1) và $v_{n+1} \geqslant v_n + \frac{1}{t_n}\ \forall n \in \mathbf{N}$ (2). Suy ra $v_n \geqslant v_o\ \forall n \in \mathbf{N}$ và $\frac{t_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{t_n}{v_n}\ \forall n \in \mathbf{N}$. Do đó :

$\frac{t_n}{v_n} \leqslant \frac{t_o}{v_o}\ \forall n \in \mathbf{N}$. Vì vậy, từ (1) và (2) ta có :

$$t_n^2 \leqslant t_{n-1}^2 + 2 \cdot \frac{t_{n-1}}{v_{n-1}} + \frac{1}{v_{n-1}^2} \leqslant t_{n-1}^2 + 2 \cdot \frac{t_o}{v_o} + \frac{1}{v_o^2}\ \forall n \geqslant 1$$

$$\Rightarrow t_n^2 \leqslant t_o^2 + n\left(2 \cdot \frac{t_o}{v_o} + \frac{1}{v_o^2}\right)\ \forall n \geqslant 1 \Rightarrow t_n^2 \leqslant n\left(t_o + \frac{1}{v_o}\right)^2\ \forall n \geqslant 1$$

$$\Rightarrow t_n \leqslant \left(t_o + \frac{1}{v_o}\right)\sqrt{n}\ \forall n \geqslant 1 \text{ (3)}.$$

$$v_n^2 \geqslant v_{n-1}^2 + 2 \cdot \frac{v_{n-1}}{t_{n-1}} + \frac{1}{t_{n-1}^2} > v_{n-1}^2 + 2 \cdot \frac{v_o}{t_o}\ \forall n \geqslant 1$$

$$\Rightarrow v_n^2 > v_o^2 + 2n \cdot \frac{v_o}{t_o} > 2n \cdot \frac{v_o}{t_o}\ \forall n \geqslant 1$$

$$\Rightarrow v_n^2 > v_o^2 + 2n \cdot \frac{v_o}{t_o} > 2n \cdot \frac{v_o}{t_o}\ \forall n \geqslant 1 \Rightarrow v_n > \sqrt{\frac{2v_o}{t_o}} \cdot \sqrt{n}\ \forall n \geqslant 1 \text{(4)}.$$

Do $v_n \leqslant x_n \leqslant t_n\ \forall n \geqslant 1$ nên từ (3) và (4) ta được : khi chọn $s = \sqrt{\frac{2v_o}{t_o}}$ và $t = t_o + \frac{1}{v_o}$ thì $s\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant t\sqrt{n}\ \forall n \geqslant 1$.

Nhận xét : Ngoài bạn Trung, các bạn sau đây có lời giải tốt : *Phạm Đình Trường* (11CT Trần Phú – Hải Phòng) ; *Trịnh Thế Huynh* ($11A_1$ Lê Hồng Phong – Nam Hà) ; *Phạm Minh Tuấn* và *Sao Đỏ* (11T, 10T Lam Sơn – Thanh Hóa).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/213. *Tìm tất cả các hàm $f : R \to R$ tăng thực sự và thỏa mãn*

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$$

với mọi $x, y \in R$

Lời giải *Cách 1* (của bạn *Nguyễn Lê Lực* THCS, Đầm Dơi, Minh Hải)

Cho $y = 0$ ta được

$f(f(x)) = f(x) + 1 \to (1)$

$f(x) = f(f(x)) - 1 \to$

$f(f(x)) = f[f(f(x)) - 1] = f(f(x) - 1) + 1$ (2)

(theo giả thiết với $y = -1$ và x là $f(x)$)

Từ (1) và (2) suy ra

$f(x) = f(f(x) - 1(3)$

Vì f là tăng thực sự do đó nó đơn ánh vậy từ (3) suy ra $x = f(x) - 1$ hay $f(x) = x + 1$.

Thử lại ta thấy hàm $f(x) = x + 1$ thỏa mãn

Cách 2 (Của bạn *Nguyễn Quang Ngọc* 11 Toán Quảng Trị và *Trịnh Hữu Trung* Lam Sơn, Thanh Hóa)

Cho $y = 0$ ta được

$$f(f(x) = f(x) + 1 \qquad (1)$$

Cho $x = 0$ ta được

$f(f(o) + y) = f(y) + 1$

$$\text{hay } f(f(0) + x) = f(x) + 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) và giả thiết tăng thực sự của f ta suy ra

$f(x) = x + f(0)$. Thay vào ta có

$f(f(x) + y) = f(x) + y + f(0) = x + y + 2f(0)$

$f(x + y) + 1 = x + y + f(0) + 1$

Theo điều kiện bài toán suy ra

$f(0) = 1$. Vậy $f(x) = x + 1$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Nhận xét : 1. Do sơ suất nên trong đề bài phần tiếng Việt in sai thành $f(f(x) + y) = f(x + 1) + 1$. Tuy vậy hầu hết các bạn đều giải bài toán theo phần tiếng Anh (in đúng). Một số bạn (như bạn *Lê Minh Hiếu* (Lam Sơn, Thanh Hóa), *Trần Tuấn Bảo* (TPHCM) *Tạ Thị Bích Hạnh* (Nguyễn Huệ) đã chỉ ra rằng nếu theo đề tiếng Việt (in sai) thì sẽ không tồn tại hàm f như vậy.

2. Nhiều bạn giải tốt bài này như *Vũ Ngọc Đáng* (Nam Hà) *Lê Minh Trường* (Quốc học Huế) *Trần Công Cường* (Thái Bình) *Nguyễn Vũ Hưng* (Chuyên NN), *Phan Anh Huy* (Đà Nẵng).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/213. *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng*

$$(\sin A)^{\sin A} \cdot (\sin B)^{\sin B} \cdot (\sin C)^{\sin C} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Lời giải (của đa số các bạn)

Sử dụng các hệ thức cơ bản trong tam giác

$0 < \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$,

Ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C \geqslant \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C.$$

Từ giả thiết tam giác ABC là tam giác nhọn, ta nhận được

$$2 < \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Xét hàm số

$f(x) = x\ln x$

Ta thấy $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0\ \forall n > 0$ nên :

$$\frac{f(\sin A) + f(\sin B) + f(\sin C)}{3} \geqslant f\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)$$

Từ đó suy ra :

$$(\sin A)^{\sin A} \cdot (\sin B)^{\sin B} \cdot (\sin C)^{\sin C} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^{\sin A + \sin B + \sin C} >$$

$$> \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin A + \sin B + \sin C} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt *Ngô Đức Thành, Phan Việt Thanh, Lương Tuấn Anh, Trần Hải Sơn, Nguyễn Hoàng Anh, Nguyễn Quang Nguyên* (ĐHTH Hà Nội) ; *Nguyễn Vũ Hưng* (ĐHSPNN, Hà Nội), *Trần Tiến Dũng* (Amsterdam, Hà Nội), *Bùi Xuân Thịnh, Phạm Quang Hưng, Nguyễn Quang Hải, Đinh Đức Thanh, Nguyễn Hồng Minh* (Việt Trì, Vĩnh Phú), *Nguyễn Hữu Nghị, Võ Hồng Sơn, Lý Hoàng Nguyễn Xuân Thắng* (Quảng Trị), *Lê Minh Trường, Nguyễn Thị Hải Yến, Đoàn Xuân Vinh* (Huế). *Dương Hải Thuận, Phan Duy Hùng, Cao Ngọc Tuấn* (Quảng Bình), *Dương Văn Yến, Nguyễn Khánh Quỳnh, Lê Văn An, Nguyễn Xuân Sơn, Phan Đức Linh, Hồ Sỹ Hiền, Nguyễn Hồng Chung* (Nghệ An), *Ngô Quốc Chung, Nguyễn Hồ Thanh, Phan Quốc Khánh – Nguyễn Hà Thanh, Nguyễn Danh Ngọc* (ĐHSP Vinh), *Vũ Minh Sơn, Như Quý Thơ, Trịnh Hữu Trung,* *Nguyễn Ngọc Hưng, Lê Minh Hiếu, Mai Đức Khoa, Phan Lê Minh, Nguyễn Minh Thuấn, Lê Viết Hải, Đinh Trường Sơn, Mai Văn Minh, Sao Đỏ, Nguyễn Khuyến Lân, Phạm Minh Tuân, Đinh Thị Nhung* (Thanh Hóa). *Phan Anh Huy, Nguyễn Tiến Dũng, Nguyễn Hồng Nhân, Lê Quang Trung, Nguyễn Nhật Nam, Từ Minh Hải, Nguyễn Huỳnh Hải* (Quảng Nam – Đà Nẵng), *Nguyễn Hoàng Công* (Quảng Ngãi), *Nguyễn Nhật Nam* (Bà Rịa – Vũng Tàu), *Từ Minh Hải* (Đaklak), *Nguyễn Phong, Nguyễn Duy Hùng, Nguyễn Xuân Hào, Trần Hoài Nam* (Nam Hà), *Ngô Văn Hồng Điệp, Trần Văn Phước* (Vĩnh Long), *Nguyễn Đình Inh, Hoàng Thanh Tùng* (Thái Bình), *Nguyễn Lê Lục, Huỳnh Hồ* (Minh Hải), *Lê Quang Minh* (Thái Bình), *Nguyễn Long Quỳnh* (Lạng Sơn), *Phạm Đình Trường* (Hải Phòng), *Võ Hoàng Trung* (Trà Vinh), *Lê Ngọc Tú* (Hà Tây), *Vũ Đức Sơn* (Ninh Bình), *Nguyễn Đình Toàn* (Hà Bắc).

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/213. *Cho tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo vuông góc AC và BD. Gọi $O_1, O_2\ O_3\ O_4$ lần lượt là tâm các hình vuông dựng trên các cạnh AB, BC, CD, DA ở phía ngoài tứ giác. Chứng minh rằng diện tích tứ giác ABCD không vượt quá $\frac{1}{2}$ diện tích tứ giác $O_1O_2O_3O_4$.*

Lời giải. (Dựa theo Phạm Đình Trường, 11CT PTTHNK Trần Phú, Hải Phòng). Ta xét bài toán tổng quát hơn đối với tứ giác lồi nói chung, không nhất thiết phải có hai đường chéo vuông góc với nhau.

– Trước hết, nhận thấy rằng giữa diện tích tứ giác $ABCD$ và diện tích bát giác $AO_1BO_2CO_3DO_4A$ có mối liên hệ sau đây :

$$s(O_1O_2O_3O_4) = s(AO_1BO_2CO_3DO_4A) \pm s(O_4AO_1) \pm s(O_1BO_2) \pm s(O_2CO_3) \pm s(O_3DO_4)\ ;$$

dấu + hay – được lấy tùy theo A, B, C, D nằm trong hay nằm ngoài tứ giác $O_1O_2O_3O_4$.

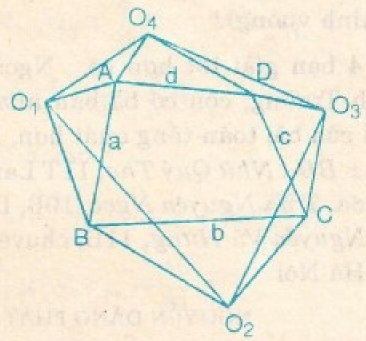
– Tuy nhiên, nếu ta sử dụng khái niệm diện tích đại số của đa giác có hướng (chẳng hạn $s(\overline{MNP}) = \pm\ s(MNP)$ là diện tích đại số của tam giác có hướng MNP, lấy dấu + hay – tùy theo ΔMNP có hướng dương hay âm) thì hệ thức sau đây luôn luôn đúng :

$$s(O_1O_2O_3O_4) = s(AO_1BO_2CO_3DO_4A) - s(\overline{O_1BO_2}) - s(\overline{O_2CO_3}) - s(\overline{O_3DO_4}) - s(\overline{O_4AO_1})$$

nếu tứ giác lồi $ABCD$ có hướng dương.

– Đặt $AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ AD = d$, thế thì $O_1A = O_1B = \frac{a}{\sqrt{2}},\ O_2B = O_2C = \frac{b}{\sqrt{2}}$, $O_3C = O_3D = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $O_4D = O_4A = \frac{d}{\sqrt{2}}$ và ta có :

$$s(\overline{O_1BO_2}) = \frac{1}{2}BO_2 \,.\, BO_1 \sin(\overrightarrow{BO_2}, \overrightarrow{BO_1}) =$$
$$= \frac{1}{4}ab\sin[(\overrightarrow{BO_2}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO_1})$$
$$= \frac{1}{4}ab\sin[90^o + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})] = \frac{1}{4}ab\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$
$$= \frac{1}{4}ab\cos B.$$



Chứng minh tương tự, ta được : $s(\overline{O_2CO_3}) = \frac{1}{4}bc\cos C$, $s(\overline{O_3DO_4}) = \frac{1}{4}cd\cos D$ và $s(\overline{O_4AO_1}) = \frac{1}{4}da\cos A$.

– Từ đó suy ra :

$$s(O_1O_2O_3O_4) = s(ABCD) + s(AO_1B) + s(BO_2C) + s(CO_3D) + s(DO_4A) - s(\overline{O_1BO_2}) - s(\overline{O_2CO_3}) - s(\overline{O_3DO_4}) - s(\overline{O_4AO_1})$$
$$= s(ABCD) + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \frac{1}{4}(ab\cos B + bc\cos C + cd\cos D + da\cos A)$$

hay là :

$$s(O_1O_2O_3O_4) = s(ABCD) + \frac{1}{8}[(a^2 + b^2 - 2ab\cos B) + (b^2 + c^2 - 2bc\cos C) + (c^2 + d^2 - 2cd\cos D) + (d^2 + a^2 - 2da\cos A)] =$$
$$= s(ABCD) + \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)$$

(Định lí hàm số cosin áp dụng vào các tam giác ABC, BCD, CDA và DAB)

Do đó ta được :

$$s(O_1O_2O_3O_4) = s(ABCD) + \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)$$

$\geq s(ABCD) + \frac{1}{2}AC \cdot BD \geq 2s(ABCD)$

hay là $s(ABCD) \leq \frac{1}{2}s(O_1O_2O_3O_4)$, đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AC = BD$ và $s(ABCD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, nghĩa là khi và chỉ khi tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

Nhận xét : 1°) Số bạn tham gia giải bài toán này khá đông đảo, có tới 140 bạn ; rất tiếc có 2 bạn giải sai.

2°) Tuy nhiên, gần một nửa các bạn (65/140) chưa chỉ ra được khi nào thì xảy ra đẳng thức, hoặc chỉ ra không đúng (như nói rằng khi $ABCD$ là hình vuông).

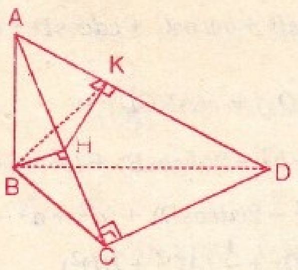
3°) Có 4 bạn giải tốt hơn cả : Ngoài bạn Phạm Đình Trường, còn có ba bạn nữa cũng cho lời giải của bài toán tổng quát hơn, không đòi hỏi $AC \perp BD$: *Nhữ Quý Thơ*, 11T Lam Sơn – Thanh Hóa, *Trần Nguyên Ngọc*, 10B, ĐHTH Hà Nội và *Nguyễn Vũ Hưng*, 11D, chuyên ngữ ĐHSPNN Hà Nội

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/213. *Cho tứ diện ABCD có AB ⊥ (BCD), tam giác BCD vuông ở C và nhị diện cạnh AB bằng nhị diện cạnh AD. Chứng minh rằng :* $\frac{CD^2}{BC^2} - \frac{BC^2}{AB^2} = 1$

Lời giải (của nhiều bạn)

Vì $AB \perp (BCD)$ và $CD \perp CB$ (g/th) nên $CD \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc) và do



đó $CD \perp (ABC)$. Bây giờ từ B hạ $BH \perp AC = H$ và $BK \perp AD = K$, thế thì : $BH \perp mp\ (ACD) = H$ và do đó $BH \perp AD$. Suy ra : mp $(BHK) \perp AD = K$ và vì vậy $\widehat{BKH} = \alpha$ là góc phẳng nhị diện cạnh AD. Mặt khác, $\widehat{CBD}$ là góc phẳng nhị diện cạnh AB, nên theo giả thiết thì :

$\widehat{BKH} = \widehat{DBC} = \alpha$

và do đó : $BKH \backsim DBC$

Từ đó ta được :

$$\sin\alpha = \frac{BH}{BK} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{BD}{BK} = \frac{CD}{BH}$$

$$\frac{BD^2}{BK^2} = \frac{CD^2}{BH^2} \Rightarrow$$

$$BD^2\left(\frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BD^2}\right) = CD^2\left(\frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}\right)$$

Hay là : $\frac{BD^2}{BA^2} + 1 = \frac{CD^2}{AB^2} + \frac{CD^2}{BC^2} \Rightarrow$

$$1 = \frac{CD^2 - BD^2}{AB^2} + \frac{CD^2}{BC^2}$$

Cuối cùng ta được :

$\frac{CD^2}{BC^2} - \frac{BC^2}{AB^2} = 1$; đ.p.c.m

Nhận xét : 1) Khá đông các bạn tham gia giải bài toán này, có tới 113 bạn, tất cả đều giải đúng (trừ 1 bạn giải chưa đến nơi đến chốn) ; tuy nhiên lời giải của nhiều bạn chưa gọn.

2) Có một số ít bạn sử dụng cả định lí sin đối với góc tam diện mà lời giải này cũng không đơn giản hơn là bao.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/213 Một cái hộp (hoặc một toa xe) trượt xuống dốc. Trong hộp có một con lắc. Người ta thấy con lắc tạo với phương thẳng đứng góc không đổi $\beta = 30°$. Dốc tạo với mặt phẳng nằm ngang góc $\alpha = 60°$. Ảnh hưởng của không khí không đáng kể, tính hệ số ma sát giữa hộp và mặt dốc.

Hướng dẫn giải

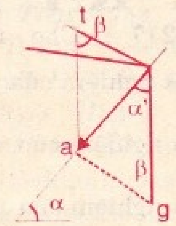
Con lắc có gia tốc $\vec{a}$ (bằng gia tốc của hộp) và chịu tác dụng của hai lực : lực căng của dây tạo ra gia tốc $\vec{t}$ và trọng lực tạo ra gia tốc $\vec{g}$. Ta có $\vec{a} = \vec{t} + \vec{g}$. Gia tốc a của vật trượt xuống dốc là

$$a = \frac{Mg\sin\alpha - kMg\cos\alpha}{M}$$

(M là khối lượng của hộp (kể cả con lắc), k là hệ số ma sát).

Vậy $a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$

$$k = \frac{\sin\alpha - a/g}{\cos\alpha}$$



Theo hình vẽ, áp dụng định lí sin : $\frac{a}{g} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha' + \beta)}$

với $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Vậy

$$k = tg\alpha - \frac{\sin\beta}{\cos\alpha \sin(\alpha' + \beta)}$$

Với $\alpha = 60^o$, $\beta = 30^o$ ta có $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

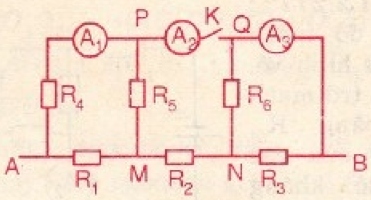
Nhận xét. Có nhiều em có lời giải tốt, trong số đó có các em : *Phạm Quang Tùng*, 10L, PTTH Hà Nội – Amstecđam ; *Lê Bình Dương* 11CL, PTTH Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai ; *Huỳnh Văn Ngọc* 11CL Quốc học Huế ; *Đậu Thúy Mai* 11CL, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Vũ Việt Hùng* 10B CL, Đại học Tổng hợp Hà Nội ; *Nguyễn Hữu Hải* 12A Hoài Nhơn II, Bình Định.

OK

Bài L2/213. Cho mạch điện như hình vẽ

$R_1 = R_2 = R$;

$R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 2R$



U_{AB} không đổi. Bỏ qua giá trị điện trở của dây nối, khóa K và các ampe kế.

Khi K đóng (A_2) chỉ $2A$.

1. Hãy tính số chỉ của (A_1) và (A_3) khi K đóng và mở.

2. Với $R = 30\ \Omega$, tính U_{AB}.

Hướng dẫn giải. Phương pháp chung là : với mỗi trường hợp, vẽ lại mạch điện (chú ý $R_A \approx 0$, chập làm một các điểm có cùng điện thế), suy ra cách mắc điện trở, từ đó tính $R_{AB} \rightarrow I_C \rightarrow$ các dòng điện rẽ.

– Với K đóng, tìm được $R_{AB} = R, U_{AB} = \frac{8}{3}R$; biết $I_{A2} = 2A$ rút ra $I_{A1} = \frac{4}{3}A$ và $I_{A3} = \frac{7}{3}A$.

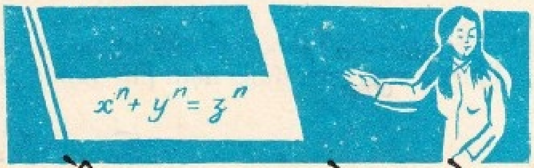
– Khi K mở

$R_{AB} = \frac{14}{5}R \rightarrow I_C = \frac{20}{21}A$, suy ra $I_{A1} = \frac{4}{21}A$ và $I_{A3} = \frac{10}{21}A$.

– Với $R = 30\Omega$, rút ra $U_{AB} = \frac{8}{3}R = 80V$

Nhận xét. Có nhiều em có lời giải tốt, trong số đó có các em : *Đặng Viết Tuấn* 9LH, NK Hưng Hà, Thái Bình ; *Đặng Quốc Khánh*, 9A, PTDL Lương Thế Vinh Hà Nội ; *Nguyễn Phương Trình*, 11A, Quốc học Quy Nhơn, Bình Định ; *Nguyễn Quang Hải*, 11CT, PTTH chuyên Hùng Vương Vĩnh Phú ; *Lưu Bảo Linh* 11/1 PTTH Trương Định, Gò Công, Tiền Giang ; *Vũ Hoàng Tùng*, 11CL, Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai ; *Trần Thị Thanh Hải*, 11A, PTTH Chí Linh, Hải Hưng, *Phan Duy Hùng* 11CT, PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình ; *Trần Thị Quỳnh Liên*, 9A, Trường cấp II-III Nghi Lộc III, Nghi Lộc, Nghệ An ; *Mai Anh Tuấn*, 9A, PTCS Kim Đồng, Tx Hội An, Quảng Nam – Đà Nẵng ; *Lê Quang Thành*, 10CL, Quảng Trị ; *Từ Minh Hải* 11CT, PTTH Buôn Ma Thuột, Đaklak ; *Nguyễn Vĩnh Hảo*, 11A, PTTH Lê Trung Kiên, Tuy Hòa, Phú Yên.

MT



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/217 : Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm x, y nguyên thỏa mãn :

$$x^p + y^p = p[(p-1)!]^p$$

TẠ HỒNG QUẢNG (Hà Nội)

Bài T2/217 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$.

NGUYỄN ĐỄ (Hải Phòng)

Bài T3/217 : Chứng minh rằng :

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{999}} > 147$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN (TP Hồ Chí Minh)

Bài T4/217 : Cho tam giác đều ABC và một đường thẳng d. Gọi A', B', C' là chân các đường vuông góc lần lượt hạ từ A, B, C xuống d. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

LÊ QUỐC HÁN (Nghệ An)

Bài T5/217 : Cho tam giác ABC với các đường trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1. Đường phân giác trong của góc $\widehat{AC_1C}$ cắt AA_1 và AC tại P và Q. Đường phân giác trong của góc $\widehat{BC_1C}$ cắt BB_1 và BC tại M và N. Chứng minh rằng nếu $AP = AQ$ thì ta có $BM = BN$.

HỒ QUANG VINH (Nghệ An)

CÁC LỚP THCB

Bài T6/217 : Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực đôi một khác nhau thì :

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} + \frac{|y-z|}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+z^2}} > \frac{|x-z|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+z^2}}$$

NGUYỄN VĂN LỘC (Nghệ An)

Bài T7/217 : Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{1994} + x_n$ với mọi $n \geqslant 1$.

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \ldots + \dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$

TRẦN XUÂN ĐÁNG (Nam Hà)

Bài T8/217 : Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn :

$$P(x)\,.\,P(y) = P^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - P^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$\forall x, y \in R$

ĐÀO TRƯỜNG GIANG (Vĩnh Phú)

Bài T9/217 : Cho tam giác ABC có $tg\dfrac{A}{4}$, $tg\dfrac{B}{4}$ là nghiệm của $x^2 + a_1x + b_1 = 0$,

$tg\dfrac{B}{4}$, $tg\dfrac{C}{4}$ là nghiệm của $x^2 + a_2x + b_2 = 0$,

$tg\dfrac{C}{4}$, $tg\dfrac{A}{4}$ là nghiệm của $x^2 + a_3x + b_3 = 0$.

Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu $(1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3) = 5616 - 3240\sqrt{3}$

ĐÀM VĂN NHỈ (Thái Bình)

Bài T10/217 : Tứ diện $ABCD$ có độ dài các đường cao là h_i $(i = \overline{1, 4})$. Các mặt phân giác của nhị diện (của tứ diện) cắt các cạnh đối tương ứng tại các điểm E_j $(j = \overline{1, 6})$. Khoảng cách từ E_j đến mặt bên không chứa E_j là x_j. Hãy chứng minh rằng :

$$\frac{384}{\left(\sum\limits_{i=1}^{4} h_i\right)^2} \leqslant \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{x_j^2} \leqslant \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i^2}$$

Khi nào các dấu bằng xảy ra ?

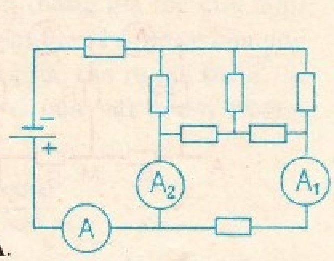
TRỊNH BẰNG GIANG (TP Hồ Chí Minh)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/217 : Hai quả cầu, khối lượng m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một lò xo có chiều dài tự nhiên là k và có độ cứng là k. Hệ vật được đặt trên một mặt bàn nằm ngang và nhẵn. Người ta kéo giãn lò xo bằng cách kéo hai quả cầu ra xa nhau, sau đó thả đồng thời hai quả cầu. Hãy xác định tần số dao động của hệ.

TÔ GIANG (Hà Nội)

Bài L2/217 : Cho sơ đồ mạch điện như hình vẽ. Các điện trở mạch ngoài bằng R_o, điện trở của các ampe kế không đáng kể. Biết rằng ampe kế A_1 chỉ 0,5A.



1) Xác định số chỉ của ampe kế A_2 và A.

2) Nguồn có điện trở trong $r = R_o/2$. Tính hiệu suất của nguồn.

TRƯƠNG THỊ HƯỜNG (Quảng Ngãi)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/217. Let p be an odd prime number. Find integers x, y satisfying

$$x^p + y^p = p[(p-1)!]^p$$

T2/217. Find integral solutions of equation

$$3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$$

T3/217. Prove that

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{999}} > 147.$$

T4/217. Let be given an equilateral triangle ABC and an line d. Let A', B', C' be respectively the orthogonal projections on d of A, B, C. Prove that the quantity

$$A'B'^2 = B'C'^2 + C'A'^2$$

does not depend on the position of d.

T5/217. Let AA_1, BB_1, CC_1 be the medians of a triangle ABC. The inbisector of angle $\widehat{AC_1C}$ cuts AA_1 and AC respectively at P and Q. The inbisector of angle $\widehat{BC_1C}$ cuts BB_1 and BC respectively at M and N. Prove that if $AP = AQ$ then $BM = BN$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/217. Prove that if x, y, z are distinct real numbers then

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} + \frac{|y-z|}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+z^2}} >$$

$$> \frac{|x-z|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+z^2}}.$$

T7/217. The sequence $\{x_n\}$ is defined by

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1994} + x_n \text{ for } n \geq 1.$$

Find

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

T8/217. Find all polynomials $P(x)$ satisfying

$$P(x).P(y) = p^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - P^2\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$\forall x, y \in R.$

T9/217. Let be given a triangle ABC such that

$tg\frac{A}{4}, tg\frac{B}{4}$ are the roots of $x^2 + a_1x + b_1 = 0$,

$tg\frac{B}{4}, tg\frac{C}{4}$ are the roots of $x^2 + a_2x + b_2 = 0$,

$tg\frac{C}{4}, tg\frac{A}{4}$ are the roots of $x^2 + a_3x + b_3 = 0$.

Prove that the triangle ABC is equilateral if

$$(1 - a_1 + b_1)(1 - a_2 + b_2)(1 - a_3 + b_3) = = 5616 - 3240\sqrt{3}.$$

T10/217. The altitudes of a tetrahedron $ABCD$ are h_i $(i = \overline{1,4})$. The bisector-planes of the dihedrals of the tetrahedron cut the opposite sides at E_j $(i = \overline{1,6})$. The distance from E_j to the face which does not pass through E_j is x_j. Prove that

$$\frac{384}{\left(\sum_{i=1}^{4} h_i^2\right)^2} \leq \sum_{j=1}^{6}\frac{1}{x_j^2} \leq \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2}.$$

When do equalities occur ?

CÁC BẠN GỬI BÀI DỰ THI CHÚ Ý :

- Mỗi bài giải viết riêng trên một mảnh giấy. Phía trên bên trái để số của bài, bên phải ghi họ tên và địa chỉ.
- Mỗi phong bì chỉ gửi bài của một số báo, ngoài phong bì ghi rõ bài của số báo nào.
- Chỉ gửi về một địa chỉ :

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
45B Hàng Chuối – Hà Nội

THTT

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học

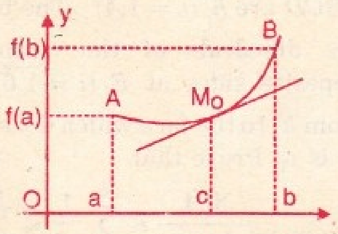
Định lí Lagrange và các ứng dụng

NGÔ THẾ PHIỆT
(Quảng Nam – Đà Nẵng)

Trong chương trình toán ở lớp 12 phổ thông có định lí Lagrange với rất nhiều ứng dụng. Tuy nhiên định lí đã bị các sách giáo khoa bỏ quên. Nhằm giúp các bạn trẻ một phương pháp giải toán hữu hiệu, chúng tôi giới thiệu định lí Lagrange và một số ứng dụng. Tuy nhiên cũng cần nêu ở đây định lí Rolle mà có bạn đã biết là một trường hợp đặc biệt của định lí Lagrange.

I/ Ý nghĩa hình học của định lí Lagrange

Cho một cung AB nối hai điểm A, B có tính chất :
- Cung liên từ A đến B
- Cung trơn (có tiếp tuyến) tại mọi điểm trên cung trừ tại *A*, *B* thì tồn tại một điểm *M* trên cung khác *AB* sao cho tiếp tuyến tại *M* trên cung *AB* song song với đoạn *AB*.



II/ Phát biểu định lí Lagrange

Diễn tả tính chất hình học trên đây bằng "ngôn ngữ giải tích" :

Cung *AB*	hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$
Cung *AB*	$f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
Trơn Trên *(AB)*	f(x) có đạo hàm trên (a, b)
Tiếp tuyến *MT* song song *AB*	$f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Định lí Lagrange : *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ có tính chất sau đây :*
$f(x)$ liên tục trên $[a, b]$
$f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại x_o thuộc (a, b) sao cho : $f'(x_o) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Định lí Rolle : *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, b]$, liên tục trên $[a, b]$, có đạo hàm trên $[a, b]$ và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $x_o \in [a, b]$ sao cho $f'(x_o) = 0$.*

Ứng dụng 1 : Chứng minh một hàm số là hàm hằng trên $[a, b]$

Hệ quả : *Nếu hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[a, b]$ có $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì theo định lí Lagrange :*

Với mọi $x_1 \neq x_2$ thuộc $[a, b]$ tồn tại $x_o \in (x_1, x_2)$ sao cho : $f'(x_o) = 0 = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ *Suy ra :* $f(x_1) = f(x_2)$. *Vậy* $f(x) = C^{te}$ *– với mọi* $x \in [a, b]$.

Thí dụ 1 : *Chứng minh rằng với mọi $x \in [-1, 1]$ ta đều có :* $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$

(Đề số 77 câu IVa – Bộ đề thi tuyển sinh)

Bài giải : Đặt $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ có $D_f = [-1, 1]$ thì

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \ \forall x \in (-1, 1)$$

Vậy $f(x) = C^{te}$ – với mọi $x \in [-1, 1]$

Vì $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \pi/2$

Vậy $f(x) = \pi/2$ với mọi $x \in [-1, 1]$.

Ứng dụng 2 : Phương trình

1) Chứng minh một phương trình có nghiệm duy nhất :

Thí dụ 2 : *Chứng minh phương trình :*

$$2x\,\mathrm{arctg}\,x = \ln(1 + x^2)$$

có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài giải : Phương trình tương đương với : $f(x) = 0$ với $f(x) = 2x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln(1 + x^2)$ là hàm số xác định và liên tục trên R có :

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{2x}{1 + x^2} + 2\mathrm{arctg}\,x + 2\mathrm{arctg}\,x$$

Ta nhận thấy $f(0) = 0$. Vậy :

Với mọi $x > 0$, theo định lí Lagrange tồn tại $0 < c < x$ sao cho :

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow 2\mathrm{arctg}\,c = \frac{f(x)}{x}.$$

Vì $x > 0$ và $2\mathrm{arctg}\,c > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$.

Chứng minh tương tự được $f(x) < 0$ với mọi $x < 0$.

Vậy phương trình chỉ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Chú ý : Các bạn có thể giải bài toán này nhờ tính chất đơn điệu của hàm số $f(x)$.

2) Khẳng định một phương trình có nghiệm

Thí dụ 3 : *Cho $m > 0$ còn a, b, c là 3 số thực bất kì thỏa mãn điều kiện :*

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$$

Chứng minh rằng khi đó phương trình $ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0, 1).

(Đề thi 105 câu III – Bộ đề thi tuyển sinh)

(Giải bằng phương pháp khác đáp án)

Bài giải: Đặt $F(x)=\frac{ax^{m+2}}{m+2}+\frac{bx^{m+1}}{m+1}+\frac{cx^m}{m}$ là hàm số liên tục trên đoạn [0, 1] và có đạo hàm trên (0, 1)

và $F(0)=F(1)=\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$

nên theo định lí Lagrange tồn tại số $0<x_o<1$ sao cho : $F'(x_o)=0$

$\Leftrightarrow ax_o^{m+1}+bx_o^m+cx_o^{m-1}+0$

$\Leftrightarrow x_o^{m-1}(ax_o^2+bx_o+c)=0$

$\Leftrightarrow x_o^{m-1}(ax_o+bx_o+c)=0$

Vì $0<x_o<1$ nên điều này tương đương với $ax_o^2+bx_o+c=0$ và bài toán đã được chứng minh.

Ứng dụng 3 : Chứng minh bất đẳng thức

Thí dụ 4 : *Chứng minh rằng nếu $0<b<a$ thì : $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$*

(Đề thi số 72 câu IVa – Bộ đề thi tuyển sinh)

Bài giải : Đặt $F(x)=lnx$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$ là $f'(x)=1/x$. Vậy theo định lí Lagrange tồn tại x_o với $b<x_o<a$ sao cho : $f'(x_o)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{x_o}=\frac{lna-lnb}{a-b}\Leftrightarrow\frac{a-b}{x_o}=\ln\frac{a}{b}$

Vì $b<x_o<a$ nên $1/a<1/x_o<1/b$. Suy ra :

$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$

Thí dụ 5 : *Cho a, b, c, d là 4 số dương bất kì. Chứng minh :*

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

Khi nào xảy ra đẳng thức ?

(Vô địch Đức năm 70)

Bài giải : Vì bất đẳng thức phải chứng minh là một bất đẳng thức đối xứng, nên vai trò của a, b, c như nhau nên không làm mất tính tổng quát ta có thể giả sử : $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$.

Xét hàm số $F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

$F(x)$ là hàm số liên tục và có đạo hàm trên cả đường thẳng thực R. Vì $F(a)=F(b)=F(c)=F(d)=0$ và $F'(x)$ là một hàm bậc ba. Vậy theo định lí Rolle trên từng đoạn $[a ; b]$, $[b ; c]$, $[c ; d]$ tồn tại $a\leqslant y_1\leqslant b\leqslant y_2\leqslant c\leqslant y_3\leqslant d$ sao cho $F'(y_1)=F'(y_2)=F'(y_3)=0$. Vậy

$F'(y)=4(x-y_1)(x-y_2)(x-y_3)$

Số hạng hằng của $F'(y)$ là $-4y_1y_2y_3$. Đó cũng là hệ số của số hạng chứa x của $F(x)$ là : $-(abc+abd+acd+bcd)$.

Vậy $y_1y_2y_3=(abc+abd+acd+bcd)/4$ (1)

Số hạng chứa x của $F'(x)$ có hệ số : $4(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)$

cũng là hai lần hệ số của hạng tử chứa x^2 của $F(x)$: $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

Vậy

$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=(ab+ac+ad+bc+bd+cd)/2$ (2)

Vậy theo bất đẳng thức Cau chy :

$$\frac{y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1}{3}\geqslant\sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2}$$

Thay (1) và (2) vào bất đẳng thức vừa tìm được ta có ngay kết quả. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d$.

Bài tập tự giải :

Bài 1 : Chứng minh :

$$2arctgx+arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}\pi \text{ nếu } x\geqslant 1\\ -\pi \text{ nếu } x\leqslant -1\end{cases}$$

(Đề thi số 92 Bộ đề thi tuyển sinh)

Bài 2 : Cho phương trình bậc n :

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_o=0$

trong đó $a_n\neq 0$, $a_{n-1},\ldots,a_1,a_o$ là các số thực thỏa mãn : $\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\ldots+\frac{a_1}{2}+a_0=0$

Chứng minh phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm $x_o\in(0,1)$?

Bài 3 : Chứng minh rằng với hai số a, b bất kì :

a) $|sina-sinb|\leqslant|a-b|$

b) $|arctga-arctgb|\leqslant|a-b|$

(Đề thi số 100 – Bộ đề thi tuyển sinh)

Bài 4 : Cho $n\in Z^+$. Chứng minh :

$$\frac{1}{1+(n+1)^2}<arctg\frac{1}{n^2+n+1}<\frac{1}{1+n^2}$$

Bài 5 : Cho hàm số liên tục :

$f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$

có đạo hàm trên (0, 1) thỏa mãn $f(0)=0$ và $f(1)=1$. Chứng minh rằng tồn tại $a, b\in(0,1)$ sao cho $a\neq b$ và $f'(a).f'(b)=1$

(Thi Olympic Toán New-York năm 76)

Đội tuyển học sinh Việt Nam dự thi Toán quốc tế tại Canađa năm 1995

Trong hai ngày 5 và 6 tháng 5 năm 1995 tại Hà Nội đã diễn ra cuộc thi chọn học sinh vào đội tuyển Toán quốc gia để chuẩn bị dự cuộc thi Toán quốc tế lần thứ 36 tổ chức tại thành phố Toronto Canađa vào giữa tháng 7 năm 1995. Tham dự cuộc thi tuyển có 40 thí sinh đạt từ 27 điểm trở lên trong kì thi chọn học sinh giỏi toán quốc gia năm 1995 thuộc các lớp chuyên toán của Trường Đại học tổng hợp Hà Nội, Trường Đại học sư phạm Hà Nội 1 và của 14 tỉnh, thành phố sau : Bắc Thái, Vĩnh Phú, Nam Hà, Hải Phòng, Hà Tây, Ninh Bình, Thái Bình, Thanh Hóa, Nghệ An, Hà Tĩnh, Quảng Trị, Thừa Thiên – Huế, Sông Bé, Vĩnh Long.

Các thí sinh thi trong hai buổi, mỗi buổi làm 3 bài toán trong 4 giờ ; điểm tối đa của 6 bài thi là 40 điểm. Sáu học sinh có tên dưới đây đạt điểm cao nhất trong cuộc thi tuyển đã được chọn vào đội tuyển toán quốc gia :

1. *Ngô Đắc Tuấn*, nam, lớp 11 Trường ĐHTH Hà Nội : 32 điểm
2. *Nguyễn Thế Phương*, nam, lớp 12 Trường ĐHSP Hà Nội 1 : 32 điểm
3. *Đào Hải Long*, nam, lớp 12 Trường ĐHTH Hà Nội : 25 điểm
4. *Cao Văn Hạnh*, nam, lớp 12 Trường PTTH Lam Sơn Thanh Hóa : 24,5 điểm
5. *Nguyễn Thế Trung*, nam, lớp 12 Trường ĐHTH Hà Nội : 21 điểm
6. *Phạm Quang Tuấn*, nam, lớp 12 Trường ĐHTH Hà Nội : 19 điểm.

Xin giới thiệu đề thi chọn đội tuyển toán quốc gia :

Bài 1 : Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Lấy sáu điểm phân biệt $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ không trùng với A, B, C sao cho các điểm A_1, A_2 nằm trên đường thẳng BC ; các điểm B_1, B_2 nằm trên đường thẳng CA ; các điểm C_1, C_2 nằm trên đường thẳng AB. Gọi α, β, γ là các số thực được xác định bởi :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{\alpha}{a}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B_1B_2} = \frac{\beta}{b}\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1C_2} = \frac{\gamma}{c}\overrightarrow{AB}.$$

Xét các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1, AB_2C_2, BC_1A_1, BC_2A_2, CA_1B_1, CA_2B_2$ và gọi d_A, d_B, d_C theo thứ tự là các trục đẳng phương của cặp đường tròn đi qua A, cặp đường tròn đi qua B, cặp đường tròn đi qua C.

Chứng minh rằng d_A, d_B, d_C đồng quy khi và chỉ khi $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$.

Bài 2 : Tìm tất cả các số nguyên k sao cho có vô số giá trị nguyên $n \geqslant 3$ để đa thức $Pn(x) = x^{n+1} + kx^n - 870x^2 + 1945x + 1995$ có thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.

Bài 3 : Tìm tất cả các số nguyên a, b, n lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện :

$$(a^3 + b^3)^n = 4(ab)^{1995}$$

Bài 4 : Trong không gian cho n điểm ($n \geqslant 2$) mà không có 4 điểm nào đồng phẳng và cho $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$ đoạn thẳng mà tất cả các đầu mút của chúng nằm trong số n điểm đã cho. Biết rằng có ít nhất một đoạn thẳng mà sau khi bỏ nó đi (giữ nguyên các đầu mút) thì sẽ tồn tại 2 điểm phân biệt mà không phải là hai đầu mút của một đường gấp khúc nào. Hãy tìm số k lớn nhất sao cho có k đoạn thẳng tạo thành đường gấp khúc khép kín mà mỗi đỉnh của nó là mút của đúng 2 đoạn thẳng thuộc đường gấp khúc đó.

Bài 5 : Với mỗi số nguyên không âm n đặt $f(n)$ là số nguyên không âm lớn nhất sao cho $2^{f(n)}$ là một ước số của $n + 1$. Cặp số nguyên không âm (n, p) được gọi là cặp số đẹp nếu $2^{f(n)} > p$.

Hãy tìm tất cả các bộ ba số nguyên không âm (n, p, q) sao cho các cặp số (n, p), (p, q) và $(n + p + q, n)$ đều là các cặp số đẹp.

Bài 6 : Cho hàm số thực $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3}{3(x^2 - 1)}$.

1) Chứng minh rằng tồn tại hàm số $g(x)$ liên tục trên R và có đồng thời các tính chất sau : $f(g(x)) = x \ \forall x \in R$; $g(x) > x \ \forall x \in R$.

2) Chứng minh rằng tồn tại số thực $a > 1$ để dãy $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, được xác định bởi : $a_o = a$, $a_{n+1} = f(a_n) \ \forall n \in N$ là dãy tuần hoàn với chu kì dương nhỏ nhất bằng 1995.

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

Một cách giải bài toán hình học không gian

CAO QUÂN
(TP Hồ Chí Minh)

Trong hình học không gian, thường phải xét giao của hai đường thẳng (mặt phẳng) ; trong trường hợp giao đó là rỗng, ta có hai đường thẳng (mặt phẳng) song song. Do đó những hiểu biết đơn giản về tập hợp (lớp 10), có thể giúp trình bày khá ngắn gọn lời giải một số bài toán hình học không gian.

Ta sẽ sử dụng *tính chất giao hoán và kết hợp của phép giao hai tập hợp* dưới dạng như sau.

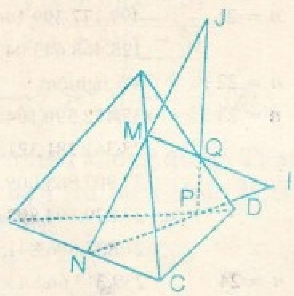
Cho $\alpha, \beta, \gamma, \psi, \pi$ và θ là các tập hợp khác rỗng.

Nếu ta có :

$\pi = \alpha \cap \beta$ và $\theta = \gamma \cap \psi$

thì ta có : $\pi \cap \theta = (\alpha \cap \gamma) \cap (\beta \cap \psi)$.

Sử dụng tính chất này, ta giải bài toán sau đây :



Bài toán – Cho hình tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng cắt các cạnh CA, CB, DB, DA của tứ diện lần lượt tại M, N, P, Q (các giao điểm này không trùng với bất cứ đỉnh nào của tứ giác).

a) Tìm điều kiện (cần và đủ) để $MNPQ$ là hình thang ;

b) Tìm điều kiện (cần và đủ) để $MNPQ$ là hình bình hành ;

c) Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Chứng minh rằng C, D, I thẳng hàng.

Gọi J là giao điểm của MN và QP. Chứng minh rằng A, B, J thẳng hàng.

Giải :

a) Ta có : $MQ = \text{mp}(MNPQ) \cap \text{mp}(ADC)$

$PN = \text{mp}(MNPQ) \cap \text{mp}(CBD)$

Sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép giao hai tập hợp đã nói ở trên, chú ý rằng

$\text{mp}(MNPQ) \cap \text{mp}(MNPQ) = \text{mp}(MNPQ)$ và $\text{mp}(ADC) \cap \text{mp}(CBD) = CD$, ta có : $MQ \cap PN = \text{mp}(MNPQ) \cap CD$. (1)

Suy ra :

$MQ \cap PN = \phi \Leftrightarrow \text{mp}(MNPQ) \cap CD = \phi$

tức là : $MQ \,//\, PN \Leftrightarrow \text{mp}(MNPQ) \,//\, CD$.

Như vậy : *$MNPQ$ là hình thang có hai đáy là MQ và NP khi và chỉ khi mặt phẳng $MNPQ$ song song với CD.*

b) Tương tự, ta có :

$MN \cap PQ = \text{mp}(MNPQ) \cap AB$. (2)

do đó : $MN \,//\, PQ \Leftrightarrow \text{mp}(MNPQ) \,//\, AB$.

Suy ra : *$MNPQ$ là hình bình hành khi và chỉ khi $MNPQ$ song song với hai cạnh đối AB và CD của tứ diện đã cho.*

c) Nếu $MQ \cap NP = \{I\}$ thì từ (1) ta có được $\text{mp}(MNPQ) \cap CD = \{I\}$, nghĩa là ba điểm C, D, I thẳng hàng.

Tương tự, từ (2) suy ra A, B, J thẳng hàng.

Ghi chú : Trong lời giải câu a, ta có thể xét :

$\text{mp}(ADC) \cap \text{mp}(BDC) = CD$

$\text{mp}(MNPQ) \cap \text{mp}(MNPQ) = \text{mp}(MNPQ)$

và suy ra (1) : $MQ \cap PN = \text{mp}(MNPQ) \cap CD$.

Các bạn có thể thấy rằng lời giải rất ngắn gọn, không đòi hỏi phải vận dụng một số định lí đã học trước đó về sự song song của đường thẳng và mặt phẳng.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN PHỔ THÔNG TRUNG HỌC CỦA TRƯỜNG ĐHTH HÀ NỘI NĂM 1994

Môn : Toán, vòng 1,
(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu I. Giải các phương trình sau :

a) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = 0$

b) $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$

Câu II. Xét các số $x, y, z, t > 0$ thỏa mãn hệ thức :

$xy + 4zt + 2yz + 2xt = 9$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$A = \sqrt{xy} + 2\sqrt{zt}$

Câu III. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z, t thỏa mãn hệ phương trình : $\begin{cases} xy - 3zt = 1 \\ xz + yt = 2 \end{cases}$

Câu IV. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$ và H là trung điểm của cạnh BC. Một đường tròn đi qua A và tiếp xúc với cạnh BC tại B cắt AC, AH lần lượt tại D và E. Biết rằng D là trung điểm của AC và bán kính đường tròn bằng R. Tính độ dài các dây cung AE, AD theo R.

Câu V. Cho tam giác ABC có $BC > AC$. Một đường thẳng song song với cạnh AB cắt các cạnh BC và AC lần lượt tại các điểm M và N. Chứng minh rằng $BN > AM$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN – TIN HỌC NĂM 1994

(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu I. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+y)(y+z) = 4xy^2z \\ (y+z)(z+x) = 4yz^2x \\ (z+x)(x+y) = 4zx^2y \end{cases}$$

Câu II. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(x+y)$

Câu III. Xác định các giá trị nguyên dương n $(n \geq 3)$ sao cho số $A = 1.2.3...n$ (tích của n số nguyên dương đầu tiên) chia hết cho số $B = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

Câu IV. Cho $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{1}{1+\sqrt[4]{ab^3}} + \frac{1}{1+\sqrt[4]{bc^3}} + \frac{1}{1+\sqrt[4]{ca^3}}$$

Câu V. Cho ΔABC có $AB = AC$.

a) Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC} = 20^\circ$ thì luôn tìm được các điểm D và K trên các cạnh AB và AC sao cho $AD = DK = KC = CB$.

b) Ngược lại, chứng minh rằng nếu tồn tại các điểm D và K trên các cạnh AB và AC sao cho $AD = DK = KC = CB$ thì $\widehat{BAC} = 20^\circ$.

NGUYỄN VĂN MẬU
(Hà Nội)

Tiếp nối về phương trình "kiểu" FERMAT

HOÀNG ĐỨC TÂN *(Hà Nội)*

Phương trình kiểu Fermat :

$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = \overline{x_1x_2\ldots x_n}$ (1)

trong đó $x_1 > 0$ và $x_1, x_2, \ldots x_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$

Trong bài này tôi xin trình bày với các bạn một số kết quả mới tìm được sau đây :

a) Chứng minh phương trình (1) vô nghiệm với mọi $n \geq 61$.

b) Nghiệm của phương trình (1) với $12 \leq n \leq 25$ tìm được bằng MTĐT.

A – Trước tiên ta chứng minh phương trình (1) vô nghiệm với n ≥ 61

Từ điều kiện của phương trình (1) đương nhiên ta có :

$0 \leq x_i \leq 9 \quad \forall i = 1, 2, ..., n$ (2)

Để chứng minh a) ta khảo sát hàm số sau :

$y = lgx + x.lg9 - x + 1 \ (x > 0)$ (3)

Tính đạo hàm bậc nhất của hàm số (3) :

$y' = 1/(x.ln10) + lg9 - 1 = (lge)/x + lg9 - 1$

trong đó $e = lim(1 + 1/m)$ khi $m \to \infty$.

Rõ ràng là y sẽ đơn điệu giảm khi và chỉ khi đạo hàm $y' < 0$. Tức là với các x thỏa mãn bất phương trình sau :

$(lge)/x + lg9 - 1 < 0$ (4)

Giải (4) ta nhận được : $x > lge/(1 - lg9) = 9{,}491221$

Kết quả ta thu được là : "Hàm số (3) là đơn điệu giảm với $x > 9{,}491221$". Bằng tính toán trực tiếp ta có với $x = 61$ thì giá trị y của hàm số (3) là âm. Kết hợp với kết quả và thu được ta suy ra rằng : "Với mọi $x \geq 61$ thì $y < 0$" Hay với mọi $x \geq 61$ ta luôn có bất đẳng thức : $lgx + x.lg9 - x + 1 < 0$

$\Leftrightarrow lgx + x.lg9 < x - 1$

$\Leftrightarrow lg(x.9^x) < x - 1 = lg10^{x-1}$

$\Leftrightarrow x.9^x < 10^{x-1}$

Vậy là ta có bất đẳng thức quan trọng sau :

"$n.9^n < 10^{n-1} \ \forall n \geq 61$" (5)

Quay lại xét phương trình (1). Giả sử với $n \geq 61$ thì $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ là một nghiệm nào đó của phương trình (1). Do điều kiện (2) ta có :

$\overline{x_1x_2\ldots x_n} = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n \leq n.9^n$

Chú ý tới (5) ta suy ra :

$\overline{x_1x_2\ldots x_n} < 10^{n-1}$ (6)

Bởi vì $x_1 > 0$ cho nên số $\overline{x_1x_2\ldots x_n}$ là một số tự nhiên có n chữ số, vì vậy ta phải có : $\overline{x_1x_2\ldots x_n} \geq 10^{n-1}$

Điều đó là mâu thuẫn với (6). Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng với mọi $n \geq 61$ thì phương trình (1) là vô nghiệm.

Vậy a) đã được chứng minh xong.

B – Còn lại là vấn đề : "Với n ≤ 60 thì phương trình (1) có nghiệm hay không ?

Trong thời gian qua Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã thông báo kết quả của phương trình (1) với $2 \leq n \leq 11$. Sau đây là các kết quả tiếp theo mà tôi mới tìm được với sự trợ giúp của MTĐT :

$n = 12, 13$:	Vô nghiệm.
$n = 14$:	28.116.440.335.967
$n = 15$:	Vô nghiệm.
$n = 16$:	4.338.281.769.391.370, 4.338.281.769.391.371
$n = 17$:	35.875.699.062.250.035
	35.641.594.208.964.132
	21.897.142.587.612.075
$n = 18$:	Vô nghiệm.
$n = 19$:	4.498.128.791.164.624.869
	3.289.582.984.443.187.032
	1.517.841.543.307.505.039
$n = 20$:	63.105.425.988.599.693.916
$n = 21$:	499.177.399.146.038.697.307
	128.468.643.043.731.391.252
$n = 22$:	Vô nghiệm.
$n = 23$:	35.452.590.104.031.691.935.943
	28.361.281.321.319.229.463.398
	27.907.865.009.977.052.567.814
	27.879.694.893.054.074.471.405
	21.887.696.841.122.916.288.858
$n = 24$:	239.313.664.430.041.569.350.093
	188.451.485.447.897.896.036.875
	174.088.005.938.065.293.023.722
$n = 25$:	4.422.095.118.095.899.619.457.938

Còn với $26 \leq n \leq 60$ thì tôi đã có chương trình để có thể xác định được (1) có nghiệm hay không, nhưng vấn đề là ... thời gian chạy máy khá lâu ! Mong bạn đọc tiếp sức :

C – Tổng quát hóa Bài toán (1).

Bài toán về phương trình kiểu Fermat (1) sẽ còn lý thú hơn nhiều nếu ta thay đổi quan niệm các ẩn số x_i (i = 1, 2, ..., n) không chỉ là các chữ số 0, 1, 2, ..., 9 mà chúng là các số tự nhiên có m chữ số ($m \geq 1$). Chẳng hạn với $n = 2$ thì có thể chứng minh được rằng (việc chứng minh là hoàn toàn sơ cấp, nhưng dài dòng) tồn tại vô số số tự nhiên m để phương trình (1) là có nghiệm. Với $n = 3$ và $m = 2$ chẳng hạn. MTĐT đã xác định được nghiệm sau đây :

$44^3 + 46^3 + 64^3 = 444664$

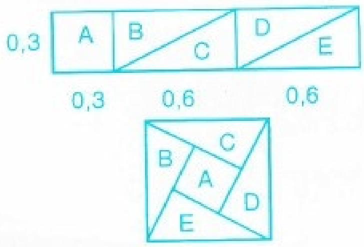
Vấn đề lý thú này tôi sẽ trở lại với các bạn trong một bài báo sau. Rất mong nhận được kết quả của bạn đọc về bài toán (1) và bài toán tổng quát hóa của nó.

LTS. Sau bài "Trao đổi về bài toán phương trình kiểu FERMAT" của các bạn Trần Đỗ Hùng – Lê Sỹ Quang đăng trên số 6(204)/1994 tòa soạn đã nhận được các bài của các bạn Vũ Thị Thu Hạnh (Y94E, Đại học Y Dược, TP. Hồ Chí Minh), Bùi Thế Duy (11CT, Đại học Tổng hợp, Hà Nội) đưa ra các nghiệm của phương trình với $n = 12$ đến $n = 16$. Bạn Duy còn đưa ra một chương trình PASCAL ứng với thuật toán đã sử dụng. Bạn Trần Đăng Viễn (chuyên Lí, PTTH Lê Quý Đôn, Khánh Hòa) đưa ra các nghiệm với $n = 12$ đến $n = 17$.

Giải đáp bài

CẮT VÀ GHÉP HÌNH

Theo chiều dài, cắt miếng ván thành một hình vuông có cạnh 0,3m (A) và hai hình chữ nhật có một cạnh bằng 0,6m và một cạnh bằng 0,3m. Tiếp đó ta cắt mỗi hình chữ nhật thành hai tam giác vuông bằng nhau (B, C, D, E theo đường chéo) và ta ghép lại như hình vẽ dưới.



(*Nguyễn Thị Kim Phượng*, 6, Thị trấn Đức Phổ, Quảng Ngãi và *Đặng Văn Cường*, 6A, Chuyên V-T, Đô Lương, Nghệ An)

BÌNH PHƯƠNG

TRÒ CHƠI VIẾT SỐ

Hai người chơi một trò chơi như sau : Hai người lần lượt thay nhau viết các chữ số của một số tự nhiên A gồm 25 chữ số ghi theo hệ thập phân : $A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{24} a_{25}}$. Người thứ nhất viết trước một chữ số ở hàng đơn vị (a_{25}). Người thứ hai viết tiếp một chữ số ở hàng chục (a_{24}). Đến lượt người thứ nhất lại viết tiếp một chữ số ở hàng trăm (a_{23}). Người thứ hai lại viết tiếp một chữ số ở hàng nghìn (a_{22}), v.v... Cứ tiếp tục như vậy, cuối cùng đến lượt người thứ nhất viết chữ số cuối cùng (a_1) thì được số A. Nếu số A chia hết cho 6 thì người thứ nhất *thắng*, trái lại là *thua*.

Các bạn hãy giúp người thứ nhất viết các chữ số như thế nào để bao giờ cũng thắng !

NGÔ HÂN
(Hà Bắc)

Bạn có biết

MỘT SỐ KÍ HIỆU TOÁN HỌC KHÁC

Trong thời đại ngày nay, khi chúng ta mở rộng giao lưu với nhiều nước trên thế giới, chúng ta nên biết những kí hiệu toán học mà một số nước dùng khác với chúng ta.

1. Cách viết số tự nhiên, số thập phân

a) Đối với *số tự nhiên*, sách giáo khoa của ta dùng cách viết : *chừa một khoảng nhỏ giữa hai lớp kề nhau* (lớp đơn vị và lớp nghìn, lớp nghìn và lớp triệu, v.v...). Thí dụ :
3500 (ba nghìn năm trăm) ; 2400000 (hai triệu bốn trăm nghìn).

Nhưng trên báo chí (báo Nhân dân, Hà nội mới, Sài Gòn giải phóng, ...), nhiều khi *các chữ số được viết liền nhau* hoặc *đặt một dấu chấm giữa các lớp*. Hai số trong thí dụ trên có thể viết :

3500 và 2400000 hoặc 3.500 và 2.400.000.

Đối với *số thập phân*, chúng ta đặt dấu phẩy (,) giữa phần nguyên và phần thập phân (*dấu phẩy thập phân*). Thí dụ :

0,25 và 568, 458.

b) Ở Mĩ, Anh và một số nước, cũng như trong máy tính, người ta lại không dùng dấu phẩy thập phân mà dùng *dấu chấm thập phân*. Hai số thập phân trên đây được viết là :

0.25 và 568.458.

Số tiền 50 đô-la tròn (không có xu lẻ) được viết \$50.00. Nếu phần nguyên là 0 thì có thể bỏ số 0 ấy đi, chẳng hạn số 0.25 có thể viết là .25.

Còn *dấu phẩy thì lại được dùng để đặt ở giữa hai lớp kề nhau* của một số tự nhiên. Bạn có thể thấy trên báo thông tin của một công ty liên doanh với nước ngoài : Vốn điều lệ : 3,000,000 USD (ba triệu USD).

2. Dấu nhân, dấu chia và cách đặt phép tính chia

Về dấu nhân, chúng ta viết : a × b hoặc a.b hoặc ab.

Ở nhiều nước, dấu chấm, với ý nghĩa là phép nhân, được viết cao lên một chút (giữa thân chữ). Thí dụ :

2.14 là số thập phân (hai đơn vị mười bốn phần trăm)

2·14 là tích của 2 với 14

2· .14 là tích của 2 với số thập phân .14 (0.14 = .14).

Về *dấu chia*, nhiều nước (và trong máy tính bỏ túi) dùng dấu ÷ thay vì :, thí dụ a ÷ b.

Về thuật toán chia, nên chú ý sự trình bày khác nhau trong sách giáo khoa của ta (của Pháp và nhiều nước khác) với sách giáo khoa của Mĩ, qua thí dụ chia 40 cho 7 sau đây :

```
 40    7              5.7
 35    5.7         7  40
  50                  35
  49                   50
   1                   49
                        1
```

3. Đường thẳng, tia, đoạn thẳng, độ dài đoạn thẳng

Trong các sách giáo khoa của Pháp và một số sách của Mĩ, ta thấy các kí hiệu sau đây :

	Pháp	Mĩ
Đường thẳng AB	(AB)	$\overleftrightarrow{AB}$
Tia AB	[AB)	$\overrightarrow{AB}$
Đoạn thẳng AB	[AB]	$\overline{AB}$
Độ dài đoạn thẳng AB	AB	AB

Với các kí hiệu đó, người ta phát biểu chẳng hạn như sau :
"Trong hình bình hành ABCD ta có (AB) // (CD) và AB = CD."
"Trong hình bình hành ABCD ta có $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ và AB = CD."

Còn có một số kí hiệu khác nữa. Về hàm số lượng giác, ngày càng có xu hướng dùng kí hiệu *sin, cos, tan, cot* (thay vì tg và cotg), đều là *ba chữ cái đầu tiên* của các từ tương ứng *sin*us, *cos*inus, *tan*gent và *cot*angent.

HOÀNG CHÚNG

ISSN : 0866 - 8035.
Chỉ số 12884
Sắp chữ tại Trung tâm Vi tính và
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng
Mã số : 8BT19M5

QUẢNG CÁO