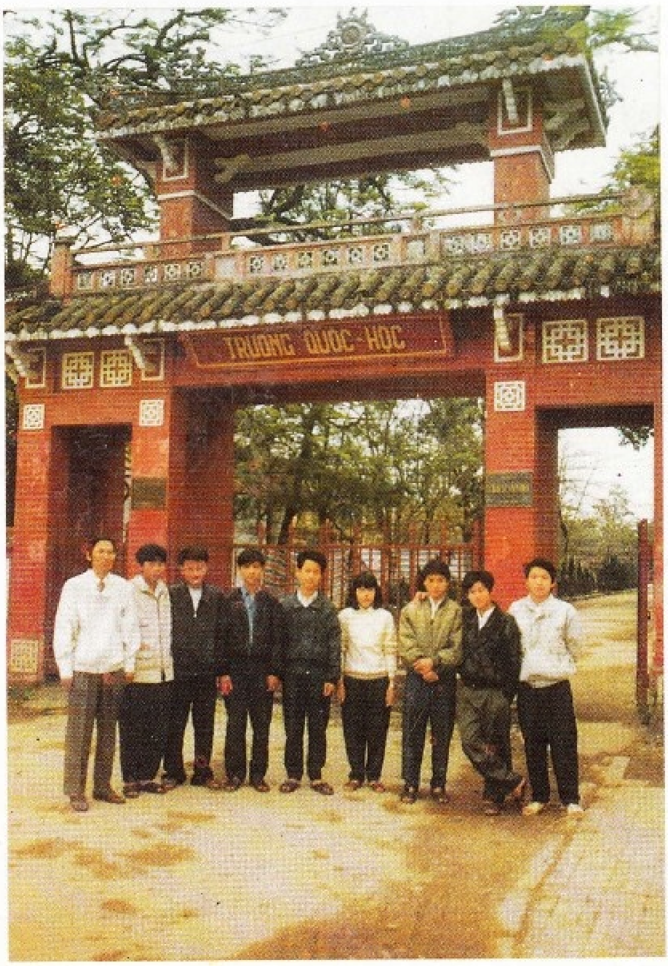
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

6(216)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

- ĐA THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ THỰC
- MỘT SỐ DẠNG KHÁC CỦA BÀI TOÁN CON BƯỚM
- ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 ĐHTH TP HỒ CHÍ MINH



PYTHAGORE

ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ TỔNG QUÁT

HỒI ÂM SAU BÀI BÁO VOI CŨNG BẰNG KIẾN

Ảnh : Trường Quốc học Huế

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : HOÀNG HẢI

Dành cho các bạn Trung học Cơ sở

ĐA THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ THỰC

NGUYỄN VĂN VĨNH
(TP Hồ Chí Minh)

Trong các kì thi học sinh giỏi, thi vào các lớp chuyên toán thường có các bài toán chứng minh một số nào đó là số nguyên, hoặc là số vô tỉ. Bài viết này xin giới thiệu với các bạn một ứng dụng của đa thức để giải các bài toán loại này.

Trong chương trình bồi dưỡng học sinh giỏi, các bạn đã biết định lí sau đây và các hệ quả về đa thức.

Định lí : Nếu phân số tối giản $\frac{p}{q}$ (p là số nguyên, q là số tự nhiên khác 0) là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_o$ (a_n khác 0) (1)

thì p là ước số của a_o và q là ước số của a_n.

Hệ quả 1. Mọi nghiệm nguyên của đa thức (1) đều là ước số của hệ số tự do a_o.

Hệ quả 2. Mọi nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_o$ đều là số nguyên.

Dựa vào định lí và các hệ quả này, có thể rút ra quy tắc sau đây để chứng minh một số a cho trước là một số vô tỉ (hay là một số hữu tỉ)

Bước 1 : Lập một đa thức với hệ số nguyên có một nghiệm $x = a$.

Bước 2 : Chứng minh rằng hoặc là đa thức vừa tìm được không có nghiệm nguyên, hoặc là trong số tất cả các nghiệm nguyên có thể có của đa thức, không có nghiệm nào bằng a.

Dưới đây là một số bài toán vận dụng.

Bài 1. Đặt $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$

Chứng minh rằng với mọi $a \geqslant \frac{1}{8}$ thì x là một số tự nhiên (Thi vào lớp 10 chuyên Toán TP Hồ Chí Minh 1982).

Giải. $x^3 = 2a + (1-2a)x$

$x^3 + (2a-1)x - 2a = 0$, như vậy x chính là nghiệm của đa thức $x^3 + (2a-1)x - 2a$ (1)

Ta có $x^3 + (2a-1)x - 2a = (x-1)(x^2+x+2a)$ xét đa thức bậc hai $x^2 + x + 2a$ có $\Delta = 1 - 8a$

– Khi $a = \frac{1}{8}$, Ta có $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1$

– Khi $a > \frac{1}{8}$, Ta có $1 - 8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm thực duy nhất $x = 1$.

Vậy với mọi $a \geqslant \frac{1}{8}$ ta có $x = 1$ là số tự nhiên

Bài 2. Chứng minh rằng số $x = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$ là một số hữu tỉ.

(Thi học sinh giỏi TP Hồ Chí Minh vòng 1 - 1985)

Giải.

Xét $x^3 = 6 - 5x$, hay $x^3 + 5x - 6 = 0$

Suy ra x là nghiệm của đa thức $x^3 + 5x - 6$ (2)

Ta có $x^3 + 5x - 6 = (x-1)(x^2+x+6)$ Vì đa thức bậc hai $x^2 + x + 6$ không có nghiệm nên $x = 1$ là nghiệm thực duy nhất của đa thức (2)

Kết luận : $x = 1$ là một số hữu tỉ.

Bài 3. Chứng minh rằng số $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ.

Giải.

Xét $a^3 = 6 + 3\sqrt[3]{8}\,(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$, hay : $a^3 - 6a - 6 = 0$

Suy ra a là nghiệm của đa thức : $x^3 - 6x - 6$ (3)

Số a không phải là số hữu tỉ, vì giả sử ngược lại a là số hữu tỉ thì theo hệ quả 2, a phải là số nguyên. Dễ thấy $2 < \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 4$, tức là $2 < a < 4$. Suy ra $a = 3$. Nhưng 3 lại không phải là nghiệm của đa thức (3). Vô lí.

Điều vô lí chứng tỏ $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ.

Bài 4. Chứng minh rằng số $c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Giải. Giả sử ngược lại c là số hữu tỉ, ta có $c^2 = 5 = 2\sqrt{6}$ Suy ra $\sqrt{6} = \dfrac{c^2 - 5}{2}$ là một số hữu tỉ. Vô lí. Điều vô lí đó chứng tỏ $c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là một số vô tỉ.

Bài 5. Chứng minh rằng số $b = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ.

Giải. Giả sử ngược lại b là một số hữu tỉ. Xét $b^3 = 5 + 3\sqrt[3]{6}\ (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})$, do đó $b^3 = 5 + 3\sqrt[3]{6}\ .\ b$. Suy ra $\sqrt[3]{6} = \dfrac{b^3 - 5}{3b}$ là một số hữu tỉ. Vô lí

Điều vô lí đó chứng tỏ $b = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ. Qua các bài toán trên đây, ta có thể đi tới mệnh đề tổng quát sau đây.

Nếu a và b là các số tự nhiên thì số $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ hoặc là một số tự nhiên, hoặc là một số vô tỉ. Thật vậy : dễ dàng kiểm tra được rằng số $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ là một nghiệm của đa thức với hệ số nguyên. $(x^3 - a - b)^3 - 27abx^3$

Theo hệ quả 2 : nếu đa thức này có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó phải là số nguyên. Do đó nếu nghiệm $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ không phải là số nguyên thì c phải là số vô tỉ.

Trong bài học "Số vô tỉ – Số thực" (Đại số 9 – 1994), các bạn đã biết các số $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{3}$ là các số vô tỉ. Dưới đây chúng ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát :

Bài 6. Nếu a là một số tự nhiên và n là số tự nhiên, $n \geq 2$ thì $\sqrt[n]{a}$ hoặc là một số nguyên hoặc là một số vô tỉ.

Giải. Giả sử $\sqrt[n]{a}$ không phải là số nguyên. Dễ thấy $c = \sqrt[n]{a}$ là một nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $x^n - a$. Đa thức này nếu có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó phải là số nguyên. Nhưng theo giả sử $\sqrt[n]{a}$ không phải là số nguyên, do đó $\sqrt[n]{a}$ phải là số vô tỉ.

Bài 7. Chứng minh rằng số

$a = \sqrt[3]{23} + \sqrt[3]{123}$ là một số vô tỉ.

Giải : Bạn dễ dàng kiểm tra được

$$\frac{5}{2} < \sqrt[3]{23} < 3$$

$$\frac{9}{2} < \sqrt[3]{123} < 5$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức, ta có : $7 < \sqrt[3]{23} + \sqrt[3]{123} < 8$

Giữa hai số tự nhiên 7 và 8 không có số tự nhiên nào, theo mệnh đề trên ta suy ra a là số vô tỉ.

Bài 8. Trong các đa thức sau đây, xác định xem nghiệm nhỏ nhất của chúng là số hữu tỉ, hay là số vô tỉ ?

a) $P(x) = x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x - 1$

b) $Q(x) = x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 1$

Giải. a) Nghiệm hữu tỉ của đa thức P(x) nếu có thì chỉ có thể là 1 hoặc −1. Nhận thấy P(1) = 0, do đó có thể phân tích

$$P(x) = (x - 1)(x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 7x + 1)$$

Đa thức $x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 7x + 1$ có bậc lẻ nên phải có ít nhất là một nghiệm thực. Mặt khác : tất cả các hệ số của đa thức bậc lẻ đều dương, do đó nghiệm thực của đa thức phải là số âm, tức là nhỏ hơn 1. Từ đó có thể kết luận nghiệm nhỏ nhất của đa thức $P(x)$ là số vô tỉ.

b) Ta có

$$Q(x) = (x+1)(x^6 - 3x^5 + 5x^4 - 6x^3 + x^2 - 7x + 1)$$

Đa thức $x^6 - 3x^5 + 5x^4 - 6x^3 + x^2 - 7x + 1$ không có nghiệm hữu tỉ. Mặt khác, dễ thấy nếu đa thức bậc chẵn này có nghiệm thực thì nghiệm đó phải dương. Vậy có thể đi tới kết luận : nghiệm nhỏ nhất của đa thức là số hữu tỉ.

Bài 9. Hãy lập một đa thức với hệ số nguyên có một nghiệm là $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Giải. Xét $a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, do đó $(a^2 - 5)^2 = 24$ hay : $a^4 - 10a^2 + 1 = 0$. Như vậy $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là nghiệm của đa thức $x^4 - 10x^2 + 1$.

Bài 10. Xác định xem, số $c = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ là số vô tỉ hay là số hữu tỉ.

Giải. Ta có $c^3 = 14 - 3c$, do đó $c^3 + 3c - 14 = 0$. Suy ra c là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên.

$P(x) = x^3 + 3x - 14$. Nhận thấy $P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 7)$ trong đó đa thức $x^2 + 2x + 7$ không có nghiệm thực. Điều này có nghĩa $x = 2$ là nghiệm thực duy nhất của $P(x)$.

Kết luận : c là số hữu tỉ ?

Bài T1/212. *Tìm số $\overline{xyz}$ biết rằng $\sqrt[3]{\overline{xyz}} = (x+y+z)^{4^n}$ với $(n \in N)$*

Lời giải : (của *Trần Thị Ngọc Hải*, 9T, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi).

Giả sử $n \geqslant 1$. Vì $x \geqslant 1$ nên nếu $y = z = 0$ thì $\sqrt[3]{\overline{xyz}} = \sqrt[3]{100} \notin N$. Trong khi đó $(x+y+z)^{4^n} \in N$. Vô lí !

nếu $y + z \geqslant 1$ thì $x + y + z \geqslant 2$, suy ra $(x+y+z)^{4^n} \geqslant 2^4 = 16 > 10 = \sqrt[3]{1000} > \sqrt[3]{\overline{xyz}}$.

Vậy $n = 0$. Ta có $\overline{xyz} = (x+y+z)^3$. (1)

Mặt khác ta có $64 < \overline{xyz} < 1000$ hay

$4 < x + y + z < 10$ (2)

Ta lại có : nếu $a \in$ N thì a^3 chia cho 9 có số dư là 0, 1, 8. Vậy $(x+y+z)^3$ chia cho 9 có số dư là 0, 1, 8.

Từ (1) suy ra $\overline{xyz}$ chia 9 có số dư là 0, 1, 8 hay $x + y + z$ chia 9 có số dư là 0, 1, 8 (3)

Từ (2) và (3) suy ra $x + y + z = 8$ hoặc 9.

* $x + y + z = 8 \Rightarrow (x+y+z)^3 = 8^3 = 512 = (5+1+2)^3$

* $x + y + z = 9 \Rightarrow (x+y+z)^3 = 9^3 = 729 \neq (7+2+9)^3$ Vậy $\overline{xyz} = 512$

Nhận xét. Có rất nhiều bạn giải đúng bài này. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Nguyễn Thị Thúy*, 8T, NK Thuận Thành, Hà Bắc ; *Lê Tiến Đạt*, Chuyên V–T, Thường Tín, Hà Tây ; *Trần Ngọc Thanh, Phạm Quốc Chính*, 9T, NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa ; *Hà Văn Thành*, 10 Lí, Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Trần Hoài Thương*, 9, NK Hà Tĩnh ; *Trương Vĩnh Lân*, 9CT, Xuân Ninh ; *Nguyễn Việt Thanh* ; 8C, Lộc Ninh ; *Trần Đức Thuận*, 9/1, Nam Lí, Quảng Bình ; *Nguyễn Đức Linh*, 8, NK Vĩnh Linh, Quảng Trị ; *Vũ Đức Phú*, 9T, Nguyễn Du ; *Nguyễn Tấn Thiện*, $9A_1$, Trương Công Định, TP Hồ Chí Minh.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/212. *Tìm tất cả số thực a, b, c để $|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|$ là đẳng thức đúng $\forall x, y, z \in R$*

Lời giải : Điều kiện cần : do đẳng thức đúng với mọi $x, y, z \in \mathbf{R}$ nên với các giá trị (1 ; 1 ; 1), (1 ; 0 ; 0), (1 ; –1 ; 0) của (x ; y ; z), ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} |a+b+c| = 1 & (1) \\ |a| + |b| + |c| = 1 & (2) \\ |a-b| + |b-c| + |c-a| = 2 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta có a, b, c cùng dấu hoặc bằng 0, nghĩa là $ab \geqslant 0$; $bc \geqslant 0$; $ca \geqslant 0$ (4). Từ (2) và (3), kết hợp với $|x - y| \leqslant |x| + |y|$, ta có :

$2|a| + 2|b| + 2|c| = |a-b| + |b-c| + |c-a| \leqslant 2|a| + 2|b| + 2|c|$.

Suy ra các dấu bằng phải xẩy ra, hay :

$ab \leqslant 0$; $bc \leqslant 0$; $ca \leqslant 0$ (5). Từ (4) và (5), ta có : $ab = bc = ca = 0$ hay hai trong ba số a, b, c phải bằng 0. Kết hợp với (1), ta có số còn lại phải bằng ± 1.

Điều kiện đủ : thay các giá trị $(\pm 1 ; 0 ; 0)$, $(0 ; \pm 1 ; 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ cho bộ ba $(a ; b ; c)$ vào đẳng thức đang xét, ta được các đẳng thức đúng với mọi $x, y, z \in \mathbf{R}$. Vậy, đó là các giá trị cần tìm của $(a ; b ; c)$.

Nhận xét. Các bài đều giải đúng, tuy nhiên còn nhiều bài giải chưa gọn, một vài bài quên nêu điều kiện đủ. Lời giải tốt gồm có : *Vũ Trung Bốn* (Quỳnh Hoa, Quỳnh Phụ, Thái Bình), *Nguyễn Thanh Hoài* (9T, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa), *Phạm Thanh Vân* (7H, PTCS chuyên Hải Phòng), *Lê Quang Nẫm* (9 Toán, Đức Phổ, Quảng Ngãi)

ĐẶNG VIỄN

Bài T3/212. *Giải và biện luận phương trình sau theo tham số a*

$$x^3 - 3x^2 + 3(a+1)x - (a+1)^2 = 0$$

Lời giải : (Của các bạn *Đỗ Minh Hoàng 9T, Bỉm Sơn, Thanh Hóa,* Nguyễn Thanh *Nga*, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, *Trần Lê Nam* 9T Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Nguyễn Việt Dũng*, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An.

Xét $a \neq -1$. Nhân hai vế với $(a+1)$ ta được

$$(a+1)x^3 - 3x^2(a+1) + 3x(a+1)^2 - (a+1)^3 = 0$$

$$\leftrightarrow ax^3 + (x - a - 1)^3 = 0$$

$$\leftrightarrow x\sqrt[3]{a} = a + 1 - x$$

$$\leftrightarrow x(1 + \sqrt[3]{a}) = a + 1$$

$$x = \frac{a+1}{\sqrt[3]{a} + 1} = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1$$

Với $a = -1$ phương trình trở thành

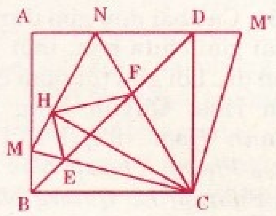
$$x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 3$$

Nhận xét : Các bạn *Lương Hữu Thuận*, 7, Nghĩa Hành, Quảng Ngãi, *Trương Vĩnh Lân*, 9 Toán, Quảng Ninh, Quảng Bình, *Đỗ Hồng Sơn*, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa cũng có lời giải tốt. Một số bạn sử dụng kết quả của bài T8/208 hoặc dùng phương pháp giải phương trình bậc ba tổng quát cũng cho kết quả đúng nhưng cách làm này dài và không phù hợp với yêu cầu cho các lớp PTCS.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/212. *Hình vuông ABCD có cạnh đơn vị. Trên cạnh AB và AD chọn hai điểm M, N sao cho chu vi tam giác AMN bằng 2. Chứng minh rằng hai tia CM, CN chia đường chéo BD thành ba đoạn thẳng mà độ dài ba đoạn này lập nên tam giác vuông có diện tích không lớn hơn* $\dfrac{1}{(2+\sqrt{2})^2}$.

Lời giải : Xét phép quay $R_c^{90^\circ}$ theo chiều kim đồng hồ, ta có : $B \to D$; Δ vuông $CBM \to \Delta$ vuông CDM', nên A, D, M' thẳng hàng và $BM = DM'$; $CM = CM'$. Ta có : $NM' = ND + DM' = ND + BM = AD + AB - (AN + AM) = 2 - (2 - MN) = MN$. Kết hợp với $CM' = CM$,



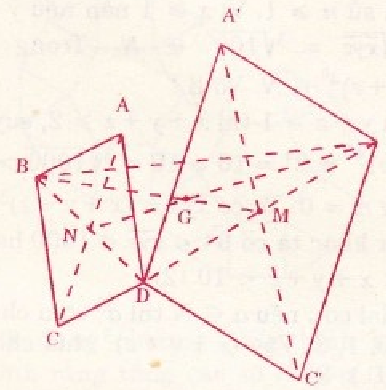
ta có CN là trung trực của MM', hay M, M' đối xứng với nhau qua CN. Lấy điểm H trên tia NM sao cho $NH = ND$, ta có H đối xứng với D qua CN (1) nên $\widehat{CHM} = \widehat{CDM'} = 90^\circ$. Mặt khác, $MH = MN - NH = NM' - NB = DM' = BM$ nên hai tam giác vuông BMC, HCM bằng nhau (tr.h.2, Δ vuông). Suy ra H đối xứng với B qua CM (2). Từ (1) và (2), ta có : $\widehat{EHF} = \widehat{EHC} + \widehat{CHF} = \widehat{EBC} + \widehat{CDF} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$. Vậy $\Delta\, EHF$ vuông tại H. Từ (1), (2) ta lại có $FH = FD$; $EH = EB$, và phần đầu của bài toán đã được chứng minh. Đặt $x = HF$; $y = HE$; S là diện tích $\Delta\, HEF$, ta có $S = \dfrac{1}{2}xy$. Do đó $x + y \geqslant 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2}\,S$ và $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2S}$. Suy ra $x + y + \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 2(1+\sqrt{2})\sqrt{S}$. Mà vế trái bằng $\sqrt{2}$ vì bằng BD, nên $\sqrt{S} \leqslant \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$ hay $S \leqslant \dfrac{1}{(2+\sqrt{2})^2}$, suy ra đpcm.

Nhận xét. Lời giải tốt gồm có : *Mai Thanh Bình* (8M, Marie Curie, Hà Nội), *Hoàng Mạnh Cường* (9A, PTCS Đồng Mĩ – Đồng Hới, Quảng Bình), *Nguyễn Anh Tuấn* (9T, Phan Bội Châu, Nghệ An). *Vũ Trung Bốn* (9A, Quỳnh Hoa, Quỳnh Phụ, Thái Bình).

ĐẶNG VIÊN

Bài T5/212. *Trong mặt phẳng cho hai hình bình hành ABCD và A'B'C'D' có đỉnh D chung. Chứng minh rằng hai tam giác AB'C và A'BC' có cùng trọng tâm.*

Lời giải. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DB' và DB, và $G = BM \cap B'N$ (nếu D không thuộc đường thẳng BB'). Dễ thấy rằng BM là đường trung tuyến chung của hai tam giác DBB', $A'BC'$ và $B'N$ là trung tuyến chung của hai tam giác DBB', $AB'C$. Vì vậy hai tam giác $AB'C$ và $A'BC'$ có cùng trọng tâm G với tam giác DBB'.



Trường hợp $D \in (BB')$ thì hai đường thẳng BM và $B'N$ trùng nhau nhưng ta cũng dễ dàng chứng minh được rằng các điểm G_1 chia trong đoạn MB và G_2 chia trong đoạn NB' theo cùng tỉ số $\dfrac{1}{2}$ trùng nhau, và do đó $G_1 \equiv G_2 \equiv G$ chính là trọng tâm của hai tam giác $AB'C$ và $A'BC'$.

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán trên nhưng ít đạt điểm tối đa. Phần đông các bạn lập luận thiếu chặt chẽ vì quên không xét trường hợp D thuộc đường thẳng BB'.

2) Một số bạn sử dụng phương pháp vectơ, lời giải khá gọn bằng cách chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$$

Mặt khác, lại có :

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

trong đó G và G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AB'C$ và $A'BC'$. Từ đó suy ra $G' \equiv G$.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : Mai Thịnh Hiệp, 9B, Nga Hải, Nga Sơn, Thanh Hóa, Hoàng Mạnh Cường, 91, Đồng Mĩ, Đồng Hới, Quảng Bình, Nguyễn Anh Tuấn, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An, Đoàn Minh Đức 8D chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình, Trần Thị Ngọc Hải, 9T, Lê Khiết, Quảng Ngãi, Lương Hữu Thuận, 7T, Nghĩa Hành, Quảng Ngãi, Ngô Đức Khánh, 10A, Lệ Thủy, Quảng Bình, Trương Thuận, 11A, Cà Mau, Minh Hải, Trần Quế Lâm, 11T, Đào Duy Từ, Quảng Bình, Nguyễn Lê Lực, 9A$_1$, Đầm Dơi, Minh Hải, Trần Đắc Anh, 9T, Năng

khiếu Hà Tĩnh, Vũ Thanh Tùng, 8T, Đông Hưng, Thái Bình, Nguyễn Hữu Cường, 10T, ĐHSP Hà Nội 1, Trần Lê Nam, 9T, Lê Khiết, Quảng Ngãi, Nguyễn Thế Vũ, 9B, Đông Sơn, Thanh Hóa, Tạ Thiện Toàn, 11B, Trần Nguyên Hãn, Hải Phòng.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T6/212 : *Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn đẳng thức :*

$$x^x + y^y = z^p$$

trong đó p là một số nguyên tố lẻ.

Lời giải (của *Nguyễn Anh Hoa* – 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định ; *Nguyễn Ngọc Hưng, Đỗ Quang Thơ, Trịnh Hữu Trung* – 10T Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Dương Văn Yên* – 10T Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Trần Nguyên Ngọc* và *Ngô Đức Thành* – A_o10T CT ĐHTH Hà Nội) : Ta chứng minh *Bài toán tổng quát* sau : "*Cho* $n \in N^*$ và số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện $n \not\vdots\, p$. *Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên dương* $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ *thỏa mãn đẳng thức :*

$$x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + ... + x_n^{x_n} = x_{n+1}.$$

Thật vậy, chọn $x_1 = x_2 = ... = x_n = n_{p-1}$ ta có :

$$x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + ... + x_n^{x_n} = n\,.\,(n^{p-1})^{n^{p-1}} =$$

$$= n^{(p-1)n^{p-1}+1} (1)$$

Vì $n \not\vdots\, p$ và p nguyên tố nên $n^{p-1} \equiv 1$ (modp) (theo Định lí nhỏ Fecma) $\Rightarrow$ $(p-1)n^{p-1} + 1 \equiv 0\ (mod p)$ ⇒ tồn tại k ∈ N* sao cho $(p-1)n^{p-1} + 1 = kp$. Bởi thế, từ (1) ta thấy, khi chọn $x_{n+1} = n^k$ thì ta sẽ có $n+1$ số nguyên dương $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} = n^k$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Đặc biệt, cho $n = 2$ và p là số nguyên tố lẻ, từ bài toán tổng quát ta có Bài toán đã ra.

Nhận xét : 1. Một số bạn cho rằng kết quả của Bài toán tổng quát nêu trên vẫn không thay đổi khi thay điều kiện "$n \in N^*$, *p là nguyên tố và* $n \not\vdots\, p$" bởi điều kiện "$n, p \in N^*$ *và* $(n, p) = 1$" !

2. Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Ngô Đức Duy, Phạm Đình Trường* (11 CT, Trần Phú, Hải Phòng) ; *Trần Tiến Dũng* (10T, Amsterđam, Hà Nội) ; *Nguyễn Bá Hùng, Lê Tuấn Anh* (10 CT, ĐHTH Hà Nội) ; *Phạm Anh Tuấn, Đỗ Hồng Sơn, Nhữ Qui Thơ, Phạm Minh Tuân, Phạm Mạnh Quang, Lê Minh Hiếu* (9T, 11T, Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Nguyễn Hồng Chung* (10T, Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Lê Quang Nảm* (9T, Đức Phổ, Quảng Ngãi) ; *Nguyễn Thị Hải Yến, Lê Anh Vũ* (11 CT, Quốc học Huế) ; *Vũ Đức Phú* (9T, Nguyễn Du, Gò Vấp, T.P. HCM) và *Nguyễn Lê Lực* ($9A_1$, Đầm Dơi, Minh Hải).

3. Do không hiểu rằng, số nguyên tố lẻ p trong bài ra là số cho trước, nên không ít bạn đã cho lời giải sai.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/212. *Chứng minh hệ phương trình*

$$x^2 = y^3 + y^2 + y + a$$
$$y^2 = z^3 + z^2 + z + a$$
$$z^2 = x^3 + x^2 + x + a$$

có một nghiệm duy nhất.

Lời giải : (của bạn *Thái Minh Hoàng* – 11T Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long) Xét hàm $f(t) = t^3 + t^2 + t + a$ có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0$ do đó $f(t)$ là hàm đồng biến. Hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} x^2 = f(y) \\ y^2 = f(z) \\ z^2 = f(x) \end{cases}$$

Không giảm tổng quát giả sử x lớn nhất

a) $x \geqslant y \geqslant z \rightarrow f(x) \geqslant f(y) \geqslant f(z)$ $\rightarrow z^2 \geqslant x^2 \geqslant y^2$. Nếu $z \geqslant 0$ thì $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$ $\rightarrow x^2 \geqslant y^2 \geqslant z^2 \rightarrow x^2 = y^2 = z^2 \rightarrow f(x) = f(y) = f(z) \rightarrow x = y = z$.

Nếu $x \leqslant 0 \rightarrow 0 \geqslant x \geqslant y \geqslant z \rightarrow$
$x^2 \leqslant y^2 \leqslant z^2 \rightarrow x^2 = y^2 = z^2 \rightarrow$
$x = y = z$.

Nếu $x > 0 > z$. Khi đó $y^2 = f(z) < f(0) = a$ $\rightarrow a > 0$. Lại có $z^2 = f(x) > f(0) = a \rightarrow$ $z < -\sqrt{a} \rightarrow y^2 = f(z) < f(-\sqrt{a}) = = -\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)^2 \leqslant 0$ vô lí.

Vậy không xảy ra $x > 0 > z$.

b) $x \geqslant z \geqslant y \rightarrow z^2 \geqslant y^2 \geqslant x^2$

Tương tự như trên nếu $y \geqslant 0$ hay $x \leqslant 0$ ta suy ra $x = y = z$.

Nếu $x > 0 > y \rightarrow x^2 = f(y) < f(0) = a$
$z^2 = f(x) > f(0) = a$. Nếu $z > \sqrt{a}$ thì $x \geqslant z > \sqrt{a} \rightarrow x^2 \geqslant z^2 \rightarrow x^2 = y^2 = z^2 \rightarrow x = y = z$ trái với $x > 0 > y$.

Nếu $z < -\sqrt{a}$ lí luận như a) ta dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = t_o$ ở đó t_o là nghiệm duy nhất của phương trình $t^3 + t^2 + t + a = 0$.

Nhận xét : Các bạn *Phạm Đình Trường* 11CT Hải Phòng, *Nguyễn Hoàng Công* 11T Quảng Ngãi, *Từ Minh Hải*, 11 Đắc Lắc, *Nguyễn Thanh Tùng*, 11T, Đồng Tháp, *Phạm Quốc Chính*, 9T Thanh Hóa có lời giải tốt. Rất nhiều bạn mắc sai lầm khi cho rằng "không mất tổng quát có thể giả sử $x \geqslant y \geqslant z$"

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/212. *Cho dãy số a_n được xác định bởi $a_1 = 1$ và*

$$a_n = 1 + n\left\{\frac{1+a_{n-1}}{n}\right\} \text{ với mọi } n \geq 2 (1)$$

Chứng minhh rằng

$$a_n = 1 + 2\left(n - 2^{[\log_2 n]}\right) \text{ với mọi } n \geq 1.$$

(Ở đây $[a]$ là phần nguyên của a và $\{a\} = a - [a]$ là phần phân của a).

Lời giải. (của tất cả các bạn)

Ta có :

$$\left[\frac{1+a_{n-1}}{n}\right] \leq \frac{1+a_{n-1}}{n} < \left[\frac{1+a_{n-1}}{n}\right] + 1$$

hay

$$n\left[\frac{1+a_{n-1}}{n}\right] \leq 1 + a_{n-1} < n\left[\frac{1+a_{n-1}}{n}\right] + n$$

Suy ra :

$$1 \leq a_n = 2 + a_{n-1} - n\left[\frac{1+a_{n-1}}{n}\right] < n + 1$$

$\forall n \geq 2$.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Khi $n = 1$, ta có :

$1 + 2\left(n - 2^{[\log_2 n]}\right) = 1 = a_1$, nên (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là :

$a_k = 1 + 2\left(k - 2^{[\log_2 k]}\right)$. Đặt $p = [\log_2 k]$ thì $a_k = 1 + 2(k - 2^p)$ và

$$p \leq \log_2 k < p + 1 \Rightarrow 2^p \leq k < 2^{p+1}.$$

Vì $a_k \leq k$ nên cần xét hai trường hợp.

Trường hợp 1 : $a_k < k$.

Khi đó

$a_k = 1 + 2(k - 2^p) < k \to 2^p \leq k < k + 1 < 2^{p+1}$
$\Rightarrow p < \log_2(k+1) < p + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow p = [\log_2(k+1)]\ a_k < k \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < 1 + a_k < k + 1 \Rightarrow \left[\dfrac{1+a_k}{k+1}\right] = 0$

Do vậy

$$a_{k+1} = 2 + a_k - (k+1)\left[\frac{1+a_k}{k+1}\right] = 2 + a_k$$

$= 2 + 1 + 2(k - 2^p) = 1 + 2(k + 1 - 2^p) = 1 + 2\left(k + 1 + 2^{[\log_2(k+1)]}\right)$.

Trường hợp 2 :

$$a_k = k$$

Khi đó

$$a_k = 1 + 2(k - 2^p) = k \Rightarrow k + 1 = 2^{p+1} \Rightarrow$$

$$p + 1 = [\log_2(k+1)].$$

Vậy $a_{k+1} = 2 + a_k - (k+1)\left[\dfrac{1+a_k}{k+1}\right] =$

$= 2 + a_k - (k+1)\left[\dfrac{1+k}{k+1}\right]$

$= 2 + a_k - (k+1) = 2 + 1 + 2(k - 2^p) - 2^{p+1}$

$= 1 + 2(k + 1 - 2^{p+1})$

$= 1 + 2\left(k + 1 - 2^{[\log_2(k+1)]}\right)$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Ngô Đức Thành, Nguyễn Bá Hùng, Trần Nguyên Ngọc* (A_o ĐHTHHN), *Đặng Thanh Hà* (11A CT ĐHSPHN1), *Lê Đức* (9^A Ngô Sĩ Liên, Hà Nội), *Lê Văn Mạnh* (11CT Hòa Bình), *Phạm Thy Hùng* (11A Chuyên Thái Bình), *Đào Xuân Vinh, Nguyễn Thị Hải Yến, Cao Thế Anh, Lê Anh Vũ* (QH Huế), *Tôn Thất Thắng* ($11A_1$ Lê Quý Đôn, Đà Nẵng), *Nguyễn Lê Lực* ($9A_1$ Đầm Dơi, Minh Hải), *Nguyễn Hồng Chung* (10T Phan Bội Châu, Nghệ An), *Lê Quang Nẫm* (9, chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi), *Cao Quyết Hiệp* (9T Năng khiếu, Hoằng Hóa, Thanh Hóa), *Nhữ Quý Thơ*, Sao Đỏ, *Nguyễn Ngọc Hưng, Trịnh Hữu Trung, Lê Minh Hiếu, Phạm Minh Tuân,* (Lam Sơn, Thanh Hóa), *Nguyễn Trọng Hòa* (Phan Đăng Lưu), *Phạm Đình Trường, Ngô Đức Duy* (Trần Phú, Hải Phòng)

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/212. *Các điểm A_o, B_o, C_o, D_o tương ứng là trọng tâm các mặt BCD, CDA, DAB, ABC của tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng là các điểm đối xứng của các đỉnh A, B, C, D của tứ diện qua một điểm O cho trước trong không gian. Chứng minh rằng các đường thẳng A_oA_1, B_oB_1, C_oC_1 và D_oD_1 đồng quy.*

Lời giải. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và O' đối xứng với O qua G ; thế thì, theo giả thiết ta có các hệ thức sau :

(i) $2\overrightarrow{OO'} = 4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
$= \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OA_o} = \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OB_o} =$
$= \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OC_o} = \overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OD_o}$

hay là :

(ii) $2\overrightarrow{OO'} = -\overrightarrow{OA_1} + 3\overrightarrow{OA_o} = -\overrightarrow{OB_1} + 3\overrightarrow{OB_o} =$
$= -\overrightarrow{OC_1} + 3\overrightarrow{OC_o} = -\overrightarrow{OD_1} + 3\overrightarrow{OD_o}$

Các hệ thức (ii) này chứng tỏ rằng các đường thẳng A_oA_1, B_oB_1, C_oC_1 và D_oD_1 đồng quy ở điểm O', chia ngoài các đoạn thẳng tương ứng theo tỉ số 1/3 :

$$\frac{\overline{O'A_o}}{\overline{O'A_1}} = \frac{\overline{O'B_o}}{\overline{O'B_1}} = \frac{\overline{O'C_o}}{\overline{O'C_1}} = \frac{\overline{O'D_o}}{\overline{O'D_1}} = \frac{1}{3}$$

Nói khác đi là, tứ diện $A_oB_oC_oD_o$ là bình vị tự của tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ trong phép vị tự $V^{1/3}$, tâm O', tỉ số $\frac{1}{3}$, trong đó O' đối xứng với O qua trọng tâm G của tứ diện $ABCD$.

Nhận xét. 1°) Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này ; tuy nhiên phần đông các bạn không sử dụng phương pháp véctơ hoặc không sử dụng độ dài đại số nên nhìn chung lập luận thiếu chặt chẽ. Cũng rất đáng tiếc, có một bạn sử dụng véctơ nhưng chứng minh sai : Lấy điểm A_2, xác định bởi $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_2}$ rồi chứng minh $\overrightarrow{A_oA_2} = \overrightarrow{A_1A_o}$ từ đó kết luận A_oA_1 đi qua điểm A_2. Điều này đúng, nhưng từ đó không thể kết luận B_oB_1, C_oC_1 và D_oD_1 đều đi qua A_2, bằng suy luận tương tự ! ! !).

2°) Cũng có thể sử dụng phương pháp biến hình để giải bài toán trên. Thật vậy, phép đối xứng tâm O chính là phép vị tự V_o^{-1}, tâm O, tỉ số -1. Xét phép đồng dạng Z là tích của phép đối xứng, tâm O và phép vị tự $V_G^{-1/3}$ tâm G, tỉ số $-\frac{1}{3}$

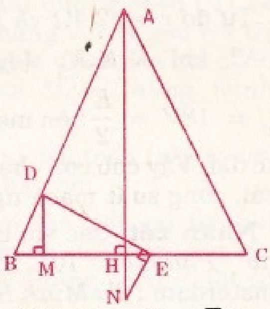
$$Z = V_G^{-1/3} . V_o^{-1}$$

Rõ ràng là phép đồng dạng Z này biến tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ thành tứ diện $A_oB_oC_oD_o$ và Z là một phép vị tự, tỉ số $k = (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Do đó các đường thẳng A_oA_1, B_oB_1, C_oC_1 và D_oD_1 đồng quy ở tâm vị tự O'.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/212 : *Cho tam giác ABC cân ở A. Trên AB lấy một điểm D và trên BC ta lấy một điểm E sao cho hình chiếu của DE lên BC bằng $\frac{1}{3}$ BC. Chứng minh rằng đường vuông góc với DE tại E luôn luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải : (Mai Đức Khoa, 12A, Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa)



Gọi M, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và A trên BC, gọi giao điểm của đường thẳng qua E vuông góc với DE và đường thẳng AH là N. Ta có $BH = ME = 1/2\ BC \Rightarrow BM = HE$

Mặt khác $\widehat{HNE} = \widehat{MED}$ (cùng phụ với $\widehat{HEN}$)

Do đó $\Delta\, HNE \backsim \Delta\, MED$ (trường hợp đồng dạng của Δ vuông).

$$\Rightarrow \frac{HN}{ME} = \frac{HE}{DM} \Rightarrow \frac{2HN}{BC} = \frac{HE}{DM} = \frac{BM}{DM} = \frac{BH}{HA}$$

$$\Rightarrow HN = \frac{BH\ .\ BC}{2HA}$$

Vậy N là điểm cố định và ta có đpcm.

Nhận xét

1. Bài này được các bạn giải bằng nhiều cách. Số đông giải rất dài.

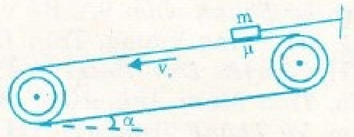
2. Các bạn sau đây giải đúng và ngắn gọn : *Vũ Ngọc Dương*, 8 toán cấp II năng khiếu Thái Nguyên, Bắc Thái ; *Lê Văn Mạnh* 11CT PTTH Chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình ; *Ngô Văn Sáng*, 9A THCS Chu Văn An, *Lê Đức*, 9A, THCS Ngô Sỹ Liên, *Mai Thanh Bình, Trần Anh Sơn, Nguyễn Trung Tú, Đỗ Đức Hạnh* 8M, Mari Quyri, *Lê Thành Nam* 9A, Bế Văn Đàn, *Trần Bàng* 9H Trưng Vương, *Trần Hải Sơn*, 10A ĐHTH, *Nguyễn Duy Tùng*, 10A1 THCB Hoàn Kiếm, *Trần Minh Anh*, 10T1 Hà Nội – Amsterdam, *Vũ Thành Trung*, PTTH Nguyễn Trãi, *Nguyễn Sỹ Phong, Phan Linh*, 9A, PT chuyên NN, *Đặng Thanh Hà* 11A CT ĐHSPHNI, *Võ Quỳnh Anh*, 9CT, Nghĩa Tân, *Nguyễn Chí Vương*, 10A PTTH Liên Hà, Đông Anh, Hà Nội ; *Nguyễn Xuân Hào*, 12A PTTH Ngô Quyền, *Nguyễn Anh Hoa, Đặng Việt Cường, Nguyễn Thanh Nga* 9T, *Nguyễn Hồng Dung*, 8T, Trần Đăng Ninh, *Trần Đức Quyền* 10A1, Lê Hồng Phong, *Phạm Thanh Hải* 10A1, PTTH Hà Nam, Nam Hà ; *Trần Hoàng Việt*, 11A PTTH Chí Linh, Hải hưng ; *Trương Trọng Khanh* 10CT, Vĩnh Lạc, Vĩnh Phú ; *Phạm Đình Trường, Ngô Đức Duy* 11CT, PTNK Trần Phú, Hải Phòng ; *Phùng Thanh Tùng* 9CT TX Thái Bình, *Tạ Thị Bích Hạnh* 10A PTTH Nguyễn Huệ, Hà Tây ; *Đỗ Hồng Sơn, Trần Ngọc Thanh, Nguyễn Thanh Hoài*, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Nguyễn Anh Dũng* 11A ĐHSP Vinh, Nghệ An ; *Nguyễn Anh Tuấn B, Trần Tiên Giang*, 9T NK Hà Tĩnh ; *Hoàng mạnh Cường*, 91 CII Đồng Mỹ, Quảng Bình ; *Nguyễn Đức Linh*, 8 NK Vĩnh Linh, Quảng Trị ; *Lê Minh Trường, Cao Thế Anh*, 10CT Quốc học Huế ; *Tôn Thất Thắng*, 11A1 PTTH Lê Quý Đôn, Quảng Nam – Đà Nẵng ; *Trần Lê Nam*, 9T, Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Từ Minh Hải* ; 11CT PTTH Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc ; *Đàm Khánh Hòa*, 10T Lương Văn Chánh, Phú Yên ; *Nguyễn Thành Trung*, 11T PTTH Chuyên Bình Thuận ; *Nguyễn Nhật Nam*, 11A, Vũng Tàu, Bà Rịa – Vũng Tàu, *Nguyễn Hoàng Lộc*, 10CT Lê Hồng Phong, *Vũ Đức Phú*, 9T Nguyễn Du, Gò Vấp, TP Hồ Chí Minh ; *Lưu Bảo Linh*, 11/1, Trương Định, Gò Công, Tiền Giang ; *Nguyễn Tấn Anh Khoa*, 10T Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long ; *Nguyễn Thanh Tùng*, 11T PTTH SaĐéc, Đồng Tháp ; *Trương Thuận*,

11A, *Lê Chí Nguyễn*, 10A, Chuyên Phan Ngọc Hiển, Cà Mau ; *Nguyễn Lê Lực* 9A1 THCS Đầm Dơi, Minh Hải.

VŨ KIM THỦY.

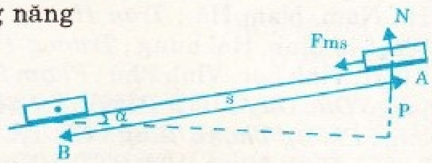
Bài L1/212

Một băng chuyền nghiêng một góc α so với phương ngang, dang chuyển động v_o xuống dưới. Một hòn gạch nằm trên băng chuyền và được giữ yên bằng một sợi dây buộc cố định ở đầu trên (hình vẽ). Người ta cắt đứt dây. Tính công của lực ma sát tác dụng lên hòn gạch cho đến thời điểm hòn gạch đạt được vận tốc v_o của băng chuyền. Cho hệ số ma sát giữa viên gạch và băng chuyền là μ, khối lượng của viên gạch là m



Hướng dẫn giải

Ta hãy xét chuyển động của viên gạch trong hệ quy chiếu gắn với mặt đất. Trong hệ quy chiếu này viên gạch chịu tác dụng của ba lực : trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{N}$ của băng chuyền và lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$. Hợp lực của chúng sẽ truyền gia tốc cho viên gạch làm tăng vận tốc của nó từ 0 đến v_o (hình vẽ). Áp dụng định lí động năng



$$A_p + A_{F_{ms}} = \Delta W_d$$

$$\rightarrow mgh + F_{ms}s = \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$\rightarrow mgs\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = \frac{1}{2}mv_o^2$$

Suy ra $S = \dfrac{v_o^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$

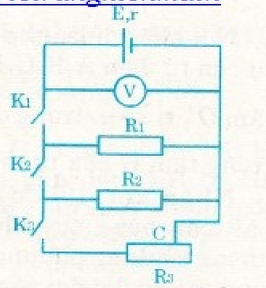
$$A_{F_{ms}} = F_{ms} \,.\, S = \frac{\mu mg\cos\alpha \,.\, v_o^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

$$A_{F_{ms}} = \frac{mv_o^2}{2} \cdot \frac{\mu}{\mu + tg\alpha}$$

Nhận xét. Các em có lời giải tốt : *Tô Huy Cường*, 11A1, PTTH chuyên Thái Bình ; *Mai Thế Hùng* 11CT Đào Duy Từ, Quảng Bình, *Đạo Lí* 12A PTTH chuyên Thái Bình ; *Lương Văn Thường*, 10L, PTTH chuyên Nghệ An ; *Nguyễn Hồng Minh*, Bo10A, PTCL, ĐHTH Hà Nội.

OK.

Bài L2/212



Với mạch điện vẽ bên, số chỉ của vôn kế là 30V như ngắt K_1 mở, là 27V khi chỉ đóng ngắt K_1, là 24V khi chỉ đóng 2 ngắt K_1K_2, là 18V khi đóng cả $K_1K_2K_3$. Biết khi đóng $K_1K_2K_3$, biến trở 3 = 4,8Ω và nguồn điện phát công suất 270W.

1) Tính E, r và giá trị mọi điện trở ngoài

2) Nhích con chạy C ở R_3 sang phải hay sang trái để công suất mạch ngoài giảm.

Lời giải. Khi đóng $K_1K_2K_3$, có dòng chính qua nguồn

$$I''' = \frac{E}{r} - \frac{18}{r} = \frac{18}{R_v} + \frac{18}{R_1} + \frac{18}{R_2} + \frac{18}{4,8} \quad (1)$$

Khi chỉ đóng K_1K_2 dòng chính qua nguồn

$$I'' = E_r - \frac{24}{r} = \frac{24}{R_v} + \frac{24}{R_1} + \frac{24}{R_2} \quad (2)$$

Khi chỉ đóng K_1 dòng chính qua nguồn

$$I' = \frac{E}{r} - \frac{27}{r} = \frac{27}{R_v} + \frac{27}{R_1} \quad (3)$$

Khi K_1 mở, dòng chính qua nguồn

$$I = \frac{E}{r} - \frac{30}{r} = \frac{30}{R_v} \quad (4)$$

Từ đó $4I''' - 3I'' = \dfrac{E}{r} = 15 \rightarrow E = 15r$

$$9I'' - 8I' = \frac{E}{r} = \frac{216}{R_2} \rightarrow R_2 = 14,4\Omega$$

$$10I' - 9I = \frac{E}{r} = \frac{27}{R_1} \rightarrow R_1 = 18\Omega$$

Ta có $P''' = EI''' = E\left(\dfrac{E}{r} - \dfrac{18}{r}\right) = 270 \rightarrow E = 36\Omega$

Từ đó $r = 2,4\Omega$ và $R_v = 12\Omega$

Vì khi $K_1K_2K_3$ đóng có $R_3 = 4,8\Omega$ và $U_v = 18V = \dfrac{E}{2}$ nên mạch ngoài đạt công suất cực đại. Vậy cho con chạy C sang trái hay sang phải, công suất mạch ngoài đều giảm.

Nhận xét. Các em có lời giải tốt : *Nguyễn Đức Phương*, 10L, PTTH Hà Nội – Amsterdam ; *Từ Minh Hải*, 11CT, PTTH Buôn Ma Thuột, Daklak ; *Hoàng Thành Ngọc*, 11CL, PTTH Lương Văn Tụy, Ninh Bình ; *Lưu Bảo Linh*, 11/1, PTTH Trương Định, Gò Công, Tiền Giang ; *Mai Thế Hùng* 11CT Đào Duy Từ, Quảng Bình.

MT

MỘT SỐ DẠNG KHÁC CỦA BÀI TOÁN "Con Bướm".

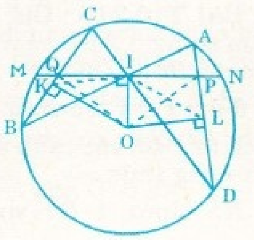
PHAN NAM HÙNG
(Quảng Ngãi)

Chắc nhiều bạn trẻ yêu toán đã được làm quen với bài toán "Con bướm". Trong bài viết này tôi muốn được trao đổi bằng những lập luận hợp lý ta có thể đi đến một kết quả mạnh hơn kết quả của bài toán "Con bướm".

Trước hết ta xuất phát từ bài toán "Con bướm"

Bài toán 1. (Bài toán con bướm).

Cho một đường tròn tâm O và dây cung MN ; Gọi I là trung điểm của dây cung đó. Qua I ta kẻ hai dây cung khác là AB và CD. Nối AD và BC hai dây cung này lần lượt cắt MN tại P và Q



Chứng minh IP = IQ.

Giải.

Từ O ta hạ $OK \perp CB$ và $OL \perp AD$ Nối OP và OQ.

Dễ thấy tứ giác $OIQK$ nội tiếp được đường tròn, vì vậy $\widehat{IOQ} = \widehat{IKQ}$ (1)

Tương tự, $OIRL$ cũng là tứ giác nội tiếp, vì vậy : $\widehat{IOP} = \widehat{ILP}$ (2)

Nhưng ta lại có $\Delta\, CIB \backsim \Delta\, AIO$ và từ $OK \perp CB$ và $OL \perp AD$ cho nên K và L lần lượt là trung điểm của các dây cung CB và AD cho nên $\Delta\, CIK \backsim \Delta\, AIL \Rightarrow \widehat{IKQ} = \widehat{ILP}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{QOI} = \widehat{POI}$ hay OI là phân giác $\widehat{QOP}$ mà $OI \perp PQ$ cho nên $IP = OQ$ (đ.p.c.m) hình - 1.

Tôi có thể phát biểu dưới dạng bài toán sau

"Cho tứ giác $ADBC$ nội tiếp đường tròn tâm O ; gọi I là giao điểm hai đường chéo CD và AB, MN là một đường thẳng vuông góc với OI tại I ; P và Q lần lượt là giao điểm của hai cạnh đối diện CB và DD với MN. Chứng minh $IP = IQ$".

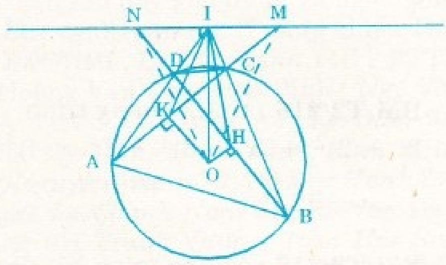
Các bạn chú ý nội dung bài toán trên so với bài toán 1 không có gì thay đổi.

Nhưng tôi nghĩ ta có thể đổi vai trò hai đường chéo thành hai cạnh đối diện còn hai cạnh đối diện thành hai đường chéo - Tôi có bài toán sau.

Bài toán 2 :

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O ; gọi I là giao điểm của hai cạnh đối diện AD và BC kéo dài (điều kiện AB ≠ CB) qua I ta dựng đường thẳng d vuông góc với OI ; đường thẳng này cắt hai đường chéo AC và BD kéo dài tại M và N.

Chứng minh IM = IN



Giải :

Nối OM với ON ; Từ O hạ $OH \perp BD$ và $OK \perp AC$ xét tứ giác $IHON$ có I và H cùng nhìn ON với một góc vuông cho nên tứ giác đó nội tiếp vậy ta có : $\widehat{IHN} = \widehat{ION}$ (1)

Tương tự ta cũng có tứ giác $IKOM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IKM} = \widehat{IOM}$ (2)

Ta lại có $\Delta\, IBD$ và $\Delta\, IAC$ có góc I chung và $\widehat{B} = \widehat{A}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{DC}$) cho nên $\Delta\, IBD \backsim \Delta\, IAC$ mà $OH \perp BD$ và $OK \perp AC \Rightarrow H$ và K là trung điểm của các cạnh BD và AC cho nên $\Delta\, IHD \backsim \Delta\, IKC \Rightarrow \widehat{IHN} = \widehat{IKM}$ (3)

từ (1) ; (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{ION} = \widehat{IOM}$ mà $OI \perp MN \Rightarrow IM = IN$ (đ.p.c.m)

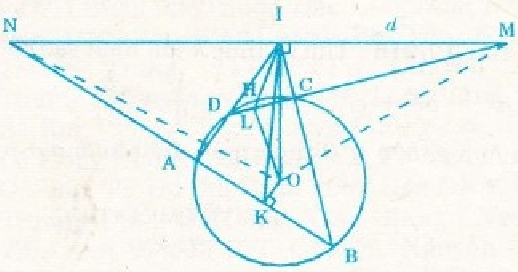
Nếu trong bài toán 2 tôi thay hai đường chéo BD và AC bởi hai cạnh đối diện còn lại là : DC và AB tôi có bài toán 3.

Bài toán 3.

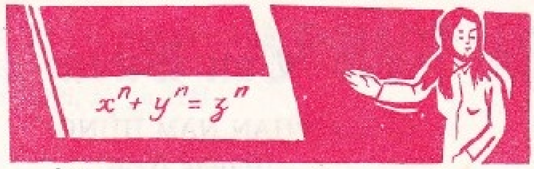
Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O ; gọi I là giao điểm hai cạnh đối diện AD và BC kéo dài ; qua I, dựng đường thẳng d vuông góc với OI ; Cạnh DC và AB kéo dài lần lượt cắt d tại M và N.

Chứng minh IM = IN

Giải :



(xem tiếp trang 15)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/216 : Tìm 6 chữ số tận cùng của số 5^{21}

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

Bài T2/216 : Giải phương trình

$$(x + 2)^2 + (x + 3)^3 + (x + 4)^4 = 2$$

THỚI NGỌC ÁNH
(Quảng Ngãi)

Bài T3/216 : Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[4]{1 - a^2} + \sqrt[4]{1 - a} + \sqrt[4]{1 + a} < 3$$

với $|a| < 1$

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T4/216 : Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ trong đó $B = B'$, $A + A' = 180^o$. Chứng minh rằng

$(a + b)(a' - b') = cc'$

$(a = BC, b = CA, c = AB, a' = B'C', b' = C'A', c' = A'B'$ với $a' > b')$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T5/216 : Gọi (O, R), (I, R_a) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. Chứng minh rằng

$$IA \,.\, IB \,.\, IC = 4R \,.\, R_a^2$$

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

CÁC LỚP THCB

Bài T6/216 : Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng số $5^p - 2^p$ không thể biểu diễn dưới dạng a^m trong đó a và m là các số tự nhiên và $m > 1$.

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

Bài T7/216 : Tìm số thực k lớn nhất sao cho :

$$a^3 + b^3 + c^3 + kabc \geq \frac{1}{9} + \frac{k}{27}$$

với mọi $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Hà Nội)

Bài T8/216 : cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 1$ và $(n + 1)(x_{n+1} - x_n) \geq 1 + x_n$ $\forall n \geq 1$ $(n \in N)$ Chứng minh rằng dãy số (x_n) không bị chặn.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Hà)

Bài T9/216 : Giả sử M là một điểm bất kì nằm trong một tứ diện gần đều $ABCD$. Hạ MM_1, MM_2, MM_3 và MM_4 lần lượt vuông góc với các mặt (BCD), (CDA), (DAB) và (ABC). Gọi r và ρ lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng :

a) $MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2 \geq$

$\geq 4\rho^2 \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C$

b) $\dfrac{r}{\rho} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Bài T10/216 : Giả sử P là một điểm tùy ý nằm trong ΔABC và α, β, γ là độ lớn các góc của ΔABC. Kí hiệu R_1, R_2, R_3 là khoảng cách từ điểm P tới các đỉnh và r_1, r_2, r_3 là khoảng cách từ P tới các cạnh của ΔABC. Chứng minh bất đẳng thức :

$R_1^2 \,.\, \sin^2\alpha + R_2^2 \,.\, \sin^2\beta + R_3^2 \,.\, \sin^2\gamma \leq$

$\leq 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

Khi nào đạt được dấu đẳng thức.

HOÀNG ĐỨC TÂN
(Hà Nội)

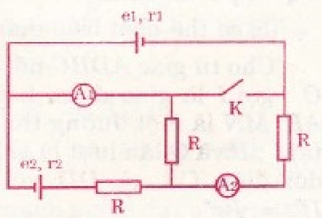
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/216 : Cho mạch điện như hình vẽ $e_1 = 10V$, $r_1 = 0$, $e_2 = 5V$, $r_2 = \dfrac{2}{5}R$. Bỏ qua giá trị điện trở của dây nối, khóa K và Ampe kế. Khi K đóng A_2 chỉ $0{,}5A$.

1) Xác định số chỉ của A_1 khi K đóng

2) Xác định số chỉ của A_1 và A_2 khi K mở.

Biết rằng R và R_A có giá trị nguyên dương. Hai Ampe kế A_1 và A_2 có giá trị điện trở như nhau



LẠI THẾ HIỂN
(Thái Bình)

Bài L2/216 : Sức cản của không khí tỉ lệ với vận tốc của một vật theo hệ số k. Một vật rơi từ độ cao h xuống mất thời gian là t_o. Người ta nhận thấy cũng vật ấy nhưng được ném lên độ cao h với vận tốc v_o thì cũng mất thời gian là t_o. Chứng minh rằng t_o và v_o liên hệ với nhau không phụ thuộc vào h.

NGUYỄN LÊ DŨNG
(TP Hồ Chí Minh)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS.

T1/216. Find the last six digits of the number 5^{21}.

T2/216. Solve the equation
$$(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$$

T3/216. Prove the inequality
$$\sqrt[4]{1-a^2} + \sqrt[4]{1-a} + \sqrt[4]{1+a} < 3$$
for $|a| < 1$.

T4/216. Let be given two triangles ABC and $A'B'C'$ such that $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{A} + \widehat{A'} = 180^o$. Prove that
$$(a+b)(a'-b') = cc'$$
($a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $a' = B'C'$, $b' = C'A'$, $c' = A'B'$; suppose that $a' > b'$).

T5/216. Let (O, R) and (I, R_a) be respectively the circumcircle and the excircle (in angle A) of the triangle ABC. Prove that
$$IA.IB.IC = 4R.R_a^2.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS.

T6/216. Prove that for every prime p, the number $5^p - 2^p$ can not be represented as a^m, where a and m are natural numbers, $m > 1$.

T7/216. Find the greatest real number k such that
$$a^3 + b^3 + c^3 + kabc \geqslant \frac{1}{9} + \frac{k}{27}$$
for every $a, b, c \geqslant 0$ satisfying $a + b + c = 1$.

T8/216. Let be given a sequence (x_n) such that $x_1 = 1$ and $(n+1)(x_{n+1} - x_n) \geqslant 1 + x_n$, $\forall n \geqslant 1$ ($n \in \mathbf{N}$). Prove that the sequence (x_n) is not bounded.

T9/216. Let M be an arbitrary point inside an equifaced tetrahedron $ABCD$ and let M_1, M_2, M_3, M_4 be the orthogonal projections of M respectively on the faces (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Let r denote the radius of the inscribed sphere of $ABCD$ and ρ denote the radius of the circumcircle of a face of $ABCD$. Prove that :

a) $MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2 \geqslant$
$\geqslant 4\rho^2 \cos A \cos B \cos C$;

b) $\dfrac{r}{\rho} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

T10/216. Let P be an arbitrary point inside the triangle ABC and α, β, γ be the measures of the angles of this triangle. Let R_1, R_2, R_3 be the distances from P to the vertices and r_1, r_2, r_3 be the distances from P to the sides of ABC. Prove the relation :
$$R_1^2\sin^2\alpha + R_2^2\sin^2\beta + R_3^2\sin^2\gamma \leqslant$$
$$\leqslant 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2).$$
When does equality occur ?

Bạn có biết.

Kí số Hi Lạp cổ

Chúng ta đã biết có một số các hệ kí số được viết theo cộng các giá trị các kí số có mặt trong số đó. Quen thuộc nhất là hệ kí số La Mã. Ở đây, xin giới thiệu với các bạn hai hệ kí số nữa được viết cùng theo phương pháp trên.

Hệ *Attic* của kí số được sử dụng trong thời Hi Lạp cổ. Các số 1, 2, 3, 4 được kí hiệu bởi các vạch đứng I, II, III, IIII. Số 5 được kí hiệu là Γ (chữ cái đầu của từ cổ *pente* – năm đọc là *pi*) ; Các số 6, 7, 8, 9 được viết là Γ I, Γ II, Γ III, Γ IIII. Số 10 được viết là Δ (chữ cái đầu của *deca* – mười). Các số 100, 1000, 10 000 được kí hiệu là H, X, M các chữ đầu của các tên gọi số tương ứng. Các số 50, 500 và 5000 được cho bởi tổ hợp các kí số 5 – 10, 5 – 100 và 5 – 1000 : F , F , F . Các số còn lại trong phạm vi 10 000 được viết dưới dạng cộng giá trị. Ví dụ :

HHH F Γ II = 357, XXHH F III = 2 254,

HHH F Δ Δ Δ Δ III = 393,

F XXX F HH Δ Δ = 8 720, ...

Trong thế kỉ thứ III trước công nguyên, hệ kí số Attic đã cung cấp cách viết số được gọi là hệ Ionian. Các số từ 1 đến 9 được kí hiệu bởi chín chữ đầu của chữ cái Hi Lạp :

$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4, \varepsilon = 5, \varsigma = 6, \zeta = 7, \eta = 8, \vartheta = 9$. Các số từ 10 đến 90 được kí hiệu bằng chín chữ tiếp theo :

$\tau = 10, \kappa = 20, \lambda = 30, \mu = 40, \nu = 50, \xi = 60, o = 70, \pi = 80$, ϙ $= 90$.

Các số 100 đến 900 là chín chữ cuối cùng :

$\rho = 100, \sigma = 200, \tau = 300, = 400, \varphi = 500, \chi = 600, \Psi = 700, \omega = 800$, ϡ $= 900$

Các số hàng nghìn, hàng chục nghìn được kí hiệu như trên, nhưng thêm vào đằng trước dấu phẩy hoặc một sổ dọc. Ví dụ :

$|\varepsilon = 5000, |\omega = 800\,000, \ldots$

Người ta dùng một vạch ngang đặt trên các kí số để phân biệt với chữ viết. Ví dụ :

$\overline{\tau\beta} = 12, \overline{\mu\varepsilon} = 45, \overline{\omega\pi\gamma} = 883$

Trong thời đó, các loại kí số trên được dùng rất nhiều nơi như Arabs, Jews và nhiều dân tộc khác ở vùng Cận Đông. Chẳng ai có thể biết nó xuất xứ từ đâu.

NGUYỄN CAO THẮNG
(TP Hồ Chí Minh).
Sưu tầm

ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ TỔNG QUÁT

NGUYỄN MINH HÀ
(Hải Phòng)

Định lí Ptôlêmê là định lí nổi tiếng trong hình học phẳng

Định lí 1 (Ptôlêmê) : Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A). Khi đó :

$$AB.MC + CA.MB = BC.MA$$

Người ta đã tổng quát hóa định lí 1 thành bất đẳng thức Ptôlêmê. Trong bài báo này tôi xin giới thiệu một hướng tổng quát hóa khác của nó.

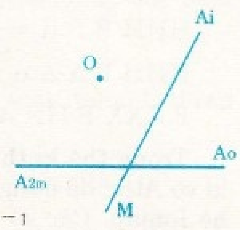
Hãy cứ xem định lí 1 là định lí Ptôlêmê cho tam giác (nội tiếp). Vậy có hay không một định lí Ptôlêmê cho đa giác nội tiếp. Để giải quyết vấn đề này, trước hết hãy bắt đầu từ một trường hợp đơn giản mà ta có thể xem nó là định lí Ptôlêmê cho đa giác đều (nội tiếp) với số cạnh lẻ.

Định lí 2 : Cho đa giác đều $A_oA_1...A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O) M là một điểm thuộc cung $\overset{\frown}{A_oA_{2n}}$ (không chứa $A_1 ; ... ; A_{2n-1}$)

Khi đó :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} MA_{2k} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} MA_{2k-1}$$

Chứng minh : Với mọi $i = 0, 1, ..., 2n$ ta có (h.1) :



$R^2 = OA_i^2 = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_i})^2$

$= OM^2 + MA_i^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA_i}$

$= R^2 + MA_i^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA_i}$

Suy ra : $MA_i^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA_i} = 0$

$\Rightarrow MA_i + 2\overrightarrow{OM}.\dfrac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i} = 0$

Suy ra : $\sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} MA_{2k} - \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} MA_{2-k-1}$

$+ 2\overrightarrow{OM}.\left(\sum\limits_{0 \leqslant k < n} \dfrac{\overrightarrow{MA_{2k}}}{MA_{2k}} - \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{\overrightarrow{MA_{2k-1}}}{MA_{2k-1}}\right) = 0$

Nhờ giả thiết $A_oA_1...A_{2n}$ là đa giác đều nội tiếp đường tròn (O) ta có :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{\overrightarrow{MA_{2k}}}{MA_{2k}} - \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\overrightarrow{MA_{2k-1}}}{MA_{2k-1}} = \overrightarrow{0} \ (*)$$

Vậy : $\sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} MA_{2k} - \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} MA_{2k-1} = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} MA_{2k} = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} MA_{2k-1}$

Định lí 2 đã được chứng minh. Trong phép chứng minh trên ta thấy đẳng thức (*) đóng vai trò quyết định. Nhận xét này gợi cho ta hướng phát biểu và chứng minh một định lí tổng quát hơn.

Định lí 3 (Ptôlêmê tổng quát) : Trong mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_oA_1...A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung $\overset{\frown}{A_oA_{2n}}$ (không chứa $A_1 ; ... ; A_{2n-1}$).

Khi đó : $\sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \left\{ tg\left[\dfrac{1}{4}(OA_{2k-2}, OA_{2k})\right] + tg\left[\dfrac{1}{4}(OA_{2k}, OA_{2k+2})\right]\right\} MA_{2k}$

$= \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left\{ tg\left[\dfrac{1}{4}(OA_{2k-3}, OA_{2k-1})\right] + tg\left[\dfrac{1}{4}(OA_{2k-1}, OA_{2k+1})\right]\right\} MA_{2k-1}$

Trong đó : $A_{-1} = A_{2n} ; A_{-2} = A_{2n-1} ;$
$A_{2n+1} = A_o ; A_{2n+2} = A_1$

Trong định lí trên cũng như trong các định lí tiếp theo, kí hiệu (Ox, Oy) chỉ góc định hướng giữa hai tia Ox, Oy

Để chứng minh định lí 3, trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau :

Bổ đề 4 (Định lí "Con nhím") : Trong mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và hệ véctơ đơn vị : $\vec{e_1} ; \vec{e_2} ; ... \vec{e_n}$.

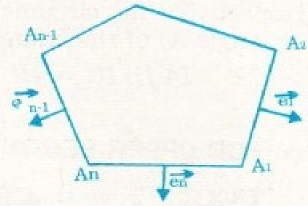
Xác định như sau :

$$\overrightarrow{e_i} = R^{-90^0}\left(\frac{\overrightarrow{A_iA_{i+1}}}{A_iA_{i+1}}\right) \ i = 1, 2, ..., n$$

Trong đó $A_{n+1} = A_o$; R^{-90^0} là phép quay véctơ góc quay -90^o

Khi đó : $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} A_iA_{i+1}\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$

Chứng minh :



Ta có (h.2) $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} A_iA_{i+1}\overrightarrow{e_i}$

$= \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} A_iA_{i+1}R^{-90^0}\left(\dfrac{\overrightarrow{A_iA_{i+1}}}{A_iA_{i+1}}\right)$

$= \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} R^{-90^0}\left(A_iA_{i+1}\dfrac{\overrightarrow{A_iA_{i+1}}}{A_iA_{i+1}}\right)$

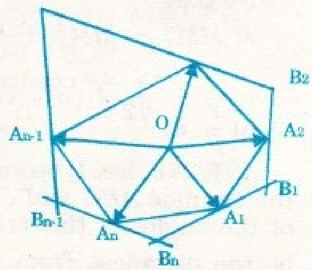
$= \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} R^{-90^0}(\overrightarrow{A_iA_{i+1}})$

$= R^{-90^0}\left(\sum \overrightarrow{A_iA_{i+1}}\right) = R^{-90^0}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$

Hệ quả 5 : Trong mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho O nằm trong $A_1A_2...A_n$. Khi đó :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ tg\left[\frac{1}{2}(OA_{k-1}, OA_k)\right] + tg\left[\frac{1}{2}(OA_k, OA_{k+1})\right]\right\} \overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{0}$$

Trong đó $A_o = A_n$;
$A_{n+1} = A_1$



Chứng minh : Với mỗi $k = 1, 2, ..., n$ dựng các đường thẳng d_k tiếp xúc với (O) tại A_k (h.3). Đặt $B_k = d_k \cap d_{k+1}$ (ở đây $d_{n+1} = d_1$).

Xét đa giác $B_1B_2...B_n$.

Giả sử R là bán kính của (O).

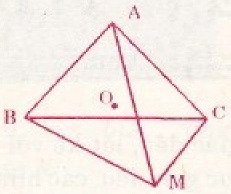
Ta thấy :

$$B_{k-1}B_k = R\left\{tg\left[\frac{1}{2}(OA_{k-1}, OA_k)\right] + tg\left[\frac{1}{2}(OA_k, OA_{k+1})\right]\right\}$$

(Ở đây : $B_{n+1} = B_1$)

Áp dụng bổ đề 4 cho đa giác $B_1B_2 \ldots B_n$ và hệ véctơ $\overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OA_2}; \ldots; \overrightarrow{OA_n}$ dễ dàng nhận được hệ quả 5.

Nhờ hệ quả 5 và phương pháp chứng minh định lí 1, ta dễ dàng chứng minh được định lí 3. Việc thực hiện chi tiết xin dành cho bạn đọc.



Định lí 3 có đúng là sự tổng quát của định lí 1 hay không ? Ta hãy kiểm tra điều đó. (h.4)

Theo định lí 3 ta có :

$$\left\{ tg\left[\frac{1}{4}(OC, OB)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA, OC)\right]\right\} MC$$

$$+ \left\{tg\left[\frac{1}{4}(OB, OA)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OC, OB)\right]\right\} MB$$

$$= \left\{ tg\left[\frac{1}{4}(OA, OC)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OB, OA)\right]\right\} MA$$

$$\Rightarrow \left(tg\frac{C+B}{2} + tg\frac{A+C}{2}\right) MC + \left(tg\frac{B+A}{2} + tg\frac{C+B}{2}\right) MB$$

$$= \left(tg\frac{A+C}{2} + tg\frac{B+A}{2}\right) MA$$

Từ đó dễ dàng suy ra :

$$\sin C\, MC + \sin B\, MB = \sin A\, MA$$

$$\Rightarrow AB \,.\, MC + CA \,.\, MB = BC \,.\, MA$$

Như vậy, mục tiêu ban đầu của ta đã được thực hiện. Tuy nhiên để cho hoàn chỉnh vấn đề đang xét, xin giới thiệu một định lí nữa. Nó là sự tương tự của định lí 3 cho trường hợp đa giác nội tiếp với số cạnh chẵn.

Định lí 6 : Trên mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_oA_1 \ldots A_{2n-1}$ nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung A_oA_{2n-1} (không chứa $A_1, \ldots, A_{2n-2}$). Khi đó :

$$\left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-1}, OA_o)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA_o, OA_2)\right]\right\} MA_o +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-2} \left\{ tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2k-2}, OA_{2k})\right] + \right.$$

$$\left. + tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2k}, OA_{2k+2})\right]\right\} MA_{2k} +$$

$$+ \left\{ tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-4}, OA_{2n-2})\right] + \right.$$

$$\left. + tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-2}, OA_1)\right]\right\} MA_{2n-2}$$

$$= \left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-2}, OA_1)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA_1, OA_3)\right]\right\} MA_1$$

$$+ \sum_{2 \leqslant k \leqslant n-1} \left\{ tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2k-3}, OA_{2k-1})\right] + \right.$$

$$\left. + tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2k-1}, OA_{2k+1})\right]\right\} MA_{2k-1} +$$

$$+ \left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA_1, OA_3)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-1}, OA_o)\right]\right. MA_{2n-1}$$

Để bạn đọc hiểu rõ ý nghĩa của định lí này xin phát biểu một hệ quả đơn giản nhất của nó

Hệ quả 7 : Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung $\overset{\frown}{AD}$ (không chứa B, C). Khi đó :

$$MA - MD = (\sqrt{2} + 1)(MB - MC)$$

Trước khi kết thúc xin nêu một câu hỏi. Liệu có hay không các bất đẳng thức Ptôlêmê tổng quát mà các định lí 3 và 6 chỉ là trường hợp đẳng thức của chúng. Mong bạn đọc cùng quan tâm suy nghĩ về vấn đề này.

Ống kính cải cách dạy và học toán

Hồi âm sau bài báo

"VOI CŨNG BẰNG KIẾN"

***LTS :** Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ có nhận được thư của các tác giả Ngô Thúc Lanh, Vũ Tuấn, Ngô Xuân Sơn trả lời các ý kiến đã nêu trong bài báo nói trên. Đáp ứng quyền được thông tin nhiều chiều của bạn đọc và thể theo yêu cầu của ba tác giả nói trên, dưới đây chúng tôi xin đăng nguyên văn bức thư đó.*

Giải đáp thắc mắc

Trong số báo 213 tháng 3/1995 của tạp chí Toán học và tuổi trẻ bạn Đào Trường Giang (Tác giả bài "Voi cũng bằng kiến") nêu thắc mắc về cách chứng minh tính chất

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \ (a \neq 0) \ (1)$$

trong sách giáo khoa Giải tích 12 của nhóm tác giả ĐHSPHN1 (Ngô Thúc Lanh, Vũ Tuấn, Ngô Xuân Sơn).

Xin giải đáp thắc mắc như sau :

Cách chứng minh trong SGK là hoàn toàn đúng. Có thể giải thích rõ thêm như sau, do đạo hàm hai vế của (1) bằng nhau và bằng $af(x)$ nên :

1) Vế trái của (1), theo định nghĩa, là *họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $af(x)$.*

2) Nếu gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ (tức $F'(x) = f(x)$) thì :

$$a\int f(x)dx = a[F(x) + C] = aF(x) + aC$$

(C là hằng số tùy ý)

Vì $aF(x)$ là một nguyên hàm của $af(x)$ và aC là hằng số tùy ý (do $a \neq 0$) nên hiển nhiên *$aF(x) + aC$, tức vế phải của (1), cũng là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $af(x)$* (Đ.p.c.m).

Hà Nội ngày 27 – 4 – 1995

CÁC TÁC GIẢ.

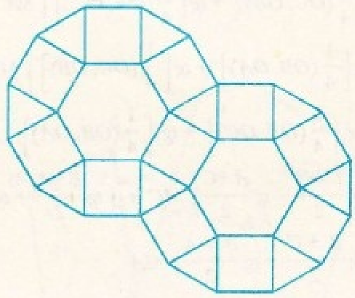
PYTHAGORE (PITAGO)

Pythagore (khoảng 580–500 trước CN) người Hy lạp sinh ở đảo Samos, một trung tâm thương mại và văn hóa bấy giờ, ở trong biển Égée. Tương truyền lúc trai trẻ ông từng đi chu du thiên hạ để học hỏi các nền văn minh : sang Ai Cập học các tu sĩ 22 năm, đi tiếp sang Babylone, ở lại đây 12 năm, có thể còn đã sang cả Ấn Độ. Tuổi ngoài 50 ông mới trở về châu Âu định cư ở Crotone, một hải cảng và trung tâm văn hóa, thuộc địa La Mã, ở tận cùng miền Nam Italia. Tại đấy ông mở trường dạy Triết học, Thần học, Đạo đức học, Toán học. Trường tồn tại 30 năm. Vào thời cuối, do vì những biến động chính trị, xã hội của phong trào quần chúng đòi dân chủ ở Crotone, trường lánh sang các thị trấn Tarente, Metapont ở gần đó. Khi trường dời đến Metapont thì cũng vừa lúc cao trào khởi nghĩa nổ ra ở đây. Trong một đêm biến động trường bị đốt cháy, cụ già Pythagore ngoài 80 tuổi chết trong đám lửa. Các môn đệ của trường về sau tản mạn sang Hy Lạp, mở các trường dạy chủ yếu về số học, hình học, tạo nên môn phái Pythagore. Họ để lại cho đời sau những thuyết giảng của Pythagore, như trong các trước tác của Aristotèle, Platon, ... Còn Pythagore hình như không để lại trước tác gì.

Về toán, Pythagore nghiên cứu Số học, Hình học, Thiên văn học. Ông là một trong những nhà đầu tiên chủ trương rằng Trái Đất là một quả cầu, đứng ở trung tâm vũ trụ. Mặt Trời, Mặt Trăng, các vì sao thì quay quanh Trái Đất, song Mặt Trời, Mặt Trăng và một số hành tinh mỗi cái có sự di chuyển riêng, khác với sự di chuyển của các vì sao hàng ngày quay quanh Trái Đất.

Vì Pythagore dày công học hỏi đời trước cho nên một số kết quả, mà về sau cho là của Pythagore, kì thực đã có từ trước. Như định lí Pythagore trong tam giác vuông : $a^2 = b^2 + c^2$ đã được biết từ Ai Cập, Babylone, Hy Lạp, Trung Quốc, còn tỉ số lát cắt vàng r = 0,6180339887... thì có từ Babylone.

Pythagore lần đầu tiên chỉ ra rằng tổng các góc trong của tam giác thì bằng 180^o, rằng mặt phẳng có thể phủ kín bằng những hình tam giác đều, lát kề với những hình vuông và hình lục giác đều, các hình ấy đều có cạnh bằng nhau (xem hình).



Ông đã dùng phương pháp hình học để chứng minh rằng tổng các số lẻ liên tiếp thì bằng một số chính phương ($1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, ...), hiệu của các bình phương của hai số nguyên liên tiếp thì bằng một số lẻ ($2^2 - 1^2 = 3$, $3^2 - 2^2 = 5$, ...). Ông còn nghiên cứu về các đa diện đều trong không gian ba chiều, như tứ diện đều, lục diện đều (khối lập phương), bát diện đều, về các tỉ số, các cấp số.

Cống hiến đặc sắc nhất của Pythagore về toán học là đã phát hiện và trăn trở cuộc khủng hoảng thứ nhất của toán học. Pythagore có quan niệm siêu hình về các số. Như một nhà tiên tri có thần cảm Pythagore thuyết giảng cho các môn đệ rằng các số là nguyên lí và cội nguồn của mọi vật (le principe et la source de toutes choses). Từ các số tự nhiên 1, 2, 3, ... ông đi đến các số hữu tỉ $\frac{p}{q}$, (p, q là các số tự nhiên) và khẳng định rằng với các số hữu tỉ ta có thể biểu diễn mọi số. Thế nhưng khi tính $\sqrt{2}$ ông thấy té ra nó không thể biểu diễn bằng một số hữu tỉ nào ! Vậy các số của ông không biểu diễn được chiều dài đường chéo của một hình vuông có cạnh bằng đơn vị, thế thì làm sao mà chúng lại có thể là nguyên lí và cội nguồn của mọi vật ?! Pythagore bối rối, mà không vượt nổi điều bế tắc này. Ông cảm thấy nhục nhã vì giáo lí của mình phá sản thảm hại. Cuối cùng ông và các môn đệ quyết định sẽ giấu kín, không để lộ điều khủng hoảng đó. Sau khi ông mất, một môn đệ là Hippas, mặc dấu không được sự thỏa thuận của hội đồng môn, đã đưa thêm những điều mới vào bài giảng của Pythagore và đem trình bày cho người khác. Về sau Hippas chết trong một vụ đắm tàu biển. Các môn đệ đặt ra câu chuyện Hippas bị chết vì đã tiết lộ điều bí ẩn. Hơn 100 năm sau nhà toán học Eudoxe (khoảng 408–355 trước CN) giải được cuộc khủng hoảng thứ nhất của toán học bằng một lí thuyết số vô tỉ, tương tự như lí thuyết hiện đại của nhà toán học Đức Richard Dedekind (1831–1916) ở cuối thế kỉ XIX.

Một cống hiến quan trọng khác của Pythagore về phương pháp luận là ông đã đề ra phương pháp chứng minh. Trước ông người ta không nhận rõ ràng chứng minh một vấn đề toán học là phải đi từ giả định. Pythagore là người châu Âu đầu tiên chủ trương rằng trong Hình học cần phải đặt ra các giả định ban đầu, gọi là tiên đề. Từ đó lập luận chứng minh được tiến hành bằng cách áp dụng cho các tiên đề một phép lí luận suy diễn chặt chẽ để đi đến kết luận.

Chú thích – Cho đoạn thẳng AB. Điểm (duy nhất) $D \in AB$ gọi là lát cắt vàng của AB nếu nó chia đoạn AB theo tỉ số $r = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DB}{AD}$.

Dễ dàng tính được

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}6180339887\ldots$$

Người ta cho rằng các hình chữ nhật có tỉ số (chiều rộng)/(chiều dài) bằng r là hài hòa nhất. Vì vậy các khung cửa sổ, tấm pannô, cánh cửa tủ... thường hay lấy theo tỉ số r.

Trong lí thuyết tối ưu hóa lát cắt vàng được dùng làm một phương pháp hữu hiệu để dò tìm điểm cực tiểu của một hàm $f(x)$ đơn cách trên một đoạn AB, khi điểm cực tiểu này không thể tìm bằng phương pháp tính đạo hàm. (Hàm đơn cách (unimodal) là hàm chỉ có một điểm cực tiểu – hay một điểm cực đại, trên AB).

HỮU LIÊN
(Hà Nội)

Một số dạng khác ...

(tiếp theo trang 9)

Nối OM và ON ; Từ O hạ $OH \perp DC$ ta có tứ giác $IHOM$ nội tiếp được đường tròn $\Rightarrow \widehat{IOM} = \widehat{IHM}$ (1)

Từ O hạ $OK \perp AB$ ta cũng có tứ giác $IOKN$ nội tiếp được đường tròn $\Rightarrow \widehat{ION} = \widehat{IKN}$ (2)

Ta cũng chú ý $\Delta\, IDC \backsim \Delta\, IBA$ và H và K là các trung điểm của DC và AD cho nên $\Delta\, IHC \backsim \Delta\, IKA \Rightarrow \widehat{IKA} = \widehat{IHC}$ hay $\widehat{IKN} = \widehat{IHM}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{IOM} = \widehat{ION}$ mà $OI \perp MN \Rightarrow IM = IN$ (đ.p.c.m)

Lưu ý : ở bài toán 3 có thể xảy ra. $DC \,//\, AB$ lúc đó các bạn có thể xem hai điểm M, N ở xa vô tận về hai phía. (vì $DC \,//\, AB \,//\, d$) như vậy thì I là trung điểm của MN vẫn đúng.

Từ bài toán (1) (2) (3) Ta rút ra bài toán tổng quát :

Bài toán 4 :

Cho đường tròn tâm O ; d là một đường thẳng bất kỳ (không phải là tiếp tuyến của O) gọi I là chân đường vuông góc hạ từ tâm O tới d. Qua I ta kẻ hai cát tuyến IAB và ICD tới đường tròn.

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AC và BD với d và P, Q lần lượt là giao điểm của AD và BC với d Khi đó Ta có : I là trung điểm của MN và PQ.

Nó tổng quát hơn bài toán 1 là d có thể không cắt đường tròn (O) và nếu d cắt (O) thì đó là bài toán 1.

Nếu ta đặc biệt hóa $A \equiv B$ thì khi đó cát tuyến IAB suy biến về tiếp tuyến ta có bài toán sau.

Bài toán 5. Cho đường tròn tâm O, d là một đường thẳng ở ngoài đường tròn (O), Từ O hạ $OI \perp d$, Qua I ta kẻ tiếp tuyến IA và cát tuyến ICD ; gọi M, N lần lượt là giao điểm của d với các đường thẳng AD và DC. Chứng minh $IM = IN$

Đương nhiên nếu ICD suy biến về là tiếp tuyến IC thì bạn có ngay $AC \,//\, d$ là một điều mà ta đã biết.

Đặc biệt ở bài toán 5 nếu ICD là đường kính bạn thu được bài toán 6 :

Bài toán 6 : Cho đường tròn (O) đường thẳng không cắt (O) đường kính $DC \perp d$ tại I, qua I dựng tiếp tuyến IA tới đường tròn ; dây cung DA cắt d tại M khi đó ta có $IA = IM$.

Bài toán 5 và bài toán 6 xin dành lại để các bạn kiểm tra.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN HỌC ĐHTH TP HỒ CHÍ MINH 1994

(VÒNG 1 - NGÀY 30/7/1994)

Bài 1. *Sáu đội bóng A, B, C, D, E và F tham dự một giải vô địch. Dưới đây là năm khẳng định khác nhau về hai đội có mặt trong trận chung kết : a) A và C b) V và E c) B và F d) A và F e) A và D.*

Biết rằng có bốn khẳng định đúng một nửa và một khẳng định sai hoàn toàn. Hãy cho biết hai đội nào được thi đấu trong trận chung kết.

Lời giải : Nếu đội A *không* lọt vào chung kết thì trong ba khẳng định a), d), e) phải có ít nhất hai khẳng định là đúng một nửa vậy đội lọt vào chung kết phải là hai trong ba đội C, F và D. Suy ra hai đội B và E không lọt vào chung kết, tức là khẳng định b) là *sai*, còn bốn khẳng định còn lại đúng một nửa. Nhưng khi đó cả C, D và F đều phải cùng lọt vào chung kết : Vô lý !

Vậy chỉ có thể A là một trong hai đội có mặt ở trận chung kết. Khi đó C, D và F không lọt vào chung kết. Mà B cũng không thể vào chung kết (khi đó không có khẳng định nào là hoàn toàn sai cả). Suy ra chỉ có thể E lọt vào chung kết.

Tóm lại hai đội A và E đã gặp nhau ở trận chung kết.

Bài 2.

a) Trên bảng có viết 1994 số : 1, 2, ..., 1994. Cho phép xóa hai số bất kỳ trong những số trên bảng và viết thêm một số bằng tổng của hai số đó (Như vậy sau mỗi lần xóa thì số các số được viết trên bảng giảm đi 1).

Chứng minh sau 1993 lần xóa, trên bảng sẽ còn lại 1 số lẻ.

b) Nếu thay số 1994 trong câu a) bằng số 2000 thì sau 1999 lần xóa trên bảng sẽ còn lại 1 số chẵn hay số lẻ ?

Lời giải :

Với mỗi lần xóa hai số a, b có thể xảy ra ba khả năng : hoặc a, b cùng chẵn hay cùng lẻ thì sau khi xóa chúng đi và thêm vào tổng $a + b$ là số chẵn, ta thấy tổng số các số lẻ trên bảng hoặc không thay đổi, hoặc giảm đi 2. Còn nếu a, b khác tính chẵn lẻ thì tổng a + b là lẻ để tổng số lẻ cũng không thay đổi. Tóm lại, tổng số số lẻ sau mỗi lần xóa và viết sẽ không thay đổi hoặc giảm đi 2, mà số số lẻ ban đầu là 1994 : 2 = 997, nên sau khi xóa đi 1993 lần sẽ còn lại đúng một số lẻ.

Với lí luận tương tự, ta thấy với 2000 số thì sau 1999 lần xóa sẽ còn lại đúng một số chẵn.

Bài 3. *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) sao cho $y + 1$ chia hết cho x và $x + 1$ chia hết cho y.*

Lời giải : Từ điều kiện của bài toán suy ra $x + 1 \geqslant y$ và $y + 1 \geqslant x$. Kết hợp lại ta có $x - 1 \leqslant y \leqslant x + 1$, nghĩa là y chỉ có thể là một trong ba số $x - 1$, x, $x + 1$.

* Nếu $y = x - 1$ thì y vừa là ước của $x - 1$ vừa là ước của $x + 1$ nên sẽ là ước của $(x + 1) - (x - 1) = 2$, nghĩa là $y = 1$ hay $y = 2$. Nếu $y = 1$ thì $x = y + 1 = 2$. Nếu $y = 2$ thì $x = y + 1 = 3$. Cả hai cặp số $(x = 2, y = 1)$ và $(x = 3, y = 2)$ đều thỏa điều kiện bài toán.

* Nếu $y = x$ thì y vừa là ước của x vừa là ước của $x + 1$ nên chỉ có thể là $y = 1$ và khi đó $x = 1$. Cặp số $(x = 1, y = 1)$ hiển nhiên thỏa điều kiện.

* Nếu $y = x + 1$ thì $x = y - 1$. Do tính đối xứng của hai số x và y nên ta cũng tìm ra các cặp số tương ứng là $(x = 1, y = 2)$ và $(x = 2, y = 3)$.

Tóm lại có 5 cặp số tự nhiên thỏa mãn điều kiện bài toán là

(1, 1)(1, 2)(2, 1)(2, 3)(3, 2)

Bài 4.

a) Cho $a < b < c < d$ là 4 số thực tùy ý. Với các giá trị thực nào của x thì biểu thức

$f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$

nhận giá trị nhỏ nhất,

b) Hãy phát biểu và giải bài toán tổng quát với n số thực.

Lời giải : Trên đường thẳng số ta đánh dấu các điểm A, B, C, D ứng với các số $a < b < c < d$. Điểm M kí hiệu cho giá trị x. Có thể xảy ra các trường hợp sau :

1) $x \leqslant a$ khi đó

$f(x) = MA + MB + MC + MD = MA + 3AB + 2BC + CD$

Suy ra trên khoảng này, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $M \equiv A$ và bằng $3AB + 2BC + CD$.

2) $a < x \leqslant b$ khi đó

$f(x) = AM + MB + MC + MD = AB + 2MB + 2BC + CD$

Suy ra trên khoảng này, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $M \equiv B$ và bằng $AB + 2BC + CD$.

3) $b \leq x \leq c$ khi đó

$f(x) = AM + BM + MC + MD = AB + 2BC + CD = \text{const}$

4) $c \leq x < d$ khi đó

$f(x) = AM + BM + MC + DM = AB + 2BC + CD + 2CM$.

Suy ra trên khoảng này, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $M \equiv C$ và bằng $AB + 2BC + CD$.

5) $d \leq x$ khi đó

$f(x) = AM + BM + CM + DM = AB + 2BC + 3CD + DM$

Suy ra trên khoảng này, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $M \equiv B$ và bằng $AB + 2BC + CD$.

So sánh các trường hợp trên, ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $AB + 2BC + CD = b - a + 2(c - b) + (d - c) = d + c - b - a$ khi mà $b \leq x \leq c$.

Bài toán tổng quát cho n số thực được phát biểu như sau :

Cho n số thực $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Xét biểu thức

$$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|$$

Tìm các số thực x để $f(x)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

Ta xét các trường hợp $n = 2k$ và $n = 2k - 1$.

Với $n = 2k$ thì

$$\begin{cases} |x - a_1| + |x - a_{2k}| \geq (a_{2k} - a_1) \\ |x - a_2| + |x - a_{2k-1}| \geq (a_{2k-1} - a_2) \\ \vdots \\ |x - a_k| + |x - a_{k+1}| \geq (a_{k+1} - a_k) \end{cases}$$

Lấy tổng các bất đẳng thức trên ta có

$f(x) \geq (a_{2k} + a_{2k-1} + ... + a_{k+1}) - (a_1 + a_2 + ... + a_k)$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_k \leq x \leq a_{k+1}$.

Tương tự với $n = 2k - 1$

$$\begin{cases} |x - a_1| + |x - a_{2k-1}| \geq (a_{2k-1} - a_1) \\ |x - a_2| + |x - a_{2k-2}| \geq (a_{2k-2} - a_2) \\ \vdots \\ |x - a_{k-1}| + |x - a_{k+1}| \geq (a_{k+1} - a_{k+1}) \\ |x - a_k| \geq 0 \end{cases}$$

Lấy tổng các bất đẳng thức trên ta có

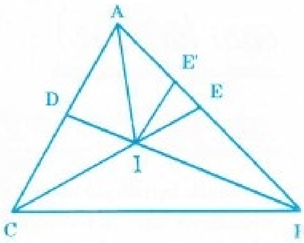
$f(x) \geq (a_{2k-1} + a_{2k-2} + ... + a_{k+1}) - (a_1 + a_2 + ... + a_{k-1})$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = a_k$.

Bài 5. *Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong BD và CE cắt nhau tại I. Biết rằng ID = IE, chứng minh rằng hoặc tam giác ABC cân tại A hoặc góc $\widehat{BAC} = 60^0$.*

Lời giải : Nối AI là đường phân giác của góc A. Khi đó hai tam giác IEA và IDA có cặp cạnh – cạnh – góc bằng nhau. Có thể xảy ra hai trường hợp :

a) Hai tam giác này bằng nhau : khi đó hai tam giác ABD và ACE cũng bằng nhau (trường hợp góc – cạnh – góc) suy ra $AB = AC$, tam giác ABC cân ở A.



b) Hai tam giác này không bằng nhau, tam giác ABC không cân ở A : khi đó giả sử góc $\widehat{C} > \widehat{B}$. Ta lấy điểm E' trên AB sao cho $IE' = IE = ID$. Khi đó hai tam giác $IE'A$ và IDA bằng nhau. Các góc $\widehat{BEI} = \widehat{IE'A} = \widehat{IDA}$, suy ra $\widehat{BIE} = \widehat{BAC}$. Do đó $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \widehat{BAC}$, suy ra $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 3\widehat{BAC} = 180^0$. Vậy góc $\widehat{BAC} = 60^0$.

*

* *

(VÒNG 2 – NGÀY 31.7.1994)

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 13 \ (1) \\ x^2 + 4xy - 2y^2 = -6 \ (2) \end{cases}$$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông ở A, có O, I lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

a) Tính các độ dài IO, IB theo a, b, c.

b) Biết rằng tam giác IOB vuông ở I, chứng minh :

$AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$

Bài 3 : Chứng minh rằng không tồn tại một dãy tăng thực sự các số nguyên ≥ 0

a_2, a_2, a_3, ... sao cho với mọi số tự nhiên n, m ta có : $a_{nm} = a_n + a_m$

Bài 4 : Chứng minh rằng tồn tại duy nhất hai số nguyên dương x và y thỏa mãn các tính chất sau :

i) x và y đều có hai chữ số.

ii) $x = 2y$

iii) Một chữ số của y thì bằng tổng, còn chữ số kia bằng trị tuyệt đối của hiệu hai chữ số của x.

Bài 5 : Một tam giác đều được chia thành một số hữu hạn các tam giác con. Chứng minh rằng sẽ có một tam giác con có cả ba góc nhỏ hơn hay bằng 120^0.

HOÀNG LÊ MINH
(TP Hồ Chí Minh)

Giải đáp bài :

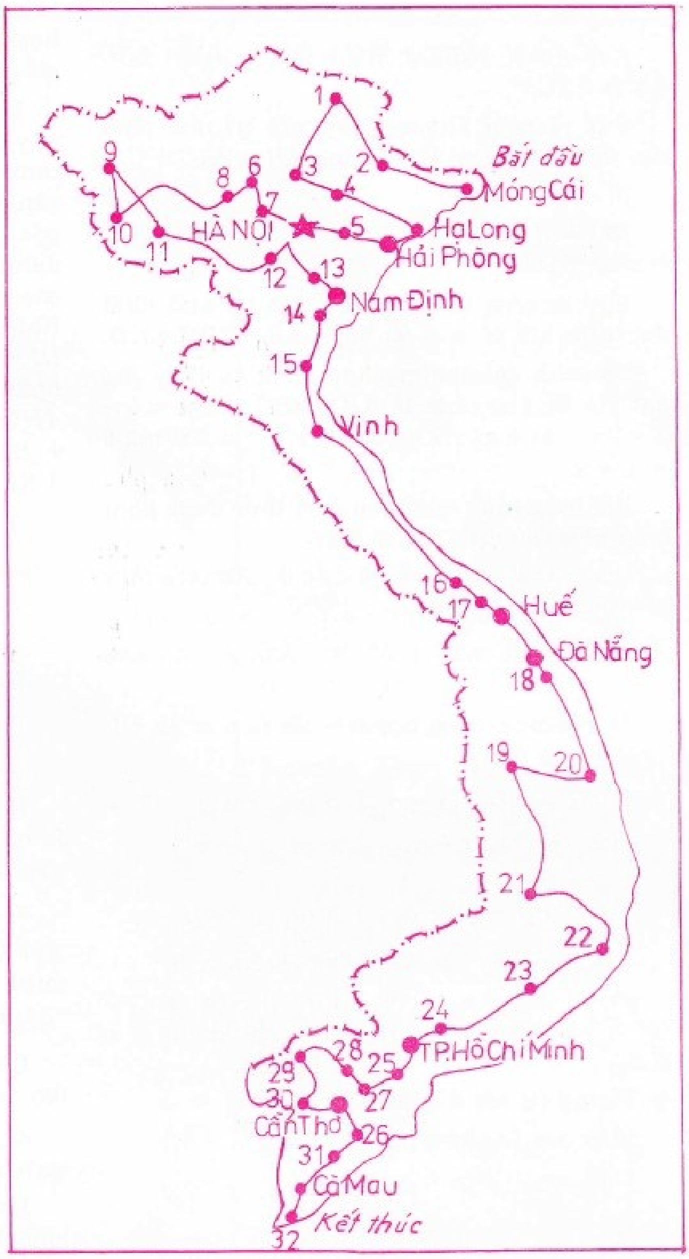
DU LỊCH XUYÊN VIỆT

Nhiều bạn đã gửi lời giải và đa số là đúng. Số đông các bạn chọn điểm xuất phát là Móng Cái, Cao Bằng hoặc Năm Căn. Ngoài ra là các đô thị Lạng Sơn, Bắc Giang, Thái Nguyên, Việt Trì, Yên Bái, Hải Dương, Hải Phòng, Nam Định... Bạn *Tạ Quốc Hưng*, lớp 6, trường Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột lại bắt đầu từ Thanh Hóa. Hai bạn *Trần Duy Hùng, Trần Viết Dũng*, 11B PTTH Lệ Thủy, Quảng Bình tìm được 8 điểm xuất phát.

Các bạn có lời giải gửi về sớm và đúng là *Nguyễn Thị Thúy Vĩnh* 10A PTTH Đa Phúc, *Nguyễn Xuân Trường*, Tiên Dược, Sóc Sơn, *Phạm Hà Sơn, Phan Thanh Tùng* 7CT, *Lê Thị Bích Hạnh*, 6CT, Nghĩa Tân, Hà Nội, *Bùi Duy Hùng*, 9A, Tô Hiệu, Hải Phòng, *Nguyễn Lê Dung*, 8T NK Hà Bắc, *Lê Hải Yến* 9T, chuyên Thanh Sơn, Vĩnh Phú, *Nguyễn Thị Thắm* 9B, chuyên Ứng Hòa, Hà Tây, *Bùi Thế Dũng*, PTTH Văn Giang, *Lê Đại Nguyên*, 11A PTTH Văn Lâm, Hải Hưng, *Lê Thành Công*, 6T, *Phạm Huy Quang*, Đông Hưng, Thái Bình, *Hà Thanh Tuấn, Vũ Trần Cương*, 7T, Trần Đăng Ninh, Nam Hà, *Bùi Thị Tư* 9C Vĩnh Phúc, Vĩnh Lộc, Thanh Hóa, *Đinh Lâm Tới, Hoàng Đình Thi, Tạ Kiều Hưng* 9CT NK Vinh, *Nguyễn Hữu An*, 9A, Quỳnh Liên, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Tài Thu*, 6A, NK Yên Thành, Nghệ An, *Trần Thanh Tú*, 10CT Đào Duy Từ, Quảng Bình, *Nguyễn Phạm Phương Thảo*, 9/1 Nguyễn Tri Phương, Huế, *Phan Thị Thúy Hạnh*, 10A1 Trần Quốc Tuấn, Quảng Ngãi, *Phan Nhật Huy* 11A1 PTTH Thốt Nốt, Cần Thơ, *Nguyễn Thị Mỹ Ngọc* 10A1 PTTH Lê Quý Đôn, Long An. Rất hoan nghênh bạn *Nguyễn Thị Xuân Nương* lớp 7 Văn trường Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi đã tìm được 2 cách đi đúng.

Sau đây là một cách giải xuất phát từ Móng Cái và kết thúc là Năm Căn.

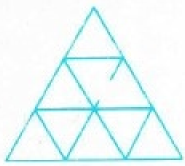
VŨ KIM THỦY



Điền số vào tam giác

Cho một hình tam giác, có 9 ô tam giác con như hình vẽ. Bạn hãy điền các số từ 1 đến 9 vào mỗi ô tam giác con sao cho tổng các số thuộc các ô dọc theo mỗi cạnh của tam giác (5 số) đều bằng nhau.

Có bao nhiêu cách điền số như vậy ?



VŨ HOÀNG THÁI

ISSN : 0866 - 8035.
Chỉ số 12884
Mã số : 8BT18M5

Sắp chữ tại Trung tâm Vi tính và
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 6/1995.

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng