BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

5(215)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

✿ Ứng dụng của một bất đẳng thức

✿ Kết quả kì thi quốc gia chọn học sinh giỏi toán

✿ Áp dụng một tính chất của hàm số liên tục

✿ Đề thi tuyển sinh ĐHTH Hà Nội 1994

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Ảnh bìa : Thầy giáo và đội tuyển học sinh giỏi toán tỉnh Hải Hưng.

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111
Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : HOÀNG HẢI

Dành cho các bạn Trung học Cơ sở

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

Trong chương trình toán cấp 2 có một bất đẳng thức quen thuộc mà việc ứng dụng của nó trong khi giải các bài tập đại số và hình học rất có hiệu quả. Tôi thường gọi đó là "bất đẳng thức kép". Bất đẳng thức đó như sau : ∀ a, b, có

$$\boxed{a^2 + b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2} \geqslant 2ab \quad (*)}$$

Dễ thấy (*) ⇔

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a^2 + b^2) \geqslant (a+b)^2 & (1) \\ (a+b)^2 \geqslant 4ab & (2) \\ a^2 + b^2 \geqslant 2ab & (3) \end{cases}$$

Cả 3 bất đẳng thức trên đều tương đương với $(a - b)^2 \geqslant 0$ và do đó chúng xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

Ý nghĩa của (∗) là nêu lên một quan hệ giữa tổng 2 số với tích của chúng hoặc với tổng các bình phương của 2 số đó.

Sau đây là các ví dụ minh họa cho việc vận dụng bất đẳng thức (∗).

– Ví dụ 1 : Cho $a + b = 1$. Chứng minh rằng

$a^2 + a^2 \geqslant 1/2$; $a^4 + b^4 \geqslant 1/8$; $a^8 + b^8 \geqslant 1/128$.

*** Giải :** Áp dụng bất đẳng thức (1) và giả thiết, ta có :

$a^2 + b^2 \geqslant (a+b)^2/2 = 1/2$

$a^4 + b^4 \geqslant (a^2 + b)^2/2 \geqslant (1/2)^2/2 = 1/8$

$a^8 + b^8 \geqslant (a^4 + b^4)^2/2 \geqslant (1/8)^2/2 = 1/128$.

Các bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi $a = b = 1/2$.

– Ví dụ 2 : Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

*** Giải :** Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có :

$$\begin{cases} (a+b)^2 \geqslant 4ab \\ (b+c)^2 \geqslant 4bc \\ (c+a)^2 \geqslant 4ca \end{cases}$$

$\Rightarrow ((a+b)(b+c)(c+a))^2 \geqslant 64a^2b^2c^2$ (vì $a, b, c > 0$) $\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$ (vì $(a+b)\times(b+c)(c+a) > 0$ và $8abc > 0$). Có đẳng thức khi $a = b = c$.

– Ví dụ 3 : Chứng minh rằng ∀ a, b, c ta có : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

*** Giải :** Áp dụng bất đẳng thức (3) ta có :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geqslant 2ab \\ b^2 + c^2 \geqslant 2bc \\ c^2 + a^2 \geqslant 2ca \end{cases}$$

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 2(ab + bc + ca) \Rightarrow$ đpcm. có đẳng thức khi $a = b = c$

– Ví dụ 4 : Chứng minh rằng ∀ a, b, c, d ta có :

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd.$$

*** Giải :** Áp dụng bất đẳng thức (3) ta có :
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 2a^2b^2 + 2c^2d^2 = 2(a^2b^2 + c^2d^2)$.
Lại theo (3) : $a^2b^2 + c^2d^2 \geqslant 2abcd$.

Từ hai kết quả trên ta suy ra điều phải chứng minh.

– Ví dụ 5 : Cho $a + b + c + d = 2$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 1.$$

*** Giải :** Áp dụng bất đẳng thức (3) ta có :

$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, $c^2 + d^2 \geqslant 2cd$
$a^2 + c^2 \geqslant 2ac$, $a^2 + d^2 \geqslant 2ad$, $b^2 + d^2 \geqslant 2bd$
$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geqslant 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \Rightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geqslant (a + b + c + d)^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 1$ (đpcm)

Có đẳng thức khi $a = b = c = d = \dfrac{1}{2}$.

Sau đây ta sẽ áp dụng các bất đẳng thức (1), (2), (3) vào việc giải các bài tập phức tạp hơn.

– Ví dụ 6 : Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng : $b + c \geqslant 16abc$.

*** Giải :** Từ giả thiết ta có :

$1 = (a + (b + c))^2 \geqslant 4a(b + c)$ (theo (2))

$\Rightarrow b + c \geqslant 4a(b + c)^2$ (do $b + c > 0$)

Lại theo (2) : $(b + c)^2 \geqslant 4bc$. Từ hai kết quả trên suy ra :

$b + c \geqslant 4a \cdot 4bc = 16abc$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = b+c \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = c = 1/4 \end{cases}$

– Ví dụ 7 : Chứng minh rằng $\forall\, a, b, c$ ta có :

$$(a+b)^2(b+c)^2 \geqslant 4abc\,(a+b+c)$$

*** Giải :**

$$(a+b)^2(b+c)^2 = (ab + ac + b^2 + bc)^2 = (ac + (a+b+c)b)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức (2) cho 2 số ac và $(a+b+c)b$

ta có : $(ac + (a+b+c)b)^2 \geqslant 4abc\,(a+b+c)$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi : $ac = b(a+b+c)$

– Ví dụ 8 : Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in [0, 1]$. Chứng minh :

$$(1 + a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \geqslant 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)$$

*** Giải :** Áp dụng bất đẳng thức (2) cho 2 số : 1 và $a_1 + a_2 + ... + a_n$, ta được :

$$(1 + a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \geqslant 4(a_1 + a_2 + ... + a_n).$$

do $a_i \in [0 ; 1]$ với $i = 1, 2, ..., n$, nên suy ra : $a_i \geqslant a_i^2$. Từ hai kết quả trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn, khi $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = 0$ và $a_n = 1$.

– Ví dụ 9 : Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 12{,}5.$$

*** Giải :** Áp dụng bất đẳng thức (1) cho hai số $a + \dfrac{1}{a}$ và $b + \dfrac{1}{b}$, ta có :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2/2$$

$$= \left(a + b + \frac{a+b}{ab}\right)^2/2 = \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2/2 \quad (*)$$

Lại áp dụng (2) : $(a+b)^2 \geqslant 4ab \Rightarrow 1 \geqslant 4ab$ $\Rightarrow \dfrac{1}{ab} \geqslant 4$.

Do đó : $\left(1 + \dfrac{1}{ab}\right)^2/2 \geqslant (1+4)^2/2 = 25/2 = 12{,}5$.

Kết hợp với (*) ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi : $a = b = \dfrac{1}{2}$.

– Ví dụ 10 : Cho a, b, c là các số thỏa mãn :

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $a, b, c \in \left[0 \,;\, \dfrac{4}{3}\right]$.

*** Giải :** Ta sẽ chứng minh cho $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{4}{3}$, còn đối với b và c thì tương tự. Theo (1) ta có :

$$2(b^2 + c^2) \geqslant (b+c)^2 \Rightarrow 2(2 - a^2) \geqslant (2-a)^2$$

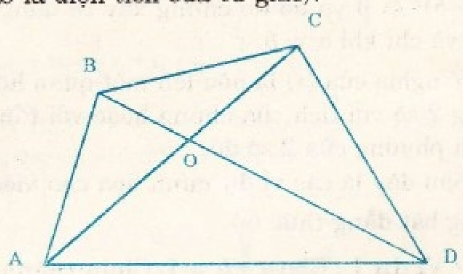
$$\Rightarrow 4 - 2a^2 \geqslant 4 - 4a + a^2 \Rightarrow 3a^2 - 4a \leqslant 0.$$

Giải bất phương trình cuối theo a, ta được

$$0 \leqslant a \leqslant 4/3 \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Trên đây là các ví dụ vận dụng bất đẳng thức (*) vào việc giải các bài toán đại số. Tiếp theo là các ví dụ minh họa cho việc vận dụng (*) để giải một số bài toán hình học.

– Ví dụ 11 : Cho tứ giác lồi $ABCD$ có tổng hai đường chéo bằng d. Chứng minh rằng : $S \leqslant d^2/8$. (S là diện tích của tứ giác).



*** Giải :** Ta có $S \leqslant \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$. Theo bất đẳng thức (2) thì :

$$AC \cdot BD \leqslant \frac{(AC + BD)^2}{4} = \frac{d^2}{4}.$$ Từ 2 kết quả trên suy ra : $S \leqslant d^2/8$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD \end{cases}$

– Ví dụ 12 : Hai đường chéo của tứ giác lồi $ABCD$ cắt nhau tại O. Biết $S(AOB) = 4$, $S(COD) = 9$.

Chứng minh rằng : $S(ABCD) \geqslant 25$.

*** Giải :** (Xem hình 1)

Ta có : $\dfrac{S(AOB)}{S(BOC)} = \dfrac{AO}{OC} = \dfrac{S(AOD)}{S(COD)} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(BOC) \cdot S(ACD) = S(AOB) \cdot S(COD) = 4 \cdot 9 = 36$

Mà theo (2) thì $(S(BOC) + S(AOD))^2 \geqslant 4S(BOC) \cdot S(AOD) =$

$= 4 \,.\, 36 = 144 \Rightarrow S(BOC) + S(AOD) \geqslant 12.$

Vậy : $S(ABCD) \geqslant 4 + 9 + 12 = 25.$

Đẳng thức xảy ra khi $S(BOC) = S(AOD)$ hay $AB \,//\, CD$.

– Ví dụ 13 : Trong tứ giác lồi $ABCD$ với diện tích S có điểm O thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2S$. Chứng minh $ABCD$ là hình vuông nhận O làm tâm.

*** Giải :** (xem hình).

Ta có : $S(AOB) \leqslant \frac{1}{2} OA \,.\, OB$,

$S(BOC) \leqslant \frac{1}{2} OB \,.\, OC$, $S(COD) \leqslant \frac{1}{2} OC \,.\, OD$,

$S(DOA) \leqslant \frac{1}{2} OD \,.\, OA$. Suy ra :

$S(ABCD) \leqslant \frac{1}{2}(OA.OB + OB.OC + OC.OD + OD.OA) \leqslant$

(do (3)) $\leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 + OB^2 + OC^2 + OC^2 + OD^2 + OD^2 + OA^2) =$

$= \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) \overset{(gt)}{=} \frac{1}{2} \,.\, 2S = S.$

Ta thấy điều này chỉ xảy ra khi các bất đẳng thức đều trở thành đẳng thức, nghĩa là phải có :

$$\begin{cases} OA \perp OB,\ OB \perp OC,\ OC \perp OD,\ OD \perp OA \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông nhận O làm tâm.

– Ví dụ 14 : Cho tứ giác lồi $ABCD$ có diện tích $S = 32$; tổng $AB + BD + DC = 16$. Tính BD.

*** Giải :** (xem hình ')

Ta có $S(ABCD) = S(ABD) + S(BDC) \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{2} AB \,.\, BD + \frac{1}{2} BD \,.\, DC = \frac{1}{2} BD(AB + CD)$

Sử dụng bất đẳng thức (2) cho 2 số BD và $AB + CD$ ta có : $32 \leqslant \frac{1}{2} BD(AB + CD) \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(BD + AB + CD)^2 \overset{(gt)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \,.\, 16^2 = 32.$

Điều này chỉ xảy ra khi các bất đẳng thức đều trở thành đẳng thức, nghĩa là phải có :

$BD = AB + CD$, mà $BD + AB + CD = 16$

$\Rightarrow BD = 8.$

Cuối cùng để kết thúc bài viết này, đề nghị các bạn vận dụng bất đẳng thức (*) giải các bài tập sau :

1) Cho $a + b = 2$.

Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geqslant 2$

2) Cho $a, b, c \in (0 ; 1)$. Chứng minh rằng :

a) $a(1 - a) \leqslant \frac{1}{4}$

b) Các bất đẳng thức $a(1 - b) > \frac{1}{4}$,

$b(1 - c) > \frac{1}{4}$, $c(1 - a) > \frac{1}{4}$

không đồng thời xảy ra.

3) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ và $a_1 a_2 \ldots a_n = \frac{1}{n}$. Chứng minh : $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1) \geqslant 2^n$.

4) $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + d} + \frac{c}{d + a} + \frac{d}{a + b} \geqslant 2$, với $a, b, c, d > 0$.

5) $\frac{a + c}{a + b} + \frac{b + d}{b + c} + \frac{c + a}{c + d} + \frac{d + b}{d + a} \geqslant 4$, với $a, b, c, d > 0$.

6) Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng :

$$a + \frac{1}{(a - b)b} \geqslant 3.$$

7) Cho $a, b, c, d \geqslant 0$. Chứng minh rằng :

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant (a + b)(c + d)$

b) $(a^2 + 1)(b^2 + 2)(c^2 + 4)(d^2 + 8) \geqslant (ac + 2)^2 (bd + 4)^2$

8) Chứng minh rằng một tứ giác lồi có diện tích S và 4 cạnh a, b, c, d là hình vuông khi và chỉ khi

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4S^2.$$

9) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có 4 cạnh là a, b, c, d. Chứng minh rằng : $S(ABCD) \leqslant p^2/4$ (p là nửa chu vi)

10) Cho ΔABC có diện tích bằng 1. Lấy các điểm K, L, M lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng trong các ΔAML, BKM, CLK có ít nhất một tam giác với diện tích $\leqslant 1/4$.

Bài T1/211. *Giải phương trình*

$$x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}z^2 + 2x + 4y + 7 - \sqrt{(2x^2+y^2+6y+10)(-3z^2+4x+2y+4)}$$

Lời giải : của Trần Quang Bình, 9M, Phước Vân, Cần Đước, Long An.

Viết lại phương trình dưới dạng :

$$\frac{(2x^2+y^2+6y+10)+(-3z^2+4x+2y+4)}{2} = \sqrt{(2y^2+y^2+6y+10)(-3z^2+4x+2y+4)}$$

Điều kiện có nghĩa của phương trình là

$(2x^2+y^2+6y+10)(-3z^2+4x+2y+4) \geqslant 0$

Nhưng ta thấy

$A = 2x^2+y^2+6y+10 = 2x^2+(y+3)^2+1 > 0$ (1)

nên suy ra $-3z^2+4x+2y+4 \geqslant 0$

– Nếu $B = -3z^2+4x+2y+4 = 0$ thì phương trình vô nghiệm

Vậy $B = -3z^2+4x+2y+4 > 0$ (2)

Nên áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương A, B : $\frac{A+B}{2} \geqslant \sqrt{AB}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A = B$

Vậy ta có $2x^2+y^2+6y+10 = -3z^2+4x+2y+4$

$\Leftrightarrow (2x^2-4x+2)+(y^2+4y+4)+3z^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2+(y+2)^2+3z^2 = 0$

Từ đó suy ra

$(x-1)^2 = 0$ hay $x = 1$

$(y+2)^2 = 0$ hay $y = -2$

$3z^2 = 0$ hay $z = 0$

Vậy $(x = 1, y = -2, z = 0)$ là nghiệm của phương trình.

Nhận xét : 1. Rất nhiều bạn giải bài này và tuyệt đại bộ phận là có lời giải đúng.

2. Nhắc lại các bạn rằng Bất đẳng thức Côsi là bất đẳng thức cho *hai số dương*.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/211 : *Ba số dương có tổng bằng đơn vị. Chứng minh rằng tổng của hai trong ba số đó không bé hơn 16 lần tích của cả ba số đó.*

Lời giải : Gọi a, b, c là ba số dương đã cho $a+b+c = 1$. Ta chứng minh $a+b \geqslant 16abc$.

Ta có

$1 = [c+(1-c)]^2 \geqslant 4c(1-c) = 4c(a+b)$

suy ra $a+b \geqslant 4c(a+b)^2$

Lại có $(a+b)^2 \geqslant 4ab$. Từ đó suy ra $a+b \geqslant 16abc$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} c = 1-c \\ a = b \end{cases} \leftrightarrow \quad \begin{matrix} c = 1/2 \\ a = b = 1/4\,. \end{matrix}$$

Nhận xét : Bài này được rất đông các bạn tham gia giải theo nhiều cách khác nhau. Nhiều bạn quên không chỉ ra khi nào xảy ra dấu đẳng thức. Các bạn có lời giải tốt : *Đỗ Hồng Sơn*, 9T Thanh Hóa, *Phạm Duy Kiên* 7A Hồng Bàng, *Đặng Hồng Toan*, Đông Hưng, Thái Bình, *Võ Quỳnh Anh* 9T Từ Liêm Hà Nội, *Mai Tùng Long*, PTNK Hà Tĩnh, *Trần Hữu Nhơn* 9T Vĩnh Long, *Nguyễn Minh Phương*, Việt Trì, Vĩnh Phú, *Quách Mạnh Hải*, 8, Phú Thọ, Vĩnh Phú, *Xuân Dũng* 7A, Xuân Thủy, Nam Hà, *Nguyễn Thu Thủy*, 8T Bắc Ninh, Hà Bắc v.v...

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T3/211

Giả sử p là số nguyên tố lẻ. Đặt

$$m = \frac{9^p - 1}{8}.$$

Chứng minh rằng m là một hợp số lẻ, không chia hết cho 3 và

$$3^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$$

Lời giải : Ta có $m = \left(\frac{3^p-1}{2}\right)\left(\frac{3^p+1}{2}\right) = ab$ dễ thấy a, b đều nguyên dương lớn hơn 1 do đó m là hợp số.

Lại có $m = 9^{p-1} + 9^{p-2} + \ldots + 1$ suy ra m lẻ và chia ba dư 1.

Theo định lí Fecma nhỏ $9^p - 9 \,\vdots\, p$ vì $(p, 8) = 1$ nên $9^p - 9 \,\vdots\, 8p$ hay $m - 1 = \frac{9^p - 9}{8} \,\vdots\, p$.

Vì $m - 1$ chẵn nên cũng có $m - 1 \,\vdots\, 2p$. Do đó

$$3^{m-1} - 1 \,\vdots\, 3^{2p} - 1 = \frac{9^p - 1}{8} = m$$

Nhận xét : 1) Nhiều bạn tham gia giải bài này có lời giải tốt như : *Phạm Huy Tùng* 9A Bế Văn Đàn Hà Nội, *Cao Quốc Hiệp* 9A Thanh Hóa, *Nguyễn Thanh Nga, Đặng Việt Cường* (Trần Đăng Ninh, Nam Định), *Lê Quang Nẫm*, 9T, Đức Phổ Quảng Ngãi, *Trần Nam Dũng*, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An, *Vũ Tuấn Anh*, 8T, Thái Nguyên – Bắc Thái, *Nguyễn Minh Thanh*, 9T Lam Sơn, Thanh Hóa. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Minh Phương* 9A cấp II Minh Phương, Việt Trì, Vĩnh Phú đã đề xuất và giải đúng bài toán tổng quát : "Giả sử p là số nguyên tố lẻ a là số nguyên lớn hơn 1. Đặt $m = \dfrac{a^{2p}-1}{a^2-1}$ khi đó m là hợp số lẻ không chia hết cho a. Ngoài ra nếu $a^2 - 1 \not\vdots\, p$ thì $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$"

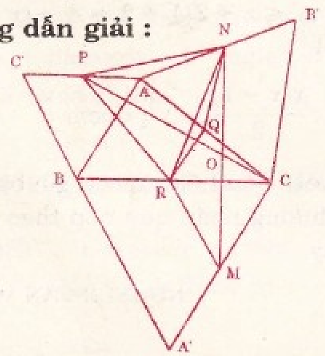
2) Đáng tiếc có hai bạn đã mắc sai lầm khi cho rằng theo định lí Fécma nếu $(m, 3) = 1$ thì $3^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$. Định lí Fécma nhỏ chỉ khẳng định điều này đúng với m là số nguyên tố. Bài toán của ta là một ví dụ cho thấy điều ngược lại của định lí Fecma là không đúng : Nếu $(m, 3) = 1$ và $3^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ thì không nhất thiết m là số nguyên tố. Các bạn hãy xem thêm bài "Định lí Fecma nhỏ và số Camical" trong Tạp chí THTT 3(213)/1995.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/211 :

Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Gọi M, N, P là các trung điểm của các đoạn thẳng CA', AB', AC' tương ứng. Chứng minh rằng MN = CP và góc giữa các đường thẳng MN và CP bằng 60°.

Hướng dẫn giải :



R và Q là trung điểm của BC và AC.

Ta có $NQ = \dfrac{1}{2}B'C = \dfrac{1}{2}AC = AQ$.

Mà $\widehat{B'AC} = 60^\circ$. Suy ra ΔNAQ đều. Do đó $\widehat{NQA} = 60^\circ$ và $NQ = AN$ (1)

Từ đó $\widehat{NQR} = 60^\circ + 180^\circ - \widehat{A}$

Lại có $\widehat{PAN} = 360^\circ - 120^\circ - \widehat{A}$

Nên $\widehat{NQR} = \widehat{PAN}$ (2)

Do $C'P = PA$ và $\Delta C'AB$ đều ta có $PA = \dfrac{1}{2}AB = QR$ (3). Từ (1), (2), (3) có $\Delta PAN = \Delta RQN$. Rút ra $PN = NR$ và $\widehat{PNA} = \widehat{RNQ} \Rightarrow \widehat{PNR} = 60^\circ \Rightarrow \Delta PNR$ đều.

Tức là có $PR = RN$ và $\widehat{PRN} = 60^\circ$.

Xét 2 tam giác PRC và NRM có :

$RM = \dfrac{1}{2}BA' = RC$, $\widehat{CRM} = 60^\circ$, $\widehat{PNR} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{PRC} = \widehat{NRM}$. Và $NR = PR$ nên $\Delta PRC = \Delta NRM$. Suy ra $PC = NM$ (4)

Theo trên $\widehat{NMR} = \widehat{PCR} \Rightarrow ORMC$ là tứ giác nội tiếp.

$\widehat{MOC} = \widehat{MRC} = 60^\circ$ (5).

Từ (4) và (5) có kết quả cần chứng minh.

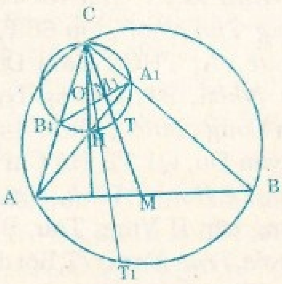
Nhận xét : Giải tốt bài này có các bạn : *Lương Thế Nhân*, lớp 6CT, Bạc Liêu ; *Nguyễn Lê Lực* 9A$_1$ THCS Đầm Dơi, Minh Hải ; *Trần Hữu Nhơn*, 9T, trường Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long ; *Lương Tuấn Anh*, 9 Toán Lí, trường Nguyễn Du, Q1 TP Hồ Chí Minh ; *Nguyễn Đức Long, Lê Hoàng Vinh, Nguyễn Hồng Hiển*, 7T trường cấp II Vũng Tàu, Bà Rịa – Vũng Tàu ; *Nguyễn Trần Nam*, 7T Bồi dưỡng Giáo dục, Biên Hòa, Đồng Nai ; *Nguyễn Đình Tuấn*, 9C, Tam Quan, Hoài Nhơn, Bình Định ; *Lê Quang Nẫm* 9T, Đức Phổ, Quảng Ngãi ; *Nguyễn Hoàng Thành*, 8/2 Nguyễn Huệ, Đà Nẵng, Quảng Nam – Đà Nẵng ; *Nguyễn Thùy Xuân Diệu*, 40 Bùi Thị Xuân Huế, Thừa Thiên – Huế ; *Trương Vĩnh Lân*, 9CT, Xuân Ninh, Quảng Ninh, Quảng Bình, *Trần Lệ Thủy*, 8T NK Thạch Hà, Hà Tĩnh ; *Nguyễn Trần Phương* 9A, Nghi Xuân, Nghi Lộc, *Trần Nam Dũng, Nguyễn Thịnh, Nguyễn Anh Tuấn*, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An, *Viên Ngọc Quang, Vũ Thị Trọng*, 9T, Lam Sơn, *Lê Hoàng Dương*, 8T, *Trương Công Bằng*, 9T, Bỉm Sơn, *Cao Thị Loan*, 8 TNK Nga Sơn, Thanh Hóa ; *Vũ Trần Cương, Hà Thanh Tuấn* 7T, *Nguyễn Thị Thuận, Bùi Anh Tuấn, Vũ Thùy Như, Mai Ngọc Kha*, 8T, *Nguyễn Thanh Nga, Mai Hải An, Nguyễn Anh Hoa, Bùi Quang Hải*, 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà ; *Triệu Trần Đức*, 8A, Trưng Nhị, *Phạm Vũ Long*, 9A Bế Văn Đàn, *Mai Thanh Bình* 8M Mari Quyri, *Nguyễn Trần Minh* 7H, *Nguyễn Hồng Hà*, 9H, Trưng Vương, *Võ Quỳnh Anh*, 9CT Nghĩa Tân, *Lê Hoàng Anh*, 8A$_1$ Giảng Võ, *Phan Linh*, 9A, PTCNN, *Phạm Quang Vinh*, 9C Ngọc Lâm, Hà

Nội ; *Võ Hồng Lân* 9CT Chuyên Phú Thọ, *Bùi Minh Mẫn*, 8A1, Chuyên Sông Thao, Vĩnh Phú ; *Vũ Thị Thuận*, cấp II Ngô Gia Tự, Hải Dương, Hải Hưng ; *Nguyễn Ngọc Mạnh*, 8B chuyên Ứng Hòa, Hà Tây ; *Nguyễn Ngọc Đông*, 9NK Thuận Thành, Hà Bắc, *Lý Thanh Hà*, Kiến Xương, Thái Bình ; *Phạm Thu Hương*, 8A$_1$ Hồng Bàng, *Đặng Anh Tuấn*, 8T, Chu Văn An 2, Hải Phòng ; *Vũ Hồng Điệp*, 8B chuyên Hòn Gai, Hạ Long, Quảng Ninh.

Cách giải ở trên của bạn *Phạm Huy Tùng*, 9A, Bế Văn Đàn, Hà Nội.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/211. *Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác CA_1HB_1 cắt trung tuyến CM của tam giác ABC tại T. Trung tuyến CM_1 của tam giác CA_1B_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại T_1. Chứng minh T và T_1 đối xứng với nhau qua AB.*



Lời giải. Gọi O là trung điểm của HC, ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AC_1HB_1. Từ các tam giác cân MA_1B, OA_1H, ta có : $\widehat{MA_1B} = \widehat{MBA_1} = 90^o - \widehat{HCA_1} = \widehat{CHA_1} = \widehat{OA_1H}$. Mà $\widehat{MA_1B} + \widehat{MA_1A} = 90^o$ nên $\widehat{OA_1H} + \widehat{MA_1A} = 90^o$, hay MA_1 là tiếp tuyến của (O). Suy ra $MA^2 = MA_1^2 = MT.MC$, và $\Delta MAT \backsim \Delta MCA$ (1). Ta có $\dfrac{CA_1}{CA} = \cos \widehat{ACB} = \dfrac{CB_1}{CB}$ nên $\Delta CA_1B_1 \backsim \Delta CAB_1$ và $\dfrac{CA_1}{CA} = \dfrac{A_1M_1}{AM}$, $\widehat{CA_1M} = \widehat{CAB}$ Do đó $\Delta CM_1A_1 \backsim \Delta CMA$, và $\widehat{M_1CA_1} = \widehat{ACM}$ (2). Mà $\widehat{M_1CA_1} = \widehat{T_1AB}$ (nội tiếp chắn cung T_1B) (3). Từ (1), (2), (3), ta có $\widehat{TAM} = \widehat{T_1AB}$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $\widehat{TBM} = \widehat{T_1BA}$. Suy ra các tia AT, BT theo thứ tự đối xứng với các tia AT_1, BT_1 qua AB, và ta có đpcm.

Nhận xét. Có 48 bài giải và đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có *Phạm Huy Tùng* (9A THCS Bế Văn Đàn, Hà Nội) ; *Bùi Việt Hà* (9C – THCS Ngọc Lâm – Gia Lâm – Hà Nội) ; *Nguyễn Anh Tuấn* (9T Phan Bội Châu – Nghệ An) ; *Lê Quang Nẫm* (9T, Đức Phổ, Quảng Ngãi).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/211. *Chứng tỏ rằng với n số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có bất đẳng thức sau đây là đúng*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \quad (1)$$

Lời giải (của đa số các bạn). Với $n = 1$, ta có $a_1^3 \geqslant a_1^2$. Bất đẳng thức này đúng vì n là số nguyên dương. Giả sử bất đẳng thức (1) đúng với $n = m$. Ta chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = m + 1$ số : $a_1, a_2, ..., a_m, x$ không mất tính tổng quát, có thể coi $1 < a_1 < a_2 < ... < a_m < x$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^3 + x^3 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{m} a_k + x\right)^2$$

Hay

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^3 + x^3 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2 + 2x\sum_{k=1}^{m} a_k + x^2$$

Theo giả thiết quy nạp thì $\sum_{k=1}^{m} a_k^3 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2$.

Vậy chỉ cần chứng minh

$$x^3 \geqslant x^2 + 2x\sum_{k=1}^{m} a_k$$

Hay $x^2 \geqslant x + 2\sum_{k=1}^{m} a_k$

Do $a_k \in \{1, 2, ..., x-1\}$ nên

$$x + 2\sum_{k=1}^{m} a_k \leqslant x + 2(1 + 2 + ... + (x-1)) =$$

$$= x + 2 \cdot \frac{x(x-1)}{2} = x^2, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét. Hầu hết các bạn gửi bài đến đều giải theo phương pháp quy nạp theo kiểu như đã trình bày.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/211 : *Cho dãy $\{a_n\}$ xác định bởi : $a_1 = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$ và $a_{n+1} = 24a_n^3 - 12\sqrt{6}a_n^2 + 15a_n - \sqrt{6}$ $\forall n \geqslant 1$.*

Xác định công thức tổng quát của a_n.

Lời giải : Với mỗi $n \in \mathbf{N}^*$ đặt $b_n = a_n\sqrt{6} - 1$. Từ dãy $\{a_n\}$ ta có dãy $\{b_n\}$ được xác định như sau : $b_1 = 2$ và $b_{n+1} = 4b_n^3 + 3b_n$ $\forall n \geq 1$.

Xét phương trình $x^2 - 4x - 1 = 0$ (1). Dễ thấy (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2 - \sqrt{5}$ và $x_2 = 2 + \sqrt{5}$. Ta sẽ chứng minh $b_n = \frac{1}{2}(x_1^{3^{n-1}} + x_2^{3^{n-1}})$ $\forall n \geq 1$ (2) bằng phương pháp quy nạp theo n.

Với $n = 1$ ta có $b_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 2$ (theo định lí Viét) và như vậy (2) đúng với $n = 1$.

Giả sử (2) đúng với $n = k \geq 1$. Ta sẽ chứng minh (2) cũng đúng với $n = k+1$. Thật vật, ta có :

$$b_{k+1} = 4b_k^3 + 3b_k =$$
$$= \frac{1}{2}(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}})^3 + \frac{3}{2}(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}})$$
$$= \frac{1}{2}(x_1^{3^k} + x_2^{3^k}) + \frac{3}{2}(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}})(x_1^{3^{k-1}}x_2^{3^{k-1}} + 1)$$
$$= \frac{1}{2}(x_1^{3^k} + x_2^{3^k})$$ (do $x_1x_2 = -1$ và 3^{k-1} là số lẻ $\forall k \geq 1$).

Điều vừa nhận được cho thấy (2) đúng với $n = k+1$. Và vì vậy, theo nguyên lí quy nạp, (2) được chứng minh. Từ đó : $a_n = \frac{1}{\sqrt{6}}(b_n + 1) =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}[(2-\sqrt{5})^{3^{n-1}} + (2+\sqrt{5})^{3^{n-1}} + 2] \ \forall n \geq 1.$$

Nhận xét : Có nhiều bạn gửi lời giải cho bài toán và tất cả đều có lời giải như trên đã trình bày.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/211. *Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng :*

$$tg\frac{A}{4} + tg\frac{B}{4} + tg\frac{C}{4} + tg\frac{D}{4} + \frac{16}{4 + tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} + tg\frac{D}{2}} < 4.$$

Lời giải Với $x, y, z, t > 0$ thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \geq \frac{16}{x+y+z+t}$. Mà tứ giác $ABCD$ lồi nên $0 < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{D}{2} < \frac{\pi}{2}$, suy ra $tg\frac{A}{2}, tg\frac{B}{2}, tg\frac{C}{2}, tg\frac{D}{2} > 0$, và ta có :

$$\frac{1}{1+tg\frac{A}{2}} + \frac{1}{1+tg\frac{B}{2}} + \frac{1}{1+tg\frac{C}{2}} + \frac{1}{1+tg\frac{D}{2}} \geq$$
$$\geq \frac{16}{4 + tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} + tg\frac{D}{2}}$$

Do đó, để có đpcm, chỉ cần chứng minh :

$$\left(tg\frac{A}{4} + \frac{1}{1+tg\frac{A}{2}}\right) + \left(tg\frac{B}{4} + \frac{1}{1+tg\frac{B}{2}}\right) + \left(tg\frac{C}{4} + \frac{1}{1+tg\frac{C}{2}}\right) + \left(tg\frac{D}{4} + \frac{1}{1+tg\frac{D}{2}}\right) < 4.$$

Ta sẽ chứng minh mỗi biểu thức trong dấu ngoặc đơn đều bé hơn 1. Thật vậy, với biểu thức đầu tiên chẳng hạn, đặt $x = tg\frac{A}{4}$, ta có $tg\frac{A}{2} = \frac{2x}{1-x^2}$. Do $x > 0$ nên từ $1 + x^2 \geq 2x$, ta có $x + x^3 \geq 2x^2$, và : $tg\frac{A}{4} + \frac{1}{1+tg\frac{A}{2}} =$

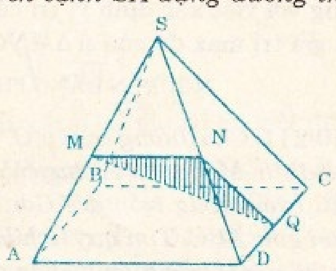
$$= x + \frac{1-x^2}{1+2x-x^2} = \frac{1+x+x^2-x^3}{1+2x-x^2} =$$
$$= \frac{1+2x+x^2-x-x^3}{1+2x-x^2} < \frac{1+2x-x^2}{1+2x-x^2} = 1.$$

và bài toán đã được chứng minh.

Nhận xét. Có 42 bạn gửi bài giải và tất cả đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Lê Quang Nẫm* (9T – Chuyên Đức Phổ – Quảng Ngãi), *Phạm Huy Tùng* (9A – PTCS Bế Văn Đàn Hà Nội), *Lê Tuấn Anh* (10B – Chuyên toán tin, ĐHTH Hà Nội), *Nguyễn Ngọc Hưng* (10T – Lam Sơn – Thanh Hóa).

ĐẶNG VIỄN

Bài T9/211. *Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Từ một điểm M di động trên cạnh SA dựng đường thẳng song*



song với AD cắt SD ở N. Trên cạnh CD lấy điểm Q sao cho $\frac{CQ}{CD} = \frac{SM}{SA}$. Tìm vị trí của M trên SA để tam giác MNQ có diện tích lớn nhất.

Lời giải. Sau đây là lời giải của bạn Trương Cao Dũng lớp 9T Năng khiếu Bỉm Sơn, Thanh Hóa và nhiều bạn khác.

Vì $MN \parallel AD$ nên $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SD}$ và theo giả thiết $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{CQ}{CD}$, ta suy ra :

$$\frac{SN}{SD} = \frac{CQ}{CD} \Rightarrow NQ \parallel SC$$

Ta có :

$$s(\Delta MNQ) = \frac{1}{2} MN.NQ\sin \widehat{MNQ}$$

$$= \frac{1}{2} MN.NQ\sin\varphi$$

trong đó $\varphi = \widehat{BCS}$ (vì $BC \parallel AD \parallel MN$ và $CS \parallel NQ$)

Suy ra :

$$s(\Delta MNQ) = \max \Leftrightarrow MN.NQ = \max$$

$$\Leftrightarrow \frac{MN}{AD} \cdot \frac{NQ}{SC} = \max$$

Nhưng $\dfrac{MN}{AD} + \dfrac{NQ}{SC} = \dfrac{SN}{SD} + \dfrac{ND}{SD} = 1$

Do đó : $s(\Delta MNQ) = \max = \dfrac{1}{4} s(\Delta SBC) \Leftrightarrow$

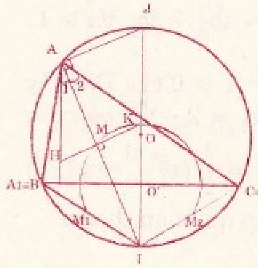
$$\Leftrightarrow \frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm } SA$$

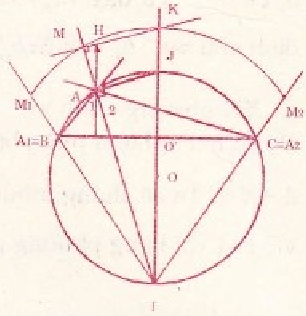
Nhận xét. Có tất cả 84 bạn tham gia giải bài này, hầu hết cho lời giải đúng, trừ 1 bạn. Đại đa số đã chỉ ra giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MNQ bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác SBC khi và chỉ khi M là trung điểm của SA. Tuy nhiên cũng khá nhiều bạn (> 10) chưa chỉ ra được cụ thể giá trị lớn nhất của $s(\Delta MNQ)$ bằng bao nhiêu. Cần lưu ý rằng việc xác định chính xác $\max s(\Delta MNQ)$ là nội dung cụ thể của bài toán đòi hỏi cùng với việc xác định vị trí của M trên SA để đạt giá trị max đó của $s(\Delta MNQ)$.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/211. *Cho đường tròn $v(O, R)$ và dây cung BC cố định. Một điểm A chuyển động trên cung $\overset{\frown}{BXC}$ của đường tròn đó. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích hình chiếu (vuông góc) M của H trên đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.*

Lời giải (Dựa theo lời giải của *Nhữ Quý Thơ* lớp 11T, Lam Sơn, Thanh Hóa). Gọi I và J lần lượt là các giao điểm của các đường phân giác





trong và ngoài góc $\widehat{BAC}$ với đường tròn $v(O, R)$; $O' = OO' \perp BC$ cũng là trung điểm của dây cung BC và đặt $OO' = d$. Thế thì IJ là một đường kính của (v) và vuông góc với BC.

Theo một tính chất đã biết về trực tâm của tam giác, thì H là trực tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OO'} = ct$ (xem các hình 1 và 2).

Gọi K là giao điểm của các đường thẳng HM và IJ trong đó $M = (HM) \perp (AI)$ là hình chiếu của H trên (AI). Thế thì $AJKH$ là một hình bình hành vì $AH \parallel JK$ (do cùng $\perp$ với BC) và $HK \parallel AJ$ (do cùng $\perp$ với BC). Dễ thấy rằng :

$$(HM)\ (\ni K) \perp (AI)\ (\ni M) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OO'} = ct$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{IM}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{IJ}} = 1 \mp \frac{d}{R}\ (\gtrless 1) = k$$

(trong đó d là khoảng cách từ O đến BC).

$k = \mp \dfrac{d}{R} \gtrless 1$ tùy theo cung $\overset{\frown}{BXC}$ (cũng tức là cung $\overset{\frown}{BJC}$) lớn hơn hay nhỏ hơn nửa đường tròn.

Từ đó suy ra quỹ tích của M là cung tròn $\overset{\frown}{M_1KM_2}$, ảnh của cung $\overset{\frown}{BJC}$ của đường tròn $v(O, R)$ trong phép vị tự $V_{I,k}$, tâm I tỉ số $k = \dfrac{IK}{IJ}$ $\left(= 1 \mp \dfrac{d}{R} \right)$, trong đó $M_1 \in$ tia $[IB)$, $M_2 \in$ tia $[IC)$ sao cho $IM_1 = IM_2 = kIB$. Dễ thấy rằng $\{M\}$ là cung $\overset{\frown}{M_1KM_2}$ của đường tròn tâm O', đường kính IK và cũng là bán kính $\rho = O'I = O'K$.

Nhận xét. 1°) Nếu điểm A chuyển động trên cả đường tròn $v(O, R)$ đã cho thì $\{M\}$ là hai cung của hai đường tròn đồng tâm O', bán kính lần lượt là $\rho = R \mp d$, trong đó $d = OO'$ là khoảng cách từ O đến BC.

2°) Nếu điểm A chuyển động trên cả đường tròn $v(O, R)$ thì quỹ tích hình chiếu (vuông góc) của trực tâm H của tam giác ABC trên các phân

Tóm lại :

$$\{M\} = M_1\widehat{KM}_2 \setminus \{M_1, M_2\}$$

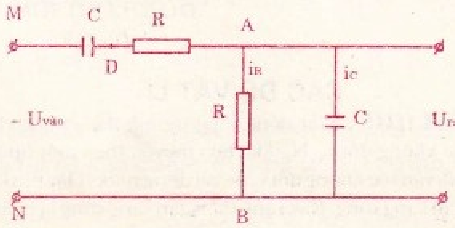
4°) Rất tiếc nhiều bạn kết luận vội vàng cho rằng $\{M\}$ là cả đường tròn hoặc nửa đường tròn tâm O', có hai đầu mút trên dây cung BC. Sở dĩ đi đến kết luận sai như vậy vì hai lẽ. Một là do không chứng minh đầy đủ phần đảo (mà thực chất là giải bài toán dựng hình). Hai là, do không thấy được M là ảnh của A trong phép vị tự tâm I, tỉ số $k = \dfrac{IK}{IJ}$ và điểm A chỉ chuyển động trên cung $\widehat{BJC}$ mà thôi. Cũng nhiều bạn không loại hai điểm M_1 và M_2.

5°) Đa số các bạn chưa biết chứng minh gộp hai phần thuận đảo của quỹ tích nên lời giải quá dài dòng. Mặt khác nhiều bạn đưa ra lời giải quá sơ sài, thiếu chính xác.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/211

Cho mạch điện như hình vẽ : R và C đã biết. Hỏi tần số góc ω của dòng điện xoay chiều bằng mấy để điện áp ra cùng pha với điện áp vào. Tìm tỉ số giữa các hiệu điện thế hiệu dụng vào và ra.



Hướng dẫn giải

Vẽ giản đồ vectơ theo kiểu ghép với các chú ý như sau : i_R cùng pha với u_{AB}, i_C sớm pha $\pi/2$ so với u_{AB} ; u_{DA} cùng pha với i, còn u_{MB} trễ pha $\pi/2$ so với i (cũng là so với u_{DA}) ; $\vec{I} = \vec{I_c} + \vec{I_R}$; $\vec{U}_{MA} = \vec{U}_{MD} + \vec{U}_{DA}$; $\vec{U}_{MN} = \vec{U}_V = \vec{U}_{MA} + \vec{U}_{AB} = \vec{U}_{MA} + \vec{U}_r$.

Muốn $\vec{U}_r$ cùng pha với $\vec{U}_v$ thì $\vec{U}_{MA}$ phải cùng pha với $\vec{U}_R$ Từ hình vẽ suy ra $\dfrac{I_C}{I_R} = \dfrac{Z_C}{R}$ và $\dfrac{I_C}{I_R} = \dfrac{R}{Z_C}$.

Từ đó $\dfrac{Z_C}{R} = \dfrac{R}{Z_C} \rightarrow \omega = \dfrac{1}{CR}$.

Từ hình vẽ cũng suy ra $U_v = U_R + U_{MA} = 3U_r$

Nhận xét : Các em có lời giải đúng và gọn : *Nguyễn Anh Đào*, 12CT Lê Quý Đôn, Vũng Tàu ; *Lê Chí Thọ*, 11CT, Đào Duy Từ, Quảng Bình ; *Nguyễn Đình Thịnh*, 10CL, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An ; *Hồng Linh*, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Tô Huy Cường*, 11A$_1$ PTTH chuyên Thái Bình ; *Nguyễn Thế Quyền*, 11CL, Quốc học Huế ; *Nguyễn Trọng Nghĩa*, PTTH Việt Trì, Vĩnh Phú.

MT

Bài L2/211

Một chất điểm A, khối lượng m được treo trên hai dây AB, AC. Các điểm B, C cố định, các dây AB, AC có khối lượng không đáng kể và độ dài không đổi AB = AC = l ; Tam giác ABC có góc A bằng 120° và ở vị trí cân bằng dây AB nằm ngang.

a) Tính lực căng của các dây AB, AC khi hệ thống cân bằng ; biết trọng lượng P = mg của chất điểm A.

b) Tính chu kì của những dao động biên độ nhỏ của hệ thống.

Hướng dẫn giải

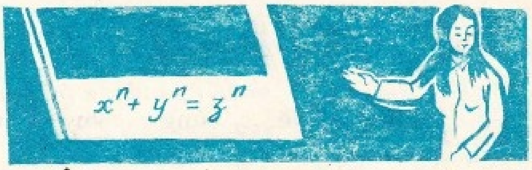
a) Vẽ hình, biểu diễn các lực tác dụng lên A ; từ hình vẽ suy ra $F_1 = \dfrac{P}{\sqrt{3}}$ và $F_2 = \dfrac{2P}{\sqrt{3}}$.

b) Khi hệ thống dao động, A chuyển động trên một cung tròn trong một mặt phẳng tạo với phương thẳng đứng một góc 30°. Hình chiếu của $\vec{g}$ lên mặt phẳng đó là $g' = g\cos 30^o = g\dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ chu kì dao động $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g'}}$ với $l' = l/2 \rightarrow$ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\sqrt{3}}}$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Mai Hoàng Chương 11A3 Lê Hồng Phong, Nam Định, Nam Hà ; *Võ Đình Hiếu*, 10CL, PTTH Đào Duy Từ, Đồng Hới ; Quảng Bình ; *Đinh Ngọc Nhân* 10CL Đào Duy Từ, Quảng Bình ; *Tô Huy Cường*, 11A$_1$, PTTH chuyên Thái Bình ; *Nguyễn Trọng Nghĩa* PTTH Việt Trì, Vĩnh Phú.

MT



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/215 : Tìm tám chữ số tận cùng của 5^{1995}

NGUYỄN ĐỨC TẤN
TP Hồ Chí Minh

Bài T2/215 : Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

Gọi (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là hai nghiệm của hệ trên. Hãy tính $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
Gia Lai

Bài T3/215 : Cho dãy số $a_1, a_2, a_3,...$ thỏa mãn :

$$a_n = \frac{2}{(2n+1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \quad (n \in N, n > 0)$$

Chứng minh rằng :

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n < \frac{n}{n+2}$$

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
Hải Phòng

Bài T4/215 : Cho tam giác ABC và một đường tròn tâm O đi qua A và C. Gọi K và N là các giao điểm của đường tròn (O) với các cạnh AB, BC tương ứng. Đường tròn tâm O_1, O_2 ngoại tiếp ΔABC và ΔKBN cắt nhau tại B và M. Chứng minh rằng $O_1O_2 \parallel OM$.

HỒ QUANG VINH
Nghệ An

Bài T5/215 : Cho tam giác ABC. Hai điểm M và N theo thứ tự di động trên hai cạnh AB và AC sao cho $BN = CM$. Gọi T là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng đường phân giác trong của góc $\widehat{BTC}$ luôn luôn đi qua một điểm cố định.

HOÀNG HOA TRẠI
Quảng Ngãi

CÁC LỚP THCB

Bài T6/215 : a, b là các số thực thỏa mãn $4b > a^2$. Hai dãy số $\{a_n\}_n^{\infty}$, $\{b_n\}_n^{\infty}$ được xác định như sau :

$$a_o = a,\ b_o = b \text{ và } \begin{cases} b_{n+1} = b_n^2 \\ a_{n+1} = 2b_n - a_n^2 \end{cases}$$

$\forall n = 0, 1, 2,...$ Chứng minh rằng tồn tại một số $n \geq 0$ mà $a_n > 0$.

NGUYỄN MINH ĐỨC
Hà Nội

Bài T7/215

a) Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1}C_n^1 C_n^o - \frac{1}{3}C_n^2 C_{n+1}^1 + \frac{1}{5}C_n^3 C_{n+2}^2 - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} C_n^n C_{2n-1}^{n-1} = 1$$

b) Chứng minh rằng :

$$C_n^1 1^n - \frac{1}{3}C_n^2 2^n + \frac{1}{5}C_n^3 3^n - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} C_n^n n^n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$$

ĐÀM VĂN NHỈ
Thái Bình

Bài T8/215 : Với mọi x sao cho tgx, $tg2x$, $tg3x$ xác định. Chứng minh rằng :

$$3(tg^2x + tg^2 2x + tg^2 3x) \geq (tgx \cdot tg2x \cdot tg3x)^2$$

TRẦN DUY HINH
Bình Định

Bài T9/215 : Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn nội tiếp tam giác có tâm O và tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A_1, B_1, C_1. Gọi M là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng B_1C_1. Chứng minh rằng MO vuông góc với AA_1.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
Nam Hà

Bài T10/215 : Tứ diện $OABC$ vuông ở O (tức là có góc tam diện $O(ABC)$ vuông) có đường cao $OH = h$ và ngoại tiếp một hình cầu bán kính r. Hỏi trong số những tứ diện vuông $OABC$ tứ diện vuông nào có tỉ số $\frac{h}{r}$ đạt giá trị lớn nhất.

ĐỖ THANH SƠN
Hà Nội

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/215 : Một dòng sông rộng l, dòng nước chảy với vận tốc không đổi v_1. Người chèo thuyền theo một hướng xác định với vận tốc không đổi v_2 so với dòng nước. Hãy tìm khoảng thời gian sang sông. Biết rằng thời gian sang sông là ngắn nhất.

NGUYỄN ĐỨC PHI
Quảng Ngãi

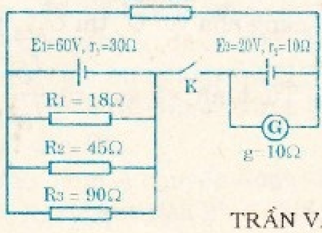
Bài L2/215 : Cho mạch điện vẽ bên.

1) K mở, nếu chỉ thay đổi R_1 thì cho nó giá trị R'_1 nào để nó đạt công suất cực đại.

2) Cũng hỏi như vậy với R_2.

3) Cũng hỏi như vậy với R_3. Tính công suất cực đại P_{3max} đó.

4) Với mạch bên nhưng thay R_3 bằng một vôn kế lí tưởng rồi đóng K. Tính số chỉ của vôn kế đó và của điện kế. Tính hiệu suất H_1 và H_2 của mỗi nguồn điện.



TRẦN VĂN MINH
Hà Nội

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/215. Find the last eight digits of 5^{1995}

T2/215. Let (x_1, y_1), (x_2, y_2) be the two solutions of the system of equations :

$$\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

Calculate $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

T3/215. Consider the sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$, where

$$a_n = \frac{2}{(2x+1)(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \ (n \in N, n > 0).$$

Prove that $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n < \frac{n}{n+2}$.

T4/215. A circle with center 0, passing through the vertices A and C of triangle ABC, cuts the side AB at A and K, cuts the side BC at C and N. The circumcircle of ABC with center O_1 cuts the circumcircle of KBN with center O_2 at B and M. Prove that $O_1O_2 \parallel OM$.

T5/215. Two points M and N move respectively on the sides AB and AC of a given triangle ABC so that $BN = CM$. Let T be the intersection of the lines BN and CM. Prove that the inbisector of angle $\widehat{BTC}$ passes through a fixed point.

For Upper Secondary Schools

T6/215. Consider two sequences $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, defined by :

$$a_o = a, \ b_o = b,$$

$$b_{n+1} = b_n^2, \ a_{n+1} = 2b_n - a_n^2 \ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

Where a and b are two given real numbers satisfying $4b > a^2$. Prove that there exists $n \geq 0$ such that $a_n > 0$.

T7/215. a) Prove that

$$\frac{1}{1} C_n^1 C_n^o - \frac{1}{3} C_n^2 C_{n+1}^1 + \frac{1}{5} C_n^3 C_{n+2}^2 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} C_n^n C_{2n-1}^{n-1} = 1$$

b) Prove that

$$C_n^1 1^n - \frac{1}{3} C_n^2 2^n + \frac{1}{5} C_n^3 3^n - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} C_n^n n^n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$$

T8/215. Prove that for every x such that tg$x$, tg$2x$, tg$3x$ are defined, we have :

$$3(\text{tg}^2 x + \text{tg}^2 2x + \text{tg}^2 3x) \geq (\text{tg}x \, \text{tg}2x \, \text{tg}3x)^2.$$

T9/215. The incircle (with center O) of a non isosceles triangle ABC touches the sides BC, CA, AB respectively at A_1, B_1, C_1. Let M be the intersection of the lines BC and B_1C_1. Prove that MO is perpendicular to AA_1.

T10/215. For which tetrahedron $OABC$, right at O (i.e. the trihedron $O(ABC)$ is right), does the quotient $\frac{h}{r}$ (where h is the altitude OH and r is the radius of the inscribed sphere of $OABC$) attain the maximum value ?

KẾT QUẢ KÌ THI QUỐC GIA CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

NĂM HỌC 1994 - 1995

A. BẬC TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Kì thi quốc gia chọn học sinh giỏi Toán THPT năm nay đã tiến hành trong hai ngày 2 và 3 tháng 3 năm 1995. Các đội đại diện cho 5 trường trực thuộc Bộ và 51 tỉnh, thành phố đã tham dự. Các đội được đăng kí thi ở bảng A hoặc bảng B. Nội dung đề thi của bảng A khó hơn của bảng B. Thí sinh phải làm 6 bài toán trong hai buổi, mỗi buổi làm 3 bài trong thời gian 180 phút. Điểm tối đa của mỗi buổi là 20. Số lượng và tỉ lệ học sinh đạt giải như sau :

Bảng A gồm 30 đội với 239 thí sinh, có 96 giải từ khuyến khích trở lên, đạt tỉ lệ 40,1%, trong đó có 3 giải nhất đạt 1,2%, có 15 giải nhì đạt 6,3%, có 38 giải ba đạt 15,9% ; có 40 giải khuyến khích đạt 16,7%.

Bảng B gồm 26 đội với 147 thí sinh, có 22 giải từ khuyến khích trở lên, đạt tỉ lệ 15%, trong đó có 2 giải nhì đạt 1,4%, có 10 giải ba đạt 6,8%, có 10 giải khuyến khích đạt 6,8%.

Nói chung cả 2 bảng có 56 đội gồm 386 thí sinh, có 118 giải từ khuyến khích trở lên, đạt tỉ lệ 30,5%, trong đó có 3 giải nhất và đạt 0,8%, có 17 giải nhì và đạt 4,4%, có 48 giải ba và đạt 12,4%, có 50 giải khuyến khích và đạt 12,9%.

DANH SÁCH
CÁC HỌC SINH ĐẠT GIẢI

I. Bảng A

1) Giải nhất. (từ 34 điểm trở lên) : *Ngô Đắc Tuấn, Nguyễn Thái Hà, Tô Đông Vũ* (ĐHTH Hà Nội)

2) Giải nhì. (Từ 30 đến dưới 34 điểm) : *Nguyễn Mạnh Cường, Đào Hải Long, Nguyễn Thế Trung* (ĐHTH Hà Nội) ; *Nguyễn Thế Phương, Đặng Việt Dũng, Vũ Quang Minh* (ĐHSP Hà Nội 1), *Nguyễn Đức Duy* (Hải Phòng) ; *Tô Trung Thành* (Nam Hà) ; *Phạm Lê Sơn, Cao Văn Hạnh* (Thanh Hóa), *Trần Quang Huy* (Vĩnh Phú) ; *Bùi Thị Ngọc Tuấn* (nữ) (Thái Bình) ; *Vũ Quang Hiếu, Đinh Văn Khâm, Dương Trần Đức* (Ninh Bình)

3) Giải ba. (từ 25 đến dưới 30 điểm) *Hồ Đắc Phương, Lê Sơn Uyên, Trần Đăng Hòa, Phạm Quang Tuấn, Đinh Thành Trung* (ĐHTH Hà Nội) ; *Trịnh Đức Vinh* (ĐHSP Hà Nội 1), *Vũ Thắng Bình* (tp Hà Nội) ; *Phan Anh Tuấn, Đặng Ánh Nguyệt* (nữ), *Tô Diệu Hằng* (nữ) (Hà Tây) *Bùi Trọng Quân, Đặng Quốc Dũng* (Hải Phòng); *Trịnh Thế Huynh* (Nam Hà), *Hoàng Quốc Dũng, Lưu Chí Dũng, Trần Văn Bình* (Bắc Thái), *Nguyễn Hồng Tâm, Phạm Thị Ngọc Lan* (nữ) (Vĩnh Phú), *Đỗ Thế Tài* (Hải Hưng), *Nguyễn Tiến Chinh* (Thái Bình) ; *Vũ Đức Cảnh, Nguyễn Cao Sơn, Định Thị Thu Thủy* (nữ) (Ninh Bình) ; *Hoàng Anh Tùng, Nguyễn Thị Lộc* (nữ), *Lê Anh Xuân* (Thanh Hóa), *Lê Huy Khanh* (Nghệ An), *Lê Anh Tuấn, Trần Quang Nhật, Nguyễn Tri Phương, Lê Thái Phong, Trần Đại Nghĩa, Phan Quang Vinh* (Hà Tĩnh), *Nguyễn Xuân Thắng* (Quảng Trị), *Nguyễn Phụng Minh, Nguyễn Văn Sơn, Trần Duy Dũng, Hồ Văn Hướng* (Thừa Thiên – Huế).

4) Giải khuyến khích. (từ 21 đến dưới 25 điểm) : *Nguyễn Hoài Nam, Trương Xuân Khánh, Nguyễn Quyết Định* (ĐHTH Hà Nội), *Lê Trường Giang, Phan Dương Hiệu* (ĐHSP Hà Nội 1), *Hoàng Cường, Lê Thời Hữu, Hoàng Xuân Bách* (ĐHSP Vinh), *Nguyễn Thanh Hà, Thân Danh Tuấn* (tp Hà Nội), *Nguyễn Anh Đức, Nguyễn Ngọc Trân, Lê Quốc Hoa* (tp Hồ Chí Minh), *Nguyễn Minh Tùng* (Hà Tây), *Vũ Tiến Dũng* (Hải Phòng), *Vũ Văn Điệp* (Nam Hà), *Lê Tuấn Hùng, Lê Quang Minh* (Bắc Thái), *Đặng Trần An, Trần Thị Việt Hòa* (nữ), *Đặng Đức Hạnh, Hà Đức Quân* (Vĩnh Phú), *Trần Thái Hoàng, Vũ Thành Long, Vũ Huy Phương, Phạm Đào Lâm, Vũ Thị Thu Nga* (nữ) (Hải Hưng), *Nguyễn Mạnh Thắng, Vũ Trung Chỉnh* (Thái Bình), *Nguyễn Văn Năng* (Ninh Bình), *Lê Thị Hà* (nữ) (Thanh Hóa), *Nguyễn Ngọc Bích, Lương Văn Thắng, Nguyễn Hoàng Long* (Nghệ An), *Nguyễn Thị Hải Yến* (nữ) (Thừa Thiên Huế), *Mai Quang Trí* (Bình Định), *Nguyễn Xuân Nguyên, Võ Đức Nguyên* (Khánh Hòa), *Lê Minh Trung, Lương Ngọc Tuấn Anh* (Đồng Nai).

II. Bảng B

1) Giải nhì (từ 28 điểm trở lên) *Đoàn Xuân Tiến* (Sông Bé), *Trần Văn Thủy* (Vĩnh Long)

2) Giải ba (từ 23 đến dưới 28 điểm) *Hoàng Thanh Hải, Hoàng Văn Lâm, Vũ Thanh Bình, Nguyễn Trường Giang, Nguyễn Thanh Tùng* (Hòa Bình), *Dương Trung Hải* (Quảng Bình), *Nguyễn Xuân Hùng, Từ Minh Hải* (ĐakLak), *Nguyễn Thanh Cát* (Long An), *Nguyễn Văn Dương* (Minh Hải)

3) Giải khuyến khích (từ 20 đến dưới 23 điểm) *Lê Văn Mạnh* (Hòa Bình), *Nguyễn Long Quỳnh* (Lạng Sơn), *Nguyễn Thư Uyên* (Lâm Đồng), *Lê Minh Thân, Trần Văn Phước* (Vĩnh Long), *Võ Hoàng Trung* (Trà Vinh) ; *Vương Quốc Khương* (Sông Bé), *Võ Ngọc Thuận* (Kiên Giang) *Dương Hoàng Kiệt, Đặng Văn Quyết* (Minh Hải).

B. BẬC TRUNG HỌC CƠ SỞ

Kì thi quốc gia chọn HSG PTTH môn toán lớp 9 năm học 1994 – 1995 tổ chức ngày 2/3/1995 chia làm 2 bảng. Đề thi ở mỗi bảng gồm có 4 bài toán làm trong 180 phút (không kể thời gian giao đề) với tổng số điểm cho mỗi đề là 20 điểm.

Hội đồng chấm thi quốc gia đã quyết định mức điểm cho các loại giải (nhất, nhì, ba, và khuyến khích) về môn toán lớp 9 ở các bảng A, B :

DANH SÁCH CÁC HỌC SINH ĐẠT GIẢI :

I. Bảng A (có 109 em đạt giải) :

1) Giải nhất (3 em) (điểm từ 17 đến 20)

Vương Mai Phương (nữ) : 18 điểm (Hải Hưng), *Nguyễn Hoài Nam* 17 điểm (Hà Tây), *Trần Nam Dũng* 17 điểm (Nghệ An)

2) Giải nhì (21 em) (từ 15 đến dưới 17 điểm)

Trần Thế Quang, Nguyễn Hoàng Anh, Phạm Đình Hương (Hà Nội), *Vũ Đức Phú* (TP Hồ Chí Minh), *Đào Thị Thu Hà, Đặng Anh Tuấn* (Hải Phòng), *Vũ Xuân Dũng, Trịnh Phan Hà* (Nam Hà), *Cao Quốc Hiệp, Vũ Đình Phương* (Thanh Hóa), *Văn Trung Nghĩa* (Thừa Thiên – Huế), *Hoàng Thị Nga* (nữ) (Vĩnh Phú), *Đặng Đức Hạnh* (Nghệ An), *Trịnh Thị Kim Chi* (nữ), *Phan Thị Thanh Hải* (nữ), *Mai Tùng Long, Dương Thu Phương* (nữ) (Hà Tĩnh), *Nguyễn Hữu Hội, Trần Lê Nam, Lê Quang Nẩm* (Quảng Ngãi), *Đinh Đỗ Quang* (Khánh Hòa).

3) Giải ba (25 em) (13 đến dưới 15 điểm)

Phạm Nguyễn Thu Trang (nữ), *Trần Trung Thành, Mai Thanh Bình* (Hà Nội), *Lương Tuấn Anh, Ninh Thanh Cần* (TP Hồ Chí Minh), *Trần Trung Nghĩa* (Nam Hà), *Trịnh Tuấn Hùng* (Thanh Hóa), *Nguyễn Thị Hồng Nhung* (nữ) – (Vĩnh Phú), *Nguyễn Thị Thu Hương* (nữ) – (Hà Bắc), *Hoàng Hải Anh* (Hải Hưng), *Đoàn Nhật Dương, Trần Văn Hoàng, Hà Đức Lộc, Đoàn Ngọc Tú* (Thái Bình), *Nguyễn Thị Thảo (nữ), Nguyễn Trọng Nhường* (Nghệ An), *Lê Huy Bình, Trần Thị Tiên Giang* (nữ), *Đặng Thị Hồng Minh* (nữ) (Hà Tĩnh), *Nguyễn Vũ* (Khánh Hòa), *Lâm Hồng Thu* (nữ), *Nguyễn Thị Hồng Nhung* (nữ), *Phan Anh Tuấn, Trần Đại Nghĩa* (Đồng Nai), *Lưu Minh Đức* (Tiền Giang).

4) Giải khuyến khích (60 em) (từ 10 đến dưới 13 điểm)

Cao Trần Kiên (Hà Nội), *Nguyễn Tuấn Việt, Nguyễn Đức Hoàng Hạ, Như Xuân Thiên Châu* (TP Hồ Chí Minh) ; *Nguyễn Thị Vân Khánh* (nữ), *Đỗ Thanh Mai, Bùi Trung Ngọc* (Hà Tây) ; *Nguyễn Thanh Huyền* (nữ), *Ngô Mạnh Hà, Cao Việt Hùng, Nguyễn Ngọc Linh, Phạm Tuấn Minh, Nguyễn Doãn Tiến* (Hải Phòng) ; *Nguyễn Anh Hoa, Nguyễn Thanh Nga* (nữ), *Phạm Văn Quốc* (Nam Hà) ; *Nguyễn Văn Thuấn, Trần Xuân Giang, Phạm Thị Loan* (nữ), *Viên Ngọc Quang, Lê Minh Thành* (Thanh Hóa) ; *Lê Văn Quốc Anh, Trần Thúy Chân* (nữ), *Đinh Trung Hoàng, Lê Thị Quỳnh Trâm* (Thừa Thiên – Huế) ; *Ngô Chí Trung, Ngô Quốc Tuấn* (Quảng Nam – Đà Nẵng) ; *Vũ Quốc Huy, Nguyễn Văn Nam, Nguyễn Thị Thu Thủy* (nữ), *Phạm Đỗ Việt* (Vĩnh Phú) ; *Cung Mai Loan* (nữ), *Đặng Anh Tuấn* (Bắc Thái) ; *Đặng Hoàng Việt Hà, Ngô Quang Hưng, Nguyễn Thị Huyền Linh* (nữ), *Nguyễn Tiến Mạnh, An Vũ Thắng* (Hà Bắc) ; *Phạm Quang Dũng, Phạm Văn Hải, Đặng Quang Huy, Dương Thị Vân Thanh* (nữ) (Hải Hưng) ; *Tô Thị Minh Hồng* (nữ), *Nguyễn Trường Thanh, Bùi Quang Thịnh* (Thái Bình) ; *Vũ Hải Châu, Nguyễn Văn Đức, Vũ Ngọc Hà, Nguyễn Tử Hoàng, Lê Thanh Nam, Phùng Anh Sơn* (Ninh Bình) ; *Châu Văn Đồng, Nguyễn Thịnh* (Nghệ An) ; *Thái Thọ, Lê Ngọc Thành Vinh* (Hà Tĩnh) ; *Bùi Thị Phương Uyên* (Quảng Ngãi) ; *Lê Thị Mỹ Linh* (nữ), *Dương Thanh Trúc* (nữ), *Triệu Trí Dũng* (Đồng Nai), *Lê Đức Duy Nhân* (Tiền Giang).

II. Bảng B (có 45 em đạt giải)

1) Giải nhất *(3 em) :*

Trần Anh Tuấn (18 điểm), *Nguyễn Tiến Anh* (17 điểm), *Nguyễn Anh Dũng* (17 điểm) (Hòa Bình)

2) Giải nhì *:* (6 em)

Hà Khánh Toàn (Hòa Bình), *Lê Anh Dũng* (Đăk Lăk), *Mai Đức Thanh* (Đăk Lăk), *Võ Hạnh Nguyên* (nữ) (Sông Bé), *Cao Anh Đức* (Tây Ninh), *Nguyễn Lê Lực* (Minh Hải)

3) Giải ba *(11 em) :*

Hoàng Mạnh Cường, Trương Vĩnh Lâm, Nguyễn Ngọc Linh, Nguyễn Viết Thanh (Quảng Bình) ; *Vũ Hải Đông, Trần Minh Hậu, Lê Trọng Vĩnh* (Đăk Lăk) ; *Phan Huy Đạo* (Lâm Đồng) ; *Ngô Anh Vũ* (Bến Tre) ; *Trần Ngọc Minh* (nữ), *Ninh Hồng Phúc* (Vĩnh Long)

4) Giải khuyến khích *(25 em) :*

Lê Minh Đức (Yên Bái) ; *Phùng Ngọc Hiền Phương* (nữ), *Vũ Thị Huyền Phương* (nữ), *Ngô Hồng Quang, Nguyễn Bá Trung* (Hòa Bình) ; *Nguyễn Hữu Cầu, Nguyễn Việt Linh, Trần Hữu Lực* (Quảng Bình) ; *Nguyễn Bá Thành, Nguyễn Đình Vũ, Trần Song Kiệt, Huỳnh Thị Vũ Quỳnh* (nữ) (Gia Lai) ; *Trần Thị Nguyên Ny* (nữ) (Kon Tum) ; *Nguyễn Xuân Thư* (Đak Lak) ; *Nguyễn Tiến Hàng, Trần Nguyên Phương, Nguyễn Thị Hạnh* (nữ) (Lâm Đồng) ; *Hoàng Mai Quỳnh* (Ninh Thuận) ; *Trần Quang Bình* (Long An) ; *Hà Mai Lan* (nữ), *Lê Ngọc Thúy* (nữ) (Sông Bé) ; *Nguyễn Trần Quang Dũng, Dương Thái Hoài* (Tây Ninh) ; *Nguyễn Đặng Thuận An* (Minh Hải) ; *Nguyễn Hà Hải Đăng* (Vĩnh Long).

NGUYỄN VIỆT HẢI – NGUYỄN HỮU THẢO

Cùng bạn đọc

Bên cạnh việc phản ánh tình hình dạy và học toán ở các địa phương qua các bài viết, TC THVTT còn đăng ảnh nhằm đưa đến bạn đọc những số báo phong phú và sinh động cả về nội dung và hình thức. ***Toán học và tuổi trẻ*** *mong nhận được các bức ảnh đẹp của bạn đọc xa gần gửi tới. Các ảnh nên là ảnh chụp các hoạt động liên quan đến học sinh giỏi toán, tin học. Ảnh có thể chụp về hoạt động dạy và học ; cũng có thể chụp về các sinh hoạt ngoại khóa, văn nghệ, thể thao, tham quan du lịch. Ảnh nên là ảnh màu, cỡ ít nhất là 9 × 12. Sau ảnh chú thích rõ nội dung, tên và địa chỉ người chụp, không ép plastic.*

Chân thành cảm ơn các bạn

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ÁP DỤNG

MỘT TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

NGUYỄN PHÚ LỘC
(Cần Thơ)

Trong bài báo này, chúng tôi nhấn mạnh đến một tính chất của hàm số liên tục với việc ứng dụng tính chất này vào giải vài bài toán

1. Tính chất

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trên đoạn $[a, b]$ thì $f(x) > 0$ với $\forall x \in [a, b]$ hay $f(x) < 0$ với $\forall x \in [a, b]$

Chứng minh

Giả sử tồn tại x_1, x_2 thuộc đoạn $[a, b]$ với $x_1 < x_2$ và $f(x_1) \cdot f(x_2) \leqslant 0$, vì f liên tục trên đoạn $[x_1, x_2]$ nên $\exists c \in [x_1, x_2]$ sao cho $f(c) = 0$; mâu thuẫn vì $f(x) = 0$ vô nghiệm trên đoạn $[a, b]$. Vậy $f(x) > 0\ \forall x \in [a, b]$ hay $f(x) < 0\ \forall x \in [a, b]$

2. Áp dụng

Bài toán 1 : Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{9-x}$

Giải

Miền xác định : [4, 9]

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{9-x} - \sqrt{x-4}}{2\sqrt{x-4}\,.\sqrt{9-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$$

Ta có $f'(5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0,$

$$f'(8) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0$$

và vì hàm số f'(x) liên tục trên các khoảng $\left(4 ; \frac{13}{2}\right)$ và $\left(\frac{13}{2}, 9\right)$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	4	5	13/2	8	9
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$\sqrt{5}$ ↗		$2\sqrt{\frac{5}{2}}$	↘	$\sqrt{5}$

Bài toán 2 : Cho biết $2b + 3c = 0$. Chứng minh rằng phương trình : $a\cos 2x + b\cos x + c = 0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $\left(0, \pi/2\right)$

Giải

Ta có $a\cos 2x + b\cos x + c = 0$

$\Leftrightarrow a(2\cos^2 x - 1) + b\cos x + c = 0$

$\Leftrightarrow 2a \,.\, \cos^2 x + b\cos x + c - a = 0$

Đặt $X = \cos x$, $0 < X < 1$, ta có :

$$2aX^2 + bX + c - a = 0 \ (1)$$

Xét hàm số $f(X) = a\frac{X^4}{2} + \frac{bX^3}{3} + (c-a)\frac{X^2}{2}$

$f'(X) = 2aX^3 + bX^2 + (c-a)X$

$f'(X) = X(2aX^2 + bX + c - a)$

Giả sử (1) vô nghiệm trong khoảng (0, 1).

Vì hàm $g(X) = 2aX^2 + bX + c - a$ liên tục trong khoảng (0, 1) nên :

$g(X) > 0\ \forall X \in (0, 1)$ hay $g(X) < 0\ \forall X \in (0, 1)$

- Nếu $g(X) > 0\ \forall X \in (0, 1)$, thì

$f'(X) > 0\ \forall X\ (0, 1) \Rightarrow$ hàm f tăng trong (0, 1) nhưng f liên tục trên đoạn $[a, b]$ nên :

$$f(0) = 0 < f(1) = \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = \frac{2b+3c}{6} = 0 \text{ vô lí}$$

- Nếu $g(X) < 0\ \forall X \in (0, 1)$, lập luận tương tự như trên ta có :

$f(0) > f(1)$ hay $0 > 0$ vô lí

Vậy (1) phải có nghiệm thuộc khoảng (0, 1) hay phương trình $a\cos 2x + b\cos x + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Bài toán 3 (Trích Đề 51 – Bộ đề tuyển sinh)

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Biết rằng phương trình $f(x) = x$ không có nghiệm, hãy chứng minh rằng phương trình

$$a(f(x))^2 + b(f(x)) + c = x$$

không có nghiệm

(Bạn đọc tự tìm lời giải)

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

ĐỀ THI TUYỂN SINH KHỐI A NĂM 1994 TRƯỜNG ĐHTH HÀ NỘI

(Thời gian làm bài 180 phút)

PHẦN BẮT BUỘC

Câu I. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số.

2) Giả sử đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + m$ cắt đồ thị *(C)* tại hai điểm *A, B*. Tìm quỹ tích trung điểm *I* của đoạn *AB* khi *m* thay đổi.

Câu II. 1) Giải phương trình lượng giác

$$\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$$

2) Cho ΔABC có 3 góc nhọn. *M* là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi *x, y, z* lần lượt là các khoảng cách từ *M* đến các cạnh *BC, AC, AB*. Chứng minh rằng $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$ trong đó *a, b, c* là 3 cạnh còn *R* là bán kính vòng tròn ngoại tiếp của tam giác *ABC*. Khi nào đạt dấu bằng ?

Câu III. 1) Xác định các giá trị *a, b* để các phương trình sau tương đương với nhau :

$$x^2 - 2(a - b)x + 2a^2 - b^2 = 0.$$
$$x^2 + 2(a + b)x + a^2 + 2b^2 = 0.$$

2) Giải phương trình $2x^{\log_2 x} + 2x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$

PHẦN TỰ CHỌN *(thí sinh chọn 1 trong 2 câu dưới đây)*

Câu IV a1) Cho *f(x)* liên tục và $f(a + b - x) = f(x)$.

Chứng minh rằng $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

Áp dụng để tính $I = \int_0^{\pi} x\sin^3 x dx$

2) Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc *Oxyz* cho hai đường thẳng với phương trình tham số :

$$(d_1)\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t + 2, \\ z = 3t - 3; \end{cases} \quad và \quad (d_2)\begin{cases} x = s + 2, \\ y = 2s - 3, \\ z = 3s + 1. \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng (d_1), (d_2) là hai đường thẳng chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

Câu IV b1) Trong mặt phẳng *(P)* cho ΔABC. Tìm quỹ tích các điểm *M* trong *(P)* sao cho :

diện tích ΔMAB = diện tích ΔMAC.

2) Một thiết diện chia thể tích hình lập phương thành hai phần bằng nhau. Chứng minh rằng thiết diện đó đi qua tâm của hình lập phương.

3) Tính $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$.

ĐÁP ÁN

PHẦN BẮT BUỘC :

Câu I $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$

1) Tập xác định : $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = 1 - \frac{1}{(1 + x)^2} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2,\ y_1 = -2 \\ x_2 = 0,\ y_2 = 2 \end{array}\right.$$

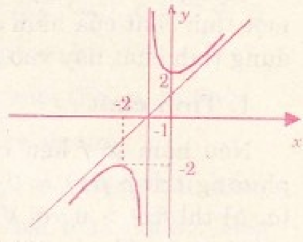
Điểm cực đại (−2 ; −2) ; Điểm cực tiểu (0 ; 2).

Tiệm cận đứng : $x = -1$; Tiệm cận xiên : $y = x + 1$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Đồ thị : (xem hình vẽ)



2) Lập phương trình

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{2}x + m \ (1)$$

với $x \neq -1$ ta có

$(1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 =$

$= (x + 1)\left(\frac{1}{2}x + m\right)$

$\Leftrightarrow x^2 + (3 - 2m)x + 4 - 2m = 0 \ (*)$

Để (*) có nghiệm

$$\Delta = 4m^2 - 4m - 7 \geqslant 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \leqslant \frac{1}{2} - \sqrt{2} \\ m \geqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Tọa độ trung điểm của *AB* là

$$x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2m - 3}{2} = m - \frac{3}{2} \Rightarrow m = x_1 + \frac{3}{2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + m = \frac{1}{2}x_1 + x_1 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x_1 + 1)$$

Vậy *quỹ tích I là đường thẳng* $y = \frac{3}{2}(x + 1)$ *trừ ra một khoảng ứng với* $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$.

Câu II.

1) $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$ (1)

1) Điều kiện : $\begin{cases} \cos^2 x \geqslant \sin^2 x \\ \sin x + \cos x \geqslant 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\sin x + \cos x}\left(\sqrt{\cos x - \sin x} + \right.$

$\left. + \sqrt{\sin x + \cos x} - \sqrt{\frac{2 - \sin 2x}{4}}\right) = 0$

2) Xét $\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x > 0 \ (A) \\ \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\sin x + \cos x} = \sqrt{\frac{2 - \sin 2x}{4}} \ (B) \end{array}\right.$

(A) $\Rightarrow$ *ta có* $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ (k ∈ Z)

Xét *(B)* ta có

$(VT)^2 = \left(\sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\sin x + \cos x}\right)^2 \geqslant 2\cos x \geqslant \sqrt{2}$

(vì theo (*) ta có $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$)

trong khi $(VP)^2 = \frac{2 - \sin 2x}{4} \leqslant \frac{3}{4}$. Vì vậy *(B)* vô nghiệm.

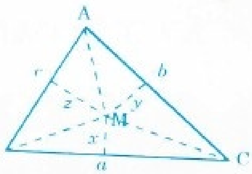
Kết luận : nghiệm của (1) là $\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in z)}$

Chú ý : Có thể biến đổi *VT* của *(B)* như sau :

$$VT = \sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[4]{2}\left(\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \geqslant VT \geqslant \sqrt[4]{2}.$$

2) Ta có $ax + by + cz =$



$$= 2S = \frac{abc}{2R} \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2R} =$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)(ax+by+cz)}{abc} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(ab+bc+ca)}{abc}(ax+by+cz) =$$

$$= \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(ax+by+cz) \geqslant (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$$ (theo Bunhiacôpxki) $\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases}$, lúc ra khi và chỉ khi ΔABC *đều và M là trọng tâm của* ΔABC.

Câu III

1) $x^2 - 2(a-b)x + 2a^2 - b^2 = 0$

$x^2 + 2(a+b)x + a^2 + 2b^2 = 0$

T.H.1 : Cả 2 phương trình có nghiệm và các nghiệm bằng nhau ; theo Vi-et ta có

$$\left.\begin{array}{l} 2(a-b) = -2(a+b) \\ 2a^2 - b^2 = a^2 + 2b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = 0$$

T.H.2 : Cả 2 phương trình cùng vô nghiệm :

(1) $\Delta'_1 = (a-b)^2 - (2a^2 - b^2) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 + 2ab > 0$

(2) $\Delta'_2 = (a+b)^2 - (a^2 + 2b^2) < 0 \Leftrightarrow b^2 - 2ab > 0$

vì $b = 0$ không thỏa mãn b.p.t thứ 2 nên (1), (2) tương đương với :

$$\left.\begin{array}{l} (1')\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right) - 2 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} > -1+\sqrt{3} \\ \frac{a}{b} < -1-\sqrt{3} \end{array}\right. \\ (2')\ 1 - 2\left(\frac{a}{b}\right) > 0 \leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right) < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < -1-\sqrt{3}$$

K.L. $\boxed{\begin{array}{l} a = b = 0, \\ \frac{a}{b} < -1-\sqrt{3} \end{array}}$

2) $2x^{\log_2 x} + 2x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$ đk $x > 0$,

đặt $x^{\log_2 x} = t > 0$ ta được

$$2t + \frac{2}{t} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$$

$$x^{\log_2 x} = t \Rightarrow \log_2^2 x = \log_2 t \geqslant 0 \Rightarrow t \geqslant 1$$

vậy $t_1 = \frac{1}{2} < 1$ loại, $t_2 = 2 \Rightarrow \log_2^2 x = \log_2 2 = 1 \Rightarrow \log_2 x = \pm 1$

D.S. $\boxed{x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 2.}$

PHẦN TỰ CHỌN

Câu IVa 1) Đổi biến $x = a + b - t \Rightarrow dx = -dt$

$$I = \int_a^b xf(x)dx = -\int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)dt =$$

$$= \int_a^b (a+b)f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx \text{ đ. p. c. m.}$$

Áp dụng cho $f(x) = \sin^3 x$, $a = 0$, $b = \pi$:

$$I = \int_0^\pi x\sin^3 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^3 x dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos^2 x)d(\cos x)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(\cos x\Big|_0^\pi - \frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^\pi\right) = \frac{2\pi}{3};$$

D.S $I = \frac{2\pi}{3}$

2) a) (d_1) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2,1,3)$

(d_2) có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1,2,3)$; hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cộng tuyến vậy (d_1) và (d_2) không song song với nhau.

Mặt khác hệ phương trình $\begin{cases} 2t + 1 = s + 2 \\ t + 2 = 2s - 3 \\ 3t - 3 = 3s + 1 \end{cases}$ với 2 ẩn là t, s là vô nghiệm nên không đồng phẳng. Vậy (d_1), (d_2) chéo nhau.

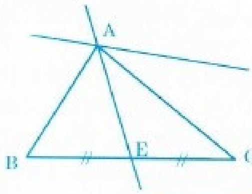
b) Xác định *mf(P)* : $Ax + By + Cz + D = 0$ đi qua (d_1) và // (d_2) Vectơ pháp tuyến $n = (A, B, C)$ của *(P)* trực giao với $\vec{u}, \vec{v} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2A + B + 3C = 0 \\ A + 2B + 3C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ có thể chọn $\vec{n} = (1, 1, -1)$;

$(d_1) \subset (P)$ điểm $(1, 2, -3) \in (d_1) \Rightarrow A + 2B - 3C + D = 1 + 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -6$

(P) có phương trình $x + y - z = -6 = 0$. Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) là khoảng cách từ 1 điểm bất kì $\in (d_2)$ đến *(P)* chẳng hạn từ $(2, -3, +1)$ đến $(P) \Rightarrow$

$$\delta = \frac{|2-3-1-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \delta$$

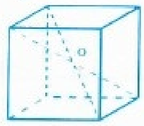
Câu IVb



1) dt ΔMAB = dtΔMAC

$\Rightarrow$ đường cao hạ từ B, C đến đáy MA bằng nhau$\Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} M \in \text{đường thẳng // } BC \text{ đi qua } A \text{ (trừ } A) \\ M \in \text{đường trung tuyến kéo dài } AE \text{ (trừ } A) \end{array}\right.$



2) + Nếu thiết diện đi qua tâm hình (hộp) lập phương thì chia đôi thể tích (do t/c đối xứng).

+ Nếu thiết diện không qua tâm thì kẻ mf // thiết diện và qua tâm $\Rightarrow$ gặp mâu thuẫn.

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(\sin x)}{\sin x}.\frac{\sin x}{x} = 1.$$

THANG ĐIỂM

PHẦN BẮT BUỘC (7đ,5)

Câu I

1) 1,5 điểm : − KXD 1 đ

− y', cực trị 1/2 đ

− Tiệm cận, bảng biến thiên 1/2 đ

− Đồ thị 1/4 đ.

2) 1,5 điểm :

− Viết được phương trình $x^2 + (3-2m)x + 4 - 2m = 0$. 1/2 đ

− Phần còn lại 1đ. Thiếu hạn chế quỹ tích trừ 1/4 đ.

Câu II 1) 1,5 điểm :

− Giải được nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = 0$: 1đ

− Cm được phương trình *(B)* vô nghiệm : 0,5 điểm.

2) 1 điểm.

− Cm được bất đẳng thức : 3/4 điểm.

− Đạt dấu = : 1/4 điểm.

Câu III 1) 1 điểm : mỗi trường hợp 1/2 điểm.

2) 1 điểm : giải được phương trình bậc 2 theo t : 1/2 điểm ; phần còn lại 1/2 điểm.

PHẦN TỰ CHỌN (2đ,5)

Câu IVa

a) 1 điểm : − Cm được đẳng thức 1/2 điểm

− Áp dụng tính I : 1/2 điểm.

2) a 3/4 điểm ; b) 3/4 điểm.

Câu IVb 1) 1 điểm (mỗi đường thuộc quỹ tích : 1/2 điểm)

2) 1 điểm (thuận, đảo mỗi phần 1/2 điểm)

3) 1/2 điểm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Giải trí TOÁN HỌC

GIẢI ĐÁP BÀI

Câu chuyện trong rừng

Gọi tuổi A là x (x nguyên dương). Ta có :

Tuổi C = tuổi D − tuổi B = $(x + 30) - (x - 90) = 120$. Vì tích các chữ số trong số tuổi của A là một số không âm nên ta có $(x + 30)(x - 90) - 100 . 120 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 60x - 14.700 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant 30 + \sqrt{15600} > 154$ (vì $x > 0$) (1)

Mặt khác giả sử $x = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (với $a_1 \neq 0$)

thì ta có $a_1 . a_2 \ldots a_n \leqslant a_1 . 9^{n-1} \leqslant a_1 10^{n-1} + a_2 . 10^{n-2} + \ldots + a_n = x$

Vậy : $(x + 30)(x - 90) - 100 . 120 \leqslant x$ (dấu = xảy ra khi n = 1)

$\Leftrightarrow x^2 - 61x - 14700 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow 0 < x \leqslant \dfrac{61 + \sqrt{62521}}{2} < 156$ (2) Vì x nguyên nên từ (1) và (2) suy ra $x = 155$

Từ đó có tuổi cây $A = 155$, tuổi cây C = 120

tuổi cây $B = 65$, tuổi cây $D = 185$

Nhận xét : Các bạn *Nguyễn Tài Thu*, 6A, NK Yên Thành, Nghệ An và *Phạm Thế Hùng*, 6CT, Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội đã đưa ra được đáp số đúng nhưng lập luận còn chưa chặt chẽ.

BÌNH PHƯƠNG

Cắt và ghép hình

Một người có một miếng ván hình chữ nhật, dài 1,5m, rộng 0,3m. Người đó muốn cắt miếng ván đó thành nhiều mảnh sao cho ghép các mảnh này lại thì được một hình vuông.

Bạn hãy chỉ hộ cách cắt và ghép các mảnh này lại.

VŨ HOÀNG THÁI

THỂ LỆ GỬI BÀI DỰ THI GIẢI TOÁN

- Tất cả các bạn học sinh từ lớp 6 đến lớp 12 đều có thể gửi bài dự thi.
- Mỗi bài giải viết riêng trên một mảnh giấy. Phía trên bên trái đề số của bài, bên phải ghi họ tên thật, lớp, trường địa phương.
- Các bài của cùng một số gửi chung trong một phong bì. Ngoài phong bì ghi rõ Bài giải của số báo nào.
- Bài dự thi chỉ gửi về một địa chỉ

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
45B Hàng Chuối
HÀ NỘI.

- Thời hạn nhận bài là 2 tháng tính từ cuối tháng ra số báo đó.
- Tòa soạn không nhận bài giải tập thể.
- Không dán nhiều hồ và không gấp bài quá phức tạp.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ.

ISSN : 0866 − 8035.
Chỉ số 12884
Mã số : 8BT17M5

Sắp chữ tại Trung tâm Vi tính và
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 5/1995

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng