BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

4 (214)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

- HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA, CHÙM ĐIỀU HÒA
- MA PHƯƠNG TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ BỎ TÚI
- THI OLIMPIC TOÁN KHU VỰC CHÂU Á-THÁI BÌNH DƯƠNG
- ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO ĐẠI HỌC XÂY DỰNG 1994
- MỘT TÍNH CHẤT ĐẸP CỦA ĐA GIÁC ĐỀU
- DU LỊCH XUYÊN VIỆT

Học sinh giỏi toán trường Quốc học Bình Định

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : TRỌNG THIỆP

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA, CHÙM ĐIỀU HÒA

LÊ QUỐC HÁN
Nghệ An

Sách giáo khoa hình học lớp 10 hiện lưu hành không trình bày các vấn đề trên, còn sách bài tập hình học lớp 10 thì giới thiệu phần "hàng điểm điều hòa" một cách sơ sài và bỏ qua phần "chùm điều hòa". Điều đó gây cho học sinh nhiều khó khăn trong việc giải các bài toán hình học sơ cấp. Trong bài này, tôi xin trình bày một cách có hệ thống hơn về hai vấn đề này.

Định nghĩa 1 : Các điểm nằm trên một đường thẳng được gọi là một *hàng điểm*.

Chú ý : Nếu ba điểm A, B, C nằm trên một đường thẳng, thì tồn tại số thực λ sao cho $\overrightarrow{CA} = \lambda\,\overrightarrow{CB}$ (vì hai véctơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cộng tuyến). Khi đó ta sẽ kí hiệu một cách hình thức $\overrightarrow{CA} / \overrightarrow{CB} = \lambda$, và nói rằng điểm C chia AB theo tỉ số λ.

Nếu A và B có tọa độ (trên trục qua A, B) là a và b, thì tọa độ c được tính bằng công thức $c = (a - \lambda b) / (1 - \lambda)$

Định nghĩa 2 : Cho hàng điểm A, B, I, J. Khi đó giá trị biểu thức $\dfrac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IB}} : \dfrac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{JB}}$ được gọi là *tỉ số kép* của bốn điểm đó (theo thứ tự) và được kí hiệu là $(ABIJ)$.

Định nghĩa 3 : Hàng điểm A, B, I, J được gọi là hàng điểm điều hòa nếu $(ABIJ) = -1$

Bài tập 1 : Cho $(ABIJ) = -1$. Chứng minh $(IJAB) = -1$.

Thí dụ 1 : Cho hàng điểm điều hòa $ABIJ$ và O là trung điểm của AB. Chứng minh $\overrightarrow{OI}\,.\,\overrightarrow{OJ} = OA^2$.

Giải : Chọn trục tọa độ là *giá* của hàng điểm A, B, I, J (tức là đường thẳng đi qua các điểm ấy), a, b, m, n là các tọa độ của A, B, I, J

Theo giả thiết : $(ABIJ) = -1$ suy ra :

$$(a - m)/(b - m) = -(a - n)/(b - n) \Leftrightarrow 2(ab + mn) = (a+b)(m+n). \quad (1)$$

Chọn gốc tọa độ là O, trung điểm của AB thì $a + b = 0$, $|\overrightarrow{OA}| = |a|$, $|\overrightarrow{OI}| = |m|$, $|\overrightarrow{OJ}| = |n|$ nên từ (1) suy ra điều phải chứng minh.

Dùng kết quả (1), bạn hãy chứng minh

Bài tập 2 : Cho hàng điểm $ABIJ$. Gọi O và O' là các trung điểm của AB và IJ. Chứng minh rằng $ABIJ$ là hàng điểm điều hòa khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

1) $\dfrac{1}{\overline{IA}} + \dfrac{1}{\overline{IB}} = \dfrac{2}{\overline{IJ}}$ (Hệ thức Đécác)

2) $\overrightarrow{OI}\,.\,\overrightarrow{OJ} = OA^2$ (Hệ thức Niutơn)

3) $AB^2 + IJ^2 = 4O'O^2$ (Hệ thức Mácloranh)

Định nghĩa 4 : Các đường thẳng cùng đi qua một điểm S được gọi là *chùm đường thẳng*. Khi đó S là tâm của chùm.

Bài tập 3 : Cho chùm đường thẳng $S\,(a, b, c, d)$. Khi đó hai điều kiện sau đây là tương đương :

1) Đường thẳng bất kì cắt a, b, c, d theo một hàng điểm điều hòa.

2) Đường thẳng bất kì song song với một trong bốn đường a, b, c, d bị ba đường còn lại chắn thành hai đoạn bằng nhau.

(Để chứng minh bài tập này, bạn có thể dùng định lí Talét).

Định nghĩa 5 : Chùm đường thẳng $S\,(a, b, c, d)$ có các tính chất ở bài tập 3 được gọi là *chùm điều hòa* và kí hiệu là $S(a\,, b\,, c\,, d) = -1$.

(Tiếp theo trang 8)

Bài T1/210 : *Tìm x, $y \in Z$ sao cho* $8x^3 = 3^y + 997$

Lời giải *Cách 1* (của *Đặng Thị Hồng Minh*, 9T, Năng Khiếu, Hà Tĩnh.)

$$8x^3 = 3^y + 997 \qquad (1)$$

Từ $y \in Z \Rightarrow 3^y + 997 > 0$. Từ (1) $\Rightarrow$ $8x^3 > 0 \Rightarrow x \in N^*$

Từ đó suy ra $y \in N$.

– Nếu $y \geqslant 2 \Rightarrow 3^y \equiv 0 \pmod 9$; $997 \equiv 7 \pmod 9$

(1) $\Rightarrow 8x^3 = (2x)^3 \equiv 7 \pmod 9$

Điều này mâu thuẫn vì với $n \in N$ thì $n^3 \equiv 0, 1, 8 \pmod 9$

– Nếu $y = 1 \Rightarrow 8x^3 = 1.000 \Rightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

– Nếu $y = 0 \Rightarrow 8x^3 = 998 \Rightarrow x \notin N$ (loại)

Vậy có duy nhất một bộ x, y thỏa mãn (1) là

$$(x, y) = (5, 1)$$

Cách 2 (của *Mai Thanh Bình*, 8M, Mari Quyri, Hà Nội)

Ta có $8x^3 = 3^y + 997 \equiv 0 \pmod 8$

$\Rightarrow 3^y \equiv 3 \pmod 8 \Rightarrow y$ lẻ.

Đặt $y = 2k + 1 \Rightarrow 8x^3 = 3^{2k+1} + 997$

$\Leftrightarrow 8x^3 = 3(9^k - 1) + 1000$

$\Leftrightarrow (2x)^3 - 10^3 = 3(9^k - 1). \qquad (1)$

* Xét $k > 0$

(1) $\Rightarrow (2x)^3 - 10^3 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow 2x \equiv 10 \pmod 3$

$\Rightarrow 4x^2 - 40x + 100 = (2x - 10)^2 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow 4x^2 + 20x + 100 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow (2x)^3 - 10^3 \equiv 0 \pmod 9$

Nhưng $(9^k - 1) \not\vdots\, 3$. Mâu thuẫn

* Xét $k = 0$ từ (1) $\Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

Vậy ta có cặp nghiệm $(x, y) = (5, 1)$

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải đúng bài này. Sau đây là các bạn có lời giải tốt : *Phạm Hữu Lưu*, 9T, Năng Khiếu Gia Lương ; *Nguyễn Ngọc Đông*, 9, Năng Khiếu, Thuận Thành, Hà Bắc. *Lê Tiến Đạt*, 9, Chuyên Văn–Toán, Thường Tín, Hà Tây. *Nguyễn Anh Dũng*, 9H, Trưng Vương ; *Nguyễn Thu Hằng*, 9A$_1$, Giảng Võ ; *Nguyễn Sĩ Phong*, 9A, Chuyên Ngữ, Hà Nội, *Phùng Đức Tuấn*, 9NK, Thanh Hà, Nam Thanh, Hải Hưng. *Đỗ Diệu Ngọc*, *Nguyễn Hồng Dung*, 8T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà. *Trần Quí Ban*, 6T, Năng Khiếu, Thái Thụy, Thái Bình, *Lê Minh Thành*, *Lê Đình Duy*, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa. *Phạm Xuân Thanh*, 8D, Năng Khiếu Thành phố, *Trương Ngọc Tuyên*, 9T, Năng Khiếu Nga Sơn ; *Lê Xuân Trung* 8T, Năng Khiếu, Triệu Sơn, Thanh Hóa, *Trần Nam Dũng*, 9CT, Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An, *Trịnh Kim Chi*, 9T, Năng Khiếu, Hà Tĩnh, *Trương Vĩnh Lân*, 9CT, Xuân Ninh, *Nguyễn Ngọc Linh*, 9$_1$, Đông Mĩ, Đồng Hới, Quảng Bình, *Lê Quang Nẩm*, 9T, *Huỳnh Minh Sơn*, 7T, Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi.

TÔ NGUYÊN

Bài T2/210 : *Ba số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện*

$$(y-z)\sqrt[3]{1-x^3} + (z-x)\sqrt[3]{1-y^3} + (x-y)\sqrt[3]{1-z^3} = 0$$

Chứng minh rằng

$$(1 - x^3)(1 - y^3)(1 - z^3) = (1 - xyz)^3$$

Lời giải : (của các bạn *Đào Trọng Thế* 9T PTNK Hà Tĩnh, *Nguyễn Ngọc Linh* PTCS Đông Mĩ Đồng Hới, *Lê Huy Bình* 9T Hà Tĩnh *Phùng Thanh Tùng* 9CT Thái Bình, *Đặng Ngọc Minh* lớp 9 Toán Hải Hưng)

Ta dễ dàng chứng minh được : Nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Đặt $a = (y-z)\sqrt[3]{1-x^3}$, $b = (z-x)\sqrt[3]{1-y^3}$ và $c = (x-y)\sqrt[3]{1-z^3}$ ta có

$$(y-z)^3(1-x^3) + (z-x)^3(1-y^3) + (x-y)^3(1-z^3)$$
$$= 3(x-y)(y-z)(z-x)\sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}$$

Biến đổi vế trái ta được vế trái bằng :

$$3(1 - xyz)(x - y)(y - z)(z - x).$$

Vì x, y, z là ba số khác nhau nên từ đó suy ra

$$1 - xyz = \sqrt[3]{(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)}$$

hay $(1 - xyz)^3 = (1 - x^3)(1 - y^3)(1 - z^3)$

Nhận xét. Tất cả các bạn tham gia giải bài này đều làm đúng và theo cách như trên

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T3/210.

a, b, c là ba số tùy ý thuộc đoạn [0, 1]. Chứng minh rằng

1) $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

2) $2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \leqslant 3$

3) $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ca+1} + \dfrac{c}{ab+1} \leqslant 2$

Lời giải :

1) Ta có $a(1-b) \geqslant a^2(1-b)$

$$b(1-c) \geqslant b^2(1-c)$$

$$c^2(1-a) \geqslant c(1-a)$$

Suy ra

$$(a^2+b^2+c^2)-(a^2b+b^2c+c^2a) \leqslant$$
$$\leqslant a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)$$
$$=(a+b+c)-(ab+bc+ca). \qquad (1)$$

Mặt khác vì

$$(1-a)(1-b)(1-c)+abc \geqslant 0 \rightarrow$$
$$1 \geqslant (a+b+c)-(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ở (1) và (2) đồng thời có dấu bằng. Dấu bằng ở (2) $\leftrightarrow$ một số bằng 0, một số bằng 1

Nếu $a = 0$, $b = 1$ thì để (1) xảy ra dấu bằng ta có $c = 1$ hoặc $c = 0$

Nếu $a = 0$, $c = 1$ thì dấu bằng ở (1) luôn xảy ra với mọi b.

Vậy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ $c = 1$, b tùy ý. Hoán vị vòng quanh ta có :

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$a = 0$, $c = 1$, b tùy ý ; $b = 0$, $a = 1$, c tùy ý hoặc $c = 0$, $b = 1$, a tùy ý.

2) Ta có

$$(1-a^2)(1-b)+(1-b^2)(1-c)+$$
$$+(1-c^2)(1-a) \geqslant 0 \qquad (3)$$
$$\rightarrow 3 + a^2b + b^2c + c^2a \geqslant$$
$$\geqslant a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geqslant$$
$$\geqslant 2(a^3+b^3+c^3) \text{ (đpcm)} \qquad (4)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi có dấu bằng ở (3) và (4). Dấu bằng ở (3) $\leftrightarrow$ có hai số bằng 1 chẳng hạn $a = b = 1$ khi đó dấu bằng ở (4) khi $c^2 = c \leftrightarrow c = 0$ hoặc 1.

Vậy dấu bằng $\leftrightarrow$ cả ba số bằng 1 hoặc hai số bằng 1 số còn lại bằng 0

3) Không mất tổng quát ta giả sử

$$a \geqslant b \geqslant c.$$

Nếu $c = 0$ thì $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ca+1} + \dfrac{c}{ab+1}$ $= a + b \leqslant 2$ dấu = khi và chỉ khi

$$a = b = 1.$$

Nếu $c > 0$ ta có $(1-a)(1-c) \geqslant 0 \rightarrow$

$$1 + ac \geqslant a + c$$

Khi đó $\dfrac{b}{ca+1} \leqslant \dfrac{b}{a+c} \leqslant \dfrac{b}{b+c}$

Tương tự $\dfrac{c}{ab+1} \leqslant \dfrac{c}{a+b} \leqslant \dfrac{c}{b+c}$

Mặt khác $\dfrac{a}{bc+1} < a \leqslant 1$.

Suy ra

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} < 1 + \frac{b+c}{b+c} = 2$$

Tóm lại $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ca+1} + \dfrac{c}{ab+1} \leqslant 2$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow$ một số bằng 0 và hai số kia bằng 1.

Nhận xét : 1. Rất đông các bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn đều chứng minh đúng nhưng không có bạn nào nêu được chính xác tất cả các trường hợp có dấu bằng xảy ra (Đặc biệt ở câu 1)

2. Một số bạn mắc sai lầm khi cho rằng vai trò của a, b, c là bình đẳng nên có thể giả thiết $a \leqslant b \leqslant c$. Thực ra vai trò của chúng chỉ bình đẳng trong câu 3

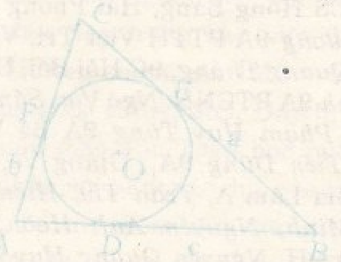
3. Một số bạn có lời giải tương đối hoàn chỉnh là : *Phạm Văn Thành*, 9T, Lam Sơn Thanh Hóa, *Nguyễn Anh Hoa*, 9, Trần Đăng Ninh, Nam Hà, *Nguyễn Khuyên Lân*, 8D, Năng khiếu Thanh Hóa, *Trần Nam Dũng*, 9C, Phan Bội Châu, Nghệ An, *Lê Xuân Trung*, 8, Năng khiếu Triệu Sơn, Thanh Hóa.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/210 :

Cho đường tròn nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với cạnh AB tại điểm D. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại C là : CA. CB = 2. DA. DB.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh BC, AC.

Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và $2p$ là chu vi tam giác. Do $BD = BE$, $CF = CE$ nên $AD + AF = 2p - 2a$. Suy ra $AD = p - a$

Tương tự $BD = p - b$.

Ta có : $CA. CB = 2DA. DB$

$$\Leftrightarrow ab = 2(p-a)(p-b)$$
$$\Leftrightarrow 2ab = (2p-2a)(2p-2b)$$

$\Leftrightarrow 2ab = (b + c - a)(a + c - b)$

$\Leftrightarrow 2ab = c^2 - (a - b)^2$

$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

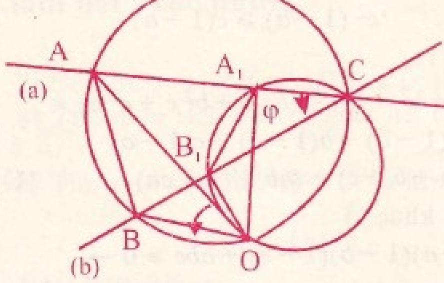
Nhận xét :

Giải tốt bài này gồm có các bạn : *Nguyễn Lê Lực* 9A$_1$ Thị trấn Đầm Dơi, Minh Hải ; *Nguyễn Phú Khánh* trường Lê Đại Đường, Tân Trụ, Long An ; *Vũ Đức Phú*, 9T Nguyễn Du, Gò Vấp, *Tạ Huỳnh Duy Nguyên* 9^2 trường Colette, Q3, TP Hồ Chí Minh ; *Trần Phi Hùng*, 8T, trường Bồi dưỡng Giáo dục Biên Hòa, Đồng Nai ; *Nguyễn Trung Kiên*, 9A PTCS thị trấn Ayunpa, Gia Lai ; *Nguyễn Thị Như Quỳnh*, 9T, *Lê Phú Thành*, 8T Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Lê Tự Nhiên*, 9A THCS Nguyễn Văn Trỗi, Điện Bàn, Quảng Nam – Đà Nẵng ; *Ngô Tiến Dũng*, 9B Trần Cao Vân, Quy Nhơn, Bình Định ; *Đinh Trung Hoàng* 9A PTTH Phú Bài, Thừa Thiên – Huế ; *Nguyễn Ngọc Linh* 9$_1$ Đồng Mĩ, Đồng Hới, Quảng Bình ; *Dương Thu Phương* 9TNK Hà Tĩnh ; *Trần Nam Dũng* 9CT Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Lê Minh Thành, Vũ Thị Lan Hương, Hoàng Văn Hùng, Lê Đình Duy* 9T Lam Sơn, *Mai Thịnh Hiệp*, 9B THCS Nga Hải, Nga Sơn, *Nguyễn Khuyến Lân* 8D trường Năng khiếu Thanh Hóa, *Trần Anh Tuấn* 9B Xuân Ngọc, Xuân Thủy, *Nguyễn Ngọc Hưng* 8T NK Ý Yên, *Nguyễn Anh Hoa* 9T, *Nguyễn Hồng Dung, Hoàng Mạnh Quang, Trần Tuấn Cường*, 8T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà ; *Đoàn Minh Đức* 8D Chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình ; *Nguyễn Ngọc Đông, Nguyễn Đăng Thắng* 9NK Thuận Thành, Hà Bắc ; *Phùng Đức Tuấn*, 9CT NK Thanh Hà, Nam Thanh, Hải Hưng ; *Phạm Thu Hương* 8A$_1$, THCS Hồng Bàng, Hải Phòng ; *Nguyễn Minh Phương* 9A PTTH Việt Trì, Vĩnh Phú ; *Nguyễn Quang Thắng*, 9C Hải Bối, Đông Anh, *Phan Linh* 9A PTCNN, *Ngô Văn Sáng* 9A Chu Văn An, *Phạm Huy Tùng* 9A Bế Văn Đàn, *Nguyễn Tiến Dũng* 9A$_1$, Giảng Võ, *Bùi Việt Hà* 9C Gia Lâm A, *Trần Thu Hiền, Nguyễn Tường Minh, Nguyễn Anh Hoàn, Nguyễn Hồng Hà* 9H, *Nguyễn Quang Huy* 8H PTCS Trưng Vương, *Mai Thanh Bình, Trần Trung Tiến* 8M Mari Quyri, Hà Nội.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/210. *Trên hai đường thẳng a và b cắt nhau ở điểm C có hai động tử (chẳng hạn, hai bộ hành) chuyển động thẳng đều nhưng với vận tốc khác nhau : A có vận tốc v_1 trên a và B có vận tốc v_2 trên b ($v_1 \neq v_2$). Biết rằng A và B không gặp nhau ở C. Chứng minh rằng ở bất cứ thời điểm nào, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn luôn đi qua một điểm cố định O nào đó, khác C.*

Lời giải.



Gọi A và B là hai vị trí xác định nào đó của hai động tử ; chẳng hạn, đó là hai vị trí xuất phát, ứng với thời điểm $t_o = 0$; A_1 và B_1 là hai vị trí tương ứng của A và B ở thời điểm $t = t_1$. Thế thì ta có : $\dfrac{BB_1}{AA_1} = \dfrac{v_2(t_1 - t_o)}{v_1(t_1 - t_o)} = \dfrac{v_2}{v_1}$ (không đổi)

Gọi O là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $v(ABC)$ và $v_1(A_1B_1C)$, (x. Hình vẽ bên) ; dễ dàng chứng minh rằng :

$\Delta OAA_1 \backsim \Delta OBB_1$. Từ đó suy ra :

$$\begin{cases} \widehat{A_1OB_1} = \widehat{AOB} = \widehat{ACB} = \varphi \\ \dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{BB_1}{AA_1} = \dfrac{v_2}{v_1} \quad ; \text{ tức là :} \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \varphi \text{ (không đổi)} \quad (1) \\ \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{v_2}{v_1} \text{ (không đổi)} \quad (2) \end{cases}$$

Suy ra O cố định vì, theo (1) và (2) O là một trong hai giao điểm O và O' của hai đường tròn xác định : đường tròn $v(ABC)$ và đường tròn Apôlôniút (α), quỹ tích những điểm M sao cho $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{v_2}{v_1}$. [Chú ý rằng nếu $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \varphi$ thì $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\varphi$ và do đó, giao điểm thứ hai O' của hai đường tròn trên không thỏa mãn (1)]

Ta được đ.p.c.m.

Nhận xét : 1) Số bạn tham gia giải bài toán này không nhiều. Điều đó *có lẽ* phản ánh sự lúng túng của nhiều bạn về phương pháp giải bài toán kiểu này : *chứng minh sự tồn tại* của một hình (trong bài toán này, *hình* ở đây là một *điểm*) thỏa mãn một số tính chất đặc trưng nào đó. Để chứng minh đường tròn (ABC) luôn luôn đi qua một điểm cố định, trong đó A và B là hai phần tử chuyển động, ta phải cố định hóa hai vị trí nào đó của A và B và xét hai vị trí tương ứng bất kì A_1, B_1 của A và B. Sau đó chứng minh rằng giao điểm thứ hai O của hai đường tròn (ABC) và (A_1B_1C) là điểm cố định bằng cách chỉ ra các tính chất đặc trưng của nó mà ta có thể dựng được (tuy nhiên không nhất thiết phải chỉ ra cách dựng cụ thể điểm O đó).

2) Một số bạn chỉ ra rằng việc chứng minh các đường tròn (ABC) đi qua một điểm cố định quy về việc chứng minh tâm các đường tròn này thẳng hàng trên một đường thẳng Δ cố định nào đó và do đó, điểm O phải tìm đối xứng với C qua Δ ; tuy nhiên lại chứng minh quá phức tạp, dài dòng mà vẫn thiếu chặt chẽ.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Đặng Anh Tuấn* 9T, PTNK Trần Phú, *Đặng Thị Hải Hà*, 9T, Chu Văn An cấp II, *Đặng Anh Tuấn*, 8T, Chu Văn An, *Nguyễn Bá Dũng*, 9T, Chu Văn An (Hải Phòng) ; *Nguyễn Anh Hoa*, 9T, Trần Đăng Ninh (Nam Định) ; *Nguyễn Tuấn Minh* 9T, *Phùng Thanh Tùng*, 9T (thị xã Thái Bình) ; *Phạm Anh Tuấn*, 9T, Lam Sơn, *Lưu Văn Thịnh* 9T Thiệu Yên (Thanh Hóa). Đặc biệt, bạn *Đặng Anh Tuấn* lớp 9T, PTTH năng khiếu Trần Phú (Hải Phòng) đưa ra lời giải ngắn gọn (tuy chưa biết sử dụng khái niệm góc có hướng giữa hai đường thẳng), đồng thời chỉ ra thêm rằng điểm cố định O cần tìm là *tâm của phép vị tự – quay*, tỉ số $k = \frac{v_2}{v_1}$, góc quay $\widehat{ACB}$ (chính xác là $(CA, CB) = \varphi$) biến đường thẳng a thành đường thẳng b (trong đó biến điểm A thành điểm B). Vì a, b, $(CA, CB) = \varphi$, $k = \frac{v_2}{v_1}$ cố định nên tâm O của phép vị tự quay đó cố định.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T6/210. *Tính tổng*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}\cos 2^k}{1-\cos 2^{k+1}}$$

Lời giải (của đa số các bạn).

Gọi tổng cần tính là S. Khi đó

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}\cos 2^k}{1-\cos 2^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^{k+1}(\cos 2^k + 1)}{1-\cos 2^{k+1}} - \frac{2^{k+1}}{1-\cos 2^{k+1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^{k+1}(\cos 2^k + 1)}{1-2\cos^2 2^k + 1} - \frac{2^{k+1}}{1-\cos 2^{k+1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^{k}}{1-\cos 2^k} - \frac{2^{k+1}}{1-\cos 2^{k+1}} \right) =$$

$$= \frac{2}{1-\cos 2} - \frac{2^{n+1}}{1-\cos 2^{n+1}}.$$

Nhận xét. Các bạn gửi lời giải đến đều có chung một cách giải dựa trên việc phân tích các số hạng của S thành hiệu của hai số hạng liên tiếp của một dãy. Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn : *Đặng Nhất Danh*, *Nguyễn Quốc Toản*, (LVC, Tuy Hòa, Phú Yên), *Nguyễn Thanh Tú* (ĐDT, Quảng Bình), *Cao Thế Anh*, *Nguyễn Thị Hải Yến*, *Đoàn Quang Vinh* (QH Huế), *Lê Huy Khanh*, *Lê Văn An*, *Dương Văn Yên*, *Lê Quang Hưởng* (PBC, Nghệ An), *Lê Huy*, *Lý Hoàng* (Đông Hà, Quảng Trị), *Nguyễn Tiến Dũng*, *Nguyễn Hồng Nhân*, *Huỳnh Kì Anh* (Lê Quý Đôn, Quảng Nam – Đà Nẵng), *Nguyễn Quang Hải* (Hùng Vương, Vĩnh Phú), *Lê Tự Thiên* (Nguyễn Duy Hiệu, Quảng Nam – Đà Nẵng), *Trịnh Đông Sơn* (Vĩnh Bảo, Hải Phòng), *Trần Đức Quyền*, *Trịnh Thế Huynh* (Lê Hồng Phong, Nam Hà), *Trương Thuận* (Phan Ngọc Hiển, Cà Mau, Minh Hải), *Từ Minh Hải* (11CT, Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc), *Phạm Tuấn Anh* (10A CT, ĐHSP Vinh), *Vũ Chung* (12A CT, Nguyễn Huệ, Hà Tây), *Dương Đức Huỳnh* (11 Hồng Quang, Hải Hưng), *Lê Công Sơn* (12 Việt Đức, Hà Nội), *Nguyễn Quang Nghĩa*, *Trần Nguyên Ngọc* (CT ĐHTH Hà Nội), *Vũ Trọng Hiếu*, *Ngô Đức Duy*, *Hà Duy Hưng* (Trần Phú, Hải Phòng), *Nguyễn Tuấn Hải*, *Đinh Trung Hằng* (Marie Curie, Hà Nội), *Trần Trường Thủy* (11 Minh Khai, Đức Thọ, Hà Tĩnh), *Đoàn Vĩnh Kha* (11 Nguyễn Huệ, Phú Yên), *Đỗ Anh Tuấn* (12 Uông Bí, Quảng Ninh), *Phạm Huy Tùng* (9A, Bế Văn Đàn, Hà Nội), *Lê Anh Vũ* (QH Huế), *Nguyễn Vũ Hưng* (11 CNN, ĐHSPNN, Hà Nội), *Hoàng Văn Đông*, *Nhữ Quý Thơ*, *Phạm Lê Phương*, *Lê Minh Hiếu*, *Đinh Thị Nhung*, *Lê Viết Hải*, *Sao Đỏ* (Lam Sơn, Thanh Hóa), *Nguyễn Minh Hoàng* (Lê Quý Đôn, Nha Trang), *Đặng Đức Hạnh* (Hùng Vương, Vĩnh Phú), *Nguyễn Kỳ Quốc* (Nguyễn Trãi, Phan Rang), *Nguyễn Bá Chung* (Nga Sơn, Thanh Hóa).

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/210 : *Cho dãy số* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *thỏa mãn điều kiện :*

$0 < u_n < 1$ *và* $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$ *với mọi* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *Tìm* $\lim_{n\to\infty} u_n$

Lời giải : Với mỗi $n = 1, 2, 3 \ldots$ áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $1 - u_n$ và u_{n+1} ta được :

$$u_{n+1} + (1-u_n) \geq 2\sqrt{u_{n+1}(1-u_n)} > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\forall n \in N^*$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \ \forall n \in N^*$$

$\Rightarrow$ dãy $\{u_n\}$ là dãy tăng. Hơn nữa, theo giả thiết, $\{u_n\}$ là dãy bị chặn. Suy ra, tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Từ giả thiết

$u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}\ \forall n \in N^*$ ta có

$\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}(1-\lim\limits_{n\to\infty} u_n) \geq \frac{1}{4}$, hay

$u(1-u) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (u-\frac{1}{2})^2 \leq 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Nhận xét : Có rất nhiều bạn, từ khắp mọi miền của đất nước, gửi lời giải của bài toán. Trong đó chỉ có : 3 bạn (hai bạn ở trường chuyên Phan Bội châu, Nghệ An và 1 bạn ở TH chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long) cho lời giải sai do chưa hiểu đúng về giới hạn của dãy số và do ngộ nhận trong các đánh giá ; một bạn (ở trường Đào Duy Từ, Quảng Bình) cho lời giải không đầy đủ, do quên không chứng minh sự tồn tại của $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Tất cả các bạn còn lại đều có lời giải như hoặc tương tự lời giải đã trình bày ở trên

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/210. *Giả sử có một đường tròn được chia thành 35 cung bằng nhau bởi 35 điểm. Người ta tô tất cả các điểm đó bởi hai màu sao cho mỗi điểm chỉ được tô bằng một màu. Chứng minh rằng tồn tại 5 điểm cùng màu và là các đỉnh của hai tam giác cân có chung đúng một đỉnh.*

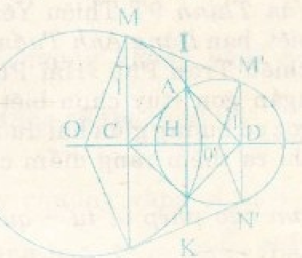
Lời giải. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử không có 5 điểm nào cùng màu là các đỉnh của hai tam giác cân có chung đúng một đỉnh (1). Gọi hai màu đem tô là xanh và đỏ và giả sử có N điểm xanh, ta có $(35-N)$ điểm đỏ và số dây X–$Đ$(*) là $N(35-N)$ (2). Gọi mỗi trục nối tâm đường tròn với mỗi điểm xanh là trục xanh, với mỗi điểm đỏ là trục đỏ. Do (1) nên ứng với trục xanh d có nhiều nhất một dây X–X nhận d làm trục đối xứng. Như vậy, còn lại $(N-3)$ điểm xanh đều có điểm đối xứng qua d là điểm đỏ, và có ít nhất $(N-3)$ dây X–$Đ$ nhận d làm trục đối xứng. Do 35 lẻ nên mỗi dây đều có một trục đối xứng hoặc xanh hoặc đỏ duy nhất, do đó ứng với N trục xanh có $N(N-3)$ dây X – $Đ$ nhận trục xanh làm trục đối xứng. Tương tự, số dây X–$Đ$ nhận trục đỏ làm trục đối xứng là $(35-N)(35-N-3)$. Kết hợp với (2), ta có $N(N-3) + (35-N)(32-N) \leq N(35-N)$ hay $3N^2 - 105N + 35.32 \leq 0$ (3). Do hệ số của N^2 dương và $\Delta < 0$ nên tam thức ở vế trái của (3) luôn dương hay (3) không xẩy ra. Vậy (1) không xẩy ra và ta có đpcm.

Nhận xét. Có ít bạn gửi bài giải trong đó 9 bài giải đúng, phần lớn không dùng phản chứng nên lời giải dài dòng. Bạn đọc có thể vận dụng lời giải trên để mở rộng bài toán cho $(2n+1)$ điểm chia đường tròn, $(2k+1)$ điểm cùng mầu là các đỉnh của k tam giác cân với 1 đỉnh chung duy nhất sao cho $k \leq \left[\frac{2n+5}{8}\right]$

ĐẶNG VIỄN

Bài T9/210. *Cho hai đường tròn $(O\,;R)$ và $(O'\,;R')$ với $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm A và B. Hai tiếp tuyến chung ngoài MM' và NN' ($M, N \in (O)$; $M', N' \in (O')$). Dây MN cắt OO' ở C ; dây $M'N'$ cắt OO' ở D. Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình thoi.*

Lời giải. Ta có $\frac{OM}{O'M'} = \frac{R}{R'} = \frac{ON}{O'N'}$; từ các tiếp tuyến MM', NN' ta lại có $OM \,//\, O'M'$; $ON \,//\, O'N'$ nên $\widehat{MON} = \widehat{M'O'N'}$. Suy ra $\Delta MOM' \backsim \Delta NO'N'$ (tr.h.2), và ta có $\widehat{M_1} = \widehat{M'_1}$



Do đó, $\widehat{CMM'} + \widehat{MM'D} = (90^o - \widehat{M_1}) + (90^o + \widehat{M'_1}) = 180^o$, và $MN \,//\, M'N'$; hay $MM'N'N$ là hình thang. Gọi I, K là các giao điểm của đường thẳng AB tương ứng với MM', NN', ta có $\overline{IM}^2 = \overline{IA}\,.\,\overline{IB} = \overline{IM'}^2$ (tính chất của tiếp tuyến và cát tuyến kẻ từ I), nên $IM = IM'$ hay I là trung điểm của MM' (1). Tương tự, K là trung điểm của NN', suy ra IK là đường trung bình của hình thang $MM'N'N$. Vậy $IK \,//\, MN$ (2). Gọi H là giao điểm của IK với CD, từ (1) và (2), ta có H là trung điểm của CD. Hơn nữa H là trung điểm của AB (tính chất của dây chung và đường nối tâm (3)), nên $ACBD$ là hình bình hành. Từ (3), ta lại có $AB \perp CD$ nên $ACBD$ là hình thoi.

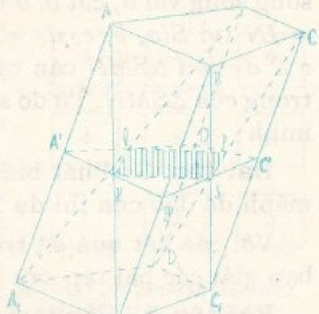
Nhận xét. Có 167 bài giải, tất cả đều giải đúng. Một số bài trình bầy dài dòng, số bài khác trình bầy quá vắn tắt. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Phan Mạnh Hà* (10 C_1 PTTH Phổ Yên – Bắc Thái), *Phan Duy Hùng* (11 CT, Đào Duy Từ – Quảng Bình), *Mai Thanh Bình* (8M – Marie Curie) Hà Nội

ĐẶNG VIỄN

(*) X–$Đ$, X–X, $Đ$–$Đ$ là các kí hiệu tương ứng của các dây cung : có một đầu xanh một đầu đỏ, hai đầu xanh, hai đầu đỏ.

Bài T10/210. *Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng (α) thay đổi song song với hai đáy lăng trụ, cắt các đoạn thẳng AB_1, BC_1, CD_1 và DA_1 lần lượt ở các điểm M, N, P và Q. Hãy xác định vị trí của mặt phẳng (α) sao cho tứ giác MNPQ có diện tích nhỏ nhất.*

Lời giải (của *Lê Minh Hiếu*, lớp 11T, Lam Sơn, Thanh Hóa)



Giả sử (α) cắt các cạnh bên AA_1, BB_1, CC_1 và DD_1 ở $A'; B', C'$ và D' (xem hình vẽ bên), thế thì ta có :

$$\frac{AA'}{AA_1} = \frac{BB'}{BB_1} = \frac{CC'}{CC_1} = \frac{DD'}{DD_1}$$

Đặt $\frac{AA'}{AA_1} = x$ và $s(ABCD) = S$; thế thì :

$s(A'B'C'D') = S$

Theo định lí Ta-lét ta có :

$$\frac{A'M}{A'B'} = \frac{AM}{AB_1} = \frac{AA'}{AA_1} = x\,;$$

$$\frac{A'Q}{A'D'} = \frac{A_1Q}{A_1D} = \frac{A_1A'}{A_1A} = 1 - x.$$

Do đó ta được :

$$\frac{s(A'MQ)}{s(A'B'D')} = \frac{A'M}{A'B'} \cdot \frac{A'Q}{A'D'} = x(1-x)$$

$\Rightarrow s(A'MQ) = x(1-x)s(A'B'D')$; (1)

Chứng minh tương tự, ta có :

$s(B'MN) = x(1-x)s(B'A'C')$; (2)

$s(C'NP) = x(1-x)s(C'B'D')$; (3)

$s(D'PQ) = x(1-x)s(D'C'A')$; (4)

Từ (1), (2), (3) và (4), ta được :

$$s(MNPQ) = s(A'B'C'D') - s(A'MQ) - s(B'MN) - s(C'NP) - s(D'PQ)$$

$$= S - x(1-x)[s(A'B'D') + s(B'A'C') + s(C'B'D') + s(D'C'A')]$$

$$= S - 2x(1-x)S = S(1 - 2x + 2x^2)$$

$$= S\Big[\frac{1}{2} + 2\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2\Big] \geqslant \frac{S}{2}$$

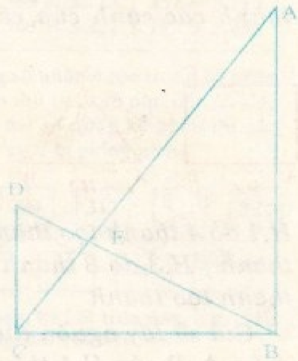
Vậy $s(MNPQ)$ đạt min bằng $\frac{S}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hay A' là trung điểm của AA_1, cũng tức là mặt phẳng (α) *song song cách đều* hai đáy của lăng trụ tứ giác đã cho.

Nhận xét : Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này, tất cả đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên, nhìn chung lời giải của các bạn còn rườm rà, không gọn. Lời giải nêu trên đây của bạn *Lê Minh Hiếu* ngắn gọn và chặt chẽ hơn cả ; trình bày sáng sủa, mạch lạc (kể cả việc kí hiệu các đại lượng cần đến trong việc trình bày lời giải bài toán).

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/210

– Với những vận tốc không đổi, anh X đi theo đường tam giác kín ABCA, chị Y đi theo đường tam giác kín BCDB, với AB // CD và AB = = $\frac{4}{4}$BC.



– Lúc t_1 anh X ra đi từ A và chị Y ra đi từ B. Lúc t_2 anh X đi qua B và chị Y đi qua C. Khoảng cách ngắn nhất giữa 2 người trong khoảng thời gian $(t_2 - t_1)$ này là 960m.

1) Lúc t_3 anh X đi qua C thì chị Y đi qua D. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa 2 người trong khoảng thời gian $(t_3 - t_2)$ này.

2) Tính khoảng cách ngắn nhất giữa 2 người khi anh X đi nốt đoạn CA và chị Y đi nốt đoạn DB.

Hướng dẫn giải. Dựa vào điều kiện để bài (xét trong khoảng thời gian $(t_3 - t_2)$ suy ra $\frac{BC'}{CD} = \frac{v_X}{v_Y} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$. Từ đó, nhận xét rằng quá trình diễn ra trong khoảng thời gian $(t_3 - t_2)$ đồng dạng với quá trình xảy ra trong khoảng thời gian $(t_2 - t_1)$ theo tỉ số $\frac{3}{4}$ (giá trị vận tốc vẫn như nhau). Gọi khoảng cách ngắn nhất giữa hai người trong khoảng thời gian $(t_3 - t_2)$ là l_{min} ta có $\frac{l_{min}}{960} = \frac{3}{4} \rightarrow l_{min} = 960 \cdot \frac{3}{4} = 720m$

Xét 2 tam giác ABC và BCD có $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$; $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 1V \rightarrow 2$ tam giác đồng dạng $\rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{CAB} \rightarrow \widehat{CEB} = 1v$

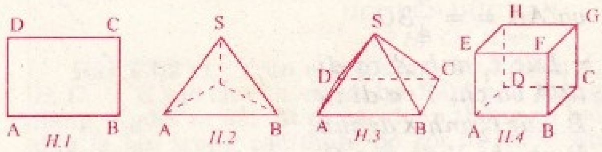
$\rightarrow \frac{CE}{DE} = tg\ \widehat{CBD} = tg\ \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC} = \frac{v_X}{v_Y}$

$\rightarrow$ Hai anh chị sẽ gặp nhau tại $E \rightarrow$ khoảng cách ngắn nhất trong quá trình đó $l'_{min} = 0$

Nhận xét : Nhiều em đã giải đúng bằng nhiều cách khác nhau dựa vào các tính chất hình học. Sau đây là các em có lời giải đúng và gọn *Nguyễn Trọng Nghĩa*, PTTH Việt Trì, Vĩnh Phú ; *Nguyễn Quang Tường* 10L, Phan Bội Châu, Vinh (Nghệ An) ; *Vũ Thị Lan Hương*, 9T, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa, *Nguyễn Hữu Hải*, 12A Hoài Nhơn II, Bình Định ; *Nguyễn Thị Hoài Thu*, 8CL, PTCS Trần Phú, Hải Phòng *Nguyễn Tuấn Anh Vũ* 10A, PTTH Bắc Thư Trì, Vũ Thư, Thái Bình ; *Huỳnh Minh Sơn*, 7T, Trường chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi ; *Đặng Thu Hường*, Vĩnh Lại, Vĩnh Tuy, Cẩm Bình, Hải Hưng.

Bài L2/210

Có các thanh diện trở bằng nhau được lắp thành các cạnh của các hình như hình vẽ :



H.1 do 4 thanh tạo thành ; H.2 do 6 thanh tạo thành ; H.3 do 8 thanh tạo thành ; H.4 do 12 thanh tạo thành

Giả sử lấy nguồn điện U = 6V nối vào hai điểm A, B của H.1 thì người ta đo được dòng điện do nguồn phát ra là 2A

Hỏi nguồn điện trên sẽ phát dòng là bao nhiêu khi nối hai cực của nó vào các điểm A, B của các hình còn lại ?

Ghi chú. Câu hỏi này có thể mở rộng cho tất cả các cặp điểm còn lại từ H.1 đến H.4.

Hướng dẫn giải Trước hết tính điện trở một thanh căn cứ vào H.1 $\left(R_{tm} = \frac{U}{I} \text{ và } R_{tm} = \frac{3}{4}r\right)$. Sau đó với từng trường hợp cụ thể vẽ lại sơ đồ mạch điện (dựa vào tính đối xứng của mạch và áp dụng công thức $I = \frac{U}{R_{tm}}$ suy ra kết quả muốn tìm

Kết quả sẽ là : $r = 4\Omega$; $I_2 = 3A$; $I_3 = \frac{45}{16}A$; $I_4 = \frac{18}{7}A$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : *Nguyễn Thành Nam*, 9T, TH chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long ; *Đặng Quốc Khánh*, 9A PTDL Lương Thế Vinh Hà Nội ; *Đào Đức Anh*, 10A$_1$, PTTH Việt Trì Vĩnh Phú ; *Nguyễn Phú Vinh* 11A, Lê Quý Đôn, Tân An, Long An ; *Nguyễn Đình Khôi Khoa* 11H, PTTH Lê Trung Kiên, Tuy Hòa, Phú Yên ; *Lương Nghĩa Hiệp* 11CL, Quốc học, Thừa Thiên Huế ; *Đậu Thúy Mai*, 10CL, Trường chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An

MT

HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA ...

(Tiếp theo trang 1)

Thí dụ 2 : Cho chùm điều hòa $S(a, b, c, d)$ có $c \perp d$. Khi đó c, d là phân giác của các góc tạo bởi a và b (kể cả góc tù).

Giải : Từ một điểm I trên C kẻ đường thẳng song song với d, cắt a, b tại M và N. Khi đó $MI = IN$ (vì $S(a, b, c, d) = -1$) và $SI \perp MN$ (vì $c \perp d$) nên ΔSMN cân tại $S \Rightarrow SI$ là phân giác trong của ΔSMN. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 4 : Phát biểu và chứng minh các mệnh đề đảo của thí dụ 2.

Với các kết quả đã trình bày trên, mời các bạn giải các bài tập sau :

Bài tập 5 : Cho tam giác ABC, AD và AE là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác đó. Chứng minh (AB, AC, AD, AE) là chùm điều hòa.

Bài tập 6 : Cho góc xOy và một điểm M cố định trên phân giác của góc đó. Đường thẳng quay quanh M cắt Ox và Oy tại A và B. Chứng minh $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$ nhận một giá trị không đổi (dùng hệ thức Đề Các).

Bài tập 7 : Từ một điểm S ngoài đường tròn (O), bán kính R ta vẽ hai tiếp tuyến ST, ST' và cát tuyến SAB tới đường tròn. Đường thẳng kẻ từ A, $\perp OT$ cắt TT' và TB tại C và D. Chứng minh $AC = CD$ (tạp chí T.H và T.T, số 194, tháng 8-1993).

Bài tập 8 : Cho tam giác ABC $(AB < AC)$, AD là phân giác trong và AM là trung tuyến tam giác đó. Chứng minh :

$$tg\ \widehat{DAM} = tg^2\frac{A}{2} \cdot tg\frac{B-C}{2}$$

(Đề thi tuyển vào Đại học, năm 1987 cho các trường miền Bắc).

Bài tập 9 : Cho đường tròn (O), đường kính AB, M và N là trung điểm của AO và BO và S là một điểm trên đường tròn. SO, SM, SN cắt (O) tại P, Q và T. PQ cắt AB tại H. Chứng minh HT là tiếp tuyến của đường tròn (O).

(Các bài tập 8 và 9, hãy sử dụng hệ thức Niutơn để giải).

Bài tập 10 : Cho hình chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N

Chứng minh $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$

(Đề 57, Vb, bộ "Đề thi tuyển sinh, 1993)

Bạn có biết !

MA PHƯƠNG TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ BỎ TÚI

NGUYỄN VĂN VĨNH
TP Hồ Chí Minh

Bạn hãy quan sát bàn phím của một máy tính bỏ túi.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Có thể hình dung, các chữ số của bàn phím được sắp xếp trong một hình vuông gồm ba dòng, ba cột, hai đường chéo.

Nếu đối với các ma phương của người Trung Hoa và người Ấn Độ, tổng các số trên cùng một dòng, tổng các số trên cùng một cột, tổng các số trên cùng một đường chéo là bằng nhau thì ma phương trên bàn phím của máy tính lại có những tính chất kì lạ sau đây :

1) Tất cả các số tạo bởi ba chữ số ở trên cùng một dòng, một cột, một đường chéo đều chia hết cho 3.

123 = 3.41 321 = 3.107 147 = 3.49 741 = 3.247	456 = 3.152 654 = 3.218 789 = 3.263 987 = 3.329	258 = 3.86 852 = 3.284 369 = 3.123 963 = 3.321	159 = 3.53 951 = 3.317 357 = 3.119 753 = 3.251

Nếu bạn sắp xếp các thương số nhận được trong 16 phép chia trên đây (số chia là 3) theo thứ tự từ số nhỏ đến số lớn, rồi lấy hiệu của tất cả các cặp hai số đứng kề nhau thì các kết quả cách đều hai số đầu và cuối là giống nhau.

41	49	53	86	107	119	123	152	218	247	251	263	284	317	321	329
8	4	33	21	12	4	29	66	29	4	12	21	33	4	8	

2) Tất cả các số tạo bởi ba chữ số viết ở các đỉnh của tam giác : một đỉnh là một trong bốn đỉnh hình vuông, hai đỉnh còn lại là trung điểm các cạnh hình vuông đều chia hết cho 3.

168 = 3.56 186 = 3.62	348 = 3.116 384 = 3.128	726 = 3.242 762 = 3.254	924 = 3.308 942 = 3.314

và

56	62	116	128	242	254	308	314
6	54	12	114	12	54	6	

Nếu bạn lấy 16 kết quả ở 1 và 8 kết quả ở 2 sắp xếp lại theo thứ tự từ số nhỏ đến số lớn và tìm hiệu của tất cả các cặp hai số đứng liền nhau thì các kết quả cách đều hai số đầu và cuối cùng giống nhau.

Dãy số trộn lẫn là :

41, 49, 53, 56, 62, 86, 107, 116, 119, 123, 128, 152, 218, 242, 247, 251, 254, 263, 284, 308, 314, 317, 321, 329.

Dãy hiệu các cặp số là :

8, 4, 3, 6, 24, 21, 9, 3, 4, 5, 24, 66, 24, 5, 4, 3, 9, 21, 24, 6, 3, 4, 8

3) Xét các phân số có tử số là các số tạo bởi ba chữ số trên cùng một dòng, một cột, một đường chéo còn mẫu số là 11 bạn sẽ thấy :

Dòng 1 : $\frac{123}{11} = 11,(18)$ $\frac{321}{11} = 29,(18)$

Dòng 2 : $\frac{456}{11} = 41,(45)$ $\frac{654}{11} = 59,(45)$

Dòng 3 : $\frac{789}{11} = 71,(72)$ $\frac{987}{11} = 89,(72)$

cột 1 $\frac{147}{11} = 13,(36)$ $\frac{741}{11} = 67,(36)$

cột 2 $\frac{258}{11} = 23,(45)$ $\frac{852}{11} = 77,(45)$

cột 3 $\frac{369}{11} = 33,(54)$ $\frac{963}{11} = 87,(54)$

Đường chéo 1 $\frac{159}{11} = 14,(45)$ $\frac{951}{11} = 86,(45)$

Đường chéo 2 $\frac{357}{11} = 32,(45)$ $\frac{753}{11} = 68,(45)$

Hơn nữa, trong số 16 phân số trên đây, phân số nào có chữ số hàng chục của tử số mà bằng 5 thì chu kì tuần hoàn của phân số đều là 45. Những chu kì còn lại lập thành cấp số cộng : 18, 36, 54, 72

4) Nếu từ ma phương ba dòng, ba cột trên đây, bạn tách ra tất cả 10 ma phương hai dòng, hai cột như sau :

7	9
1	3

7	8
4	5

8	9
5	6

4	5
1	2

5	6
2	3

7	8
1	2

8	9
2	3

7	9
4	6

4	6
1	3

8	6
4	2

mỗi một trong 10 ma phương hai dòng, hai cột này lại có tính chất đáng chú ý. Chẳng hạn xét ma phương thứ nhất.

Nếu viết tất cả các số tạo thành bởi 4 chữ số theo chiều thuận hoặc chiều ngược kim đồng hồ bạn sẽ thấy chúng có các tính chất đều là bội số của 11 :

1397 = 11.127 1793 = 11.163	3179 = 11.289 3971 = 11.361	7139 = 11.649 7931 = 11.721	9317 = 11.847 9713 = 11.883

Bạn sắp xếp 8 thương số nhận được theo thứ tự từ nhỏ tới lớn và lấy hiệu của tất cả các cặp hai số đứng liền nhau :

127	163	289	361	649	721	847	883
36	126	72	288	72	126	36	

Bây giờ từ tám số : 1397, 1793, 3179, 3971, 7139, 7931, 9317, 9713 bạn lấy ra hai số bất kì và viết chúng liền nhau (bên trái hoặc bên phải) cũng nhận được một số gồm 8 chữ số chia hết cho 11. Chẳng hạn lấy tùy ý ra hai số 1397 và 3971, khi đó bạn sẽ có :

$13973971 = 11 \times 1270361$; $39711397 = 11 \times 3610127$

Các số trong 9 ma phương còn lại cũng có các tính chất tương tự.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

5) Bạn hãy xét tổng của các tích :

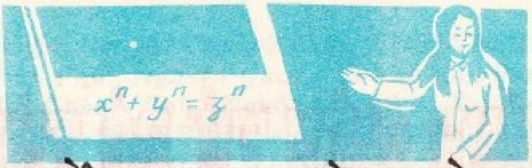
1.5.9 + 3.4.8 + 7.2.6 = 225

3.5.7 + 1.6.8 + 9.2.4 = 225

Như vậy :

1.5.9 + 3.4.8 + 7.2.6 = 3.5.7 + 1.6.8 + 9.2.4

Bạn thử phát hiện tiếp các tính chất kì lạ của ma phương đã cho. Bạn sẽ hiểu được phần nào điều nhận xét sau đây của nhà toán học nổi tiếng L.Euler : "Những tính chất của các số mà ngày nay con người biết được, đã được khám phá bằng sự quan sát. Rất nhiều tính chất bình thường nhưng còn chưa chứng minh được, và chỉ có sự quan sát mới giúp con người thấu hiểu các tính chất đó. Bằng quan sát, con người có thể nuôi dưỡng những niềm hi vọng lớn lao, thấu hiểu các sự kiện, đi tới những khám phá mới mẻ.



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp THCS

Bài T1/214 : Với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 1 sao cho 2^n-2 chia hết cho n, hãy tìm UCLN $\left(2^{2^n-1}-2\,,2^n-1\right)$

VŨ KIM THỦY
Hà Nội

Bài T2/214 : Cho $\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình
$$x^3+ax^2+bx+c=0 \ (a,\ b,\ c \in Q)$$
Tìm các nghiệm còn lại.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
TP Hồ Chí Minh

Bài T3/214 : Trên mặt phẳng cho 5 điểm *A, B, C, D, E* sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Người ta nối tất cả các đoạn thẳng có hai đầu là hai trong các điểm đó rồi tô các đoạn thẳng này hoặc xanh, hoặc vàng, hoặc đỏ, một cách hú họa. Chứng minh rằng luôn luôn thu được ít nhất một tứ giác (lồi, lõm hoặc không đơn) với số mầu của các cạnh không vượt quá 2.

ĐẶNG KỲ PHONG
Hà Nội

Bài T4/214 : Cho tam giác ABC nội tiếp *(O)*, trong đó *B, C* cố định. *Ax* là tia phân giác trong của góc *A*. *M ; N* theo thứ tự là hình chiếu của *B ; C* lên *Ax*. Tìm quỹ tích trung điểm *I* của *MN*.

HỒ QUANG VINH
Nghệ An

Bài T5/214 : Cho ΔABC có các góc đều nhỏ hơn 120^o. Hãy dựng điểm *M* trong tam giác thỏa mãn :
$$MA.BC = MB.AC = MC.AB$$

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
Hải Phòng

Các lớp THCB

Bài T6/214 : Chứng minh rằng :
$$(x-y)(2-(x+y)) < 2ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right) \text{ với } x > y > 0$$

NGUYỄN PHÚ LỘC
Cần Thơ

Bài T7/214 : Tồn tại hay không tồn tại hàm số *f(x)* xác định và liên tục trong $(-\infty\ ;+\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện sau

a) $f(1995) < f(1996)$

b) $f(f(x)) = 1995^{-x}\ \forall x \in R$

ĐÀO TRƯỜNG GIANG
Vĩnh Phú

Bài T8/214 : Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_2 = 1\ ;\ x_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-x_n^2}}$

a) Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ và tìm giới hạn đó.

b) Chứng minh rằng có duy nhất số *A* mà sao cho $L = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{A^n}$ là số hữu hạn khác không. Hãy biểu thị *L* theo giá trị của *A*.

PHẠM NGỌC QUANG
Thanh Hóa

Bài T9/214 : Trong mặt phẳng, trên hai đường tròn đã cho $v_1\ (O_1\,,R_1)$ và $v_2(O_2\,,R_2)$ có hai động tử chuyển động đều theo cùng một chiều (chẳng hạn, ngược chiều kim đồng hồ) : M_1 trên (v_1) và M_2 trên (v_2) . Chúng xuất phát lần lượt từ hai điểm A_1 và A_2 cho trước trên (v_1) và (v_2) sao cho $O_1A_1 \nparallel O_2A_2$ và sau một vòng, lại trở về A_1 và A_2 cùng một lúc.

Chứng minh rằng trong mặt phẳng, nói chung không tồn tại một điểm *P* cố định luôn luôn cách đều hai động tử M_1 và M_2 ở mọi thời điểm; trừ hai trường hợp đặc biệt mà ta sẽ xác định.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
Hà Nội.

Bài T10/214 : Cho tứ diện $ABCD$ với độ dài các đường cao $h_a\,,h_b\,,h_c\,,h_d$, bán kính hình cầu nội tiếp r. Gọi độ dài đoạn nối đỉnh tứ diện với trọng tâm mặt đối diện là $m_a\,,m_b\,,m_c\,,m_d$. Gọi trọng tâm, tâm hình cầu nội tiếp tứ diện là *G, I*. Chứng minh rằng
$$\max\left\{\frac{m_a}{h_a},\frac{m_b}{h_b},\frac{m_c}{h_c},\frac{m_d}{h_d}\right\} > \frac{GI}{3r}$$

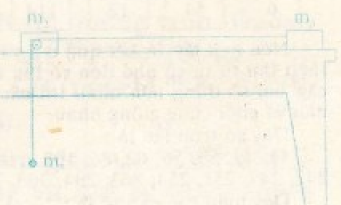
ĐÀM VĂN NHỈ
Thái Bình

Các đề Vật lí

Bài L1/214 : Hệ vật được bố trí như hình vẽ : m_1 được treo bằng dây mảnh không dãn, dây được vắt qua ròng rọc cố định gắn trên m_2 , đầu kia của dây gắn với m_3 . Buông tay khỏi m_1 thì hệ vật chuyển động làm cho dây treo m_1 bị lệch 30^o so với phương thẳng đứng. Cho $m_2 = 0{,}2\,kg$; $m_3 = 0{,}4kg$. Bỏ qua ma sát. Tính

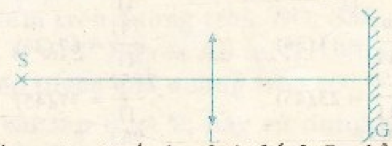
– Khối lượng m_1 ?

– Gia tốc các vật ?



PHẠM HÙNG QUYẾT
Hà Nội

Bài L2/214 : Điểm sáng *S* ở trên trục chính của gương cầu lõm *G*, bán kính *R* = 6cm, cách đỉnh gương 32cm. Đặt thấu kính hội tụ L_1 tiêu cự $f_1 = 6cm$ đồng trục, trong khoảng giữa *S* và *G*.



1. Tìm các vị trí của thấu kính L_1 để ảnh của *S* qua hệ thấu kính, gương lại trùng với *S*.

2. Thay thấu kính L_1 bằng thấu kính hội tụ L_2 tiêu cự f_2 ta thấy chỉ có 1 vị trí của L_2 cho ảnh của *S* qua hệ thấu kính, gương lại trùng với *S*. Xác định f_2 và vị trí đặt L_2 .

ĐỖ VĂN TOÁN
Nghệ An

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/214. For every natural number $n > 1$ such that $2^n - 2$ is divisible by n, find the greatest common divisor of $(2^{2^n-1}-2, 2^n-1)$.

T2/214. Suppose that $\sqrt{3}$ is a root of the equation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \ (a, b, c \in Q);$$

find the other roots.

T3/214. Let be given five points in a plane, no three of them are collinear. Colour blue, yellow or red at random all segments with these points as extremities. Prove that we obtain at least a quadrilateral (convex, concave or no-simple) such that four sides of which are coloured by at most two colours.

T4/214. A triangle ABC with fixed B, C is inscribed in a given circle (O). Let Ax be the inbisector of angle A and M and N be respectively the projections of B and C on Ax. Find the locus of the midpoint I of MN.

T5/214. Let ABC be a triangle, every angle of which is less than 120°. Construct a point M in the interior of the triangle satisfying :

$$MA.BC = MB.AC = MC.AB.$$

For Upper Secondary Schools.

T6/214. Prove that :

$$(x-y)(2-(x+y)) < 2\ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$$

for $x > y > 0$.

T7/214. Does there exist a function $f(x)$, defined and continuous on $(-\infty, +\infty)$, satisfying the conditions :

a) $f(1995) < f(1996)$,

b) $f(f(x)) = 1995^{-x}$ for all $x \in \mathbf{R}$?

T8/214. The sequence $\{x_n\}$ is defined by :

$$x_2 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-x_n^2}}.$$

a) Prove that there exists $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ and find this limit.

b) Prove that there exists a unique number A such that $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{A^n}$ is a finite number distinct from 0. Express L in terms of A.

T9/214. In plane, on two given circles $v_1(O_1, R_1)$, $v_2(O_2, R_2)$ move uniformly two mobiles in the same direction (for example, counterclockwise) : M_1 on (v_1) and M_2 on (v_2). They start from two given point A_1 on (v_1) and A_2 on (v_2) so that O_1A_1 is not parallel to O_2A_2 and after a round, they return to A_1 and A_2 at the same time. Prove that, in general, there does not exist a fixed point P equidistant from M_1 and M_2 at any moment, except two cases which must be determined.

T10/214. Let $ABCD$ be a tetrahedron with altitudes h_a, h_b, h_c, h_d ; the radius of the inscribed sphere is r ; the lengths of the segments joining each vertex with the center of gravity of the opposite face are m_a, m_b, m_c, m_d. Let G and I be respectively the center of gravity and the center of the inscribed sphere of the tetrahedron. Prove that :

$$\max\left\{\frac{m_a}{h_a}, \frac{m_b}{h_b}, \frac{m_c}{h_c}, \frac{m_d}{h_d}\right\} > \frac{GI}{3r}.$$

Ống kính

cải cách dạy và học toán

VÀI Ý NHỎ TRONG MỘT BÀI HỌC Ở SÁCH ĐẠI 7

Chương I mục §6 đại số 7 phần 1 là luật giản ước với nội dung như sau. Có đẳng thức $a + c = b + c$, ta có thể xóa c ở hai vế để được $a = b$. Tác giả chứng minh tính chất này bằng cách cộng $-c$ vào hai vế của đẳng thức $a + c = b + c$ nhưng suy cho cùng cộng vào, xóa đi là một. Như vậy ở đây có phải chăng ta dùng luật giản ước chứng minh Luật giản ước ? Có lẽ ta nên thừa nhận tính chất này là hay hơn.

Tiếp đến mục §7 Phương trình $a + x = b$ $(a, b \in Z)$ có một nghiệm trong Z là $x = -a + b$. Tác giả đã chứng minh như sau : Thật vậy, ta có

$$a + (-a + b) = [a + (-a)] + b = 0 + b = b.$$

Rõ ràng ở đây ta mới thử lại hay chứng tỏ $-a + b$ là một nghiệm của phương trình mà chưa làm rõ "có một" vì vậy ta nên trình bày rõ hơn là cộng $-a$ vào hai vế của đẳng thức $a + x = b$ ta có

$$-a + (a + x) = -a + b$$

$$(-a + a) + x = -a + b$$

$x = -a + b$ đến đây ta mới đủ kết luận phương trình $a + x = b$ luôn có một nghiệm duy nhất là $x = -a + b$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

TP. Hồ Chí Minh

THI OLIMPIC TOÁN KHU VỰC CHÂU Á - THÁI BÌNH DƯƠNG (APMO)

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Hiện nay phong trào thi Olimpic Toán của học sinh trung học đã phát triển mạnh trên thế giới. Ngoài cuộc thi Olimpic Toán Quốc tế truyền thống hàng năm mà chúng ta đã quen biết và tham gia từ năm 1974, một số khu vực trên thế giới đã tổ chức các cuộc thi Olimpic Toán khu vực. Trong bài này chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn cuộc thi Olimpic Toán khu vực châu Á – Thái Bình Dương gọi tắt là APMO (Asian Pacific Mathematical Olympiad)

Cuộc thi APMO được tổ chức hàng năm, bắt đầu từ năm 1989 đến nay là lần thứ 6. Lần đầu có 4 nước tham dự (Ôxtrâylia, Canada, Hồng Kông, Singapo) nay đã có 13 nước tham dự (Ôxtrâylia, Canada, Hồng Kông, Mehico, Niu Zilân, Philippin, Colombia, Indonêxia, Malaisia, Đài Loan, Thái Lan, Hàn Quốc, Singapo). Việt Nam cũng được mời tham dự nhưng chưa nhận lời.

Đây là cuộc thi khu vực lớn nhất trên thế giới và có nhiều điểm đáng chú ý trong cách tổ chức và xếp giải. Sau đây là một vài điểm chính trong điều lệ của cuộc thi APMO.

1) Hàng năm vào ngày 14/1 nước đăng cai gửi cho các nước tham gia đề thi, lời giải và đáp án. Đề thi gồm 5 bài toán, mỗi bài được 7 điểm và thời gian làm bài là 4 giờ. Các bài toán này được chọn trong số các bài toán mà các nước tham gia được yêu cầu gửi đến.

2) Vào tuần thứ hai của tháng 3 mỗi nước tham gia tổ chức kì thi APMO ngay tại nước mình. *Số lượng thí sinh tham gia là do mỗi nước quy định* (không có một hạn chế nào)

3) Mỗi nước tổ chức chấm bài của thí sinh nước mình theo đáp án quy định. Sau đó (chậm nhất là ngày 1/4). Gửi *kết quả và thứ hạng của 10 thí sinh đạt điểm cao nhất và kèm theo bài thi của thí sinh đứng thứ 1, thứ 3 và thứ 7* về nước đăng cai.

4) Nước đăng cai sẽ điều phối các kết quả từ các nước và xác định giải theo các nguyên tắc sau đây :

i) Tổng số huy chương không vượt quá $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (ở đó n là tổng số thí sinh)

ii) Điểm đạt huy chương vàng $\geqslant m + \sigma$. Điểm đạt huy chương bạc $\geqslant m + \frac{\sigma}{3}$. Điểm đạt huy chương đồng $\geqslant m - \frac{\sigma}{3}$. Trong đó m = điểm trung bình và σ = độ lệch tiêu chuẩn. Cụ thể gọi x_i là điểm của thí sinh, thứ i thì

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{và} \quad \sigma = \sqrt{\sum_{n=1}^{n} (x_i - m)^2/n}$$

iii) Đối với mỗi một nước số huy chương vàng $\leqslant 1$, số huy chương vàng + huy chương bạc $\leqslant 3$ và tổng số huy chương (vàng, bạc, đồng) $\leqslant 7$.

Quy định này nhằm tạo ra một sự cân bằng tương đối giữa các nước.

Ngoài ra nước đăng cai có quyền tự đặt ra mọi số tiêu chuẩn để trao giải khuyến khích (Tiêu chuẩn này có thể thay đổi từng năm tùy tình hình). Chẳng hạn trao cho thí sinh giải được trọn vẹn ít nhất một bài hoặc có ít nhất hai bài đạt điểm 5 hoặc 6.

Kết quả cuộc thi được thông báo đến các nước vào cuối tháng 4.

Để minh họa, dưới đây là đề thi và kết quả của cuộc thi APMO lần thứ 4 (1992).

Câu 1 : Cho tam giác với ba cạnh a, b, c. Gọi s là nửa chu vi. Dựng tam giác mới với cạnh là $s - a$, $s - b$, $s - c$. Quá trình này lập lại cho đến khi nào không dựng được tam giác mới nữa. Với tam giác ban đầu như thế nào thì quá trình này có thể kéo dài vô hạn ?

Câu 2 : Cho vòng tròn C tâm O bán kính r. Gọi C_1, C_2 là hai vòng tròn tâm O_1, O_2 bán kính r_1, r_2 tương ứng sao cho mỗi vòng tròn C_i tiếp xúc trong với C tại A_i $(i = 1, 2)$ và C_1, C_2 tiếp xúc ngoài với nhau tại A.

Chứng minh rằng ba đường thẳng OA, O_1A_2 và O_2A_1 đồng quy.

Câu 3 : Cho n là số nguyên dương $n > 3$. Chọn ra 3 số từ tập hợp $\{2, 3,..., n\}$. Từ ba số này ta sử dụng dấu nhân, dấu cộng và dấu ngoặc để lập ra các biểu thức trong đó mỗi số chỉ có mặt một lần trong biểu thức.

a) Chứng minh rằng nếu ta chọn 3 số lớn hơn $\frac{n}{2}$ thì giá trị của các biểu thức lập ra đều khác nhau.

b) Giả sử p là số nguyên tố $\leq \sqrt{n}$.

Chứng minh rằng số cách chọn 3 số sao cho số nhỏ nhất là p và giá trị của các biểu thức không phải tất cả khác nhau chính bằng số các ước dương của $p - 1$.

Câu 4. Xác định tất cả các cặp (h, s) các số nguyên dương có tính chất sau : Nếu vẽ h đường thẳng nằm ngang và s đường thẳng khác thỏa mãn điều kiện :

i) Chúng không nằm ngang

ii) Không có hai đường nào song song

iii) Không có ba đường nào trong số $h + s$ đường đồng quy thì số các miền tạo bởi $h + s$ đường này là 1992.

Câu 5. Tìm một dãy dài nhất gồm các số nguyên khác không sao cho tổng của 7 số liên tiếp bất kì là dương và tổng của 11 số liên tiếp bất kì là âm.

Kết quả cuộc thi được cho ở bảng sau.

Nước	Tổng số điểm	HC vàng	HC bạc	HC đồng	Khuyến khích
Ôxtrâylia	211	1	2	4	3
Canada	218	1	2	4	3
Côlômbia	162	1	2	2	2
Hồng Kông	262	1	2	4	3
Inđônêxia	62	–	–	–	3
Mehico	62	–	–	–	3
Niu Zilân	90	–	–	1	–
Philippin	156	–	2	2	5
Đài Loan	288	1	2	4	3
Hàn Quốc	215	1	2	4	3
Singapo	211	1	2	4	3
Thái Lan	133	1	–	1	5

Nhận xét : Hai đặc điểm nổi bật của cuộc thi APMO là :

– Cuộc thi được thiết kế để vừa mang tính chất thi quốc gia (thực chất là học sinh từng nước thi đấu với nhau) vừa đảm bảo một tiêu chuẩn quốc tế để so sánh.

Chi phí cho cuộc thi ở mức rất khiêm tốn.

Theo ý kiến của người viết bài này, Việt Nam nước đầu tiên trong khu vực châu Á – Thái Bình Dương tham gia IMO – rất nên tham gia vào cuộc thi APMO. Đây là một cơ hội tốt để nền giáo dục Toán học phổ thông của ta hòa nhập với nền giáo dục của các nước trong vùng, bổ trợ thêm cho chúng ta trong việc thành lập đội tuyển thi Toán quốc tế vào tháng 7. Thêm vào đó cuộc thi lại không đòi hỏi nước tham gia phải chi phí lớn về mặt tài chính. Nếu Vụ Giáo dục phổ thông đã bận quá nhiều việc, thì nên chăng Hội Toán học Việt Nam sẽ đứng ra tổ chức để các bạn học sinh giỏi Toán của cả nước có một dịp thử sức mình trong một cuộc thi quốc tế có chất lượng cao tổ chức quy củ như APMO.

ĐỀ THI TUYỂN SINH NĂM 1994 TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG

Môn thi : Toán (thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$

2) Chứng minh : $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, với mọi $x \neq 0$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$y = |x-1| + |x-2| + |x-a|$, với a là tham số.

Câu II 1) Giải bất phương trình :

$$\frac{tg\frac{\pi x}{4} + 2x + 3}{\sqrt{4 - x^2} - x} > 0.$$

2) Giải và biện luận hệ phương trình : $\begin{cases} 2^x + 4^y = 1 \\ x + 2y = a \end{cases}$ với a là tham số.

Câu III 1) Cho phương trình

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a.\sin 2x.$$

a) Tìm nghiệm khi $a = 1$;

b) Tìm a để phương trình có nghiệm.

2) Chứng minh rằng một tam giác là đều nếu ba cạnh a, b, c và bán kính đường tròn nội tiếp r thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$.

Câu IV Thí sinh chỉ làm một trong hai phần A, B sau đây :

Phần A 1) Tính thể tích của hình xuyến tạo nên do quay hình tròn

$x^2 + (y-2)^2 \leq 1$ quanh trục Ox.

2) Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua điểm M(1 ; 5 ; 0) và cắt cả hai đường thẳng :

$$(d_1) \begin{cases} 2x - z - 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} ;$$

$$(d_2) \begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Phần B Cho hình chóp $SABCD$, B và D luôn nhìn AC dưới một góc vuông ; $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Mặt phẳng Q qua A, vuông góc với SC và cắt SB, SC, SD tại B', C', D'.

1) Chứng minh rằng tứ giác $AB'C'D'$ nội tiếp được trong một đường tròn.

2) Cho $AC = b$, $AB = AD = x$ (x thay đổi).

a) Tìm diện tích của tứ giác $AB'C'D'$ theo a, b, x.

b) Tìm x để tứ giác $AB'C'D'$ là hình vuông.

ĐÁP ÁN

Câu I (3 điểm)

1) (1,5 điểm) a) (0,5) Hàm xác định với mọi x khác ± 1.

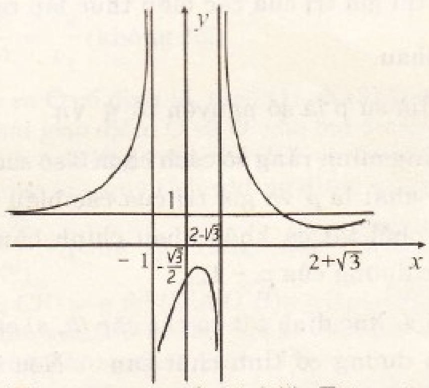
$$y' = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x^2-1)^2} = 0 \text{ khi } x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

b) (0,5)

x		−1		2−√3				2+√3	
y'	+	‖	+	0	−	‖	−	0	+
y	1 ↗ +∞	‖	−∞ ↗	CĐ	↘ −∞	‖	+∞ ↘	CT	↗ 1

$$y_{CD} = y(2 - \sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y_{CT} = y(2 + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



c) (Tiệm cận và đồ thị 0,5). Tiệm cận đứng x = ±1 ;

Tiệm cận ngang y = 1.

2) (0,75 điểm) $x \neq 0$, $\cos x > 1 - \frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$.

$f'(x) = x - \sin x$; $f''(x) = 1 - \cos x > 0$, khi $x \in (0, \pi/2)$, nên $f'(x)$ tăng và $f'(x) > f'(0) = 0$. Còn với $x \geq \pi/2$ thì $f'(x) \geq \frac{\pi}{2} - \sin x > 0$. Vậy $f'(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Do $f'(x)$ lẻ nên

$f'(x) < 0$, $\forall x < 0$, suy ra với mọi $x \neq 0$ có $f(x) > f(0) = 0$.

3) (0,75 điểm) Xét hàm $y = |x - m| + |x - n| + |x - p|$, (với m, n, p là ba số thực mà $m \leqslant n \leqslant p$). Ta có

$$y = \begin{cases} m + n + p - 3x \text{ nếu } x < m, \\ n + p - m - x \text{ nếu } m \leqslant x < n, \\ p - m - n + x \text{ nếu } n \leqslant x < p, \\ 3x - m - n - p \text{ nếu } p \leqslant x \end{cases}$$

Vậy y đạt giá trị nhỏ nhất tại n; $y_{nn} = p - m$.

Áp dụng vào hàm đã cho, ta có :

Nếu $a < 1$, thì $y_{nn} = y(1) = 2 - a$;

Nếu $1 \leqslant a < 2$, thì $y_{nn} = y(a) = 1$;

Nếu $2 \leqslant a$, thì $y_{nn} = y(2) = a - 1$.

Câu II (2 điểm)

1) (1 điểm) điều kiện

$$-2 < x < 2 \text{ và } x \neq \sqrt{2}.$$

Tử thức bằng 0 khi $x = -1$ và đồng biến, nên tử thức đổi dấu từ âm sang dương. Mẫu thức có nghiệm $x = \sqrt{2}$ và đổi dấu từ dương sang âm. Ta có bảng dấu sau :

x	-2		-1		$\sqrt{2}$		2
$tg\frac{\pi x}{4} + 2x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$4 - x^2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
Vế trái		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < \sqrt{2}$.

2) (1 điểm) thay $2y = a - x$ vào phương trình đầu được

$$2^x + 2^{a-x} = 1 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x + 2^a = 0.$$

$\Delta = 1 - 4.2^a \geqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant -2$, khi đó $2^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 . 2^a}}{2}$ cả hai (nghiệm) đều dương, nên phương trình có nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = \log_2(1 + \sqrt{1 - 4 . 2^a}) - 1, \\ y_1 = \dfrac{1}{2}(a + 1 - \log_2(1 + \sqrt{1 - 4.2^a})) = \\ \quad = \dfrac{1}{2}[\log_2(1 - \sqrt{1 - 4.2^a}) - 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \log_2(1 - \sqrt{1 - 4 . 2^a}) - 1 \\ y_2 = \dfrac{1}{2}[\log_2(1 + \sqrt{1 - 4 . 2^a}) - 1] \end{cases}$$

Nếu $a > -2$, thì hệ vô nghiệm.

Câu III (2 điểm)

1) (1 điểm)

a) (0,25 điểm) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \times \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$, phương trình đưa về $3t^2 + 4at - 4 = 0$ với $t = \sin 2x$ (1).

(0,25 điểm) Khi $a = 1$ có $t = 2/3$ và $t = -2$ (loại).

$$x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin\frac{2}{3} + \frac{k\pi}{2}. \ (k \in Z)$$

b) (0,5 điểm) Để phương trình đã cho có nghiệm thì (1) phải có nghiệm thuộc $[-1, 1]$. Đặt $f(t) = 3t^2 + 4at - 4$. Điều trên xẩy ra khi

$$f(-1) . f(1) \leqslant 0 \ (2) \text{ hoặc } \begin{cases} f(1) > 0 \\ f(-1) > 0 \\ s = \left| -\dfrac{2a}{3} \right| < 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$(2) \Leftrightarrow (-1 - 4a) . (-1 + 4a) \leqslant 0 \Leftrightarrow |a| \geqslant \frac{1}{4};$$

còn (3) vô nghiệm

2) (1 điểm) $a^2 + b^2 + c^2 =$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(c^2 + a^2) \geqslant$$

$$\geqslant ab + bc + ca.$$

Mặt khác $36r^2 = 36\dfrac{S^2}{p^2} =$

$$= \frac{72}{2p}(p - a)(p - b)(p - c) =$$

$$= \frac{9}{a + b + c} . 8(p - a)(p - b)(p - c) =$$

$$= \frac{9}{a + b + c} . 2\sqrt{(p - a)(p - b)} \times$$

$$\times 2\sqrt{(p - b)(p - c)} . 2\sqrt{(p - c)(p - a)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{9}{a+b+c}(2p-a-b)(2p-b-c)(2p-c-a) =$$

$$= \frac{9abc}{a + b + c}.$$

Vậy ta có $ab + bc + ca \leqslant \dfrac{9abc}{a + b + c} \Leftrightarrow$ $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \leqslant 0$.

Do đó $a = b = c$.

Câu IV (3 điểm).

Phần A 1) (1,5 điểm)

$$V = \pi \int_{-1}^{1} ((2 + \sqrt{1 - x^2})^2 - (2 - \sqrt{1 - x^2})^2) dx =$$

$$= 16\pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 16\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4\pi^2.$$

2) (1,5 điểm) Mặt phẳng (P) chứa (d_1) có dạng $A(2x - z - 1) + B(x + y - 4) = 0$.

(Xem tiếp trang bìa 3)

MỘT TÍNH CHẤT ĐẸP CỦA ĐA GIÁC ĐỀU

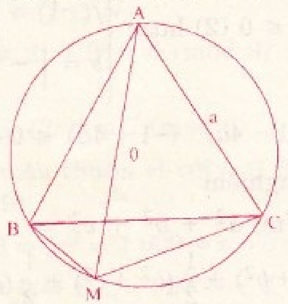
VŨ QUỐC LƯƠNG

Các bạn trẻ thân mến ! Chắc các bạn đã từng gặp bài toán khó sau :

Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm tùy ý thuộc đường tròn. Chứng minh rằng :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2 \ (*)$$

Chứng minh : (Xem hình 1)



Hình 1

Tứ giác $ABMC$ là một tứ giác nội tiếp. Áp dụng định lí Ptôlêmê ta có : $MA.BC = MB.AC + MC.AB \Rightarrow MA.a = (MB + MC).a \Rightarrow MA = MB^2 + MC \Rightarrow MA^2 = MB^2 + MC^2 + 2MB.MC$. Vậy

$$MA^2+MB^2+MC^2 = 2(MB^2+MC^2+MB.MC) \ (1).$$

ΔBMC là tam giác có $\widehat{BMC} = 120^o$ nên ta có hệ thức :

$$MB^2 + MC^2 + MB.MC = BC^2 = a^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2=2a^2$ (đpcm).

Kết quả (*) là một kết quả hay và đẹp, do $a = R\sqrt{3}$, ta còn có thể viết (*) dưới dạng : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ (**). Liệu kết quả (**) có thể mở rộng cho đa giác đều được không ?

Ta thử kiểm tra với hình vuông $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R (xem hình 2). Do $\widehat{A_1MA_3} = 1v \Rightarrow MA_1^2 + MA_3^2 = A_1A_3^2 = 4R^2$

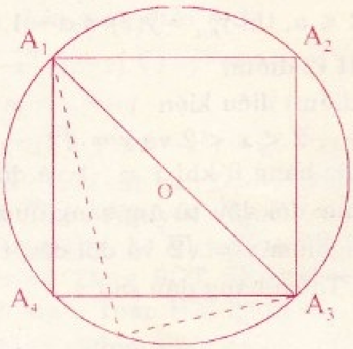
Tương tự $MA_2^2 + MA_4^2 = A_2A_4^2 = 4R^2$

Vậy $MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + MA_4^2 = 8R^2$

Như vậy tổng $MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + MA_4^2$ cũng là một hằng số không phụ thuộc vị trí điểm M trên (O ; R).

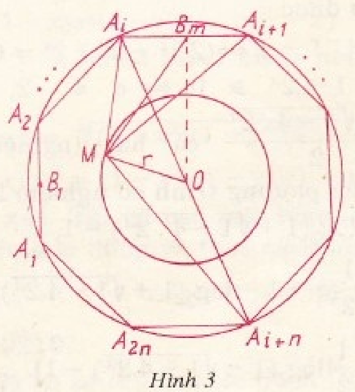
Kết quả này khích lệ ta tin tưởng rằng (**) cũng đúng cho đa giác đều tổng quát. Hơn nữa phép chứng minh cho hình vuông hoàn toàn có thể áp dụng cho đa giác đều có số cạnh chẵn $2n$. Thật vậy : xét đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ nội tiếp $(O\ ;\ R)$. Do các cặp đỉnh đối diện A_i, A_{i+n} chính là đường kính của đường tròn $(O,\ R)$ nên $\forall\ M \in (O\ ;\ R)$ ta có : $MA_i^2 + MA_{i+n}^2 = A_iA_{i+n}^2 = (2R)^2 = 4R^2 \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{2n} MA_i^2 = n\ .\ 4R^2 = 4nR^2 = k$$



Hình 2

Phân tích kỹ hơn nữa ta thấy, cũng không cần M phải nằm trên (O, R) mà chỉ cần M nằm trên một đường tròn $(O\ ;\ r)$ thì ta cũng có kết quả $\sum_{i=1}^{2n} MA_i^2$ là một hằng số. Thật vậy : xét đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_{en}$ nội tiếp $(O\ ;\ R)$. M là một điểm tùy ý thuộc $(O\ ;\ r)$. Ta có (xem hình 3) :



Hình 3

$$MA_i^2 + MA_{i+n}^2 = 2MO^2 + \frac{A_iA_{i+n}^2}{2} =$$

$$= 2n^2 + \frac{(2R)^2}{2} = 2(r^2 + R^2)$$

Do đó :

$$\sum_{i=1}^{2n} MA_i^2 = n\,.\,2(r^2+R^2) = 2n(r^2+R^2)$$

Từ kết quả trên, ta có thể chuyển sang chứng minh được cho đa giác đều có số cạnh tùy ý nhờ một phép dựng hình khéo léo sau : xét đa giác đều n cạnh $B_1B_2\ldots B_n$ nội tiếp (O ; R'). Dựng đa giác đều $2n$ cạnh $A_1A_2\ldots A_{2n}$ nhận $B_1, B_2\ldots B_n$ là các trung điểm của cạnh : $A_1A_2, A_3A_4, \ldots A_{2n-1}A_{2n}$.

Gọi $OA_i = R$

và $A_1A_2 = A_3A_4 \ldots = A_{2n-1}A_{2n} = a$

$\forall M \in (O\ ;\ r)$ ta có chẳng hạn đối với đỉnh B_m (xem hình 3) : $MA_i^2 + MA_{i+1}^2 =$

$$= 2MB_m^2 + \frac{A_iA_{i+1}^2}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} MA_i^2 = 2.\sum_{m=1}^{n} MB_m^2 + \frac{n.a^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2n(r^2+R^2) = 2\,.\sum_{m=1}^{n} MB_m^2 + \frac{n\,.\,a^2}{2}.$$ Dễ thấy

$$(B_mA_{i+1})^2 = \frac{a^2}{4} = R^2 - R'^2$$

$$\Rightarrow 2n(r^2+R^2) = 2\,.\sum_{m=1}^{n} MB_m^2 + 2n(R^2 - R'^2)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{n} MB_m^2 = n(r^2 + R'^2)$$ (R' là bán kính vòng tròn ngoại tiếp $B_1B_2\ldots B_n$).

Vậy ta có kết quả (**) được tổng quát thành :

Định lý : Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp đường tròn $(O\ ;\ R)$ M là một điểm tùy ý thuộc đường tròn tâm O bán kính r. Ta luôn có $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2$ là một hằng số không phụ thuộc vị trí của M và hằng số đó là : $k = n(R^2 + r^2)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = k = n(R^2 + r^2)}$$

Các bạn thấy đấy. Từ một bài toán hay ban đầu, bằng tinh thần mạnh dạn đào sâu suy nghĩ, ta thu được các kết quả đẹp biết bao.

Các bạn có thể mạnh dạn tổng quát hơn nữa : Tính chất (**) có phải chỉ có ở đa giác đều không, hay còn những đa giác không đều mà vẫn có tính chất (**) ?

Xin quay trở lại vấn đề đó trong một bài báo khác.

Bây giờ các bạn hãy áp dụng định lý trên để giải quyết hai bài toán sau :

1) Cho tam giác đều ABC nội tiếp $(O\ ;\ R)$. M là một điểm tùy ý thuộc $(O\ ;\ R)$. Chứng minh rằng : $MA^4 + MB^4 + MC^4$ là một hằng số.

2) Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$. Tìm điểm M sao cho : $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2$ là nhỏ nhất.

ĐỀ THI TUYỂN SINH....

(Tiếp theo trang 15)

Để (P) chứa $M(1\ ;\ 5\ ;\ 0)$ thì $A + 2B = 0$. Vậy (P) chứa M và (d_1) có phương trình (P) : $3x - y - 2z + 2 = 0$. Giao của (P) với (d_2) là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y - 2z + 2 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

Giao điểm đó là $N(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$. Phương trình đường thẳng MN là phương trình đường thẳng phải tìm : $\left\{ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-5}{3}\ ;\ z = 0. \right.$

Phần B Hình vẽ 0,25 điểm.
(3 điểm)

1) (1 điểm) a) (0,75 điểm) $Q \perp SC$ nên $SC \perp AB'$ (1). Theo giả thiết $BC \perp AB$, $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$ (2). Từ (1), (2) suy ra $AB' \perp (SBC)$. Vậy $AB' \perp B'C'$.

b) (0,25 điểm) tương tự ta có $\widehat{AD'C'} = 1$v. B' và D' nhìn AC' dưới một góc vuông nên tứ giác $AB'C'D'$ nội tiếp được trong một đường tròn.

2) (1,75 điểm) a) (1 điểm) Diện tích $AB'C'D'$ khi $AB = AD = x$ là $S = AB'.\ B'C'$.

$$AB' = \frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}\ ;\ AC' = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;$$

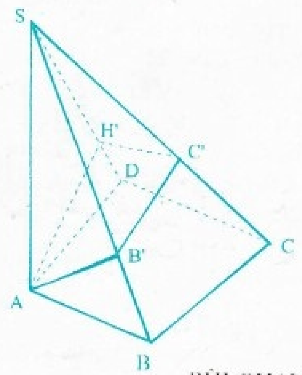
$$B'C' = \sqrt{AC'^2 - AB'^2}.\ S = \frac{a^3x.\sqrt{b^2-x^2}}{\sqrt{a^2+b^2}.(a^2+x^2)}.$$

b) (0,75 điểm) Tứ giác $AB'C'D'$ là hình vuông khi $AB' = B'C'$, tức là

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{a^2\,.\sqrt{b^2-x^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{a^2+x^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{b^2-x^2}.$$

$$x = ab/\sqrt{2a^2+b^2}.$$



BÙI QUANG TRƯỜNG

Giải đáp bài :

THAY CHỮ BẰNG SỐ

Bài toán tương đương với

$$\begin{array}{r} HOI \\ \times \quad TI \\ \hline *** \\ *** \\ \hline TUAT \end{array}$$

Từ đó ta thấy ngay :

$H = 1$, $8 \geq I \geq 2$, $O \times T \leq 7$ (1)

Vì $I \times I$ tận cùng là T nên T chỉ có thể là 4, 6, 9.

(Ta loại các trường hợp $I = 5$ và $I = 6$. Vì khi đó $I = T$)

- Nếu $T = 4 \Rightarrow I = 2$ hoặc $I = 8$. (1) $\Rightarrow O = 0$

+ Khi $I = 2$ thì U = 2 = I (loại)

+ Khi $I = 8$ thì 108×48 có 5 chữ số (loại)

- Nếu $T = 6 \Rightarrow I = 4$ và (1) $\Rightarrow O = 0$

Khi đó $U = 6 = T$ (loại)

- Nếu $T = 9 \Rightarrow I = 3$ hoặc $I = 7$ và (1) $\Rightarrow O = 0$

+ Khi $I = 3$ thì $U = 5$ và $A = 7$

+ Khi $I = 7$ thì 107×97 có 5 chữ số (loại)

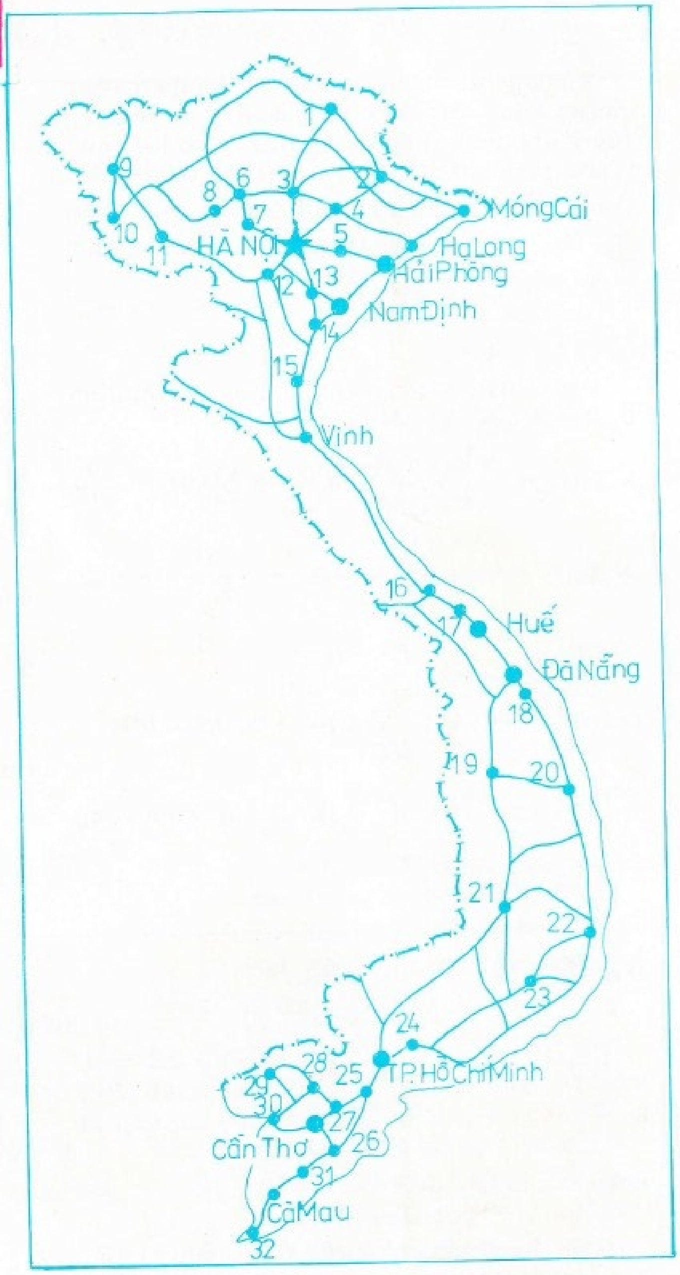
Vậy ta thay như sau : $H = 1$, $O = 0$, $I = 3$, $T = 9$, $U = 5$ và $A = 7$. Ta được con tính đúng :

9579 : 103 = 93.

BÌNH PHƯƠNG

Du lịch xuyên Việt

Nhân dịp 20 năm giải phóng miền Nam và 50 năm ngày thành lập nước, mời các bạn hãy tham gia chuyến du lịch xuyên Việt. Bạn hãy tìm một đường đi sao cho mỗi đô thị đã có tên hoặc đánh số trên bản đồ đều chỉ được đi qua một lần. Các điểm đường bộ cắt nhau khác có thể qua nhiều lần. Nào mời các bạn lên đường ! Nhớ đừng bỏ sót đô thị nào.



1 : Cao Bằng, 2 : Lạng Sơn, 3 : Thái Nguyên, 4 : Bắc Giang, 5 : Hải Dương, 6 : Tuyên Quang, 7 : Việt Trì, 8 : Yên Bái, 9 : Lai Châu, 10 : Điện Biên Phủ, 11: Sơn La, 12: Hòa Bình, 13 : Hà Nam, 14: Ninh Bình, 15: Thanh Hóa, 16: Đông Hà, 17: Quảng Trị, 18: Hội An, 19 : Playcu, 20 : Quy Nhơn, 21 : Buôn Ma Thuột, 22: Nha Trang, 23 : Đà Lạt, 24 Biên Hòa, 25 : Mỹ Tho, 26 : Sóc Trăng, 27 Vĩnh Long, 28 : Sa Đéc, 29 : Châu Đốc, 30 : Rạch Giá, 31 : Bạc Liêu, 32 : Năm Căn.

VŨ KIM THỦY

INSS : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT16M5

Sắp chữ tại Trung tâm Vi tính và
In tại Xưởng chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục
In xong và gửi lưu chiểu tháng 4/1995

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng