

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

3 (213)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

- SÁNG TẠO TỪ MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC
- ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
- VỘI CÙNG BẢNG KIẾN
- SUY NGHĨ TỪ LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN
THI VÔ ĐỊCH QUỐC TẾ



TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

	Trang
● <i>Dành cho các bạn Trung học cơ sở</i> <i>For Lower Secondary School Level Friends</i> Nguyễn Đức Tấn – Sáng tạo từ một bài toán quen thuộc.	1
● <i>Giải bài kì trước</i> <i>Solution of Problems in Previous Issue</i> Các bài của số 209 (1994)	2
● <i>Đề ra kì này</i> <i>Problems in This Issue</i> Các bài từ T1/213 đến T10/213, L1/213, L2/213	8
● <i>Trần Tuấn Điệp –</i> Đề thi tuyển sinh Đại học Bách khoa Hà Nội.	10
● <i>Ổng kính cải cách dạy và học toán</i> <i>Kaleidoscope : Reform of Maths Teaching and Learning.</i> Đào Trường Giang – Voi cũng bằng kiến	13
● <i>Lê Hào –</i> Suy nghĩ từ lời giải một bài toán thi vô địch Quốc tế.	14
● <i>Lưu Xuân Tình –</i> Đề thi chọn đội tuyển lớp 12 Thanh Hóa	16
● <i>Bạn có biết</i> <i>Do you know ?</i> Thanh Đăng – Sự ra đời của khái niệm triệu	16
● <i>Tạ Hồng Quảng – Định lí Fecma nhỏ</i> và số Camical (bìa 3)	
● <i>Giải trí toán học</i> <i>Fun with Mathematics.</i> Bình Phương – Giải đáp bài Chỉ hỏi một câu, câu gì ? Nghiêm Chánh Quốc – Câu chuyện trong rừng (bìa 4)	

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP :

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng
Chúng, Ngô Đạt Tử, Lê Khắc
Bảo, Nguyễn Huy Doan,
Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang
Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan
Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê
Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu,
Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc
Minh, Trần Văn Nhung,
Nguyễn Đăng Phát, Phan
Thanh Quang, Tạ Hồng
Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ
Dương Thụy, Trần Thành
Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô
Việt Trung, Đặng Quan Viễn.

Trụ sở tòa soạn :

45B Hàng Chuối, Hà Nội

ĐT: 213786

231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh

ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY

Trình bày : TRỌNG THIỆP

SÁNG TẠO TỪ MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

NGUYỄN ĐỨC TẤN
TP Hồ Chí Minh

Trong việc học toán có những điều thật đơn giản, thật quen thuộc nhưng nếu chúng ta tiếp tục suy nghĩ thì chắc chắn chúng sẽ đem đến cho chúng ta nhiều điều không đơn giản.

Xin được cùng bạn đọc đi từ một bài toán rất quen thuộc sau :

BÀI TOÁN (*)

Cho hình vuông $ABCD$. Đặt một hình vuông $A'B'C'D'$ bên trong hình vuông $ABCD$ sao cho hai tâm hình vuông đó trùng nhau.

Chứng minh rằng trung điểm của AA' , BB' , CC' , DD' là đỉnh của một hình vuông khác.

Xin được nêu 3 cách giải trong số các cách giải.

Cách 1 :

$$\triangle BOB' = \triangle AOA' \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BB' = AA'$$

$$\text{Tương tự ta có } AA' = BB' =$$

$$= CC' = DD'$$

$$\text{Suy ra } OM = ON = OP = OQ.$$

$BB'DD'$ là hình bình hành
do đó $BB' \parallel DD'$.

Suy ra $BMDP$ là hình bình hành
 O là trung điểm của MP .

Tương tự : O là trung điểm của QN .

Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật.

$$\triangle CON = \triangle DOP \text{ (c.g.c)} \Rightarrow$$

$$\angle CON = \angle DON \Rightarrow \angle NOP = 90^\circ. \text{ Do đó } MNPQ \text{ là hình vuông.}$$

Cách 2 :

Thực hiện phép quay, tâm O góc quay 90° , cùng chiều kim đồng hồ thì các đoạn thẳng AA' , BB' , CC' , DD' sẽ lần lượt trùng với nhau.

$$\text{Từ đó } OM = ON = OP = OQ$$

$$\text{và } \angle MON = \angle NOP = \angle POQ = \angle QOM = 90^\circ$$

Vậy $MNPQ$ là hình vuông.

Cách 3 :

Nối $B'C$, $C'D$, $D'A$, $B'A$. Gọi E , F , G , H lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng đó (để nghị các bạn tự vẽ hình).

$$\triangle MHQ = \triangle NFP \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MQ = NP$$

$$\triangle MEN = \triangle NFP \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MN = NP$$

$$\triangle MHQ = \triangle PGQ \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MQ = PQ.$$

$$\text{Suy ra } MN = NP = PQ = MQ.$$

$MNPQ$ là hình thoi.

Mặt khác $\angle HME = \angle ABC$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$$\angle ABC = 90^\circ \text{ (giả thiết)}$$

$$\text{Suy ra } \angle HME = 90^\circ \text{ và } \angle QMN = 90^\circ$$

Vậy $MNPQ$ là hình vuông.

$$\text{Để thấy rằng nếu cho } \frac{AA'}{AQ} = \frac{BB'}{BM} = \frac{CC'}{CN} = \frac{DD'}{DP} = m \text{ (} m > 0 \text{)}$$

và áp dụng định lý Talet, ta có bài toán sau đây, bài toán tổng quát hơn bài toán (*).

Bài toán 1 : Cho hình vuông $ABCD$. Đặt một hình vuông $A'B'C'D'$ bên trong hình vuông $ABCD$ sao cho hai tâm hình vuông đó trùng nhau. Gọi M ,

$$N, P, Q \text{ là các điểm sao cho } \frac{BB'}{BM} = \frac{CC'}{CN} = \frac{DD'}{DP} = \frac{AA'}{AQ} = m \text{ (} m > 0 \text{)}$$

Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình vuông.

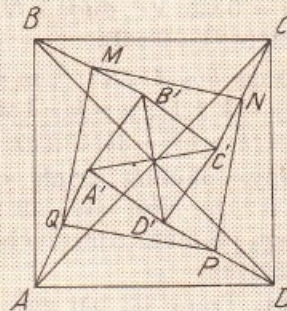
Với $m = 2$, ta có bài toán (*)

Mặt khác, khai thác cách giải 2 giúp ta tìm đến bài toán tổng quát sang hướng khác như sau :

Bài toán 2 : Cho đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ đặt bên trong đa giác này một đa giác đều $A'_1A'_2 \dots A'_n$ sao cho hai tâm đa giác đều đó trùng nhau. Gọi A''_1 ; A''_2 ; ...; A''_n là các điểm nằm trên các đoạn thẳng $A_1A'_1$; $A_2A'_2$; ...; $A_nA'_n$

$$\text{sao cho } \frac{A_1A'_1}{A_1A''_1} = \frac{A_2A'_2}{A_2A''_2} = \dots = \frac{A_nA'_n}{A_nA''_n} = m \text{ (} m > 0 \text{)}$$

(Xem tiếp trang 12)



**Bài T1/209**

Chứng minh rằng phương trình $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 18^n$ có nghiệm nguyên $x, y, z \in \mathbb{Z}$ cho mọi số tự nhiên n .

Lời giải Với $n = 0$, ta có $18^0 = 1$. Thay $x = 1; y = z = 0$ vào VP, được 1. Vậy, phương trình có nghiệm $(1; 0; 0)$.

Với $n > 0$, đặt $k = 2 \cdot 18^{n-1}$, ta có $18^n = 9k$. Thay $x = k; y = k + 1; z = k - 1$ vào VP, được: $k^3 + (k+1)^3 + (k-1)^3 - 3k(k+1)(k-1) = 9k = 18^n$. Vậy, phương trình có nghiệm $(k; k+1; k-1)$. Như vậy, với mọi giá trị tự nhiên của n , phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm nguyên.

Nhận xét. Trong 33 bài giải gửi về tòa soạn chỉ có một bài giải sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Đàm Truyền Khải* (9 NK Thuận Thành Hà Bắc), *Phan Lan Anh* (8A - Chuyên cấp II - III Lê Khiết - Quảng Ngãi), *Trần Việt Bình* (9H - Trưng Vương - Hà Nội), *Vũ Hải Đông* (9 Tâm Thắng - Đắk Lắk).

DẶNG VIỄN

Bài T2/209 : Giải phương trình

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0$$

Lời giải : của *Nguyễn Hồng Dung*, 8T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà.
 $y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (y^4 + 4y^2x + 4x^2 + 36 - 12y^2 - 24x) + (y^2 + 4x^2 + 16 + 4xy - 8y - 16x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 + 2x - 6)^2 + (y + 2x - 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 2x - 6 = 0 \\ y + 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 2 = 0 \\ y + 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y+1) = 0 & (2) \\ 2x = 4 - y & (3) \end{cases}$$

$$\text{Nếu } y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ và từ (3)} \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Nếu } y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ và từ (3)} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm

$$(x, y) = (1, 2); \left(\frac{5}{2}, -1\right)$$

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Thị Thu Hương*, *Đặng Hoàng Việt* (NK, Hà Bắc); *Trần Trung Dũng*, *Ngô Tuấn Anh*, *Trần Hoài Nam*, *Nguyễn Minh Phương* (Vĩnh Phú); *Lê Như Hoa*, *Lí Thu Hiền* (Hà

Tây); *Nguyễn Minh Anh*, *Trần Đức Hùng*, *Phạm Đình Hương*, *Bùi Đức Vĩnh*, *Bành Xuân Quang*, *Phạm Huy Tùng*, *Nguyễn Duy Tường*, *Lê Nguyễn Anh Quân*, *Đoàn Đình Trang* (Hà Nội); *Đặng Anh Tuấn*, *Nguyễn Hải Hà*, *Nguyễn Ngọc Linh*, *Nguyễn Bá Dũng* (Hải Phòng); *Nguyễn Đình Mich*, *Đặng Minh Tuấn*, *Đoàn Minh Đức* (Thái Bình); *Bùi Anh Tuấn*, *Hoàng Mạnh Quang*, *Phạm Thị Huyền* (Nam Hà); *Đỗ Thanh Nga*, *Viên Ngọc Quang*, *Đỗ Xuân Thịnh* (Thanh Hóa); *Trương Thị Minh Huệ*, *Đặng Đức Hạnh*, *Nguyễn Việt Dương* (Nghệ An); *Đào Anh Minh* (Quảng Ninh); *Đinh Hữu Toàn* (Ninh Bình); *Trần Thị Tiên Giang*, *Phan Thị Nguyệt*, *Đặng Thị Hồng Minh* (Hà Tĩnh); *Đinh Cao Cường* (Quảng Bình); *Phan Lan Anh*, *Lê Quang Năm*, *Nguyễn Thị Thanh Thủy* (Quảng Ngãi); *Lê Tự Nhiên* (Quảng Nam - Đà Nẵng); *Phạm Thoại Tân* (Bình Định); *Trần Thị Mi An* (Phú Yên); *Nguyễn Minh Ngọc* (Đồng Tháp); *Vũ Hải Đông* (Đắk Lắk); *Võ Hồng Minh*, *Trần Hữu Nhơn* (Vĩnh Long); *Hồ Lương Cầu*, *Huỳnh Minh Quang*. (TP. Hồ Chí Minh).

TỐ NGUYỄN

Bài T3/209

Tìm tất cả nghiệm nguyên (x, y) của phương trình

$$(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$$

Lời giải : (Của các bạn *Võ Quỳnh Anh* 9CT Từ Liêm, Hà Nội, *Vũ Hải Đông*, *Đắk Lắk*, *Nguyễn Anh Hoa*, 9 Trần Đăng Ninh, Nam Hà, *Viên Ngọc Quang*, 9 Lam Sơn, Thanh Hóa).

$$\text{Ta có } (x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3 \Leftrightarrow$$

$$2y^3 + x^2y^2 + xy - 3x^2y - 3xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y(2y^2 + (x^2 - 3x)y + (x - 3x^2)) = 0$$

i) Nếu $y = 0$ thì x bất kì thuộc $\mathbb{Z}$

ii) Nếu $y \neq 0$ suy ra

$$2y^2 + (x^2 - 3x)y + x + 3x^2 = 0$$

Coi đây là phương trình ẩn y . Ta có

$$\Delta = (x + 1)^2 x(x - 8)$$

Để phương trình có nghiệm nguyên trước hết Δ phải là số chính phương tức là $x(x - 8) = a^2 \Leftrightarrow (x - 4 - a)(x - 4 + a) = 16$ ($a \in \mathbb{N}$). Vì $x + 4 + a \geq x - 4 - a$ và $(x + 4 + a) + (x - 4 - a)$ là chẵn nên ta có bảng sau

$x - 4 - a$	2	4	-4	-8
$x - 4 + a$	8	4	-4	-2
$2x - 8$	10	8	-8	-10
x	9	8	0	-1
y	-6 -21	-10	0 loại	-1

Từ bảng trên ta thấy tất cả các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là

$(9, -6), (9, -21), (8, -10), (-1, -1)$ và $(k, 0)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét : Có 43 bạn tham gia giải bài này nhưng chỉ có 20 bạn tìm được đúng tất cả các nghiệm của phương trình.

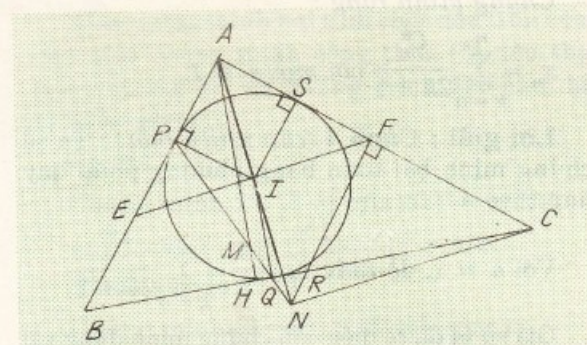
Các bạn **Đặng Đức Hạnh**, 9 Phan Bội Châu Nghệ An, **Đặng Anh Tuấn**, Trần Phú Hải Phòng, **Ngô Văn Sáng**, 9A, Chu Văn An, Hà Nội, **Phạm Nguyễn Thu Trang** 9CT Từ Liêm Hà Nội cũng có lời giải tốt.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/209

Cho tam giác ABC vuông ở A . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với AB và BC ở P và Q . Đường thẳng đi qua trung điểm F của AC và tâm I cắt cạnh AB ở E . Đường thẳng đi qua P và Q cắt đường cao AH tại M . Chứng minh $AE = AM$.

Lời giải : Trường hợp $AC > AB$ (M nằm trong $\triangle ABC$) : Qua F dựng đường vuông góc với AC , cắt tia phân giác AI ở N . Nối N với C .



Suy ra $\triangle ANC$ vuông cân và do đó A, I, N thẳng hàng. Mặt khác $\widehat{IQC} = \widehat{INC} = 1v$ nên tứ giác $QICN$ nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{IQN} + \widehat{ICN} = 2v \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Xét tứ giác nội tiếp } BPIQ \text{ suy ra} \\ \widehat{IQP} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{BRN}}{2} = \frac{\widehat{FNC} + \widehat{RCN}}{2} = \\ = \frac{\widehat{FCN} + \widehat{RCN}}{2} = \frac{2(\widehat{ICQ} + \widehat{RCN})}{2} = \widehat{ICN}. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có : $\widehat{IQN} + \widehat{IQP} = 2v$ nên P, Q, N thẳng hàng. Áp dụng định lý Talét cho các cặp đường thẳng song song ta có :

$$\frac{SI}{AE} = \frac{FI}{FE} = \frac{FS}{FA} = \frac{IN}{AN} = \frac{IQ}{AM} \Rightarrow \frac{SI}{AE} = \frac{IQ}{AM}$$

$$\text{Mà } SI = IQ \Rightarrow AE = AM.$$

Tương tự khi $AB > AC$; còn $AB = AC \Rightarrow M \equiv Q$ dễ dàng suy ra $AE = AM$.

Nhận xét :

1) Đa số các bạn chỉ xét một trường hợp và giải rất dài dòng

2) Giải tốt bài này có các bạn :

Vũ Hải Đông, 9 Tâm Thắng, Đắc Lắc ; **Nguyễn Thị Thanh Thủy** 9T Chuyên Lê Khiết, Lê Quang Năm 9CT Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi ; **Phạm Đăng Khoa** 9(1) Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên - Huế ; **Phan Thanh Đồng** 9A, Vũ Quang, Hương Khê, **Phạm Văn Hùng** 9CT Năng khiếu Hà Tĩnh ; **Đặng Đức Hạnh**, 9CT, Phan Bội Châu, Nghệ An ; **Nguyễn Minh Thanh** 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa ; **Bùi Anh Tuấn**, **Hoàng Mạnh Quang**, 8T, **Nguyễn Anh Hoa**, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà ; **Đoàn Minh Đức**, 8D Chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình ; **Nguyễn Bá Dũng**, **Ngô Mạnh Hà**, **Cao Việt Hùng**, 9T, Chu Văn An, Hải Phòng ; **Đặng Hoàng Việt Hà**, 9A Năng khiếu Hà Bắc ; **Phan Linh** 9A, PT Chuyên Ngoại ngữ, **Phạm Đình Hương**, **Võ Quỳnh Anh**, **Hoàng Phụng Hiệp**, **Trần Hương Quỳnh**, **Nguyễn Hoàng Long**, 9T Nghĩa Tân, Từ Liêm, **Phạm Huy Tùng**, 9A, 1 Bế Văn Đàn, **Mai Thanh Bình**, 8M, **Đặng Quang Nguyên** 9M Mari Quyri, **Trần Việt Bình**, **Nguyễn Anh Hoàn**, **Nguyễn Hồng Hà** 9H, Trưng Vương, Hà Nội

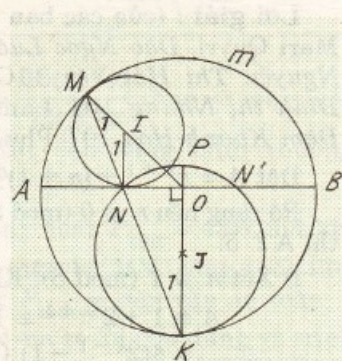
VŨ KIM THÙY

Bài T5/209.

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi một trong hai cung nửa đường tròn là $\widehat{AmB}$. Dựng đường tròn $(I; r)$ tiếp xúc với cung $\widehat{AmB}$ và tiếp xúc với AB sao cho $r = \frac{R}{3}$.

Lời giải. Ta giải bài toán rộng hơn, trong đó $r = kR$ với $0 < k < \frac{1}{2}$.

Phân tích : Giả sử đã dựng được. Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của $(I; r)$ với cung $\widehat{AmB}$ và với AB . Ta có M, I, O thẳng hàng và $IN \perp AB$ (1). Gọi K là giao điểm của tia MN với nửa đường tròn $\widehat{AB}$ ($\neq \widehat{AmB}$), ta có các tam giác



cân đỉnh $O, I : \triangle OMK ; \triangle IMN$. Suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{N_1}$ (vì cùng bằng $\widehat{M_1}$). Chúng lại đồng vị, nên $KO \parallel NI$. Kết hợp với (1), ta có $KO \perp AB$, suy ra K là điểm chính giữa của cung $\widehat{AB}$ (khác $\widehat{AmB}$).

Cách dựng : Trên tia KO lấy điểm P sao cho $KP = (1 - k)2R$. Gọi J là trung điểm của KP và N, N' là giao điểm của đường tròn $(J; (1 - k)R)$ với $\widehat{AB}$. Gọi M là giao điểm của tia KN với cung $\widehat{AmB}$. Kẻ NI vuông góc với

AB và cắt MO tại điểm I . Đường tròn $(I; IM)$ là một nghiệm hình.

Chứng minh. Ta có $NI \parallel KJ$ (vì cùng $\perp AB$), $\triangle OMK$ cân (vì $OK = R = OM$), suy ra $\angle IMN = \angle MKO = \angle MNI$, hay $\triangle IMN$ cân đỉnh I , và ta có $IM = IN$. Mà M, I, O thẳng hàng và $IN \perp AB$ nên $(I; IM)$ là đường tròn tiếp xúc với AmB và AB . Hơn nữa, do $\triangle OMK$ cân đỉnh O , $\triangle JNK$ cân đỉnh J nên $OM \parallel NJ$ và ta có : $\frac{KN}{KM} = \frac{KJ}{KO} = \frac{(1-k)R}{R} = 1-k$

Suy ra $\frac{MN}{MK} = \frac{MK-NK}{MK} = 1-(1-k) = k$.
 Vậy $\frac{MI}{MO} = \frac{MN}{MK} = k$, và $(I; MI)$ là 1 đường tròn cần dựng.

Biện luận với $0 < k < \frac{1}{2}$, ứng với điểm N' còn có một nghiệm hình nữa, đối xứng với $(I; kR)$ qua KO ; với $k = \frac{1}{2}$ thì $N \equiv O$ và có 1 nghiệm hình duy nhất.

Nhận xét. Có 85 bài giải và đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Vũ Huy Hoàng* (9 Toán lí, PTNK Hải Hưng) ; *Đoàn Minh Đức* (8D Chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình). *Phạm Nguyệt Thu Trang* (9D, Nghĩa Tân, Từ Liêm - Hà Nội) ; *Nguyễn Cảnh Nam* (9H - Trưng Vương - Hà Nội).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/209 Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho

$$n^{n+1} + (n+1)^n \text{ chia hết cho } 5$$

Lời giải : (của các bạn *Trần Anh Sơn* 8M Mari Quyri, *Đào Ngọc Luân* 10A Thái Bình, *Nguyễn Thị Hải Yến* 11CT Quốc học Huế, *Đinh thị Nhung* 10T Lam Sơn Thanh Hóa, *Đàm Khánh Hòa* 10T Phú Yên).

$$\text{Đặt } A = n^{n+1} + (n+1)^n$$

Rõ ràng nếu $n \equiv 0 \pmod{5}$ và $n \equiv 4 \pmod{5}$ thì $A \not\equiv 0 \pmod{5}$.

i) Xét $n \equiv 1 \pmod{5}$. Khi đó

$$A \equiv 1 + 2^{5k+1} \equiv 1 + 2^{k+1} \equiv 4(2^{k-1} - 1) \pmod{5}$$

$$\text{Vậy } A : 5 \leftrightarrow 2^{k-1} \equiv 1 \pmod{5}$$

Giả sử $k-1 = 4e+r$ ($0 \leq r \leq 3$). Khi đó $2^{k-1} \equiv 2^r \equiv 1 \pmod{5} \leftrightarrow r = 0$

$$\text{Vậy } k = 4e+1 \Rightarrow n = 20t+6$$

ii) Xét $n = 5k+2$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &\equiv 2^{5k+3} + 3^{5k+2} \equiv 2^{k+3} + 3^{k+2} \equiv 2^{k+2} + (-2)^{k+2} \\ &\equiv 2^{k+2} (2 \pm 1) \not\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

iii) Xét $n = 5k+3$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } A &\equiv 3^{5k+4} + 4^{5k+3} \\ &\equiv (-2)^{5k+4} + (-1)^{5k+4} \equiv (-2)^k + (-1)^{k+1} \pmod{5} \end{aligned}$$

Nếu k chẵn

$$\begin{aligned} A &\equiv 2^k - 1 \equiv 0 \pmod{5} \leftrightarrow k = 4t \\ &\Rightarrow n = 5k+3 = 20t+3 \end{aligned}$$

Nếu k lẻ $A \equiv -2^k + 1 \equiv 0 \pmod{5}$

$$\Rightarrow k : 4 \text{ không xảy ra.}$$

Đáp số : $n \equiv 3$ hoặc $6 \pmod{20}$

Nhận xét : Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Tuy nhiên có không ít bạn giải sai (thiếu hoặc thừa nghiệm). Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Phạm Thu Hà* 10A Chuyên Thái Bình, *Nguyễn Vũ Hưng* 11 Chuyên ĐHSPPN, *Phan Hoàng Việt* 12A Quốc học Quy Nhơn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/209 : Xét dãy số $\{x_n\}$, $n \geq 1$, xác

$$\text{định bởi : } x_1 = \frac{4}{3}$$

$$(2n+1)x_n = 2^n + 2nx_{n-1} \quad \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng :

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2k+1} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Lời giải : Cách 1 (của nhiều bạn) : Ta sẽ chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp theo n .

$$\text{Với } n = 1, \text{ dễ thấy } x_1 = \frac{4}{3} = \sum_{k=0}^1 \frac{C_1^k}{2k+1}$$

Giả sử ta đã có điều cần chứng minh đúng với

$$n = m \geq 1, \text{ nghĩa là giả sử có : } x_m = \sum_{k=0}^m \frac{C_m^k}{2k+1}$$

$$\text{Khi đó, với chú ý rằng } 2^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k$$

và $(m+1)C_m^k = (m+1-k)C_{m+1}^k \quad \forall k = 0, m$, ta sẽ có :

$$(2m+3)x_{m+1} = 2^{m+1} + 2(m+1)x_m$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k + 2(m+1) \sum_{k=0}^m \frac{C_m^k}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k + 2 \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k \frac{(m+1-k)}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k + 2 \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(m+1-k) C_{m+1}^k}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \left[1 + \frac{2(m+1-k)}{2k+1} \right] C_{m+1}^k = (2m+1) \sum_{k=0}^{m+1} \frac{C_{m+1}^k}{2k+1}$$

Từ đó suy ra ta cũng có điều cần chứng minh đúng với $n = m + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh. ■

Cách 2 (của Nguyễn Quang Hải, 11CT PTTH Chuyên Vĩnh Phú; Trịnh Thế Huỳnh, 11A₁ PTTH Lê Hồng Phong Nam Hà; Phan Hoàng Việt, 12A Quốc học Quy Nhơn, Bình Định; Nguyễn Quỳnh 12T PTTH Chuyên Quảng Trị, và một số bạn khác): Xét dãy số $\{a_n\}$, $n \geq 1$, được cho bởi:

$$a_n = \int_0^1 (1+x^2)^n dx \text{ với mọi } n \geq 1.$$

$$\text{Ta có: } a_1 = \int_0^1 (1+x^2) dx = \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} = x_1 \quad (1)$$

$$\text{Với } n \geq 2 \text{ thì: } a_n = \int_0^1 (1+x^2)^n dx =$$

$$\begin{aligned} & x(1+x^2)^n \Big|_0^1 - \int_0^1 2nx^2(1+x^2)^{n-1} dx \\ &= 2^n - 2n \int_0^1 (1+x^2)^n dx + 2n \int_0^1 (1+x^2)^{n-1} dx = \\ &= 2^n - 2na_n + 2na_{n-1} \\ &\Rightarrow (2n+1)a_n = 2^n + 2na_{n-1}, \quad \forall n \geq 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $a_n = x_n \forall n \geq 1$. Do vậy, với mọi $n \geq 1$ ta có: $x_n = \int_0^1 (1+x^2)^n dx =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^{2k} dx = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} C_n^k \right) \Big|_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2k+1}. \quad (\text{Đpcm}) \end{aligned}$$

Nhận xét: Đa số các bạn gửi lời giải đã giải bài ra theo cách 1. Hầu hết các bạn có lời giải tốt, đặc biệt trong số này có hai bạn là học sinh bậc THCS: Phạm Huy Tùng (9A THCS Bế Văn Đàn, Hà Nội) và Nguyễn Anh Hoa (9 Toán THCS Trần Đăng Ninh, Nam Hà).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/209: Ở mỗi ô vuông của một bảng kẻ ô vuông hình chữ nhật kích thước 1964×1964 được ghi một số có giá trị tuyệt đối không quá 1. Biết rằng tổng các số ở tất cả các ô vuông trong một hình vuông kích thước 3×3 bất kỳ bằng 0. Chứng minh rằng tổng các số ở tất cả các ô vuông của bảng không vượt quá 3334.

Lời giải: Chia bảng đã cho thành 2 phần: một phần là hình vuông 1964×1964 và phần còn lại là hình chữ nhật 30×1964 .

Xét bảng 1964×1964 . Chia bảng này thành 655 phần theo cách sau: phần 1 là hình vuông 2×2 nằm ở góc trên bên trái của bảng; phần 2 là hình vuông 5×5 , ở góc đó của bảng, bỏ đi phần 1; ...; phần k ($2 \leq k \leq 655$) là hình vuông $[2+3(k-1)] \times [2+3(k-1)]$, nằm ở góc nói trên của bảng, bỏ đi các phần 1, 2, ..., $k-1$; v.v... Để thấy kể từ phần 2 trở đi tổng tất cả các số nằm ở các ô vuông của mỗi phần không vượt quá 5. Từ đó suy ra tổng các số nằm ở tất cả các ô vuông của bảng 1964×1964 không vượt quá: $654 \times 5 + 4 = 3274$.

Xét bảng 30×1964 . Chia bảng này thành 2 phần: phần 1 là hình chữ nhật 30×1962 và phần 2 là hình chữ nhật 30×2 . Để thấy tổng của tất cả các số trong bảng 30×1964 bằng tổng tất cả các số trong phần 2. Do tổng tất cả các số trong bảng 30×3 bằng 0 và tổng tất cả các số trong bảng 30×1 không bé hơn -30 nên tổng tất cả các số trong phần 2 không vượt quá 30.

Tóm lại, tổng tất cả các số trong bảng đã cho không vượt quá: $3274 + 30 = 3304$, và vì thế nó không vượt quá 3334. (Đpcm). ■

Nhận xét: 1. Có thể chỉ ra cách diễn số, thỏa mãn các điều kiện của đề bài, mà có tổng tất cả các số đã diễn bằng 3304.

2. Đa số các bạn gửi lời giải đều chứng minh được tổng tất cả các số trong bảng không vượt quá 3304.

3. Các bạn có lời giải tốt: Phạm Thăng Long (9CT Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội); Đinh Trung Hằng (11M Marie Curie, Hà Nội); Đặng Quang Minh (10A Nguyễn Huệ, Hà Tây); Trịnh Thế Huỳnh (11A₁ Lê Hồng Phong, Nam Hà); Nguyễn Ngọc Hưng, Trịnh Hữu Trung (10T Lam Sơn Thanh Hóa); Hoàng Mạnh Lương (11A Phan Đăng Lưu, Nghệ An); Nguyễn Xuân Thắng (11T Đông Hà, Quảng Trị); Lê Anh Vũ (11CT Quốc học Huế) và Vũ Hải Đông (9 THCS Tâm Thắng, Cư Jut, Đắk Lắk).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/209. Đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB lần lượt ở các điểm M, N và P. Dựng các đường tròn nội tiếp các tam giác con lồi ANP, BPM và CMN và gọi các tiếp điểm trên các cạnh AP, BM, và CN lần lượt là H, I và K.

Đặt $AH = x$, $BI = y$, $CK = z$. Chứng minh rằng
 $x + y + z \geq 2r$.

Khi nào thì xảy ra đẳng thức?

Lời giải (của đa số các bạn)

Đặt $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{B}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}$. Khi đó $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta =$

$$= \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \text{ hay } \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad (1)$$

Gọi r_a , r_b và r_c lần lượt là các bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác con lõm APN , BPM và CMN . Kẻ $OO_1 \perp IN$ (với O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác con lõm CMN). Khi đó $O_1I = OI \sin \frac{C}{2}$ hay

$$r - r_c = (r + r_c) \sin \frac{C}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{r_c}{r} = \frac{1 - \sin \frac{C}{2}}{1 + \sin \frac{C}{2}} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2} \right) = \operatorname{tg}^2 \gamma.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{r_c} = \sqrt{r} \operatorname{tg} \gamma, \sqrt{r_b} = \sqrt{r} \operatorname{tg} \beta, \sqrt{r_a} = \sqrt{r} \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a} = r(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha) = r. \quad (3)$$

Mặt khác

$$x = \frac{r_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}, y = \frac{r_b}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}, z = \frac{r_c}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}.$$

Áp dụng (3) và bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta thu được

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \frac{r_a r_b}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{r_b r_c}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}} + \frac{r_c r_a}{\operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}} \\ &\geq \frac{(\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a})^2}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = r^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \geq 3r^2$$

hay $x + y + z \geq \sqrt{3}r$, đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài giải đến tòa soạn đều phát hiện ra sơ suất của đề ra và đều tự sửa theo hướng trên.

Các bạn sau đây có lời giải tốt: Trần Nguyễn Ngọc, Tô Đông Vũ, Lê Tuấn Anh, Ngô

Đức Thành, Nguyễn Hoàng Dương, Nguyễn Bá Hùng (A₀, ĐHTH), Võ Quốc Hùng (Lê Khiết, Quảng Ngãi), Lê Thác Phong, Nguyễn Tri Phương (NK Hà Tĩnh), Nguyễn Xuân Thắng, (Đông Hà, QT), Phạm Huy Tùng (9A, Bế Văn Đàn, HN), Sao Đỏ, Đinh Trường Sơn, Trịnh Hữu Tung, Đinh Thị Nhung, Nguyễn Ngọc Hưng (Lam Sơn, TH), Nguyễn Nhật Nam (Bà Rịa, VT), Lê Quang Minh (NK Bắc Thái), Lê Văn An, Phạm Hồng Linh, Lê Huy Khanh (PBC, Nghệ An), Phan Hoàng Việt (QH Quy Nhơn), Trịnh Thế Huỳnh (LHP, Nam Định), Lê Anh Vũ (QH Huế), Nguyễn Tiến Dũng (LQĐ, Đà Nẵng), Vũ Đức Sơn (LVT, NB), Nguyễn Vũ Hưng (ĐHSPNN, HN) Đinh Trung Hằng (Mary Quiry, HN).

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/209 Kí hiệu $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{DA}$, $\widehat{DB}$ và $\widehat{DC}$ lần lượt là số đo các góc nhị diện cạnh BC , CA , AB , DA , DB và DC của một tứ diện $ABCD$. Hãy xác định hình tính của tứ diện này nếu biết:

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{BC}}{\sin \widehat{BC}} &= \frac{\widehat{DA}}{\sin \widehat{DA}} \quad (i); \quad \frac{\widehat{CA}}{\sin \widehat{CA}} = \frac{\widehat{DB}}{\sin \widehat{DB}} \quad (ii); \\ \frac{\widehat{AB}}{\sin \widehat{AB}} &= \frac{\widehat{DC}}{\sin \widehat{DC}} \quad (iii) \end{aligned}$$

Lời giải (của nhiều bạn)

Hạ $DH \perp mp(ABC)$, $DK \perp BC$, thế thì $\widehat{DKH} (= \widehat{BC})$ là góc phẳng nhị diện cạnh BC ở điểm K . Ta có:

$$\sin \widehat{BC} = \frac{DH}{DK} = \frac{3V/S_d}{2S_d/AB}$$

từ đó suy ra:

$$(1) \quad \frac{\widehat{BC}}{\sin \widehat{BC}} = \frac{2S_d S_a}{3V},$$

trong đó $V, S_a, S_b,$

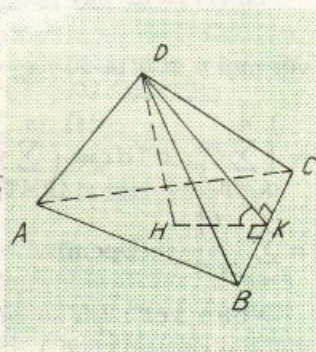
S_c, S_d lần lượt biểu thị thể tích và diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện. Chứng minh tương tự, ta được:

$$(2) \quad \frac{\widehat{DA}}{\sin \widehat{DA}} = \frac{2S_b S_c}{3V};$$

Từ (1), (2) suy ra: (i) $\Leftrightarrow S_b S_c = S_d S_a$. Cũng chứng minh tương tự, ta được: (ii) $\Leftrightarrow S_c S_a = S_d S_b$ và: (iii) $\Leftrightarrow S_d S_b = S_a S_c$

Kết quả là:

$$\{(i), (ii), (iii)\} \Leftrightarrow S_a = S_b = S_c = S_d \quad (*)$$



Theo một kết quả quen thuộc đã biết, tứ diện $ABCD$ là gần đều, nghĩa là :

$$S_a = S_b = S_c = S_d, (*) \Leftrightarrow \begin{cases} BC = DA \\ CA = DB (**) \\ AB = DC \end{cases}$$

Nhận xét : 1) Có thể chứng minh (*) $\Leftrightarrow$ (**) bằng nhiều cách khác nhau. Sau đây là cách chứng minh dựa trên định lý hình chiếu. Thật vậy, theo định lý hình chiếu ta được :

$$\begin{aligned} S &= S \cos \widehat{BC} + S \cos \widehat{DB} + S \cos \widehat{DC} = \\ &= S \cos \widehat{CA} + S \cos \widehat{DA} + S \cos \widehat{DC} = \\ &= S \cos \widehat{AB} + S \cos \widehat{DA} + S \cos \widehat{DB} = \\ &= S \cos \widehat{BC} + S \cos \widehat{CA} + S \cos \widehat{AB} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \widehat{BC} = \cos \widehat{DA} \\ \cos \widehat{CA} = \cos \widehat{DB} \\ \cos \widehat{AB} = \cos \widehat{DC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{BC} = \widehat{DA} \\ \widehat{CA} = \widehat{DB} \\ \widehat{AB} = \widehat{DC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A(BCD) = B(ADC) = C(DAB) = D(CBA) \\ \Leftrightarrow \triangle BCD = \triangle ADC = \triangle DAB = \triangle CBA \Leftrightarrow (**)$$

Hoặc, từ (i) và $\widehat{BC} = \widehat{DA}$, ta suy ra ngay $BC = DA$. Cũng vậy, từ (ii) và $\widehat{CA} = \widehat{DB}$; từ (iii) và $\widehat{AB} = \widehat{DC}$, ta suy ra : $CA = DB$ và $AB = DC$.

2. Từ bài toán trên bạn Hồ Sĩ Hiến (lớp 11CT, Phan Bội Châu, Nghệ An) nêu lên một nhận xét đúng sau đây : Một tứ diện là gần đều (các mặt bằng nhau hay các cạnh đối diện bằng nhau đôi một) khi và chỉ khi tỉ số giữa hai cạnh đối diện bằng tỉ số giữa sin hai nhị diện tương ứng thuộc hai cạnh ấy.

3. Các bạn sau đây có lời giải tốt : Tô Đông Vũ, 12CT ĐHTH Hà Nội, Phạm Huy Tùng 9A, THCS Bế Văn Đàn, Hà Nội ; Vương Vũ Thắng, Trần Nguyên Ngọc lớp 10 ĐHTH Hà Nội ; Ngô Đăng Hà An, 12A PTTH Lê Quý Đôn, Long An, Phan Hoàng Việt, 12A, Quốc học Quy Nhơn ; Từ Minh Hải, 11CT, Nguyễn Xuân Hùng 12CT, PTTH Buôn Ma Thuột, Đắk Lắk ; Lê Thái Nhân, 11T₁ Nguyễn Bình Khiêm Vĩnh Long ; Đạo lí 12A trường PTTH chuyên Thái Bình ; Trịnh Thế Huỳnh 11A₁ PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định ; Nguyễn Quang Hải 11CT PTTH Chuyên Hùng Vương Vĩnh Phú ; Lê Quang Minh, 11 Toán PTTH năng khiếu Bắc Thái ; Đinh Thị Thu Thủy, 12T Lương Văn Tụy, Ninh Bình ; Trần Thị Khuê, 10A, Trịnh Hữu Tùng 10T, Sao Đỏ 10T Lam Sơn, Thanh Hóa ; Lê Văn An 10CT, Lê Huy Khanh 12CT Phan Bội Châu, Nghệ An, Nguyễn Tri Phương 11T PTTH năng khiếu Hà Tĩnh ; Nguyễn Đức Thịnh 11A, CT, Nguyễn Văn Hiếu 12A CT ĐHSPT Vinh.

NGUYỄN DẰNG PHÁT

Bài L1/209. Một hạt khối lượng $m = 10^{-3}$ kg tích điện dương $q = 3 \cdot 10^{-5} C$, được treo bằng dây mảnh $l = 10cm$ tạo thành con lắc. Con lắc này được treo trong một tụ điện, khi tụ điện chưa tích điện thì dây treo con lắc vuông góc với các bản tụ. Khi điện trường trong lòng tụ điện đạt cường độ $E = 10^3 V/m$ thì sức căng của dây treo (lúc con lắc đứng yên) và chu kỳ dao động của con lắc là bao nhiêu ? Giải bài toán trong hai trường hợp :

a) Bản dương tụ điện ở trên.

b) Bản dương tụ điện ở dưới.

Hướng dẫn giải

Khi tụ điện chưa tích điện $\tau = P$ và

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

(τ là sức căng của dây treo).

Khi tụ điện tích điện

$$a) \tau' = mg + qE, T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}} \text{ với } g' = \frac{\tau'}{m}$$

suy ra $\tau' = 4 \cdot 10^{-2} N$ và $T' \approx 0,31s$

$$b) \tau'' = qE - mg, T'' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g''}} \text{ với } g'' = \frac{\tau''}{m}$$

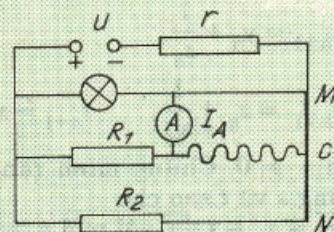
suy ra $\tau'' = 2 \cdot 10^{-2} N$ và $T'' \approx 0,46s$

Nhận xét Các em có lời giải đúng và gọn :

Hồ Lương Cầu, 12A₂, THPT Nguyễn Hữu Huân, Thủ Đức, TP Hồ Chí Minh ; Huỳnh Văn Ngọc, 11 Chuyên Lí Quốc Học Huế ; Nguyễn Trọng Phú, 11A₁, PTTH Yên Hòa Hà Nội ; Nguyễn Đình Thịnh, 10 Chuyên Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An ; Nguyễn Phan Đức Hùng 11CL, Quốc học Huế ; Nguyễn Ngọc Quang, 11A, PTTH Hà Nam, Nam Hà ; Nguyễn Trọng Việt, 12A, PTTH Hồng Quang, Hải Dương, Hải Hưng ;

OK

Bài L2/209 Cho mạch điện như hình vẽ $U = 30V$; $r = 2\Omega$; $R_1 = 6\Omega$; $R_2 = 2\Omega$. MN là một thanh điện trở đồng tính tiết diện đều có chiều dài 20cm và tổng điện trở là 10Ω . Đèn A : $15V - 37,5W$. Bỏ qua điện trở của dây nối và ampe kế. Con chạy C có thể chạy từ N đến M.



(Xem tiếp trang 13)



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp THCS

Bài T1/213. Tìm các chữ số khác không a, b, c thỏa mãn :

$$\overline{abc} = \overline{ab} \times \overline{ac} \times 7$$

ĐÀO VIỆT KHANH

(Thái Bình)

Bài T2/213. Cho các số a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2S$

Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{ab}{S-c} + \frac{bc}{S-a} + \frac{ac}{S-b} \geq 4S$$

HỒ QUANG VINH

(Nghệ An)

Bài T3/213. Cho ΔABC có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng :

$$\frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

NGUYỄN MINH HÀ

(Hà Phòng)

Bài T4/213. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Gọi M, N là trung điểm AB và AC . Hãy chứng minh ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBM, HCN và AMN giao nhau tại điểm K và đường HK kéo dài cắt MN tại trung điểm của nó

PHẠM HÙNG

(Hà Nội)

Bài T5/213. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC hai tam giác cân đồng dạng ABE, ACF (AB, AC là hai đáy của tam giác cân). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABE, ACF ; D là trung điểm của BC . Chứng minh tam giác DHF đồng dạng với tam giác DKE .

PHƯƠNG THẢO

(Hà Nội)

Các lớp THPT

Bài T6/213. Ba dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}, \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ thỏa mãn x_0, y_0, z_0 đều dương.

$$\text{Và } x_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n},$$

$$y_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n}, \quad z_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}$$

với mọi $n \geq 0$. Chứng minh rằng tồn tại các số dương s và t sao cho

$$s\sqrt{n} \leq x_n \leq t\sqrt{n} \text{ với mọi } n \geq 1$$

NGUYỄN MINH ĐỨC

(Hà Nội)

Bài T7/213. Tìm tất cả các hàm $f: R \rightarrow R$, tăng thực sự và thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x + 1) + 1 \text{ với mọi } x, y \in R$$

TRẦN XUÂN DÁNG

(Nam Hà)

Bài T8/213. Cho tam giác nhọn ABC , chứng minh rằng :

$$(\sin A)^{\sin A} \cdot (\sin B)^{\sin B} \cdot (\sin C)^{\sin C} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

ĐÀM VĂN NHÌ

(Thái Bình)

Bài T9/213. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc AC và BD . Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm các hình vuông dựng trên các cạnh AB, BC, CD, AD ở phía ngoài tứ giác. Chứng minh rằng diện tích tứ giác $ABCD$ không vượt quá $\frac{1}{2}$ diện tích tứ giác $O_1 O_2 O_3 O_4$.

ĐOÀN VĂN TRÚC

(Quảng Ngãi)

Bài T10/213. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, ΔBCD vuông tại C . Nhị diện cạnh AB bằng nhị diện AD . Chứng minh rằng

$$\frac{CD^2}{BC^2} - \frac{BC^2}{AB^2} = 1$$

ĐỖ THANH SƠN

(Hà Nội)

Các đề Vật lý

Bài L1/213. Một cái hộp (hoặc một toa xe) trượt xuống dốc. Trong hộp có treo một con lắc. Người ta thấy con lắc tạo với phương thẳng đứng góc không đổi $\beta = 30^\circ$. Dốc tạo với mặt phẳng nằm ngang góc $\alpha = 60^\circ$. Ảnh hưởng của không khí không đáng kể, tính hệ số ma sát giữa hộp và mặt dốc.

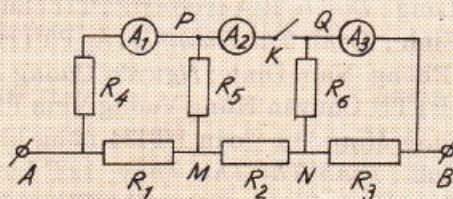
NGUYỄN DŨNG

(Hà Nội)

Bài L2/213. Cho mạch điện như hình vẽ $R_1 = R_2 = R$

$$R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 2R$$

U_{AB} không đổi.



Bỏ qua giá trị điện trở của dây nối, khóa K và các Ampe kế. Khi K đóng A_2 chỉ 2^4

1. Hãy tính số chỉ của A_1 và A_3 khi K đóng và mở.

2. Với $R = 30\Omega$, tính U_{AB} .

LẠI THẾ HIỀN

(Thái Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For lower secondary schools.

T1/213. Find three digits a, b, c , distinct from 0, such that

$$\overline{abbc} = \overline{ab} \times \overline{ac} \times 7.$$

T2/213. The numbers a, b, c satisfy the relation $a + b + c = 2S$. Prove the inequality :

$$\frac{ab}{S-c} + \frac{bc}{S-a} + \frac{ac}{S-b} \geq 4S.$$

T3/213. Let a, b, c be the lengths of the sides of a triangle. Prove that if $a + b + c = 2$, then $\frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$.

T4/213. Let be given a triangle ABC with the altitude AH and let M, N be respectively the midpoints of AB and AC . Prove that the circumcircles of the triangles HBM, HCN and AMN have a common point K and the line HK passes through the midpoint of MN .

T5/213. Construct at the outside of a triangle ABC two similar isosceles triangles ABE and ACF (the bases of which are respectively AB and AC). Let H, K be respectively the orthocenter of triangles ABE, ACF , and D be the midpoint of BC . Prove that the triangle DHF is similar to the triangle DKE .

For upper secondary Schools.

T6/213. Let be given three sequences $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}, \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ such that : x_0, y_0, z_0 are positive, $x_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n}, y_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n}, z_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}$ for all $n \geq 0$.

Prove that there exist positive numbers s and t such that $s\sqrt{n} \leq x_n \leq t\sqrt{n}$ for all $n \geq 1$.

T7/213. Find all strictly increasing functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying $f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$ for all $x, y \in \mathbb{R}$.

T8/213. Prove that for every acute-angled triangle ABC ,

$$(\sin A)^{\sin A} \cdot (\sin B)^{\sin B} \cdot (\sin C)^{\sin C} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$

T9/213. Let be given a convex quadrangle $ABCD$, the diagonals AC and BD of which are perpendicular to each other and let O_1, O_2, O_3, O_4 be the centers of the squares constructed on the sides AB, BC, CD, DA at the outside of the quadrangle. Prove that the area of quadrangle $ABCD$ is not greater than half of the area of quadrangle $O_1O_2O_3O_4$.

T10/213. Let be given a tetrahedron $ABCD$ such that $AB \perp (BCD)$, $\triangle BCD$ is right at C and the dihedral with side AB is equal to the dihedral with side AD . Prove that

$$\frac{CD^2}{BC^2} - \frac{BC^2}{AB^2} = 1.$$

NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý KHI GỬI BÀI

- Bài viết tay hoặc đánh máy không dập xóa, trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng.
- Mỗi bài dài không quá 2000 chữ.
- Đề ra cần gửi kèm lời giải.
- Ghi đầy đủ họ và tên thật, địa chỉ. Mỗi bài chỉ gửi một lần.
- Bài giải dự thi ngoài phong bì cần ghi : Dự thi giải toán số tạp chí...

Lời giải của mỗi đề toán viết trên một tờ giấy riêng. Trên góc phải có ghi tên, lớp, trường, địa phương, góc trái ghi số của bài.

ĐỀ THI TUYỂN SINH

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI NĂM 1994

PHẦN CHUNG

Câu 1. Giải phương trình

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-5}$$

Câu 2. Giải phương trình

$$\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$$

Câu 3. Giải bất phương trình

$$\frac{\log_a^2 x + \log_a x + 2}{\log_a x - 2} > 1,$$

cơ số a dương và khác 1

Câu 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \log_3 y = 3 \\ (2y^2 - y + 12) \cdot 3^x = 81y \end{cases}$$

Câu 5. Tìm miền xác định của hàm số

$\{y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}\}$. Hàm số đồng biến trong khoảng nào?

Câu 6. Tìm tham số m để cho tiệm cận xiên

của hàm số $y = \frac{mx^2 + (2m-1)x + m+2}{x-1}$ tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 9$

Câu 7. x, y là hai góc nhọn thỏa mãn hệ thức $\sin^2 x + \sin^2 y = \sin(x+y)$. Chứng minh rằng $x+y = \frac{\pi}{2}$

PHẦN TỰ CHỌN a

Câu 8a. Phương trình của hai cạnh của một tam giác trong mặt phẳng tọa độ là $5x - 2y + 6 = 0$, $4x + 7y - 21 = 0$. Viết phương trình của cạnh thứ ba của tam giác ấy biết trực tâm của tam giác trùng với gốc tọa độ

Câu 9a. Tính 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^1 x^n (1 + e^{-x}) dx$
2) $\int_0^1 x \cos^2 x dx$.

Câu 10a. Tính a, b để cho hàm số

$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$ thỏa mãn các điều kiện

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4; \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 - 3\ln 2$$

10

PHẦN TỰ CHỌN b

Câu 8b. Tính thể tích của hình chóp $SABC$, biết rằng đáy ABC là một tam giác đều có cạnh bằng a , mặt bên SAB vuông góc với mặt phẳng đáy, hai mặt bên còn lại cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng α

Câu 9b. Trong các hình nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π , hình nào có thể tích lớn nhất

Câu 10b. Chứng minh rằng nếu x, y là hai số thỏa mãn hệ thức $x + y = 1$ thì $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}$. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức?

BÀI GIẢI

Câu 1. Điều kiện (cần) $x \geq \frac{5}{3}$

Phương trình $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-5}$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 5x-8+2\sqrt{(2x-3)(3x-5)}$$

$$\Leftrightarrow 5-2x = \sqrt{6x^2-19x+15}$$

Điều kiện $\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{5}{2}$. Với điều kiện đó

phương trình $\Leftrightarrow$

$$4x^2 - 20x + 25 = 6x^2 - 19x + 15 \Leftrightarrow 2x^2 + x$$

$$-10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{5}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Câu 2. Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Với điều kiện đó phương trình

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4\cos^2 2x + 3(1 - \cos 2x) - 9 - 3\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\cos^2 2x - 6\cos 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1 = 0$$

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow \cos x = 0 \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 3. Điều kiện: $x > 0, x \neq a^2$

Đặt $\log_a x = t$, bất phương trình $\Leftrightarrow$

$$\frac{t^2 + t + 2}{t - 2} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 + 4}{t - 2} > 0 \Leftrightarrow t - 2 > 0 \Leftrightarrow t > 2$$

$$\Leftrightarrow \log_a x > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > a^2 \text{ nếu } a > 1 \\ 0 < x < a^2 \text{ nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Câu 4. Điều kiện : $y > 0$

Từ phương trình đầu ta có $x = 3 - \log_3 y$,
thế vào phương trình sau ta được

$$(2y^2 - y + 12) \cdot 3^{3 - \log_3 y} = 81y$$

$$\Leftrightarrow 27(2y^2 - y + 12) \cdot \frac{1}{y} = 81y \quad (y > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - y + 12 = 3y^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Câu 5. Miền xác định của hàm số

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^3}{x-2} \geq 0 \right\}$$

là tập $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}} \left(\frac{3x^2(x-2) - x^3}{(x-2)^2} \right) =$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}} = \frac{x^3 - 3x^2}{\sqrt{x^3(x-2)^3}}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}(x-2)^2}$$

$y' \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $[3, +\infty)$

Câu 6. Bằng phép chia đa thức ta có :

$$y = mx + 3m - 1 + \frac{4m+1}{x-1}$$

Từ đó, đường cong có tiệm cận xiên

$$y = mx + 3m - 1 \quad (\text{điều kiện } m \neq -\frac{1}{4})$$

Tiệm cận xiên tiếp xúc với parabol

$$y = x^2 - 9 \text{ khi phương trình}$$

$$x^2 - 9 = mx + 3m - 1 \text{ có nghiệm kép}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - (3m+8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4(3m+8) = 0$$

$$\text{hay } m^2 + 12m + 32 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \vee m = -8$$

Câu 7. Nếu $x + y = \frac{\pi}{2}$ thì $y = \frac{\pi}{2} - x$ do đó

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} = \sin(x+y)$$

Xét trường hợp $x + y \neq \frac{\pi}{2}$. Để thấy với x, y

là các góc nhọn

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y = 2\sin(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2\cos(x+y)\cos(x-y) + 2\sin(x-y)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x+y)(1)$$

Vì $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ theo giả thiết nên

$$0 < x + y < \pi, \text{ do đó}$$

+ Nếu $x + y > \frac{\pi}{2}$ thì

$\cos(x+y) < 0, \cos(x-y) > 0, \sin(x+y) < 1$ nên
vế phải của hệ thức (1) có giá trị bé hơn 1

+ Nếu $0 < x + y < \frac{\pi}{2}$ thì từ các ước lượng

đơn giản : $\cos(x-y) > \cos(x+y)$ và $\sin(x+y) > \sin^2(x+y)$, ta thấy vế phải của hệ thức (1) sẽ lớn hơn $\cos^2(x+y) + \sin^2(x+y)$, tức lớn hơn 1.
Kết luận của bài toán rút ra từ sự phân xét trên.

Nhận xét : Cũng có thể viết $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ và tùy thuộc $x+y < \frac{\pi}{2}$

hoặc $x+y > \frac{\pi}{2}$ mà so sánh giá trị của hai vế của đẳng thức ở giả thiết bài toán.

Câu 8a. Gọi $5x - 2y + 6 = 0, 4x + 7y - 21 = 0$ tương ứng là phương trình cạnh AB và cạnh AC , ta dễ tìm thấy tọa độ của A là $A(0, 3)$. Vì $O(0, 0)$ là trực tâm của tam giác ABC nên đường cao BB' đi qua O và $\perp AC$, vậy phương trình của nó là $y = kx$ với $k = -\frac{1}{k_1} = \frac{7}{4}$ (k_1 là

hệ số góc của AC)

Suy ra tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 5x - 2y = -6 \\ y = \frac{7}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow B(-4, -7)$$

Để ý đỉnh $A(0, 3)$; trực tâm $O(0, 0)$ nên đường cao AA' nằm trên trục Oy , suy ra cạnh BC song song với trục Ox , mà đi qua đỉnh B nên có phương trình $y = -7$

Câu 9a. 1) $\forall x \in [0, 1]$ có $0 \leq x^n(1+e^{-x}) \leq x^n \cdot (1+1) = 2x^n$ do đó

$$0 < \int_0^1 x^n(1+e^{-x})dx < \int_0^1 2x^n dx = \frac{2}{n+1}$$

Theo tiêu chuẩn tồn tại của giới hạn suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n(1+e^{-x})dx = 0$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 + \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$$

$$= \frac{x^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \left(x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{8} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$$

Câu 10a. $f'(x) = -a \cdot \frac{2}{x^3} - \frac{b}{x^2},$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -16a - 4b = -4$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \left(-\frac{a}{x} + b \ln|x| + 2x\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= -a + 2 + 2a - b \ln \frac{1}{2} - 1 =$$

$$= a + b \ln 2 + 1 = 2 - 3 \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 1 \\ a + (b + 3) \ln 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Câu 8b. $AB = BC = AC = a$

Từ S kẻ $SH \perp AB$. Do giả thiết $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$. Từ H kẻ $HN \perp BC$, $HP \perp AC$. Theo định lý 3 đường vuông góc, $SN \perp BC$, $SP \perp AC$, do đó $\alpha = \angle SNH = \angle SPH$. Hai tam giác vuông SHN và SHP có cạnh SH chung và góc $\angle SNH = \angle SPH$ nên bằng nhau, vậy $HN = HP$. Các tam giác vuông HNB và HPA có $\widehat{B} = \widehat{A} = 60^\circ$, cạnh $HN = HP$ nên chúng bằng nhau, vậy $HB = HA = \frac{a}{2}$, suy ra $HN = HP =$

$$\frac{AA'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Từ đó } SH = HN \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} \alpha. \text{ và } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{16} \operatorname{tg} \alpha$$

Câu 9b. $S_f = \pi = \pi R^2 + \pi Rl \Rightarrow$

$$1 = R^2 + Rl \Rightarrow l = \frac{1 - R^2}{R} = \frac{1}{R} - R$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} R^2 \sqrt{l^2 - R^2} =$$

$$= \frac{\pi}{3} R^2 \sqrt{\left(\frac{1}{R} - R\right)^2 - R^2}$$

$$= \frac{\pi}{3} R^2 \sqrt{\frac{1}{R^2} - 2} = \frac{\pi}{3} R \sqrt{1 - 2R^2}$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{\pi^2}{9} R^2 (1 - 2R^2) =$$

$$= \frac{\pi^2}{18} \cdot 2R^2 (1 - 2R^2) \leq \frac{\pi^2}{18} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{72}$$

$$V \leq \frac{\pi}{\sqrt{72}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{12}$$

$$\max V = \frac{\pi \sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow 2R^2 = 1 - 2R^2 \text{ hay } R = \frac{1}{2}, l = \frac{3}{2}$$

Câu 10b. $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} (x + y)^2 = \frac{1}{2}$

$$x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Một vài nhận định

Nhìn chung đề thi ở mức trung bình. Hầu hết các câu đều được giải bằng các kiến thức cơ bản bình thường của chương trình PTTH. Chỉ có câu 7 và câu 9a bài 1 có đòi hỏi năng lực ước lượng ít nhiều sắc bén đối với thí sinh. Mỗi thí sinh học chắc và tính toán thận trọng để đảm bảo đạt được kết quả khả quan.

TRẦN TUẤN ĐIẾP
Hà Nội

SÁNG TẠO TỪ ... (tiếp theo trang 1)

Chứng minh rằng: $A''_1 A''_2 \dots A''_n$ là đa giác đều.

Với $m = 2$; $n = 4$ là bài toán (*)

Chắc rằng với cách giải 1, 2 nếu "đứng ở vị trí này hoặc nọ" ta còn có thể tìm thêm các bài toán mới nữa.

Nhưng với cách giải 3 có tìm được điều gì lý thú không? Với cách giải 3, khi chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành ta không cần đến tâm O chung mà các cách giải 1, 2 phải sử dụng. Ta tìm được bài toán sau:

Bài toán 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt một hình bình hành $A'B'C'D'$ sao cho các đỉnh A', B', C', D' nằm trong hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng trung điểm của AA', BB', CC', DD' là các đỉnh của một hình bình hành.

Cũng khai thác như trên từ bài toán 3 ta lại "xuất hiện" bài toán 4 sau:

Bài toán 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt một hình bình hành $A'B'C'D'$ sao cho các đỉnh A', B', C', D' nằm trong hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sao cho

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN} = \frac{CC'}{CP} = \frac{DD'}{DQ} = m \quad (m > 0)$$

Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành

Với $m = 2$ là bài toán 4.

Và... liệu ta có 2 bài toán sau không?

Bài toán 5. Trên mặt phẳng cho hai hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q là những điểm nằm trên các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sao cho

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN} = \frac{CC'}{CP} = \frac{DD'}{DQ} = m \quad (m > 0)$$

Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài toán 6. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Trên (P) cho hình bình hành $ABCD$, trên (Q) cho hình bình hành $A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q là những điểm nằm trên các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sao cho

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{BB'}{BN} = \frac{CC'}{CP} = \frac{DD'}{DQ} = m \quad (m > 0)$$

Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành

Từ bài toán (*) có lẽ còn nhiều bài toán mới độc đáo và thú vị nữa.

Mời các bạn tiếp tục!

Ông kính cải cách dạy & học toán

VOI cũng bằng KIẾN ?

Trong mục "Định nghĩa và tính chất của nguyên hàm"

(Sách giáo khoa lớp 12 của các tác giả Ngô Thúc Lan, Vũ Tuấn, Ngô Xuân Sơn)

có giới thiệu các tính chất :

2) Với a là hằng số :

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

$$3) \int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

và Phần các phương pháp tính nguyên hàm có nêu định lý : Với các hàm số $f(x)$, $\varphi(t)$ và $\varphi'(t)$ liên tục ta có công thức sau đây :

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt \quad (*)$$

Việc chứng minh hai tính chất nêu trên cũng như việc chứng minh công thức (*) đều theo một ý tưởng là : Đi chứng minh đạo hàm hai vế bằng nhau ?

Cụ thể :

Chứng minh 2 : Vì $(\int af(x)dx)' = af(x)$

$$(a \int f(x)dx)' = a \cdot (\int f(x)dx)' = af(x)$$

Từ đó suy ra 2) !

Chứng minh 3) và (*) cũng tương tự

Như vậy theo cách chứng minh này thì : Voi cũng bằng kiến sao ?

Chúng tôi đề nghị hai phương án sau :

Phương án 1 : Không nêu cách chứng minh các tính chất và công thức đó - chỉ thừa nhận - Như sách giáo khoa 12 của Phan Đức Chính - Hoặc sách giáo khoa của Trần Văn Hạo.

Phương án 2 :

Nếu chứng minh thì nên chứng minh chặt chẽ như sau :

+) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm thì

$$dF(x) = f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

+) Chú ý 2 tính chất của vi phân :

$$d(kF(x)) = kdF(x) (**)$$

$$d(F(x) + G(x)) = dF(x) + dG(x).$$

Vì vậy ta áp dụng vào (**) ta có :

$$\begin{aligned} \int k \cdot dF(x) &= \int d(kF(x)) = kF(x) + C \\ &= k(F(x) + C') = k \int f(x)dx \end{aligned}$$

Các tính chất còn lại được xây dựng tương tự.

ĐÀO TRƯỜNG GIANG
(Vĩnh Phú)

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC (Tiếp theo trang 7)

1. C chạy từ N đến M . Xác định số chỉ của A theo độ dài $x = NC$. Độ sáng của đèn thay đổi thế nào ?

2. Ở vị trí nào của C thì đèn sáng bình thường ?

3. Giả sử công suất tiêu thụ thực của đèn vượt 20% so với công suất định mức thì đèn sẽ bị cháy. Hỏi con chạy C có thể chạy trên toàn bộ thanh MN mà đèn vẫn an toàn không ?

Hướng dẫn giải

Ta thấy $R_{im} = r + [R_d // R_1 // (R_2 + R_{NC})]$

với $R_d = \frac{U_d^2}{P_d^2}$, $R_{NC} = \frac{x}{2}$, tính I chính suy ra

$$I_A = I_1 + I_2 = \frac{15(16+x)}{32+5x}$$

Khi x tăng, $I_d = \frac{15(4+x)}{32+5x}$ tăng và công suất tiêu thụ tăng. Khi đèn sáng bình thường $I_d = 2,5A$ suy ra $x = 8cm$.

Đèn cháy ở công suất $P_{max} = 45W$ mà khi C di chuyển trên toàn bộ MN , công suất tiêu thụ luôn luôn $P < P_{max} \Rightarrow$ đèn vẫn an toàn.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và trình bày gọn : Nguyễn Tuấn, 10A, PTTH Đông Thụy Anh, Thái Thụy, Thái Bình ; Nguyễn Quang Tường, 10 Chuyên Lí, Phan Bội Châu, Nghệ An ; Nguyễn Văn Hoàng 12A, Quốc học Quy Nhơn, Bình Định ; Nguyễn Thành Nhân 11 Chuyên Lí, PTTH Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai ; Đặng Quốc Khánh, 9A, PTDL Lương Thế Vinh Hà Nội ; Mai Thế Trung, 10 Chuyên Lí, PTTH Hà Nội - Amsterdam ; Đạo lí 12A PTTH Chuyên Thái Bình.

MT

SUY NGHĨ TỪ LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊNH QUỐC TẾ

LÊ HÀO

Phú Yên

Đôi lúc một vấn đề đã được giải quyết xong lại gợi ý cho ta đề ra một vấn đề hoàn toàn khác nhưng lại rất có ý nghĩa. Nếu loay hoay mãi vẫn không giải quyết được vấn đề thứ 2, các bạn thử "mô phỏng" theo những lập luận khi giải quyết vấn đề thứ nhất xem sao !. Một sự "mô phỏng" có sáng tạo có cải tiến, bổ sung có thể giúp ta đạt mục đích. Nhiều khi nhờ thế mà bạn bỗng tìm được những kết quả thú vị bất ngờ. Tôi xin nêu 1 trường hợp như thế.

Trong cuốn "Tuyển tập những bài toán thi vô định quốc tế" có nêu một bài toán do CHLB Đức đề nghị như sau :

Bài toán : a, b là 2 số nguyên dương sao cho $ab + 1$ chia hết $a^2 + b^2$. Chứng minh : $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ chính phương.

Tác giả nêu 2 cách giải khác nhau. Cả 2 cách đều hay, làm thu hút sự chú ý của tôi. Ở đây xuất hiện vấn đề sau :

Nếu $a, b \in \mathbb{N}$, $a^2 + b^2 : ab - 1$ thì có kết luận gì về thương $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$?

Ta thấy :

$$1^2 + 2^2 : 1 \times 2 - 1 \text{ và } \frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2 - 1} = 5$$

$$1^2 + 3^2 : 1 \times 3 - 1 \text{ và } \frac{1^2 + 3^2}{1 \times 3 - 1} = 5$$

Thử thêm vài cặp số tự nhiên nữa, tôi càng tin rằng mệnh đề sau là đúng :

Mệnh đề 1. Nếu $a, b \in \mathbb{N}$ và $a^2 + b^2 : ab - 1$ thì $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = 5$.

Chứng minh mãi không được, tôi bỗng nhớ đến cách giải thứ hai bài toán thi vô định Quốc tế ở trên. Cái cốt lõi của cách giải này là : từ chỗ $a^2 + b^2 : ab + 1$ chỉ ra có $c, d \in \mathbb{N}$ mà $c + d < a + b$, $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{c^2 + d^2}{cd + 1}$.

Tôi nhận thấy để chứng minh mệnh đề 1 ở trên cần giải quyết đều cốt lõi sau : từ chỗ $a^2 + b^2 : ab - 1$ chỉ ra có $c, d \in \mathbb{N}$ mà $c + d < a + b$, $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{c^2 + d^2}{cd - 1}$. Dựa theo cách giải thứ 2 bài toán thi vô định quốc tế kể trên, có cải tiến, thay đổi một số lập luận, khác phục một số trở ngại, cuối cùng tôi chứng minh được mệnh đề 1 như sau :

Chứng minh. Giả sử $a^2 + b^2 : ab - 1$. Ta thấy $a \neq b$ vì nếu $a = b$ thì $2a^2 : a^2 - 1$ vô lý ! (do $(a^2, a^2 - 1) = (2, a^2 - 1) = 1$). Ta có thể xem $a > b$. Nếu $b = 1$ thì do $a^2 + 1 : a - 1$ suy ra $2 : a - 1$ nên $a = 2$ hoặc $a = 3$. Vậy : $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{a^2 + 1}{a - 1} = 5$.

Ta xét $a > b > 1$. $a^2 + b^2 : ab - 1$

$$\Rightarrow b^2 (a^2 + b^2) : ab - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^4 + 1 : ab - 1. \text{ Đặt } K = \frac{b^4 + 1}{ab - 1} \Rightarrow$$

$$Kab - K = b^4 + 1 \Rightarrow K \equiv -1 \pmod{b}, \text{ do đó :}$$

có $C \in \mathbb{N}$ để $K = bc - 1$.

Ta có : $b^4 + 1 = (ab - 1)(bc - 1)$

$$\frac{b^2(b^2 + c^2)}{bc - 1} = bc + 1 + \frac{b^4 + 1}{bc - 1} = bc + ab$$

$$\frac{b^2(a^2 + b^2)}{ab - 1} = ab + 1 + \frac{b^4 + 1}{ab - 1} = ab + bc$$

$$\text{Do đó } \frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{b^2 + c^2}{bc - 1}.$$

cũng như trên $b \neq c$. Vì $b > 1$ và $a > b$ nên $ab - 1 = b^2 + 1 + b(a - b) - 2 \geq b^2 + 1 \Rightarrow (b^2 + 1)^2 > b^4 + 1 = (ab - 1)(bc - 1) \geq (b^2 + 1)(bc - 1) \Rightarrow b^2 + 1 > bc - 1 \Rightarrow 2 > b(c - b)$. Vì $b > 1$ nên $b > c$.

Nếu $c > 1$ thì lập luận như trên, có $d \in \mathbb{N}$ $a > b > c > d$ để :

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{b^2 + c^2}{bc - 1} = \frac{c^2 + d^2}{cd - 1}.$$

Cứ tiếp tục như thế, quá trình này phải chấm dứt, tức là rốt cuộc dẫn đến số $u \in N$ mà : $a > b > c > d > \dots > u > 1$,

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{b^2 + c^2}{bc - 1} = \dots = \frac{u^2 + 1}{u - 1}.$$

Vì $u^2 + 1 : u - 1$ thì như đã biết : $u = 2$ hoặc $u = 3$ vậy $\frac{u^2 + 1}{u - 1} = 5$ nên $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = 5$, đpcm.

Từ mệnh đề 1 ta có ngay hệ quả sau :

Hệ quả. Phương trình

$$x^2 + y^2 - mxy + m = 0$$

nguyên dương khi và chỉ khi $m = 5$.

Điều thú vị là tư cách chứng minh của mệnh đề 1, ta có thể chỉ ra cách tìm tất cả nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0$.

Các bạn hãy xét 2 dãy số $\{a_K\}$ và $\{b_K\}$

$$\dots > a_K > \dots > a_3 > a_2 > a_1 \quad (1)$$

$\dots > b_K > \dots > b_3 > b_2 > b_1 \quad (2)$ xác định bởi công thức :

$$a_K + a_{K+2} = 5a_{K+1} \quad (K = 1, 2, 3 \dots)$$

$$\text{với } a_1 = 1, a_2 = 2.$$

$$b_K + b_{K+2} = 5b_{K+1} \quad (K = 1, 2, 3 \dots)$$

$$\text{Với } b_1 = 1, b_2 = 3.$$

Ta có :

Mệnh đề 2. $x_o, y_o \in N$, (x_o, y_o) là 1 nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0$ (A) khi và chỉ khi x_o, y_o là 2 số kế nhau ở một trong hai dãy số nói trên.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử (x_o, y_o) là nghiệm của (A), có thể xem $x_o > y_o$. Khi đó :

$$5 = \frac{x_o^2 + y_o^2}{x_o y_o - 1}$$

Nếu $y_o = 1$ thì $x_o^2 + 5x_o + 6 = 0$ nên $x_o = 2$ hoặc $x_o = 3$, do đó (x_o, y_o) là 2 số liên tiếp đầu tiên ở 1 trong 2 dãy số trên.

Nếu $y_o > 1$, theo chứng minh mệnh đề 1, có $z_o \in N$, $x_o > y_o > z_o$ để

$$5 = \frac{x_o^2 + y_o^2}{x_o y_o - 1} = \frac{y_o^2 + z_o^2}{y_o z_o - 1}.$$

Khi đó phương trình bậc 2 : $X^2 - 5y_o X + 5 + y_o^2 = 0$ có 2 nghiệm x_o, z_o

Theo định lý Viét : $x_o + z_o = 5y_o$

Nếu $z_o = 1$ thì $y_o = 2$ hoặc $y_o = 3$ nên (x_o, y_o) là 2 số hạng liên tiếp ở 1 trong 2 dãy số trên.

Nếu $z_o > 1$ thì cứ theo lập luận trên có $k_o, \dots, u_o, v_o, t_o \in N, x_o > y_o > z_o > k_o > \dots > u_o > v_o > t_o = 1$, 2 số liên tiếp là nghiệm của (A) và :

$$x_o + z_o = 5y_o, y_o + K_o = 5z_o, \dots,$$

$$u_o + t_o = 5v_o. \text{ Vì } 5 = \frac{v_o^2 + 1}{v_o - 1} \text{ nên } v_o = 0 \text{ hoặc } v_o = 3.$$

Vậy $t_o, v_o, u_o, \dots, z_o, y_o, x_o$ tạo thành các số hạng liên tiếp của 1 trong 2 dãy số trên.

($\Leftarrow$) Nếu (x_o, y_o) là 2 số kế nhau của 1 trong 2 dãy số trên, không mất tính tổng quát xem x_o, y_o là 2 số liên tiếp của dãy (1) và $x_o > y_o$. Chẳng hạn $x_o = a_{K+1}, y_o = a_K$. Ta có nhận xét : nếu $a > b > c$, $a + c = 5b$, (b, c) là nghiệm của (A) thì (a, b) cũng là nghiệm của (A). Vì $a_{k+1} > a_k > \dots > a_2 = 2 > a_1 = 1$, $a_{i+1} + a_{i-1} = 5a_i$ ($i = 2, 3, \dots, k$), (a_2, a_1) là nghiệm của (A). Theo nhận xét trên (a_{k+1}, a_k) là nghiệm của (A). đpcm.

Nhận xét. Nếu $x_o, y_o \in Z$, (x_o, y_o) là nghiệm của (A), thì rõ ràng x_o, y_o không thể trái dấu. Vậy nếu tìm được các nghiệm nguyên dương của (A) sẽ suy ra các nghiệm nguyên còn lại bằng cách đổi dấu.

Đến đây mời các bạn tiếp tục suy nghĩ. Có thể còn nhiều điều thú vị khác chưa được khai thác hết. Như các bạn biết, trang lịch sử khoa học có nhiều phát minh quan trọng ra đời nhờ biết kế thừa, cải tiến, bổ sung những thành tựu đã có. Các bạn trẻ hãy học toán một cách chủ động, biết phát huy, kế thừa để sáng tạo. Các bạn sẽ thấy toán học thật sinh động, lý thú.

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN LỚP 12 MÔN TOÁN CỦA THANH HÓA NĂM HỌC 1993 - 1994

(Trong 2 ngày 21 và 22.12.1993)

Ngày thứ nhất :

Bài 1 : a) Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n sao cho số $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ là số nguyên.

b) Giả sử n là số nguyên, chứng minh rằng nếu số $2 + \sqrt{28n^2 + 1}$ là số nguyên thì nó là số chính phương.

Bài 2 : a) Cho f là hàm số tăng thực sự có tính chất sau :

① $f(n)$ xác định với mọi giá trị nguyên dương của n .

② $f(n)$ là số nguyên và $f(2) = 2$ với $n \in \mathbb{Z}^+$.

③ $f(m.n) = f(m) \cdot f(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$

Hãy tính $f(1993)$.

b) Cho n số nguyên dương : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Chứng minh rằng :

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \dots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Bài 3. Giả sử tam giác ABC cân có $AC = BC > AB$. Hãy tìm điểm M trên mặt phẳng của tam giác sao cho đại lượng : $MA + MB - MC$ là nhỏ nhất.

Ngày thứ hai :

Bài 4 : Trên bàn có n chiếc kẹo, lần đầu lấy đi một số kẹo theo quy tắc sau : Hoặc lấy

đi $\frac{n}{2}$ chiếc kẹo nếu n chẵn, hoặc lấy đi $\frac{n}{3}$ chiếc kẹo nếu n chia hết cho 3, còn trường hợp n lẻ và không chia hết cho 3 thì được lấy tất cả n chiếc kẹo. Nếu trên bàn còn kẹo thì lần lấy tiếp theo sẽ lấy đi một số kẹo theo quy tắc trên. Hỏi số lần nhiều nhất là bao nhiêu để lấy hết số kẹo trên bàn đối với mọi số kẹo ban đầu lấy giá trị từ 1 đến 1000 ?

Bài 5 : Giả sử dãy số $x_1, x_2, \dots$ là tất cả các nghiệm số dương của phương trình $tgx = x$, được sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($x_n < x_{n+1}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$). Chứng minh rằng tồn tại $\lim (x_{n+1} - x_n)$ và hãy tính giới hạn đó.

Bài 6 : Cho hình tứ diện $A_1 A_2 A_3 A_4$ nội tiếp trong mặt cầu tâm O bán kính R sao cho tâm O nằm hẳn bên trong hình tứ diện (điểm O không thuộc mặt nào của hình tứ diện). Chứng minh rằng :

$$a) |\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} + \vec{OA_4}| \leq 2R$$

$$b) |A_1 A_2| + |A_1 A_3| + |A_1 A_4| + |A_2 A_3| + |A_2 A_4| + |A_3 A_4| > 6R$$

LƯU XUÂN BÌNH
Thanh Hóa

Bạn có biết ?

SỰ RA ĐỜI CỦA KHÁI NIỆM "TRIỆU".

Kể phát minh ra con số triệu là một nhà buôn của thành phố Vondơ có tên là Máccô Pôlô. Câu chuyện như sau :

Năm 1271, hai nhà buôn của thành phố Vondơ là Níchcôlô và Mácpêô Pôlô được giáo hoàng phái tới lãnh địa của hoàng đế Mông Cổ Hubilai. Người thứ ba là Máccô, 18 tuổi, con trai của Níchcôlô. Họ phải đi ròng rã suốt 4 năm, vượt qua nhiều nước. Máccô được đón tiếp nồng nhiệt và sau nhiều năm phục vụ hoàng đế Mông Cổ, anh đã đi hầu khắp các tỉnh của đất nước rộng lớn này.

Mãi tới năm 1295, anh mới trở về Tổ quốc. Ít lâu sau anh tham gia chiến đấu trên mặt bể rồi bị bắt làm tù binh. Ở trong tù, anh đã đọc cho một người tên là Ruxtichanô nghe các hồi ức về các cuộc hành trình của mình. Thế là một cuốn sách được ra đời. Ruxtichanô

đã viết thêm lời nói đầu. Có những dòng như sau : "Trong cuốn sách của mình, Máccô Pôlô đã kể về những điều chúng mình đã chứng kiến những điều chỉ được nghe kể..." Các câu chuyện của Máccô Pôlô được coi là hoang đường, mặc dù anh đã cố gắng kể một cách chính xác và trung thực.

Các nhà buôn Vondơ là những người giàu có, am hiểu số học. Họ thường nói rất ngọt cái từ "mille" khi đếm đến con số 1000. Nhưng Máccô Pôlô tin rằng nhà buôn giàu nhất của địa phương còn lánh xa người nghèo nhất trong số các quan dưới quyền hoàng đế Hulibai. Và khi miêu tả số tài sản kếch sù của phương đông, Máccô Pôlô đã buột miệng nói lên cái từ "miliône".

Đó là một từ lạ nhưng dễ hiểu : mille lấy Zlalia nghĩa là 1000, tiếng vô ngựa "one" cũng có giá trị như bình phương ở tiếng Việt. Vậy cái từ "milênône" có nghĩa là 1000×1000 .

Cái từ "triệu" đã được ra đời như thế đó.

THANH DẰNG sưu tầm và dịch
(Từ cuốn "Cuộc hành trình vào vương quốc của từ" của E. Bácsanhian).

Định lý "Fecma nhỏ" và số Camical

TA HỒNG QUẢNG

Hà Nội

Ngày 18 tháng 10 năm 1640 Fecma trong bức thư gửi cho nhà toán học Frenicle đã trình bày một kết quả sau đây :

Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên thì p sẽ là ước của số $a^p - a$.

Kết quả trên về sau được gọi là định lý "Fecma nhỏ". Đây là một trong những định lý cơ sở và đẹp đẽ nhất của số học. Trước Fecma vào khoảng 500 năm trước công nguyên người Trung Quốc đã sử dụng định lý sau đây : Nếu p là một số nguyên tố lẻ khi ấy p sẽ là ước của $2^{p-1} - 1$. Hơn thế nữa người Trung Quốc còn khẳng định kết quả sau đây : Nếu p là số lẻ và p lại là ước của $2^{p-1} - 1$ thì p là số nguyên tố ! Kết quả này người ta không chứng minh mà chỉ rút ra từ việc quan sát tính đúng đắn của nó với vài trăm số tự nhiên đầu tiên. Đương thời với Fecma nhiều nhà toán học vẫn tin định lý trên của người Trung Quốc là đúng ! Có lẽ Fecma cũng nghĩ như vậy nên ông đã khẳng định rằng số F_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ là số nguyên tố với mọi n nguyên dương ($F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$) bởi vì Fecma đã chứng minh được rằng F_n là ước của $2^{F_n} - 2$ (bạn đọc có thể tự chứng minh được điều này). Tuy nhiên mãi đến tận năm 1830 người ta mới chỉ ra rằng định lý Trung Quốc nói trên không đúng nữa vì số $341 = 11 \cdot 31$ là hợp số đồng thời lại là ước số của $2^{340} - 1$. Lúc này các nhà toán học đặt ra câu hỏi sau đây : Nếu p là số tự nhiên lẻ và p là ước của $a^p - a$ với mọi a nguyên thì p có phải là số nguyên tố hay không ? Nếu điều đó đúng thì định lý này cho ta một tiêu chuẩn để kiểm tra một số tự nhiên p có phải là số nguyên tố hay không. Năm 1899 một nhà toán học tên Korelt chứng minh được kết quả sau đây :

Định lý Korelt : Số nguyên $n > 1$ là ước của $a^n - a$ với mọi a nguyên khi và chỉ khi n không có ước chính phương > 1 và nếu r là ước nguyên tố của n thì $(r-1)$ phải là ước của $(n-1)$.

Tất nhiên là các số nguyên tố thỏa mãn các điều kiện của định lý Korelt. Liệu có phải chỉ có các số nguyên tố mới có tính chất này hay không ? Năm 1910 nhà toán học tên là Camical (Carmichael) đã tìm được một hợp số thỏa mãn các điều kiện của định lý Korelt : đó là số $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ (từ đây rút ra kết luận $a^{561} - a$ chia hết cho 561 với mọi số a nguyên !). Sau kết quả của Camical người ta đổ xô đi tìm các hợp số như vậy và từ đấy các hợp số thỏa mãn các điều kiện của định lý Korelt được gọi là số Camical. Một câu hỏi được đặt ra cho các nhà toán học là : Tồn tại vô hạn hay hữu hạn các số Camical ? Năm 1936 nhà toán học tên là Chernik tìm được một điều kiện cho phép tìm một lớp các số Camical.

Định lý Chernik : Giả sử m là số nguyên dương và tất cả các số $p = 6m + 1$, $q = 12m + 1$ và $r = 18m + 1$ là các số nguyên tố khi đó số pqr là số Camical !.

Trong những năm gần đây dựa trên những thành tựu về máy tính điện tử người ta đã tìm được hàng ngàn số Camical. Năm 1993 nhà tin học Richaerd Pinch công bố một danh sách gồm 105212 số Camical !. Khi này mọi người đều tin rằng số Camical là vô hạn. Tuy nhiên mãi gần đây ba nhà toán học là W.R. Alford, Andrew Granville, Carl Pomerance mới chứng minh được rằng quả thật số Camical là vô hạn. Các nhà toán học trên còn đi xa hơn điều khẳng định này :

Định lý Alford - Granville - Pomerance : Nếu kí hiệu $C(n)$ là số Camical lớn nhất không vượt quá n . Khi đó tồn tại số M sao cho với mọi $n > M$ ta có bất đẳng thức $C(n) > n^{2/7}$. (1)

Định lý trên được công bố trên tạp chí toán học của Mỹ : Annals of Mathematics 140 (1994), Ser. 2, Volume 139, 703-722.

Các câu hỏi mới được đặt ra là : Có thể đánh giá (1) tốt hơn không ?

Có thể chỉ ra được công thức cho phép tìm tất cả các số Camical không ?

Biết đâu trong các bạn trẻ đọc bài báo này có người tìm được lời giải cho các câu hỏi trên !

Giải đáp bài :**CHỈ HỎI MỘT CÂU, CÂU GÌ ?**

Bạn có thể đặt một câu hỏi như sau :

- *Bác có phải là dân làng này không ạ ?*
- Nếu bạn đến làng *A* thì bất luận người bạn gặp là dân làng nào câu trả lời đều là "gật".
- Nếu bạn đến làng *B* thì bất luận người bạn gặp là dân làng nào câu trả lời đều là "lắc"

Câu trả lời	Người gặp là dân làng	
	<i>A</i>	<i>B</i>
Đến làng <i>A</i>	Gật	Gật
Đến làng <i>B</i>	Lắc	Lắc

(Theo các bạn Nguyễn Thị Thanh Nga, 6A, NK Minh Khai, Nam Hà, Đàm Hoàng Anh, 6A, Chu Văn An, Hà Nội).

Câu hỏi khác có thể như sau :

- *Bác là dân làng khác đến đây phải không ạ ?*
- Nếu bạn đến làng *A* thì bất luận người bạn gặp là dân làng nào câu trả lời đều là "lắc"
- Nếu bạn đến làng *B* thì bất luận người bạn gặp là dân làng nào câu trả lời đều là "gật"

Câu trả lời	Người gặp là dân làng	
	<i>A</i>	<i>B</i>
Đến làng <i>A</i>	Lắc	Lắc
Đến làng <i>B</i>	Gật	Gật

(Theo Nguyễn Tiến Thủy, 5A, thị trấn Yên Thành, Nghệ An, Lê Bích Thảo, 71, Võ Xán, Tây Sơn, Bình Định, Xuân Dũng, 7A, Xuân Châu, Xuân Thủy ; Nguyễn Thu Hà, 9A, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà).

BÌNH PHƯƠNG

CÂU CHUYỆN TRONG RỪNG

Trong một khu rừng, bốn cây cổ thụ, *A, B, C* và *D* trò chuyện với nhau về tuổi của mình :

Cây A : Tôi hơn *B* 90 tuổi và kém *D* 30 tuổi.

Cây B : Tổng số tuổi của tôi và tuổi của *C* bằng tuổi của *D*.

Cây D : Tích các chữ số trong số tuổi của *A* bằng tích của tuổi tôi với tuổi *B*, trừ đi 100 lần tuổi *C*. Mời các bạn thử tính tuổi của mỗi cây !

NGHIÊM CHÁNH QUỐC

CÙNG BẠN ĐỌC

Do giá giấy tăng nên từ số 4.1995 (214) giá bán mỗi số tạp chí Toán học và tuổi trẻ là 2000đ (Hai nghìn đồng). Mong bạn đọc tiếp tục hưởng ứng mua, đọc, cổ vũ và gửi bài cho THVT. Chân thành cảm ơn các bạn.

THVT

INSS : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT15M5

Sắp chữ tại Trung tâm Vi tính và
In tại Xưởng chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục
In xong và gửi lưu chiếu tháng 3/1995

Giá : 1500đ
Một nghìn
năm trăm đồng