BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

# TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

2(212)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

★ TỪ MỘT BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN VỀ HÌNH VUÔNG

★ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CỦA HẢI PHÒNG

★ PHƯƠNG PHÁP VÉC TƠ

★ ĐỒNG QUY VÀ KHÔNG ĐỒNG QUY

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

# MỤC LỤC





*Ảnh bìa : Học sinh trường THCS Trần Phú - Hải Phòng trong giờ Tin học*

*Trụ sở tòa soạn :*
**45B Hàng Chuối, Hà Nội** ĐT: 213786
**231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh** ĐT: 356111

*Biên tập và trị sự :* VŨ KIM THỦY
*Trình bày :* THANH LONG

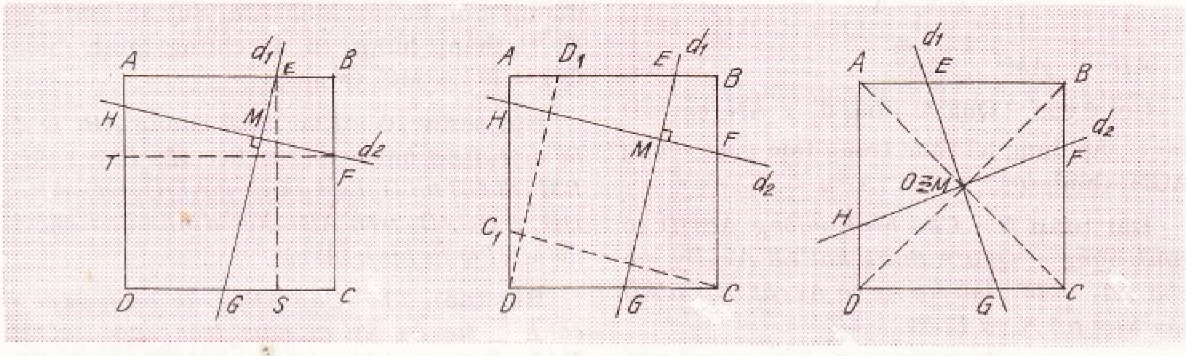
*Dành cho các bạn Trung học cơ sở*

# TỪ MỘT BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN VỀ HÌNH VUÔNG

PHẠM THÀNH LUÂN
*TP Hồ Chí Minh*

Nếu biết cách suy nghĩ thì từ một bài toán đơn giản, chúng ta có thể đặt ra nhiều bài toán khá phong phú. Xin lấy thí dụ từ bài toán khá đơn giản sau đây.

Cách 2 – Dựng $CC_1 // HF$ ($C_1$ trên AD) và $DD_1 // EG$ ($D_1$ trên AB), $\Delta AD_1D = \Delta DC_1C$ (hình 2)



Hình 1 Hình 2 Hình 3

**Bài toán 1** – *Cho hình vuông ABCD. Lấy một điểm M bất kì trong hình vuông đó. Đường thẳng $d_1$ qua M cắt AB tại E, cắt CD tại G, đường thẳng $d_2$ qua M vuông góc với $d_1$ cắt BC tại F, cắt AD tại H. Chứng minh rằng EG = FH.*

Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là ý chính của 2 cách

Cách 1 – Hạ $ES \perp CD$ và $FT \perp AD$. $\Delta ESG = \Delta FTH$ (cgc) (hình 1)

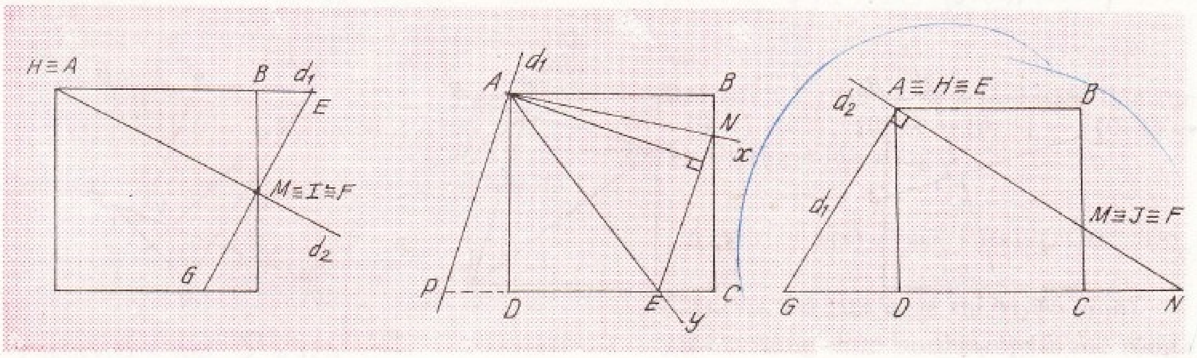
Xét bài toán với một số *vị trí đặc biệt* của điểm M.

1) Khi $M \equiv O$ (tâm hình vuông), ta có :

**Bài toán 2** – *Cho hình vuông ABCD. Hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ qua tâm O của hình vuông và vuông góc với nhau, cắt các cạnh hình vuông tại các điểm tương ứng E, G, F, H (hình 3). Chứng minh rằng :*

*a) $S(AEOH) = S(EBFO) = S(FCGO) = S(OGDH) = \frac{1}{4}S(ABCD)$*

*b) EFGH là hình vuông.*



Hình 4 Hình 5 Hình 6

2) Nếu M ≡ I, trung điểm của BC, và đường thẳng $d_2$ qua A thì F ≡ I và H ≡ A. Ta đặt được bài toán 3 :

**Bài toán 3** – *Dựng hình vuông ABCD biết đỉnh A và trung điểm M của BC.*

*Gợi ý giải :* Qua M dựng $d_1 \perp AM$. Trên $d_1$ dựng ME = MG = AM/2. Hạ MB ⊥ AE. (hình 4)

3) Nếu M là một điểm bất kì J trên cạnh BC và đường thẳng $d_2$ qua A thì F ≡ J và H ≡ A ≡ E. Ta đặt được các bài toán 4 và 5.

**Bài toán 4** – *Cho hình vuông ABCD và điểm M bất kì thuộc cạnh BC (khác B và C). Gọi N là giao của hai đường thẳng AM và CD. Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$$

Gợi ý giải – Qua A dựng $d_1 \perp AN$, cắt CD tại G. Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông AGN. (hình 5)

**Bài toán 5** – *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Qua A dựng hai tia Ax, By sao cho $\widehat{xAy} = 45^o$, hai tia Ax và Ay cắt BC và AD lần lượt tại N và E.*

*a) Chứng minh rằng tam giác AHE có độ dài đường cao xuất phát từ A không đổi.*

*b) Xác định vị trí của N và E để S(ANE) là cực tiểu.*

*Gợi ý giải* – Coi Ax là $d_2$, dựng $d_1 \perp Ax$, cắt CD tại P. Suy ra AP = AN và ΔAPE = ΔANE (hình 6).

Sau đây là một số bài toán tương tự, được đặt ra từ bài toán 1.

**Bài toán 6** – *Dựng hình vuông ABCD biết 4 điểm nằm trên 4 cạnh của hình vuông.*

*Gợi ý giải* – Qua I dựng Ix // LJ, trên Ix lấy đoạn IK' = LJ. Qua J dựng JC ⊥ KK'. (hình 7)

**Bài toán 7** – *Dựng hình vuông ABCD biết đỉnh A và hai điểm M, N trên BC và CD.*

**Bài toán 8** *Cho hình vuông ABCD, trên cạnh BA và CB đặt BP = BQ. Hạ BH ⊥ CP. Chứng minh rằng DH ⊥ HQ.*

*Gợi ý giải* – Kéo dài BH cắt AD tại I, suy ra được IB = CP từ đó có AI = BQ và IQCD là hình chữ nhật. Năm đỉnh I, H, Q, C, D cùng nằm trên một đường tròn (hình 8).

**Bài toán 9** – *Cho hình vuông ABCD. Lấy M bất kì trên CD. Đường tròn đường kính AM và đường tròn đường kính CD cắt nhau ở điểm thứ hai N. DN kéo dài cắt BC tại P. Chứng minh rằng : PM ⊥ AC.*

*Gợi ý giải* – Gọi Q là giao điểm của AB và đường tròn đường kính AM. Suy ra được Q, N, C thẳng hàng, từ đó chứng minh được QB = PC = MC. (hình 9).

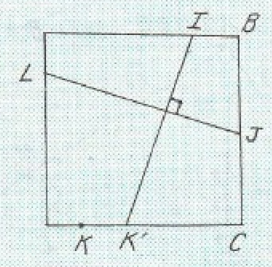
**Bài toán 10** – *Cho hình vuông ABCD. I là một điểm bất kì thuộc BC. Hạ BM ⊥ AI. BM cắt CD tại G. Dựng $CC_1$ // AI ($C_1$ trên AD), $DD_1$ // BG ($D_1$ trên AB). Xác định vị trí của I để MNPQ là hình vuông.*

**Bài toán 11** – *Cho ABCD là hình vuông cạnh a, tia Ax bất kì nằm trong góc vuông BAD. Đường phân giác của góc BAx cắt BC tại M, đường phân giác của góc DAx cắt CD tại N. Gọi E là giao điểm của Ax và MN. Tìm quỹ tích của điểm E.*

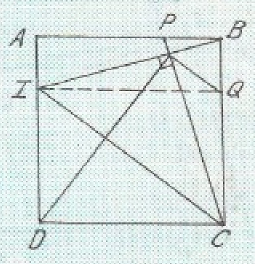
**Bài toán 12** – *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên AB, AD lấy hai điểm M, N sao cho tam giác AMN có chu vi bằng 2a. Chứng minh rằng $\widehat{CMN} = 45^o$.*

**Bài toán 13** – *Cho M, N là trung điểm của các cạnh AB và BC của hình vuông ABCD. ND và CM cắt nhau ở P. Chứng minh rằng PA = AB.*

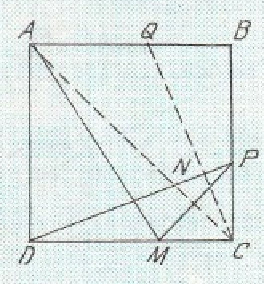
Đề nghị bạn đọc tìm lời giải của các bài toán trên, liên hệ với bài toán 1.




*Hình 7*




*Hình 8*




*Hình 9*

# GIẢI BÀI kì trước

**Bài T1/208 :** *Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a^2 = b + 1$. Xét dãy số $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ được xác định bởi : $u_o = 0$, $u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + c^2}$ $\forall n \in N$. Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ là dãy các số nguyên.*

**Lời giải : Cách 1** (của *Phạm Huy Tùng*, 9A THCS Bế Văn Đàn, Hà Nội ; *Nguyễn Bá Hùng, Nguyễn Ngọc Tân, Ngô Đức Thành* – 10CT ĐHTH Hà Nội ; *Lê Viết Hải, Trịnh Văn Khôi, Dương Thanh Liêm* – 10T Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Hoàng Xuân Bách*, CT ĐHSP Vinh và *Phan Anh Dũng*, 11T Phan Bội Châu, Nghệ An) :

Từ $u_n = au_{n-1} + \sqrt{bu_{n-1}^2 + c^2}$ $\forall n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow$ $u_n^2 - 2au_{n-1}u_n + a^2u_{n-1}^2 = bu_{n-1}^2 + c^2$ $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\Rightarrow (a^2 - b)u_n^2 - 2au_{n-1}u_n + u_{n-1}^2 = c^2$ $\forall n \in \mathbf{N}^*$ (vì $a^2 = b + 1$) $\Rightarrow (au_n - u_{n-1})^2 = bu_n^2 + c^2$ $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Do đó, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ta có : $u_{n+1} = au_n + |au_n - u_{n-1}|$ (1).

Vì $u_o = 0 \in \mathbf{Z}$, $u_1 = au_o + \sqrt{bu_o^2 + c^2} = |c| \in \mathbf{Z}$, nên từ (1) suy ra $u_n \in \mathbf{Z}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ (Đpcm).

**Cách 2** (của *Trần Thị Ngọc Hải*, 9T Lê Khiết Quảng Ngãi ; *Phạm Anh Tuấn*, 9T Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Lê Thái Nhân*, 11T Nguyễn Bỉnh Khiêm Vĩnh Long ; *Trần Thiên Ánh*, 10CT ĐHTH TPHCM ; *Nguyễn Văn Hoàng*, 12A Quốc học Quy Nhơn Bình Định ; *Lê Anh Vũ*, 11CT Quốc học Huế ; *Lê Anh Khoa*, 11A$_1$ Lê Quý Đôn, Đà Nẵng ; *Nguyễn Hoàng Công*, 11T Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Hồ Văn Thảo, Nguyễn Xuân Thắng* – PTTH Đông Hà, Quảng Trị ; *Nguyễn Anh Dũng, Nguyễn Xuân Tương* – CT ĐHSP Vinh ; *Phạm Mạnh Quang, Trịnh Hữu Trung* – Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Vũ Đức Sơn, Đinh Văn Tâm* – PT Lương Văn Tụy, Ninh Bình ; *Nguyễn Vũ Hưng*, 11D ĐHSPNN Hà Nội ; *Vương Vũ Thắng*, 10CT ĐHTH Hà Nội ; *Vũ Huy Phương*, 11T PTNK Hải Hưng ; *Nguyễn Việt Linh*, 11CT Trần Phú Hải Phòng ; và một số bạn khác) :

Từ các giả thiết của bài toán dễ thấy :

$u_{n+2}^2 - 2au_{n+2} \cdot u_{n+1} + u_{n+1}^2 - c^2 = 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ (2)

và $u_n^2 - 2au_{n+1}u_n + u_{n+1}^2 - c^2 = 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ (3)

Lấy (2) trừ (3), vế theo vế, ta được :

$(u_{n+2} - u_n)(u_{n+2} + u_n - 2a.u_{n+1}) = 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Suy ra, $\forall n \in \mathbf{N}$ ta có : nếu $u_n \in \mathbf{Z}$ và $u_{n+1} \in \mathbf{Z}$ thì $u_{n+2} \in \mathbf{Z}$. (*)

Vì $u_o = 0 \in \mathbf{Z}$ và $u_1 = |c| \in \mathbf{Z}$ nên từ (*) suy ra $u_n \in \mathbf{Z}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ (Đpcm).

**Nhận xét :** 1. Tòa soạn nhận được lời giải của 105 bạn, trong đó có 40 bạn cho lời giải sai. Nhiều bạn đã cho lời giải sai vì mắc phải một trong hai suy luận sai lầm sau :

i) $a_n \cdot b_n = 0$ $\forall n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_n = 0 \ \forall n \\ b_n = 0 \ \forall n \end{array}\right.$

ii) Từ (2) và (3) $\Rightarrow u_n$ và $u_{n+2}$ là hai nghiệm của phương trình (ẩn $x$) : $x^2 - 2au_nx + u_n^2 - c^2 = 0$ (4) $\Rightarrow u_{n+2} + u_n = 2au_{n+1}$ (theo định lí Viet). (5)

(*Xin lưu ý các bạn :* Chỉ có (5) khi $u_{n+2}$ và $u_n$ là **tất cả** hai nghiệm của phương trình (4) ! Nói khác đi : chỉ có (5) khi tập hợp $\{u_{n+2}, u_n\}$ là tập nghiệm của pt (4) !).

2. Có thể chứng minh được rằng : Nếu $a \leqslant 0$ thì $u_{n+2} = u_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$ ; còn nếu $a > 0$ thì $u_{n+2} + u_n = 2au_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T2/208 :** *Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn*

$$x + y + z = xyz.$$

*Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)} - \sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{(1+z^2)(1+x^2)} - \sqrt{1+z^2} - \sqrt{1+x^2}}{zx} + \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}}{xy} = 0.$$

**Lời giải :**

*Cách 1* (Của bạn *Nguyễn Việt Cường* 8H, Nga Sơn, Thanh Hóa)

Đặt $x_o = \frac{1}{x}, y_o = \frac{1}{y}, z_o = \frac{1}{z_o}$. Bài toán quy về chứng minh đẳng thức

$$\sqrt{(1+x_o^2)(1+y_o^2)} + \sqrt{(1+y_o^2)(1+z_o^2)} + \sqrt{(1+z_o^2)(1+x_o^2)} = (x_o + y_o)\sqrt{1+z_o^2} + (y_o + z_o)\sqrt{1+x_o^2} + (z_o + x_o)\sqrt{1+y_o^2}$$

nếu $x_oy_o + y_oz_o + z_ox_o = 1$.

Thật vậy

$1 + x_o^2 = x_oy_o + y_oz_o + z_ox_o + x_o^2 = (x_o + y_o)(x_o + z_o)$

Tương tự $1 + y_o^2 = (x_o + y_o)(z_o + y_o)$

$1 + z_o^2 = (x_o + z_o)(z_o + y_o)$. Vậy

$\sqrt{(1+x_o^2)(1+y_o^2)} = (x_o + y_o)\sqrt{(x_o + z_o)(z_o + y_o)}$ $= (x_o + y_o)\sqrt{1+z_o^2}$. Tương tự $\sqrt{(1+y_o^2)(1+z_o^2)} = (y_o + z_o)\sqrt{1+x_o^2}$

$\sqrt{(1+z_o^2)(1+x_o^2)} = (z_o + y_o)\sqrt{1+y_o^2}$

Cộng lại ta có điều phải chứng minh.

*Cách 2* (của đa số các bạn) :

Đặt $x = \text{tg}\alpha$, $y = \text{tg}\beta$ ; $z = \text{tg}\gamma$ trong đó $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Từ điều kiện $\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta + \text{tg}\gamma = \text{tg}\alpha\ \text{tg}\beta\ \text{tg}\gamma$ suy ra $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Từ đó thay vào và sử dụng biến đổi lượng giác đơn giản ta dẫn đến vế trái là $[(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) - \sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta+\gamma) - \sin(\gamma+\alpha)]/\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma = 0$ do điều kiên $\alpha+\beta+\gamma = \pi$

**Nhận xét :**

Hoan nghênh nhiều bạn lớp 9 như các bạn *Bùi Thị Phương Nga* (Lớp 9 Lê Khiết, Quảng Ngãi), *Giáp Đăng Khoa* (9A Tân Yên, Hà Bắc), *Nguyễn Anh Tuấn* (9T Phan Bội Châu), *Nguyễn Thanh Hà* (9A Hòa Bình), ... đã giải đúng bài này mà không dùng phép đặt lượng giác như ý đồ của tác giả bài toán. Lời giải của bạn *Cường* ở trên là rất hay, vừa sơ cấp vừa ngắn gọn.

2) Một vài bạn mắc sai lầm trong suy luận khi cho rằng : "Vì $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A\ \text{tg}B\ \text{tg}C$ nếu $A, B, C$ là ba góc của tam giác nên phải có $x = \text{tg}A$, $y = \text{tg}B$, $z = \text{tg}C$."

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T3/208.** *Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi :*

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

**Lời giải** (dựa theo *Vũ Minh Giang* – $11B_1$ – PTTH Bỉm Sơn – Thanh Hóa). Nhân cả hai vế với $\sin A\ \sin B\ \sin C$, được

$$\frac{\sin B\sin C}{\sin A} + \frac{\sin C\sin A}{\sin B} + \frac{\sin A\sin B}{\sin C} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ (1)$$

Mà $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} =$

$$= 2\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2} =$$

$$= \sin C + \sin A + \sin B\ (2)$$

Vậy, vế trái của (1) bằng vế phải của (2). Áp dụng định lí hàm số sin, ta có đẳng thức tương đương :

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} = a + b + c.$$

$\Leftrightarrow 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab.$

$\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 = 0.$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. Và, ta có đpcm.

**Nhận xét** Có 129 bài giải gửi về tòa soạn, tất cả đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Vũ Minh Giang* ($11B_1$ - PTTH Bỉm Sơn - Thanh Hóa), *Đinh Trung Hằng* (11M Marie - Curie Hà Nội), *Phạm Đình Trường* (11CT PTTHNK Trần Phú – Hải Phòng), *Thanh Hương* (11PTTH Lương Văn Tụy – Ninh Bình), *Nguyễn Phú Quảng* (10CT ĐHTH – Hà Nội), *Từ Minh Hải* (11CT PTTH Ban Mê Thuột, Đắc Lắc).

ĐẶNG VIỄN

**Bài T4/208.** *Cho năm điểm phân biệt A, B, C, D, E và một đường thẳng d cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O là điểm sao cho $OA + OB + OC + OD + OE = 0$ (tức O là trọng tâm của hệ điểm $\{A, B, C, D, E\}$ và A', B', C', D', E', O' lần lượt là hình chiếu (vuông góc) trên d của các điểm A, B, C, D, E và O. Chứng minh rằng :*

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{EE'})$$

*Lời giải* (Dựa theo *Vương Vũ Thắng*, 10A chuyên toán ĐHTH Hà Nội và một số bạn khác).

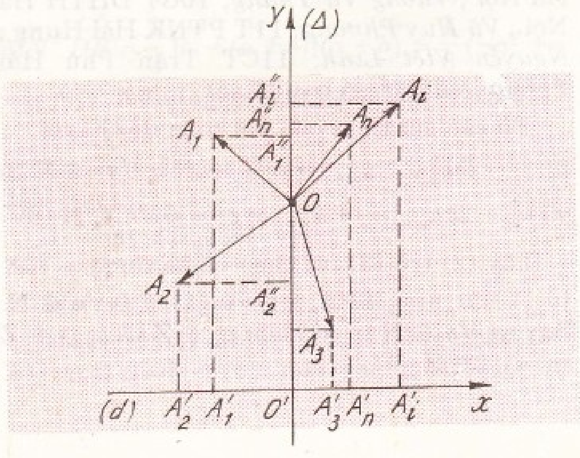
Ta giải bài toán tổng quát cho trường hợp $n$ điểm phân biệt $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ có trọng tâm là $O$, nghĩa là :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}\ ;\ (1)$$

Qua $O$ dựng đường thẳng $\Delta$ vuông góc với $d$ (ở $O'$) và gọi $A_i'$ là hình chiếu vuông góc trên $d$ của $A_i$ ($i = 1, 2, ..., n$).

$$\text{Đặt : } \begin{cases} \vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}, \\ \vec{s'} = \sum_i \overrightarrow{O'A'_i} \text{ và } \vec{s''} = \sum_i \overrightarrow{OA''_i}\ ; \end{cases}$$

Vì $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{O'A'_i} + \overrightarrow{OA''_i}$ ($i = 1, 2, ..., n$) nên : $\vec{s} = \vec{s'} + \vec{s''}$ trong đó $\vec{s'}$ có phương của $d$, còn $\vec{s''}$ có phương của $\Delta \perp d$. Do đó : $\vec{s} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{s'} = \vec{0}$ ($\Leftrightarrow \vec{s''} = \vec{0}$), nghĩa là :



$$(1)\ \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}\ ; \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O'A'_i} = \vec{0}\ ;\ (2)$$

Lại vì $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A'_i} + \overrightarrow{A'_iA_i} =$

$= \overrightarrow{O'A'_i} + \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{A_iA'_i}$, nên :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O'A'_i} + \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{A_iA'_i}) =$$

$$= n\overrightarrow{OO'} - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iA'_i}$$

Từ (1) và (2) ta được : $n\overrightarrow{OO'} - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iA'_i} = \vec{0}$, hay là :

$$\boxed{\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iA'_i}\ ;} \qquad (3)$$

Đó là đ.p.c.m.

**Nhận xét :** 1 – Có 103 bạn tham gia giải bài toán này.

2 – Bạn *Thắng* và nhiều bạn khác còn có nhận xét sau đây : Kết quả của bài toán không thay đổi khi ta thay hình chiếu vuông góc bởi hình chiếu song song hoặc thay hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ trong mặt phẳng bởi hệ điểm trong không gian, đồng thời đường thẳng $d$ thay bởi mặt phẳng $\delta$.

3 – Có một số bạn giải bài toán trên bằng phương pháp tọa độ ; tuy nhiên, thực chất cũng là phương pháp chiếu véctơ như đã nêu ở trên. Nhiều bạn sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp, nhưng trình bày không sáng sủa.

4 – Ý tưởng cơ bản trong chứng minh hệ thức (3) là thiết lập hệ thức (2). Có nhiều cách chứng minh (2). Ngoài cách nêu trên, để chứng minh (2) có một số bạn sử dụng đến tích vô hướng : chứng minh rằng $\vec{v}\,(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O'A'_i}) = 0\ (\forall \vec{v})$ từ đó suy ra $\vec{s'} = \sum_i \overrightarrow{O'A'_i} = \vec{0}$. Hai bạn *Nguyễn Ngọc Tân*, 10CT ĐHTH Hà Nội và *Lê Anh Tuấn* 10A CT ĐHSP Vinh đã sử dụng phép đối xứng qua đường thẳng $d$ để chứng minh (2) cũng khá gọn.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

**Bài T5/208.** *Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp, $m_a, m_b, m_c, m_d$ là độ dài các trọng tuyến xuất phát lần lượt từ các đỉnh A, B, C, D của một tứ diện ABCD. Chứng minh bất đẳng thức :*

$$R \geq \frac{3}{16}(m_a + m_b + m_c + m_d)$$

*khi nào thì xảy ra đẳng thức ?*

**Lời giải.** Gọi $O$, $G$ lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm tứ diện $ABCD$, ta có :

$$4R^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OD}^2 = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GD})^2 = 4OG^2 + 2\overrightarrow{OG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

$= 4OG^2 + \frac{9}{16}(m_1^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)$. Mà

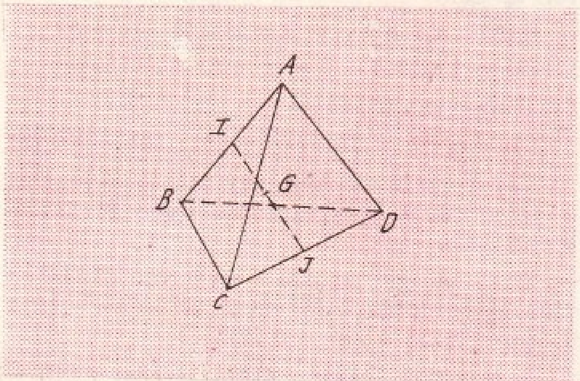
$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \geq \frac{1}{4}(m_a + m_b + m_c + m_d)^2$$

(Bu-nhia-kốp-xki) Do đó :

$$4R^2 \geq \frac{9}{64}(m_a + m_b + m_c + m_d)^2$$

hay $R \geq \frac{3}{16}(m_a + m_b + m_c + m_d)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $G \equiv 0$.




Gọi $I$, $J$ là các trung điểm tương ứng của $AB$, $CD$, ta có $G$ là trung điểm của $IJ$. Nếu $G \equiv 0$ thì từ các Δ cân $GAB$, $GCD$, ta có $GI \perp AB$ ; $GJ \perp CD$, nên các Δ vuông $GIA$, $GIB$, $GIC$, $GID$ bằng nhau, suy ra $AB = CD$. Tương tự, ta cũng có $BC = DA$ ; $CA = BD$. Vậy, tứ diện $ABCD$ gần đều. Đảo lại, nếu tứ diện $ABCD$ gần đều thì $G \equiv 0$. Và, đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi tứ diện $ABCD$ gần đều.

**Nhận xét.** Trừ một vài bạn thu hẹp phạm vi xẩy ra đẳng thức với tứ diện đều, còn thì các bạn đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Vũ Đức Sơn* (11T – Lương Văn Tụy, Ninh Bình), *Phạm Đình Trường* ($11A_0$ PTNK Trần Phú Hải Phòng), *Phan Duy Hùng* (11CT Đào Duy Từ – Đồng Hới – Quảng Bình).

ĐẶNG VIỄN

**Bài T6/208.** *Tìm số có 3 chữ số chia hết cho 9 sao cho thương số trong phép chia số ấy cho 9 bằng tổng bình phương các chữ số của số ấy.*

**Lời giải :** theo *Nguyễn Đăng Thắng*, 9NK, Thuận Thành, Hà Bắc.

Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$ $(0 < a \leq 9,\ 0 \leq b, c \leq 9)$. Theo đầu bài ta có $\overline{abc} = 9(a^2 + b^2 + c^2)$ (1) hay $9(11a + b) + (a + b + c) = 9(a^2 + b^2 + c^2)$ (2)

Vì $\overline{abc} \vdots 9$ nên suy ra $a + b + c \vdots 9$.

Vậy $a + b + c = 9, 18, 27$

1. Nếu $a + b + c = 27$ suy ra $a = b = c = 9$. Ta thấy ngay (1) không được thỏa mãn

2. Nếu $a + b + c = 18$ ta có : $c = 18 - (a + b)$

(2) $\Rightarrow 11a + b + 2 = a^2 + b^2 + c^2$ (3)

Thay $c$ vào (3) ta có

(3) $\Rightarrow a + b = 2(a^2 + b^2 + ab - 23a - 18b + 161)$ (4) Vậy $a + b$ là số chẵn từ đó suy ra $c$ cũng là số chẵn. Đặt $c = 2n$, $n \in \mathbf{N}$, thay giá trị này của $c$ và $b = 18 - (a + c)$ vào (4) ta có phương trình bậc hai đối với a

$a^2 - (23 - 2n)a + (4n^2 - 35n + 152) = 0$

suy ra $\Delta = -12(n^2 - 4n + 4) - 31 < 0$

Phương trình vô nghiệm. Nghĩa là không tồn tại $\overline{abc}$

3. Nếu $a + b + c = 9 \Rightarrow c = 9 - (a + b)$

(2) $\Rightarrow 11a + b + 1 = a^2 + b^2 + c^2$ (5)

Thay $c$ vào (5) ta có

(5) $\Rightarrow a + b = 2(a^2 + b^2 + ab - 14a - 9b)$ (6)

Vậy $a + b$ là số chẵn, suy ra $c$ là số lẻ. Đặt $c = 2m + 1$, $m \in \mathbf{N}$, suy ra $a + b = 8 - 2n \Rightarrow b = 8 - 2m - a$

Thay các giá trị của $c$ và $b$ vào (5) ta có phương trình bậc 2 đối với $a$ : $a^2 + (2m - 13)a + (4m^2 - 13m + 28) = 0$ (7)

$\Rightarrow \Delta = (2m - 13)^2 - 4(4m^2 - 13m + 28) = 57 - 12m^2$

Phương trình (7) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta > 0$

$57 - 12m^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 5 > m^2 \Rightarrow m = 0, 1, 2$

Mặt khác vì phương trình (7) đòi hỏi có nghiệm nguyên nên cần là $\Delta$ phải là số chính phương. Ta thấy chỉ có giá trị $m = 2$ mới cho ta $\Delta = 57 - 48 = 9$ là số chính phương.

Nếu $m = 2$ thì $a = \dfrac{9 \pm 3}{2} \Rightarrow a = 6$ hoặc $a = 3$

Nếu $a = 6$ thì do $c = 5 \Rightarrow b = -2$ (loại)

Nếu $a = 3$ thì do $c = 5 \Rightarrow b = 1$

Vậy trong trường hợp này số phải tìm là $\overline{abc} = 315$

Vậy số phải tìm thỏa mãn yêu cầu của đầu bài toán là 315. Thử lại ta thấy $315 = 9(3^2 + 1^2 + 5^2)$.

**Nhận xét :** Rất nhiều bạn giải được bài này. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Ngọc Đông, Nguyễn Đăng Minh*, 9NK, Thuận Thành, Hà Bắc ; *Phạm Huy Tùng*, 9A, Bế Văn Đàn, Hà Nội ; *Đoàn Minh Đức*, 8D, chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình ; *Viên Ngọc Quang, Phạm Anh Tuấn*, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Nguyễn Trung Thành*, 9T, Năng khiếu, Hà Tĩnh ; *Lê Quang Nẫm*, 9CT, Đức Phổ ; *Lương Lê Tú*, Nguyễn Hữu Hội A, *Trần Thị Ngọc Hải*, 9T, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi.

TÔ NGUYÊN

**Bài T7/208.** *Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương lẻ, tất cả đều không có ước nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{15}{8}$$

**Lời giải :** Đề ra thiếu điều kiện : "Các số $a_1, \dots, a_n$ là phân biệt". Nếu thiếu điều kiện này dễ thấy bài toán không đúng chẳng hạn lấy $a_1 = a_2 = 1$. Tuy nhiên đa số các bạn gửi lời giải đã phát hiện ra điều thiếu sót này. Rất hoan nghênh các bạn.

Sau đây là lời giải của các bạn *Trần Thị Ngọc Hải* (9T Quảng Ngãi) *Bùi Thị Phương Uyên* (9 Quảng Ngãi), *Lã Vinh Quang* (9 NK Ninh Bình), *Phan Hoàng Việt* (12A Quốc học Quy Nhơn), *Nguyễn Bích Hằng* (10 ĐHSP Hà Nội), *Ngô Ngọc Đông* (9 Thuận Thành, Hà Bắc), *Vũ Đức Sơn* (11 Lương Văn Tụy, Ninh Bình), ... Theo giả thiết với mỗi $i$ ta có

$a_i = 3^{\alpha_i} 5^{\beta_i}$

trong đó $\alpha_i \in N$, $\beta_i \in N$ và cặp $(\alpha_i, \beta_i) \neq (\alpha_j, \beta_j)$ nếu $i \neq j$

Gọi $m = \max\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{n}$ thì

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} < \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^m}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^m}\right) < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

(vì $1 + a + \dots + a^m = \dfrac{1 - a^{m+1}}{1 - a} < \dfrac{1}{1 - a}$ với $0 < a < 1$)

**Nhận xét :** Có một số bạn có lời giải sai khi cho rằng $a_i$ là những số có dạng $3^k$, $5^l$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T8/208 :** *Chứng minh rằng, nếu $r$ và $s$ là hai số thực cho trước thỏa mãn điều kiện $s^2 + r^3 > 0$ thì phương trình $x^3 + 3rx - 2s = 0$ có nghiệm số thực duy nhất là :*

$$x = \sqrt[3]{s + \sqrt{s^2 + r^3}} + \sqrt[3]{s - \sqrt{s^2 + r^3}} \quad (*)$$

*Hãy áp dụng kết quả đó để giải các phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ và $20x^3 - 15x^2 - 1 = 0$.*

*L.T.S. : Do sơ suất nên trong Đề bài đã in nhầm một dấu "+" ở (*) thành dấu "−". Hầu hết các bạn gửi lời giải tới T.S. đã chỉ ra thiếu sót nói trên và đã sửa lại cho đúng. T.S. thành thật xin lỗi và chân thành cảm ơn các bạn.*

**Lời giải** *(của nhiều bạn)* :

• Đặt $a = \sqrt[3]{s + \sqrt{s^2 + r^3}}$ và $b = \sqrt[3]{s - \sqrt{s^2 + r^3}}$, ta có $a^3 + b^3 = 2s$ và $ab = -r$.
Viết lại phương trình đã cho dưới dạng :

$x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - (a+b)^3 - 3ab[x - (a+b)] = 0$

$\Leftrightarrow [x - (a+b)][x^2 + (a+b)x + a^2 - ab + b^2] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a + b \\ x^2 + (a+b)x + a^2 - ab + b^2 = 0 \ (1) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có

$\Delta = (a+b)^2 - 4(a^2 - ab + b^2) = -3(a-b)^2 < 0$

($a \neq b$ do $s^2 + r^3 > 0$) nên nó vô nghiệm. Từ đó suy ra phương trình đã cho có duy nhất nghiệm :

$$x = a + b = \sqrt[3]{s + \sqrt{s^2 + r^3}} + \sqrt[3]{s - \sqrt{s^2 + r^3}}$$

• Có : $x^3 + x + 1 = 0$ (2) $\Leftrightarrow$

$x^3 + 3 \cdot \frac{1}{3}x - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Vì $\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{108} > 0$ nên, theo trên, phương trình (2) có duy nhất nghiệm :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}}}.$$

• Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $20x^3 - 15x^2 - 1 = 0$ (3) nên (3) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot 10 = 0$ (4) Đặt $t = \frac{1}{x}$, từ (4) có phương trình :

$t^3 + 3 \cdot 5 \cdot t - 2 \cdot 10 = 0$ (5)

Vì $10^2 + 5^3 = 225 = 15^2 > 0$ nên pt (5), theo trên, có duy nhất nghiệm :

$t = \sqrt[3]{10 + 15} + \sqrt[3]{10 - 15} = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}$.

Từ đó suy ra, pt (3) có duy nhất nghiệm :

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}} = \frac{5 + 5\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}}{20}$$

**Nhận xét :** 1. Có rất ít các bạn học sinh bậc THCS gửi lời giải cho bài toán.

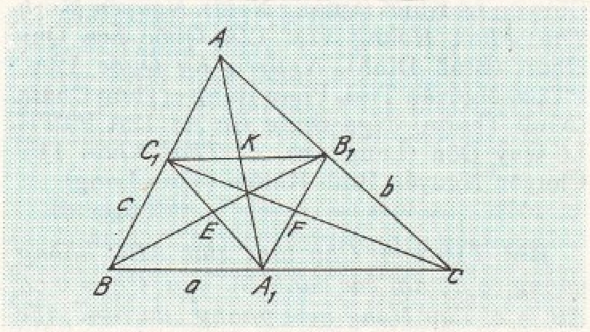
2. Phần lớn các bạn gửi lời giải đã dùng phương pháp khảo sát hàm số để chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình $x^3 + 3rx - 2s = 0$. (6)

3. Một số bạn cho lời giải không hoàn chỉnh do không chứng minh hoặc chứng minh sai tính duy nhất nghiệm của pt (6). Một số bạn khác "quên" không giải phần hai của bài toán.

4. Các bạn có lời giải tốt (chỉ tính trong số các bạn là học sinh bậc THCS) : *Nguyễn Lê Lực*, 9A1 Đầm Dơi – Minh Hải ; *Lê Quang Nẩm*, 9CT Đức Phổ – Quảng Ngãi ; *Phạm Huy Tùng*, 9A Bế Văn Đàn, Hà Nội và *Nguyễn Ngọc Đông*, 9NK Thuận Thành, Hà Bắc.

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T9/208 :** *Cho tam giác ABC, vẽ các phân giác trong $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Giả sử $AA_1$ cắt $B_1C_1$ tại K, $BB_1$ cắt $C_1A_1$ tại E, $CC_1$ cắt $A_1B_1$ tại F. Chứng minh rằng nếu AK = BE = CF thì ABC là tam giác đều.*




**Lời giải :** Theo tính chất đường phân giác ta dễ dàng có :

$BA_1 = \frac{ac}{b+c}$, $BC_1 = \frac{ac}{a+b}$ Từ công thức tính đường phân giác

$l_b = \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}$ suy ra

$$BE = \frac{2BC_1 \cdot BA_1 \cdot \cos\frac{B}{2}}{BC_1 + BA_1} = \frac{2ac}{a + 2b + c} \cdot \cos\frac{B}{2}$$

Tương tự $AK = \frac{2bc}{2a + b + c} > \cos\frac{A}{2}$

Nếu a > b thì $\frac{2ac}{a + 2b + c} > \frac{2bc}{2a + b + c}$

và $\hat{A} > \hat{B}$ tức $\cos\frac{B}{2} > \cos\frac{A}{2}$. Vậy $BE > AK$

Tương tự nếu $b > a$ thì $AK > BE$

Mà $AK = BE$ nên $b = a$.

Tương tự $EB = CF$ nên a = c.

Suy ra $\Delta ABC$ đều.

**Nhận xét :** Giải tốt bài này gồm có các bạn :

*Lê Công Sơn* 12A$_1$, PTTH Việt Đức, *Lê Tuấn Anh* 10B, ĐHTH, *Nguyễn Vũ Hưng* 11D PTTH chuyên ĐHSPNN, *Phan Linh* 9A PTCNN, *Phạm Huy Tùng*, 9A THCS Bế Văn Đàn (Hà Nội), *Phạm Quang Minh* 12T PTTH Hạ Long (Quảng Ninh), *Lê Văn Mạnh* 11CT Chuyên Hoàng Văn Thụ (Hòa Bình), *Nguyễn Chí Dũng* 8B Chuyên Việt Trì (Vĩnh Phú), *Hà Thu Thảo* 10CT PTNK (Hải Hưng), *Đạo Lý*, 12A PTTH Chuyên, *Đoàn Minh Đức* 8D Chuyên – Quỳnh Phụ (Thái Bình), *Trịnh Thế Huynh* 11A, PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định (Nam Hà), *Nguyễn Việt Kiên* 12A – PTTH Nga Sơn II, *Phạm Mạnh Quang*, 11T, *Phạm Anh Tuấn* 9T PTTH Lam Sơn (Thanh Hóa), *Phạm Hồng Linh* 10T Phan Bội Châu (Nghệ An), *Dương Thu Phương, Trần Tiên Giang, Mai Tùng Long* 9T NK (Hà Tĩnh), *Phan Duy Hùng*, 11CT Đào Duy Từ, Đồng Hới (Quảng Bình), *Nguyễn Quỳnh* 12T Chuyên (Quảng Trị), *Nguyễn Hoàng Công* 11T, *Hồ Từ Vũ* 8T Chuyên Lê Khiết (Quảng Ngãi), *Nguyễn Minh Thọ, Phan Hoàng Việt* 12A Quốc học Quy Nhơn (Bình Định), *Nguyễn Kỳ Quốc* 12A3 PTTH Nguyễn Trãi, Phan Rang – Tháp Chàm (Ninh Thuận), *Ngô Đăng Hà An* 12A PTTH Lê Quý Đôn (Long An), *Lê Thái Nhân* 11T Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm (Vĩnh Long)

VKT

**Bài T10/208.** *Cho tam giác ABC không vuông có độ dài các cạnh BC = a, CA = b và AB = c. Tìm trong mặt phẳng của tam giác một điểm M sao cho các khoảng cách x, y và z từ M lần lượt đến các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA và AB tỉ lệ với độ dài các cạnh đó : x : y : z = a : b : c.*

*Hãy chỉ rõ vị trí hình học của những điểm tìm được và tính khoảng cách từ những điểm đó đến các cạnh của tam giác đã cho.*

**Lời giải.** a) Trước hết, bằng cách sử dụng định lí Ta-lét, chúng ta dễ dàng thiết lập (chứng minh) được các mệnh đề sau đây :

(1) Quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến hai cạnh của một góc $xOy$ bằng $k$ cho trước là một tia $Oz$ nằm trong góc đó ($Oz$ sẽ là tia phân giác khi $k = 1$).

(2) Quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến hai đường thẳng cắt nhau $x'Ox$, $y'Oy$ (hoặc song song) bằng k cho trước là hai đường thẳng đi qua O (hoặc hai đường thẳng song song với hai đường thẳng song song đã cho). f) Bây giờ áp dụng mệnh đề thứ hai ở trên vào bài toán của ta, ta chứng minh được rằng *(Phân tích)* :

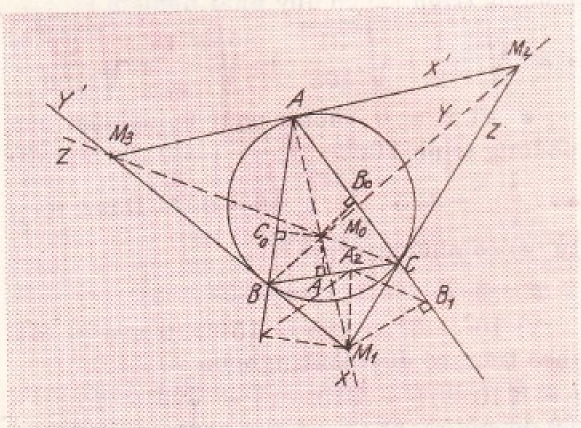
– Quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến hai đường thẳng $AB$ và $AC$ bằng $k_1 = \frac{c}{b}$ ($AB = c$, $CA = b$) là hai đường thẳng đi qua $A$ : $AX$ và $AX'$ ; trong đó $AX$ nằm trong góc $\widehat{BAC}$ và góc đối đỉnh với nó, còn $AX'$ là tiếp tuyến tại $A$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

– Cũng vậy, quĩ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến hai đường thẳng $BC$ và $BA$ bằng $k_2 = \frac{a}{c}$ là hai đường thẳng đi qua $B$ ; $BY$ và $BY'$ ; trong đó $BY$ nằm trong góc $\widehat{CBA}$ và góc đối đỉnh với nó, còn $BY'$ là tiếp tuyến tại $B$ của đường tròn $ABC$.

– Quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến hai đường thẳng $CA$ và $CB$ bằng $k_3 = \frac{b}{a}$ là hai đường thẳng đi qua $C$ : $CZ$ và $CZ'$, trong đó $CZ$ nằm trong góc $\widehat{ACB}$ và góc đối đỉnh với nó, còn $CZ'$ là tiếp tuyến tại $C$ của đường tròn $ABC$ (xem hình vẽ).

Từ đó suy ra : Điểm phải tìm là giao điểm của một trong hai đường thẳng $AX$, $AX'$ với một trong hai đường thẳng $BY$, $BY'$ (hoặc với một trong hai đường thẳng $CZ$, $CZ'$). (*Quỉ tích đường giao*)

– Để ý rằng các bộ ba đường thẳng $AX$, $BY$, $CZ$ ; $AX$, $BY'$, $CZ'$ ; $BY$, $CZ'$, $AX'$ và $CZ$, $AX'$, $BY'$ là những bộ ba đường thẳng đồng quy ; gọi tên các điểm đồng quy đó lần lượt là $M_o = (AX) \cap (BY) \in (CZ)$, $M_1 = (BY') \cap (CZ')$, $M_2 = (CZ') \cap (AX')$ và $M_3 = (AX') \cap (BY')$. Kết quả (vì tam giác $ABC$ không vuông) ta tìm được tất cả 4 điểm : $M_o$, $M_1$, $M_2$ và $M_3$ như đã chỉ ra ở trên thỏa mãn điều kiện đòi hỏi của bài toán.




Ngoài ra, ta có các nhận xét thêm sau đây :

1°) Các điểm $M_1$, $M_2$, $M_3$ là giao điểm của các tiếp tuyến tại các đỉnh $A$, $B$, $C$ với đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ và điểm $M_o$ là điểm đồng quy của ba đường đối trung của $\Delta ABC$.

2°) Gọi $A_i$, $B_i$ và $C_i$ là hình chiếu của $M_i$ trên các đường thẳng $BC$, $CA$ và $AB$ thì $M_iB_iA_iC_i$ là một hình bình hành với $i = 1, 2, 3$ còn $M_o$ là trọng tâm của tam giác $A_oB_oC_o$ ($i = 0$)

c) Cuối cùng, dễ dàng tính được các khoảng cách từ các điểm $M_o$, $M_1$, $M_2$ và $M_3$ đến các cạnh của tam giác $ABC$.

Với điểm $M_o$, ta có :

$$M_o : \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}$$

Do đó, với điểm $M_o$ : $\begin{cases} x = \dfrac{2aS}{a^2+b^2+c^2} \\ y = \dfrac{2bS}{a^2+b^2+c^2} \\ z = \dfrac{2cS}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$

(trong đó S là diện tích tam giác ABC)

Với điểm $M_1$, ta có :

$$M_1 : \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{\pm(by+cz-ax)}{\pm(b^2+c^2-a^2)} = \frac{2S}{\pm(b^2+c^2-a^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1 : \begin{cases} x = \dfrac{2aS}{\pm(b^2+c^2-a^2)} \\ y = \dfrac{2bS}{\pm(b^2+c^2-a^2)} \\ z = \dfrac{2cS}{\pm(b^2+c^2-a^2)} \end{cases}$$

Dấu + hay − tùy theo góc Â nhọ hay tù :

Tương tự, ta được các điểm M2 và M3.

$b^2+c^2+a^2 \neq 0,\ c^2+a^2-b^2 \neq 0,\ a^2+b^2-c^2 \neq 0$ vì ΔABC không vuông.

**Nhận xét :** 1. Bài toán này tuy đơn giản nhưng ít bạn có lời giải hoàn chỉnh. Không có bạn nào chỉ ra được chính xác vị trí hình học của những điểm phải tìm bằng phương pháp dựng hình học như đã chỉ ra, trừ bạn *Lê Huy Khanh*.

2. Trong việc tính các khoảng cách từ các điểm $M_i$ đến các cạnh của tam giác $ABC$ một số bạn đã tính khá gọn nhờ nhận xét :

$$s(ABC) = |\,s(M_1CA) + s(M_1AB) - s(MBC)|$$

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

**Bài L1/208.** *Một vật chuyển động chậm dần đều ; xét 3 đoạn đường liên tiếp bằng nhau trước khi dừng lại thì đoạn ở giữa nó đi trong 1s. Tìm thời gian vật đi 3 đoạn đường bằng nhau kể trên.*

**Hướng dẫn.** Áp dụng với công thức về chuyển động chậm dần đều. Gọi $v_1$, $v_2$, $v_3$ là vận tốc của vật ở đầu đoạn đường thứ nhất, đầu đoạn đường thứ hai và đầu đoạn đường thứ ba : $-v_1^2 = 6as$ ; $-v_2^2 = 4as$; $-v_3^2 = 2as$ và

$t_2 = \dfrac{v_3 - v_2}{a} = 1$. Từ đó suy ra

$t_3 = (\sqrt{2}+1)$ và $t_1 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

và $t = t_1 + t_2 + t_3 = (\sqrt{3}+\sqrt{6})$

Cũng có thể dựa vào đồ thị vận tốc − thời gian để giải.

**Nhận xét.** Các em sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Vũ Quang*, 11L, PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình ; *Nguyễn Hồng Nhân,* 10A4, PTTH Lê Quý Đôn, Quảng Nam − Đà Nẵng ; *Đoàn Định Trung,* 10L, PTTH Amsterdam − Hanoi ; *Tô Huy Cường,* 11A1, PTTH Chuyên Thái Bình ; *Nguyễn Thái,* 10T, Phan Bội Châu, Vinh (Nghệ An) ; *Nguyễn Đức Tuấn Vinh,* 10CL, PTTH Ban Mê Thuột, Đắc Lắc ; *Hà Huy Hùng* 10ACT, ĐHSP Vinh, Nghệ An ; *Nguyễn Thanh Hồng,* 11A3, PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định (Nam Hà) ; *Nguyễn Hồng Minh,* B$_o$10ACL Đại học Tổng hợp Hà Nội ; *Võ Thanh Tùng,* 10CT, PTTH Quốc Học Huế.

OK

**Bài L2/208.** *Trên vỏ của một quạt điện có các kí hiệu ∽110V.60W.50Hz. Khi nối hai đầu dây của quạt vào 2 cực của chiếc pin có suất điện động 1,5V và điện trở trong nhỏ không đáng kể thì cường độ dòng điện chạy qua ở quạt là 0,025A.*

*1. Tìm điện trở $R_o$ và hệ số công suất định mức của quạt điện.*

*2. Muốn dùng quạt điện trên ở ổ điện xoay chiều 220V − 50Hz người ta mắc nối tiếp cho nó một tụ điện. Tìm điện dung thích hợp của tụ điện.*

**Hướng dẫn giải.** 1) $R_o = \dfrac{E}{I} = 60\Omega$ ;

$$k = \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{PR_o}{U^2\cos\varphi} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{PR_o}}{U} = \frac{6}{11}$$

2) $Z = \dfrac{R_o}{\cos\varphi} = 110 \rightarrow$

$\rightarrow Z_L = \sqrt{Z^2 - R_o^2} = 10\sqrt{85}\ (\Omega)$

$I = \dfrac{P_{dm}}{U_{dm}\cos\varphi} = 1(A)$ ;

$|U_L - U_C| = \sqrt{U_o^2 - U_{R_o}^2} = 80\sqrt{7} \rightarrow$

$|Z_L - Z_C| = 80\sqrt{7}\ (\Omega)$.

Vì $Z_L = 10\sqrt{85} < 80\sqrt{7}$. $(\Omega)$

$\rightarrow Z_C - Z_L = 80\sqrt{7} \rightarrow C = \dfrac{1}{\omega Z_c} = 10{,}48\mu F$

**Nhận xét.** Các em sau đây có lời giải đúng và tốt : *Đạo Lý,* 12A, PTTH Chuyên Thái Bình ; *Phan Hoàng Việt,* 12A, Quốc học Quy Nhơn, Bình Định ; *Vũ Ngọc Thắng,* 12 Hóa, PTTH Hà Nội − Amsterdam.

OK.


# ĐỀ RA KÌ NÀY

## Các lớp THCS

**Bài T1/212 :** Tìm số $\overline{xyz}$ biết rằng $\sqrt[3]{\overline{xyz}} = (x+y+z)^{4^n}$ (với $n \in N$)

NGUYỄN ĐỨC TẤN
TP HỒ CHÍ MINH

**Bài T2/212 :** Tìm tất cả số thực $a$, $b$, $c$ để $|ax+by+cz| + |bx+cy+az| + |cx+ay+bz| = |x| + |y| + |z|$ là đẳng thức đúng $\forall\, x, y, z \in R$

ĐẶNG VĂN HẰNG, HẢI HƯNG

**Bài T3/212 :** Giải và biện luận phương trình sau theo tham số $a$ :

$$x^3 - 3x^2 + 3(a+1)x - (a+1)^2 = 0$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG, HÀ NỘI

**Bài T4/212 :** Hình vuông $ABCD$ có cạnh đơn vị. Trên cạnh $AB$ và $AD$ chọn hai điểm $M$ và $N$ sao cho chu vi tam giác $AMN$ bằng 2. Chứng minh rằng hai tia $CM$ và $CN$ chia đường chéo $BD$ thành ba đoạn thẳng mà độ dài ba đoạn này lập nên tam giác vuông có diện tích không lớn hơn $1/(2+\sqrt{2})^2$

NGUYỄN LÊ DŨNG, TP. HỒ CHÍ MINH

**Bài T5/212 :** Trong mặt phẳng cho hai hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D$ có đỉnh $D$ chung. Chứng minh rằng : Hai tam giác $AB'C'$ và $A'BC'$ có trọng tâm trùng nhau ;

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, HÀ NỘI

## Các lớp THCB

**Bài T6/212 :** Chứng minh rằng, tồn tại các số nguyên dương $x$, $y$, $z$ thỏa mãn đẳng thức $x^x + y^y = z^p$ trong đó p là một số nguyên tố lẻ

TẠ HỒNG QUẢNG, HÀ NỘI

**Bài T7/212 :** Chứng minh hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 = y^3 + y^2 + y + a \\ y^2 = z^3 + z^2 + z + a \quad (a \in R) \\ z^2 = x^3 + x^2 + x + a \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất

NGUYỄN ĐỨC HUY, LONG AN

**Bài T8/212 :** Cho dãy số $a_n$ được xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_n = 1 + n\left\{\frac{1+a_{n-1}}{n}\right\}$ với mọi $n \geqslant 2$

Chứng minh rằng :

$a_n = 1 + 2(n - 2^{[\log_2 n]})$ với mọi $n \geqslant 1$. (*) (ở đây $[a]$ là phần nguyên của $a$ và $\{a\} = a - [a]$ là phần phân của $a$.)

TRẦN VĂN VƯƠNG, HÀ NỘI

**Bài T9/212 :** Các điểm $A_o$, $B_o$, $C_o$, $D_o$ tương ứng là trọng tâm của các mặt $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ của tứ diện $ABCD$. Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ tương ứng là các điểm đối xứng của các đỉnh $A$, $B$, $C$, $D$ của tứ diện qua một điểm $O$ cho trước trong không gian. Chứng minh rằng các đường thẳng $A_oA_1$, $B_oB_1$, $C_oC_1$, $D_oD_1$ đồng quy.

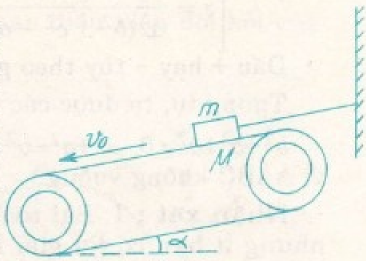
LƯU XUÂN TÌNH, THANH HÓA

**Bài T10/212 :** Cho tam giác $ABC$ cân ở $A$. Trên $AB$ lấy 1 điểm $D$ và trên $BC$ ta lấy một điểm $E$ sao cho hình chiếu của $DE$ lên $BC$ bằng $\frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng : đường vuông góc với $DE$ tại $E$ luôn đi qua một điểm cố định.

HỒ QUANG VINH, NGHỆ AN

## Các đề Vật lí

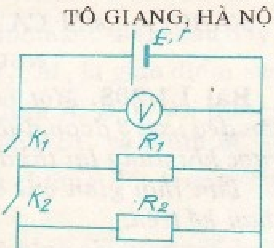
**Bài L1/212 :** Một băng chuyền nghiêng một góc so với phương ngang, đang chuyển động $v_o$ xuống dưới. Một hòn gạch nằm trên băng chuyền và được giữ yên bằng một sợi dây buộc cố định ở đầu trên. Người ta cắt đứt dây. Tính công của lực ma sát tác dụng lên hòn gạch cho đến thời điểm hòn gạch đạt được vận tốc $V_o$ của băng chuyền.




Cho hệ số ma sát giữa viên gạch và băng chuyền là $\mu$, khối lượng của viên gạch là $m$.

TÔ GIANG, HÀ NỘI

**Bài L2/212 :** Với mạch điện vẽ bên, số chỉ của Vôn kế là 30V khi ngắt $K_1$ mở, là 27V khi chỉ đóng ngắt $K_1$, là 24V khi chỉ đóng 2 ngắt $K_1K_2$, là 18V khi đóng cả $K_1K_2K_3$.




Biết khi đóng $K_1K_2K_3$, biến trở $R_3 = 4{,}8\Omega$ và nguồn điện phát công suất 270W.

1) Tính $E$, $r$ và giá trị mọi điện trở ngoài.

2) Nhích con chạy $C$ ở $R_3$ sang phải hay sang trái để công suất mạch ngoài giảm ?

TRẦN VĂN MINH, HÀ NỘI

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### For lower secondary schools

**T1/212.** Find the number $\overline{xyz}$ such that

$$\sqrt[3]{\overline{xyz}} = (x + y + z)^{4^n}$$

(n is a natural number).

**T2/212.** Find all real numbers a, b, c so that

$$|ax+by+cz| + |bx+cy+az| + |cx+ay+bz| = |x| + |y| + |z|$$

holds for every x, y, z $\in \mathbf{R}$.

**T3/212.** Solve the equation

$$x^3 - 3x^2 + 3(a+1)x - (a+1)^2 = 0,$$

where a is a parameter.

**T4/212** The square ABCD has unit sides. M and N are two points respectively on the sides AB and AD so that the perimeter of triangle AMN is equal to 2. Prove that the lengths of the three segments obtained by cutting the diagonal BD by the semi lines CM and CN are those of a right triangle with area not greater than $\dfrac{1}{(2+\sqrt{2})^2}$.

**T5/212.** In the plane let be given two parallelograms ABCD, A'B'C'D having a common vertex D. Prove that the two triangles AB'C and A'BC' have common center of gravity.

### For upper secondary schools

**T6/212.** Prove that there exist positive integers x, y, z satisfying

$$x^x + y^y = z^p$$

where p is an odd prime.

**T7/212.** Prove that the system of equations

$$x^2 = y^3 + y^2 + y + a$$
$$y^2 = z^3 + z^2 + z + a$$
$$z^2 = x^3 + x^2 + x + a$$

has unique solution.

**T8/212.** The sequence $a_n$ is defined by $a_1 = 1$

$$a_n = 1 + n\left\{\frac{1 + a_{n-1}}{n}\right\} \text{ for every } n \geq 1.$$

Prove that

$$a_n = 1 + 2(n - 2^{[\log_2 n]}) \text{ for every } n \geq 1$$

(where [a] is the integral part of a, and $\{a\} = a - [a]$).

**T9/212.** $A_o, B_o, C_o, D_o$ are respectively the centers of gravity of the sides BCD, CDA, DAB, ABC of a tetrahedron ABCD. Let $A_1, B_1, C_1, D_1$ be respectively the points symmetric of A, B, C, D through a given point O in space. Prove that the lines $A_oA_1$, $B_oB_1$, $C_oC_1$, $D_oD_1$ are concurrent.

**T10/212.** Let be given an isosceles triangle with base BC. Take a point D on AB and a point E on BC so that the projection of DE on BC is equal to $\frac{1}{2}$ BC. Prove that the line perpendicular to DE at E passes through a fixed point.

---

## ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 CỦA HẢI PHÒNG

Vòng 1 : 28/12/1993
(Thời gian làm bài : 150 phút, không kể chép đề)

**Bài 1.** Cho số $M = \overline{ab}$. Hãy tìm số n lớn nhất để có đẳng thức

$$M = (a+n)(b+n).$$

**Bài 2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} \\ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy \end{cases}$$

**Bài 3.** Cho $|x| < 1$ và $|y| < 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{1-xy}$$

**Bài 4.** Cho hình thang ABCD (BC // AD và BC < AD). Kéo dài AC (về phía C) và trên phần kéo dài đó lấy điểm P tùy ý. Gọi K và L là trung điểm của các cạnh tương ứng BC và AD. PK cắt AB tại M, còn PL cắt CD tại N. Chứng minh MN // AD.

Vòng 2 : 28/12/1993
(Thời gian làm bài : 150 phút, không kể chép đề)

**Bài 1.** Chứng minh rằng phương trình $x^3 - y^3 = 1993$ không có nghiệm số nguyên.

**Bài 2.** Giải bất phương trình

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + \frac{3}{4} > 0$$

**Bài 3.** Cho hai đường tròn ở ngoài nhau, chúng cùng tiếp xúc với hai cạnh của góc vuông có đỉnh là A. Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn cắt hai cạnh của góc vuông A tại B và C. Tính diện tích tam giác ABC, biết rằng hai đường tròn trên có bán kính $R_1$ và $R_2$.

**Bài 4.** Cho $x > 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2$$

NGUYỄN ĐỄ

# PHƯƠNG PHÁP VÉC TƠ

PHẠM BẢO
*Hà Nội*

Trong toán học khi mở rộng một khái niệm nào đó thì đồng thời với sự mở rộng đó ta có một phương pháp mới, một công cụ mới để giải các bài toán.

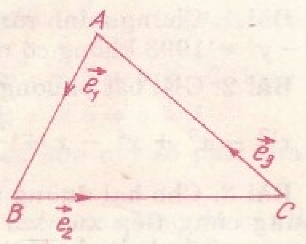
Trong hình học thì *vectơ* là một ví dụ. Khi mở rộng khái niệm "đoạn thẳng" (vô hướng) sang vectơ – đoạn thẳng có hướng – ta có một phương pháp mới : *Phương pháp vectơ.* Nhờ có phương pháp này các bài toán như song song, vuông góc, thẳng hàng, đồng quy v.v... nói chung được giải một cách dễ dàng hơn.

Tư tưởng chủ đạo của phương pháp vectơ là : Hãy xem xét các đoạn thẳng không chỉ với sự khác nhau về độ dài (mô đun) mà cả về sự khác nhau giữa phương (hoặc hướng) của chúng tức là góc làm thành bởi các đoạn thẳng đó. Một hình nào đó trong không gian hai chiều sẽ được xác định bởi một hệ gồm hai vectơ $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ không cùng phương, cùng phát xuất từ một điểm $O$ nào đó gọi là gốc. Ta gọi hệ này là hệ cơ sở và kí hiệu là $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Trong không gian ba chiều thì hệ cơ sở gồm ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \neq 0$ không đồng phẳng cùng phát xuất từ gốc $O$ và kí hiệu là $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Trường hợp đặc biệt của các hệ trên chính là các hệ trực chuẩn thông thường. Để làm rõ các ý tưởng này ta hãy xét các ví dụ.

**Ví dụ 1 :** Chứng minh rằng trong mọi tam giác $ABC$ ta có :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2} \quad (1)$$

Giải : Quan sát bất đẳng thức (1) ta thấy nó không phụ thuộc độ dài mà chỉ phụ thuộc góc tức phương của các cạnh. Do đó trên $AB$, $BC$, $CA$ lần lượt lấy các vectơ đơn vị $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ (xem hình 1). Góc làm thành bởi $(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \pi - B$ $(\vec{e_2}, \vec{e_3}) = \pi - C$ $(\vec{e_3}, \vec{e_1}) = \pi - A$ và $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = |\vec{e_3}| = 1$




Từ bất đẳng thức $(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3})^2 \geqslant 0$ khai triển ra ta có :

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 2(\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + \vec{e_2} \cdot \vec{e_3} + \vec{e_3}\vec{e_1}) \geqslant 0$$

thay $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = \cos(\pi - B) = -\cos B$ ;
$(\vec{e_2} \cdot \vec{e_3}) = -\cos C$ ; $(\vec{e_3} \cdot \vec{e_1}) = -\cos A$

Ta có $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}) = \vec{0}$ khi đó tam giác $ABC$ đồng dạng với tam giác có các cạnh là các vectơ đơn vị nên nó là tam giác đều.

**Ví dụ 2 :** Cho tam giác $ABC$ từ một điểm $P$ trên cạnh $BC$ kẻ $PN \,//\, AB$ cắt $AC$ tại $N$ ; $PM \,//\, AC$ cắt $AB$ tại $M$. Xác định vị trí của $P$ sao cho $MN$ có độ dài ngắn nhất.

Giải : Lấy $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ làm hệ vectơ cơ sở.

Đặt $\frac{|BP|}{|BC|} = x$

$\frac{|PC|}{|BC|} = 1 - x$ với $0 < x < 1$

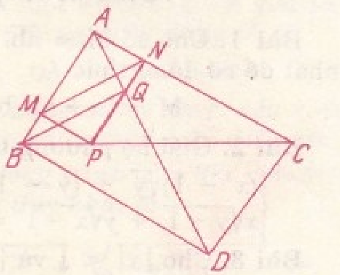
từ $\frac{|BP|}{|BC|} = \frac{|AN|}{|AC|} = x$ $\frac{|PC|}{|BC|} = \frac{|MA|}{|BA|} = 1 - x$

ta có $\vec{AN} = x\vec{AC}$ $\vec{AM} = (1 - x)\vec{AB}$

$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = x\vec{AC} - (1 - x)\vec{AB}$

$= x(\vec{AC} + \vec{AB}) + \vec{BA}$

thay $\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{AD}$ (đường chéo của hình bình hành $ACDB$) và $x\vec{AD} = \vec{AQ}$ thì $\vec{MN} = \vec{BA} + \vec{AQ} = \vec{AQ}$ tứ giác $MBQN$ lại là hình bình hành (xem hình 2). Để $MN$ ngắn nhất thì $BQ$ phải ngắn nhất tức $BQ \perp AD$. Từ đó suy ra cách dựng điểm $P$. Dễ thấy được nếu tam giác $ABC$ vuông tại $A$ thì $AP \perp BC$.



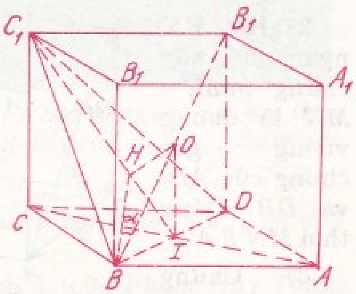

**Ví dụ 3 :**
Đáy của hình hộp đứng $ABCDA_1B_1C_1D_1$ là hình vuông $ABCD$. Xác định góc lớn nhất làm bởi đường thẳng $BD_1$ và mặt phẳng $BDC_1$.

**Giải :** Hệ cơ sở $(C, \vec{CB}, \vec{CD}, \vec{CC_1})$ là hệ trực chuẩn.

Đặt $|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CD}| = a$ $|\overrightarrow{CC_1}| = b$

Dễ thấy $\overrightarrow{BD_1} = (-a, a, b)$

Mặt phẳng $BC_1D$ là mặt phẳng chắn trên ba trục tọa độ nên có phương trình là




$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1$$

vectơ pháp của mặt phẳng là $\vec{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$. Gọi $\alpha$ là góc làm bởi $BD_1$ và mặt phẳng $BC_1D$ thì

$$\sin\alpha = \cos(\overrightarrow{BD_1}, \vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2}\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+5}}$$

mà $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2$ nên $\sin\alpha$ lớn nhất khi $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 2$ tức $a = b$ và $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ khi đó hình hộp là hình lập phương và góc $\alpha$ xác định như ở hình 3.

Qua các ví dụ trên ta đã thấy cách vận dụng "phương và độ dài" trong phương pháp vectơ. Tuy nhiên để thấy được phương hướng vận dụng và lời giải được ngắn gọn cần chú ý đến những bài toán cơ bản sau đây (vì khuôn khổ bài báo có hạn kì này chỉ xin nêu bài toán thứ nhất).

**Bài toán I** : "Phân tích một vectơ theo các vectơ cơ sở".

1. Trong không gian hai chiều cho hệ cơ sở $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ Chứng minh rằng với mọi điểm $C$ thuộc đường thẳng $AB$ ta có

$$\overrightarrow{OC} = \alpha . \overrightarrow{OA} + \beta . \overrightarrow{OB}$$

với $\alpha + \beta = 1$ và $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ (I)

2. Trong không gian ba chiều cho hệ $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ Chứng minh rằng với mọi điểm $D$ thuộc mặt phẳng $ABC$ ta có :

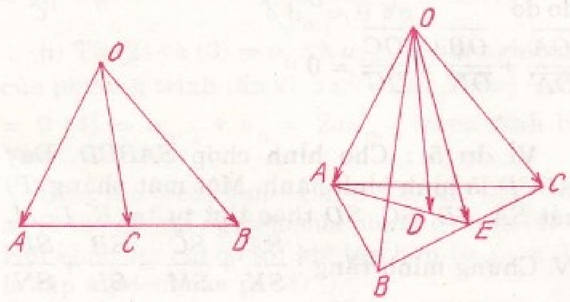
$$\overrightarrow{OD} = \alpha . \overrightarrow{OA} + \beta . \overrightarrow{OB} + \gamma . \overrightarrow{OC}$$

với $\alpha + \beta + \gamma = 1$ và $\alpha, \beta, \gamma \in R$. (II)

Chứng minh : 1. Đặt $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = x$ $(x \in R)$ ta có $\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + x\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + x(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OC} = (1-x)\,\overrightarrow{OA} + x\,.\,\overrightarrow{OB}$.

Cho $x = \alpha$ $1 - x = \beta$ ta có điều cần chứng minh xem hình




Cần chú ý rằng với mỗi điểm $C$ nhất định trên $AB$ thì có một số $x$ duy nhất do đó cặp $(\alpha, \beta)$ là duy nhất.

2. Tương tự như trường hợp 1 : biểu diễn $\overrightarrow{OE}$ theo $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OD}$ theo $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}$ (xem hình 4b) ta có điều cần chứng minh

**Chú ý** : Một hệ quả rất thường gặp của (I) là : Trong không gian cho 2 đoạn thẳng $AB$ và $CD$ nếu 2 điểm : $M$ trên $AB$, $N$ trên $CD$ cùng chia $AB$ và $CD$ theo tỉ số $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = x$ thì

$$\overrightarrow{MN} = (1-x)\,\overrightarrow{AC} + x\,\overrightarrow{BD} \qquad \text{(I')}$$

Để chứng minh (I') chỉ cần lấy một điểm O tùy ý làm gốc ; phân tích $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ rồi vận dụng như trường hợp 1.

Sau đây là một số ví dụ áp dụng.

**Ví dụ 4** : Trong mặt phẳng cho 3 vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$. Một đường thẳng $d$ cắt $OA$, $OB$ và $OC$ kéo dài tại $A'$, $B'$, $C'$. Chứng minh hệ thức :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} + \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = 0$$

Giải : Đặt $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = m$ $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = n$

$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = p$ $(m, n, p \in R)$. Ta có

$\overrightarrow{OA'} = m\,\overrightarrow{OA}$ ; $\overrightarrow{OB'} = n\,\overrightarrow{OB}$ ; $\overrightarrow{OC'} = p\,\overrightarrow{OC}$

theo (I) ta có $\overrightarrow{OC'} = \alpha\,\overrightarrow{OA'} + \beta\,\overrightarrow{OB'}$ với $\alpha + \beta = 1$

hay $p\,\overrightarrow{OC} = \alpha m\,\overrightarrow{OA} + \beta n\,\overrightarrow{OB}$ thay $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

$p\,(-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \alpha m\,\overrightarrow{OA} + \beta n\,\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow p = -\alpha m = -\beta n$

$\alpha = -\frac{p}{m}$ ; $\beta = -\frac{p}{n}$

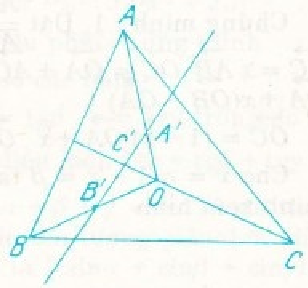
và

$-\frac{p}{m} - \frac{p}{n} = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 0$

do đó

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} + \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} + \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = 0$$




**Ví dụ 5 :** Cho hình chóp $SABCD$. Đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng $(P)$ cắt $SA$, $SB$, $SC$, $SD$ theo thứ tự tại $K$, $L$, $M$, $N$. Chứng minh rằng : $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$

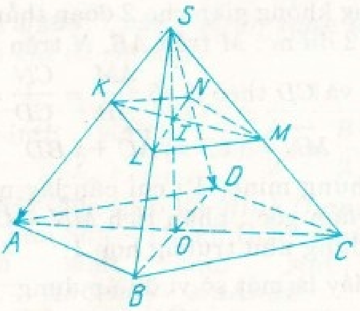
(Đề tuyển sinh vào đại học số 57 câu Vb).

**Giải :** Lấy hệ cơ sở là $(S, \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD})$

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ $\overrightarrow{SD} = \vec{c}$

$\frac{SK}{SA} = x$, $\frac{SL}{SB} = y$, $\frac{SM}{SC} = z$, $\frac{SN}{SD} = t$ từ đó $\overrightarrow{SK} = x\,\vec{a}$ $\overrightarrow{SL} = y\,\vec{b}$

$\overrightarrow{SM} = z\,\overrightarrow{SC}$ $\overrightarrow{SN} = t\,.\,\vec{c}$




Theo (II) ta có :

$\overrightarrow{SM} = \alpha\,\overrightarrow{SK} + \beta\,\overrightarrow{SL} + \gamma\,\overrightarrow{SN}$ với $\alpha + \beta + \gamma = 1$

hay $z\,\overrightarrow{SC} = \alpha x\,\vec{a} + \beta y\,\vec{b} + \gamma t\,\vec{c}$

nhưng $\overrightarrow{SC} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$ nên

$z(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) = \alpha x\,\vec{a} + \beta y\,\vec{b} + \gamma t\,\vec{c} \Leftrightarrow$

$\alpha x = -z; \beta y = z; \gamma t = z \Leftrightarrow \alpha = -\frac{z}{x}; \beta = \frac{z}{y}; \gamma = \frac{z}{t}$

mà $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{t} = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$

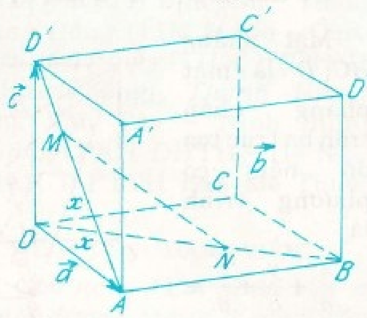
vậy $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$.

**Ví dụ 6 :** Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ cạnh $a$. $M$ thuộc đoạn $AD'$ ; $N$ thuộc đoạn $BD$ với $AM = DN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$ :

1) Chứng minh rằng với $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì đoạn $MN$ ngắn nhất

2) Khi $MN$ ngắn nhất hãy chứng minh : $MN$ là đường vuông góc chung của $AD'$ và $DB$. Đồng thời $MN$ // $A'C$.

3) Chứng minh rằng khi $x$ thay đổi thì $MN$ // mặt phẳng $(A'BCD')$




(Đề thi tuyển sinh vào đại học số 42 câu IVb).

**Giải :** Hệ cơ sở $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD'})$. Hệ là trực chuẩn.

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ; $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ ; $\overrightarrow{DD'} = \vec{c}$

$|\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DD'}| = a$.

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{c} = \vec{c}\,.\,\vec{a} = 0$

$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = a^2$.

$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN}{DB} = \frac{x}{a\sqrt{2}} = k$, $0 < k < 1$

1) Ta có $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{DA} = \vec{c} - \vec{a}$.

$\overrightarrow{DB} = \vec{a} + \vec{c}$. $\overrightarrow{AD} = -\vec{a}$

$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{DB} = \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b})$

Theo (I') ta có $\overrightarrow{MN} = (1 - k)\,\overrightarrow{AD} + k\,\overrightarrow{D'B}$ (xem hình 7) hay

$\overrightarrow{MN} = (1 - k)(-\vec{a}) + k(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

$\overrightarrow{MN} = (2k - 1)\,\vec{a} + k\,\vec{b} - k\,\vec{c}$.

$\overrightarrow{MN}^2 = [(2k - 1)^2 + k^2 + k^2]a^2 = (6k^2 - 4k + 1)a^2$

$MN$ ngắn nhất khi $6k^2 - 4k + 1$ nhỏ nhất, từ đó $k = \frac{1}{3}$ và $\frac{x}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

2) Khi $k = \frac{1}{3}$, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}[\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})]$

$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{AD'} = \frac{1}{3}[\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})](\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{3}(a^2 - a^2) = 0$

$\overrightarrow{MN}\,.\,\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}[\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})](\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(-a^2 + a^2) = 0$

vậy $MN$ là đường $\perp$ chung của $AD'$ và $BD$.

Mặt khác

$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA'} = \vec{b} - (\vec{a} + \vec{c}) = 3\,\overrightarrow{MN}$, do đó $MN$ // $A'C$.

3) Thay $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ vào

$\overrightarrow{MN} = (1 - k)\,\overrightarrow{AD} + k\,\overrightarrow{D'B} =$

$\overrightarrow{MN} = (1 - k)\,\overrightarrow{BC} + k\,.\,\overrightarrow{D'B}$.

Hệ thức này chứng tỏ $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng với $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{D'B}$ tức $MN$ // mặt phẳng $(A'BCD')$

# TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN...

NGÔ THÀNH LONG
*Hà Nội*

Tích phân và nguyên hàm là một phần mới của chương trình CCGD. Vì thế để giúp thêm các bạn phần nào khi học vấn đề này, tôi xin trình bày những tìm tòi của tôi khi còn học phổ thông từ một bài toán tuyển sinh.

Trước hết tôi nêu lại một số kiến thức cần sử dụng.

1. Định nghĩa tích phân (sách giải tích 12)

2. Nếu $f$ và $\varphi$ là 2 hàm liên tục, xác định trên $[a, b]$ và $f(x) \leq \varphi(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx \quad (1)$$

3. Nếu $f$ là hàm liên tục, xác định trên $[a, b]$ và $m \leq f(x) \leq M$ thì :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad (2)$$

(Bạn đọc tự chứng minh 2 tính chất này).

Ta xét bài toán sau :

**Bài toán :** Chứng minh rằng nếu $f$ và $\varphi$ là 2 hàm liên tục, xác định trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \geq \left(\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right)^2 \quad (3)$$

(Câu IVa – Đề 106 – Đề thi tuyển sinh)

Việc chứng minh bất đẳng thức này không khó, cái xuất phát của bất đẳng thức này là một bất đẳng thức đại số : Bunhiacôpxki.

Cho $2n$ số $a_i, b_i$ $(i = \overline{1, n})$, ta có :

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \quad (4)$$

Dấu bằng xảy ra khi :

$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$

Trong đoạn $[a, b]$ chia làm $n$ đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia $a = x_o < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ và chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$, ta có :

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ (với $i = \overline{1, n}$). Khi đó :

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n},$$

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \varphi^2(\xi_i) \frac{b-a}{n}$$

và $\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\frac{b-a}{n}$

Vì thế (3) trở thành

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)\frac{b-a}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \varphi^2(\xi_i)\frac{b-a}{n} \geq \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\varphi(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right)^2 \quad (5)$$

Từ (4) nếu thay $a_i = f(\xi_i)$, $b_i = \varphi(\xi_i)$ ta có :

$$\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \cdot \sum_{i=1}^n \varphi^2(\xi_i) \geq \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\right)^2 \quad (6)$$

Từ (6) ta dễ dàng có ngay (5). Dấu bằng xảy ra khi :

$f(\xi_i) : \varphi(\xi_1) = f(\xi_2) : \varphi(\xi_2) = \ldots = f(\xi_n) : \varphi(\xi_n)$

hay $f(x) = c\varphi(x)$ (c = hằng số).

Vậy bài toán được chứng minh.

Bây giờ từ bài toán ban đầu, nếu thêm giả thiết : $f, \varphi : [a, b] \to [0, 1]$ thì $f^2(x) \leq f(x)$ và $\varphi^2(x) \leq \varphi(x)$, nên ta có : $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$ và $\displaystyle\int_a^b \varphi^2(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx$. Vì thế ta có ngay :

**Bài toán 1 :** Chứng minh rằng nếu $f$ và $\varphi$ là 2 hàm liên tục trên $[a, b]$ và $f : [a, b] \to [0, 1]$ và $\varphi : [a, b] \to [0, 1]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx \geq \left(\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right)^2 \quad (7)$$

Và :

**Bài toán 2 :** Cho $f$ và $\varphi$ là 2 hàm liên tục trên $[0, 1]$ và : $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$. Chứng minh rằng :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 \varphi(x)\,dx \geq \left(\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx\right)^2 \quad (8)$$

(Câu Va. Đề 102 – Đề thi tuyển sinh)

Từ bất đẳng thức Bunhiacôpxki mở rộng :

Cho $m$ dãy số : $a_i, b_i, f_i$ $(i=\overline{1,n})$ không âm, ta có :

$$(a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m)(b_1^m + b_2^m + ... + b_n^m)...(f_1^m + f_2^m + ... + f_n^m) \geq (a_1 b_1 ... f_1 + a_2 b_2 ... f_2 + ... + a_n b_n ... f_n)^m \quad (9)$$

ta cũng có bất đẳng thức tích phân tương ứng mở rộng :

**Bài toán 3 :** Cho $f, \varphi, ..., h$ là $m$ hàm số liên tục trên $[a, b]$ và : $f : [a, b] \to R^+, \varphi : [a, b] \to R^+, , h : [a, b] \to R^+$. Chứng minh rằng :

$$\int_a^b f^m(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi^m(x)\,dx ... \int_a^b h^m(x)\,dx \geq \left(\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\ \ h(x)\,dx\right)^m \quad (10)$$

**Bài toán 4 :** Cho $f, \varphi, ..., h$ là $m$ hàm số liên tục trên $[0, 1]$ và : $\{f : [0,1] \to [0,1], \varphi : [0,1] \to [0,1], ..., h : [0,1] \to [0,1]$. Chứng minh rằng :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 \varphi(x)\,dx ... \int_0^1 h(x)\,dx \geq \left(\int_0^1 f(x)\varphi(x) ... h(x)\,dx\right)^m \quad (11)$$

Những bài toán trên đều có nguồn gốc từ bất đẳng thức Bunhiacôpxki, bây giờ từ một đẳng thức khác như Chêbưsep ta sẽ tìm các bài toán tương tự. Bất đẳng thức Chêbưsep phát biểu :

Cho $2n$ dãy số : $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \end{cases}$ (đơn điệu cùng chiều)

thì : $$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{n} \quad (12)$$

Nếu ta thay : $a_i = f(\xi_i)$ và $b_i = \varphi(\xi_i)$ (với $i = \overline{1, n}$) ta có

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \varphi(\xi_i) \quad (13)$$

hay $$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \leq (b-a)\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \varphi(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

Lấy giới hạn khi $n \to \infty$ ta có :

$$\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq (b-a)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad (13)$$

Vậy ta có :

**Bài toán 5 :** Cho $f$ và $\varphi$ là 2 hàm liên tục, xác định, cùng tính đơn điệu trên $[a, b]$. Chứng minh rằng :

$$\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq (b-a)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Từ bài toán 5 và (2) ta có : nếu $m_1 \leq f(x) \Rightarrow m_1(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$.

Nên ta có :

**Bài toán 6 :** Cho $f$ và $\varphi$ là 2 hàm liên tục, xác định và cùng tính đơn điệu trên $[a, b]$, thỏa mãn : $m_1 \leq f(x)$ và $m_2 \leq \varphi(x)$

Chứng minh rằng :

a) $$m_1 \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad (14)$$

b) $$m_2 \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad (15)$$

Tương tự từ bài toán 5 ta có bài toán như sau :

**Bài toán 7 :** Cho $f$ và $\varphi$ là 2 hàm số liên tục, xác định, cùng tính đơn điệu trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 \varphi(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx \quad (16)$$

Nếu $f, \varphi : [0, 1] \to [0,1]$ thì

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 f^2(x)\,dx \text{ và } \int_0^1 \varphi(x)\,dx \geq \int_0^1 \varphi^2(x)$$

nên ta có :

**Bài toán 8 :** Cho $f$ và $\varphi$ là 2 hàm số liên tục, cùng tính đơn điệu trên $[0, 1]$ và $f : [0, 1] \to [0, 1], \varphi : [0, 1] \to [0, 1]$. Chứng minh rằng :

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \cdot \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad (17)$$

Ở bài toán 5 và 8 nếu $f$ và $\varphi$ là 2 hàm trái tính đơn điệu thì dấu bất đẳng thức đổi chiều.

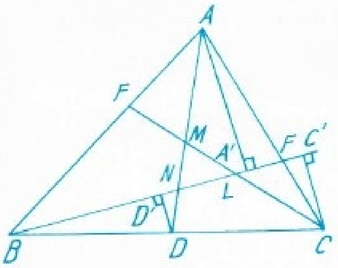
Bằng phương pháp đó ta có thể tìm được nhiều bất đẳng thức tích phân khác từ bất đẳng thức đại số. Rất mong các bạn tiếp tục tìm kiếm. Chúc các bạn thành công !

# Đồng quy và không đồng quy

NGUYỄN CẢNH TOÀN
*Hà Nội*

Bạn có nhận thấy rằng toán học tiến lên theo con đường mở rộng từ những trường hợp đặc biệt ra thành những trường hợp tổng quát : từ công thức lượng giác trong tam giác vuông đến các công thức lượng giác trong tam giác thường, từ số hữu tỉ đến số thực, từ hình học Ơclit đến hình học phi Ơclit (mà hình học Ơclit chỉ là một trường hợp đặc biệt). Và bạn có chú ý rằng giữa cái "chung" và cái "riêng" vừa có mặt trái ngược nhau (tam giác vuông khác tam giác thường) vừa có mặt thống nhất với nhau (tam giác vuông cũng là một tam giác, chỉ đặc biệt ở chỗ có một góc bằng $90^o$). Những sự chú ý như vậy có thể dẫn bạn đến phát minh ra cái "mới" đấy. Trong bài này, ta hãy thử mở rộng tính chất "đồng quy" của ba đường thẳng nào đó xuất phát từ ba đỉnh của một tam giác. Mở rộng như thế nào nhỉ ? Có lẽ các bạn đã quá quen với cách nghĩ rằng "đồng quy" và "không đồng quy" là trái ngược nhau, nên cảm thấy khó khăn chăng ? Nào, bây giờ bạn hãy thử nghĩ về phía "thống nhất" xem sao. Cũng không khó gì lắm mà không thấy rằng ba đường đồng quy tạo nên một tam giác có một diện tích S. Thế thì thấy ngay rằng "đồng quy" là trường hợp đặc biệt của "không đồng quy" khi $S = 0$ ($S = \infty$ khi hai trong ba đường song song với nhau và đường thứ ba cắt chúng). Nhưng cách xem xét trên đây không phải là cách duy nhất. Chẳng hạn, trên hình 1, ta hãy xét ba đường $AD$, $BE$, $CF$ không cắt nhau và tạo nên tam giác $LMN$. Trường hợp "đồng quy" sẽ là trường hợp đặc biệt của trường hợp trên khi $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$ (1), tức là $M$ trùng với $N$. Để đặc trưng trường hợp "đồng quy" bằng một số, ta có thể viết $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = 1$ (2)

Như vậy, số $k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$ chỉ cho ta biết ba đường $AD$, $BE$, $CF$ có đồng quy ($k = 1$) hay không ($k \neq 1$). Đến đây, yêu cầu chặt chẽ về mặt toán học buộc ta phải đặt câu hỏi : "Nếu ta xét những tỉ số kép




(gọi là kép vì đó là tỉ số của hai tỉ số) tương tự trên $BE$, $CF$ thì ta có còn được cùng một số $k$ đó hay lại là những số $l$, $m$ khác $k$ nhưng khi $k = 1$ thì cũng có $l = m = 1$. Vậy ta phải tính $k$ theo các tỉ số xác định các điểm $D$, $E$, $F$ : $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = p$, $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = q$, $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = r$, rồi hoán vị vòng quanh các cụm chữ $ABC$, $DEF$, $LMN$, $pqr$ để có các tỉ số kép $l = \frac{\overline{NB}}{\overline{NE}} : \frac{\overline{LB}}{\overline{LE}}$ và $m = \frac{\overline{LC}}{\overline{LF}} : \frac{\overline{MC}}{\overline{MF}}$. Từ $A$, $C$, và $D$, ta hạ các đường vuông góc $AA'$, $CC'$ và $DD'$ xuống đường thẳng $BE$. Ta có :

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{CC'}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}$$

$$= \frac{1}{q} \frac{\overline{CD} + \overline{DB}}{\overline{DB}} = \frac{1}{q}\left(-\frac{1}{p} + 1\right) = \frac{p-1}{pq}$$

Bằng cách tính tương tự, ta có

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = (1-p)r$$

Vậy $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} : \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}} = -pqr$. Vế sau không thay đổi. Khi thực hiện hoán vị vòng quanh $p$, $q$, $r$. Vậy quả là $k = l = m = -pqr$.

Ta sẽ gọi số này là $k$ và có thể phát biểu :

***Định nghĩa.*** *Ba đường thẳng $AD$, $BE$, $CF$ xuất phát từ ba đỉnh $A$, $B$, $C$ của một tam giác sẽ gọi là $k$ – cắt nhau khi chúng cắt các cạnh đối diện ở các điểm $D$, $E$, $F$ sao cho* $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -k$.

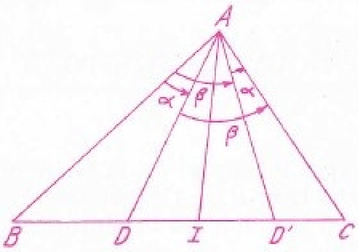
Như vậy "đồng quy" chỉ là trường hợp đặc biệt của $K$ – cắt nhau khi $k = 1$. Khi này, theo định nghĩa trên, ta có ngay định lí Xêva (Céva). Nếu áp dụng định lí Mêlênauyt (Ménélaüs) thì ta lại gói luôn được cả vào trong khái niệm "$K$ – cắt nhau" trường hợp $D$, $E$, $F$ thẳng hàng (lúc đó $k = -1$).

Có khái niệm "$k$ – cắt nhau" mở rộng khái niệm "đồng quy", ta hãy mở rộng định lí quen biết sau đây :

***Định lí 1.*** *Trong một tam giác, nếu ba đường thẳng lần lượt xuất phát từ ba đỉnh mà đồng quy thì ba đường đối phân của chúng (hai đường đối phân là hai đường đối xứng với nhau qua phân giác của góc tạo bởi hai cạnh đồng quy với chúng tại cùng một đỉnh) cũng đồng quy.*

(Bạn nào chưa biết định lí 1 thì cứ chấp nhận và tốt hơn nữa, tự chứng minh lấy).

Để mở rộng định lí này, ta hãy xét đường đối phân $AD'$ của $AD$ (h. 2). Gọi $I$ là chân đường phân giác, ta có các góc (định hướng) $\alpha, \beta$ như ở h.2 vì $AI$ là phân giác chung của các góc $BAC$ và $DAD'$. Ta có :




$$p = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\frac{1}{2}AB\,.\,AD\sin(-\alpha)}{\frac{1}{2}AC\,.\,AD\sin\beta} = -\frac{AB}{AC}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$p' = \frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} = \frac{\frac{1}{2}AB\,.\,AD'\sin(-\beta)}{\frac{1}{2}AD'AC\sin\alpha} = -\frac{AB}{AC}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Vậy : $pp' = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Hoán vị vòng quanh, ta có :

$$qq' = \left(\frac{BC}{BA}\right)^2$$

$$rr' = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2, \text{ do đó : } (pqr)(p'q'r') = \left(\frac{AB\,.\,BC\,.\,CA}{AC\,.\,BA\,.\,CB}\right)^2 = 1,$$

hay $kk' = 1$ nếu đặt $k' = -p'q'r'$.

Ta có định lí :

***Định lí 2.*** *Trong một tam giác, nếu ba đường thẳng lần lượt xuất phát từ ba đỉnh mà $k$ – cắt nhau thì các đối phân của chúng sẽ $k'$ – cắt nhau với $k' = \frac{1}{k}$.*

Định lí 1 là trường hợp đặc biệt của định lí 2 khi $k = 1$. *Nếu $k = -1$ thì $k' = -1$, nên ta có thêm định lí.*

***Định lí 3.*** *Trong một tam giác, nếu ba đường thẳng lần lượt xuất phát từ ba đỉnh, mà có các chân (tức là giao điểm với đường thẳng chứa cạnh đối diện) thẳng hàng thì các đối phân của chúng cũng có các chân thẳng hàng.*

Rõ ràng là ta đã có những phát minh nhỏ với vốn kiến thức phổ thông. Có được phát minh này là nhờ ta đã biết nhìn hai khái niệm "đồng quy" và "không đồng quy" vốn được coi như mâu thuẫn (trái ngược) với nhau theo một cách mới giúp thống nhất chúng lại với nhau (cả hai đều trở thành "k – cắt nhau"). Cách suy nghĩ kiểu như vậy nằm trong cái mà người ta gọi là "tư duy biện chứng". Như vậy, công đầu ở đây thuộc về "tư duy biện chứng". Nó giúp chúng ta nghi vấn rằng có một định lí mở rộng định lí 1, mở đường cho chúng ta tìm tòi. Để tìm tòi, chúng ta đã dùng suy diễn lôgic và cuối cùng tìm được định lí 2. Vậy, ở đây, tư duy lôgic đóng vai trò "thừa hành" để giải quyết nghi vấn khoa học nói trên. Trong khi giải quyết, ta đã dùng một thủ thuật là thay thế việc so sánh hai tỉ số $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}$ và $\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$ xem chúng có bằng nhau hay không bằng việc nghiên cứu tỉ số $K$ của chúng. Kiểu tư duy dùng thủ thuật này có thể gọi là "tư duy kĩ thuật" vì nó giống với tư duy của người chế tạo ra công tơ để chỉ việc nhìn vào số ghi trên công tơ là biết lượng điện tiêu thụ. Như vậy, trong bài báo này, tư duy sáng tạo toán học là một sự tổng hợp hài hòa của ba loại tư duy : biện chứng (giúp phát hiện vấn đề), lôgic (giúp giải quyết vấn đề), kĩ thuật (làm dễ dàng việc giải quyết vấn đề). Một dịp khác, ta sẽ thấy thêm vai trò của các tư duy thuật toán, tư duy quản lí, tư duy kinh tế trong sáng tạo toán học. Và cả tư duy hình tượng cũng rất cần. Nếu chỉ vùi đầu làm những bài toán khó thì chưa đủ để rèn luyện tư duy sáng tạo toán học vì làm xong một bài toán khó rồi, nếu không có ai (thầy hay sách) ra thêm cho chúng ta những bài toán khác thì ta "thất nghiệp". Trong bài này, ta tự ra lấy bài toán xét mối quan hệ giữa $k$ và $k'$ và sau khi làm xong bài toán đó, ta phát minh ra định lí 3. Nói "phát minh" cũng không có gì quá đáng vì bạn cũng khó tìm ở đâu ra định lí đó.

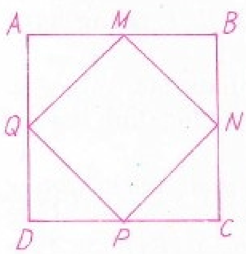
---

## *Giải đáp bài* LÀM THẾ NÀO

Giả sử cửa sổ hình vuông trên tường là ABCD.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là các trung điểm của AB, BC, CD, DA. Ta thấy cửa sổ hình vuông thu hẹp MNPQ thỏa mãn yêu cầu của đề ra (xem hình vẽ)

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ ; cao MP = 1m, ngang NQ = 1m.




BÌNH PHƯƠNG


## Thay chữ bằng số

Hãy thay các chữ khác nhau bằng các chữ số khác nhau thích hợp để con tính chia sau đây là đúng :

TUẤT : HỢI = TÍ

TRẦN VIỆT HÙNG, SÓC TRĂNG

ISSN : 0866 – 8035.
Chỉ số 12884
Mã số : 8BT14M5

Sắp chữ tại Trung tâm Vi tính và
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 2/1995

Giá : 1500đ
Một nghìn
năm trăm đồng