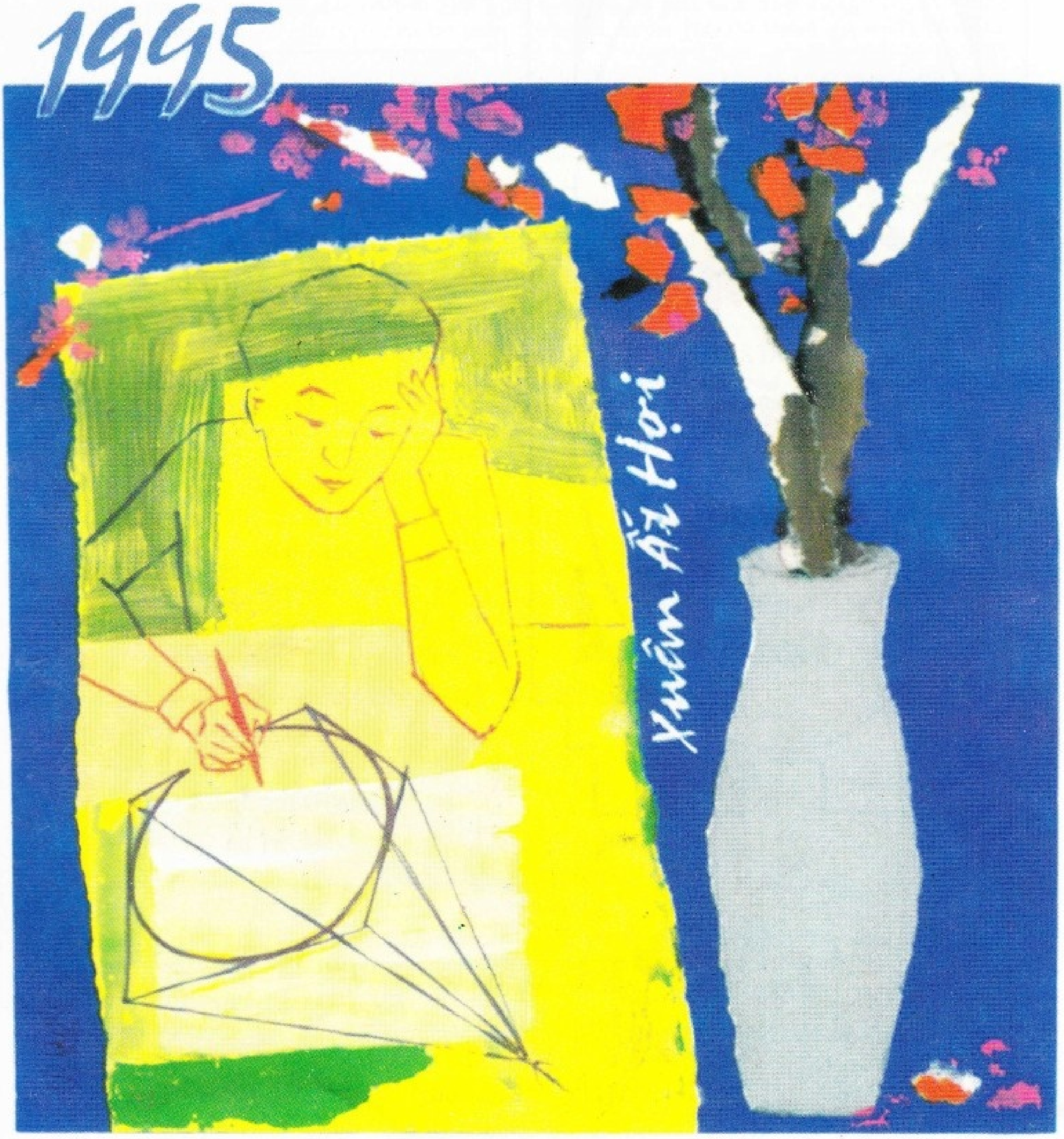
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

1(211)
1995
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG



TẠP CHÍ
TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Chúc Mừng Năm Mới

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ –
TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : NGUYỄN TIẾN DŨNG
VŨ KIM THỦY
"Khai bút" : Tranh bìa của PHẠM NGỌC TỚI

SỬ DỤNG YẾU TỐ PHỤ TRONG VIỆC GIẢI BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

LÊ QUỐC HÁN
Nghệ An

Trong tác phẩm "Giải bài toán như thế nào", Pô-li-a cho rằng : yếu tố phụ như một *nhịp cầu* để nối *bài toán cần tìm ra cách giải* với *bài toán đã biết cách giải*.

Ta hãy xét thí dụ sau đây

Thí dụ 1 : Đơn giản biểu thức

$(a+b+c)^3+(a-b-9)^3+(b-c-a)^3+(c-a-b)^3$.

Giải bài toán này bằng cách khai triển và ước lược các số hạng là một phương pháp thủ công và kém hấp dẫn. Tuy nhiên, nếu để ý tổng các biểu thức dưới dấu lũy thừa bằng 0, ta đưa vào *ba* biến phụ : $a-b-c=x$, $b-c-a=y$, $c-a-b=z$ thì $a+b+c=-(x+y+z)$ và sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc : $-(x+y+z)^3+x^3+y^3+z^3=$ $=-3(x+y)(x+z)$ ta có kết quả biểu thức là 24abc.

Từ phương pháp trên, bạn hãy giải các bài tập sau :

Bài tập 1 : Chứng minh $(a+b+c)^p+(a-b-c)^p+(b-c-a)^p+(c-a-b)^p$ chia hết cho $8pabc$ với p là số nguyên tố lẻ.

Bài tập 2(a). Chứng minh $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

Chỉ dẫn : đặt $a-b=x$, $b-c=y \Rightarrow c-a=-(x+y)$

Bài tập 2(b) : Chứng minh $(a-b)^p+(b-c)^p+(c-a)^p$ chia hết cho $p(a-b)(b-c)(c-a)$ với p là số nguyên tố lẻ.

* Trong nhiều bài toán đại số, việc đưa yếu tố phụ còn có tác dụng như một chiếc đòn bẩy, giúp ta giải bài toán nhẹ nhàng hơn.

Thí dụ 2 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\dfrac{x-a_1}{b_1}=\dfrac{x-a_2}{b_2}=\dfrac{x-a_3}{b_3}=\dots=\dfrac{x-a_n}{b_n}\\ x_1+x_2+\dots+x_n=c\end{cases}$$

với $b_1, b_2, \dots, b_n$ là các tham số khác không và $b_1+b_2+\dots+b_n$.

Giải : Đặt thêm biến phụ :

$$\frac{x-a_1}{b_1}=\frac{x-a_2}{b_2}=\dots=\frac{x_n-a_n}{b_n}=t$$

thì $x_i=tb_i+a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}a_i+t\sum_{n=1}^{n}b_i$

$$\Rightarrow c=\sum_{i=1}^{n}a_i+t\sum_{i=1}^{n}b_i$$

$$\Rightarrow t=\Big(c-\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)/\sum_{i=1}^{n}b_i$$

$$\Rightarrow x_i=a_i+b_i\Big(c-\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)/\sum_{i=1}^{n}b_i$$

Bạn hãy sử dụng phương pháp trên để giải các bài tập sau :

Bài tập 3 : Cho a, b, c, d là các số dương và $a/b=c/d$. Hãy trục căn khỏi mẫu thức của biểu thức sau :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$$

Bài tập 4 : Cho $\dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}=\dfrac{c}{C}=\dfrac{d}{D}$

Chứng minh $\sqrt{aA}+\sqrt{bB}+\sqrt{cC}+\sqrt{dD}=$ $=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$.

* Đối với những bài toán phức tạp, nhiều khi ta không chỉ phải đưa vào các biến phụ mà còn phải đưa vào các *hàm phụ*.

Xét thí dụ phức tạp sau :

Thí dụ 3 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a-p}+\dfrac{y}{b-p}+\dfrac{z}{c-p}=1\\[2mm] \dfrac{x}{a-q}+\dfrac{y}{b-q}+\dfrac{z}{c-q}=1\\[2mm] \dfrac{x}{a-r}+\dfrac{y}{b-r}+\dfrac{z}{c-r}=1\end{cases}$$

trong đó a, b, c, p, q, r đôi một khác nhau.

Chắc chắn các bạn sẽ không thú vị gì khi giải hệ trên bằng các phương pháp thông thường (phương pháp thế, phương pháp cộng đại số...). Ta hãy xét hàm phụ sau :

$$f(X)=\frac{x}{a-X}+\frac{y}{b-X}+\frac{z}{c-X}-1=\frac{g(X)}{(a-X)(b-X)(c-X)}$$

trong đó $g(X)$ là hàm đa thức bậc ba của X với hệ số bằng -1.

Theo giả thiết : $f(p)=f(q)=f(r)=0$ nên $g(p)=g(p)=g(r)=0$. Suy ra :

$$g(X)=-(X-p)(X-q)(X-r)$$

tức là $f(X)=\dfrac{(X-p)(X-q)(X-r)}{(a-X)(b-X)(c-X)}$ (1) Nhân hai vế của (1) với $a-X$, ta được :

$$x+(a-X)\Big(\frac{y}{b-X}+\frac{z}{c-X}-1\Big)=\frac{(X-p)(X-q)(X-r)}{(b-X)(c-X)}$$

rồi cho $X=a$, ta có :

$$x=-\frac{(x-p)(a-q)(a-r)}{(a-b)(a-c)}$$

Tương tự $y=-\dfrac{(b-p)(b-q)(b-r)}{(b-a)(b-c)}$

$$z=-\frac{(c-p)(b-q)(b-r)}{(c-a)(c-a)}$$

Mời bạn hãy giải tiếp bài tập sau theo phương pháp trên.

Bài tập 5 : Cho a, b, p, q đôi một khác nhau. Giải hệ

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a-p}+\dfrac{y}{b-p}=1\\[2mm] \dfrac{x}{a-q}+\dfrac{y}{b-q}=1\end{cases}$$

Tổng quát hóa cho trường hợp hệ có n ẩn.

Dành cho các bạn Chuẩn bị thi vào Đại học

THÊM TÍNH CHẤT CHO TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

ĐÀM VĂN NHỈ
Thái Bình

Sách Giải tích 12 đã giới thiệu khái niệm tích phân xác định, các phương pháp tính, những ứng dụng để tính diện tích, thể tích. Tôi muốn giới thiệu thêm một số tính chất và ứng dụng để các bạn tham khảo ; với hi vọng nó có ích cho các đợt thi đại học sắp tới.

Tính chất 1 :

Nếu $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $f(x) \leqslant g(x)$, (hoặc $f(x) < g(x)$) thì $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$, (hoặc $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$).

Việc chứng minh tính chất này không khó (các bạn dựa vào định nghĩa).

Tính chất này được vận dụng để chứng minh bất đẳng thức.

Thí dụ 1. Cho $x > 0$, hãy chỉ ra
$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ \forall n \geqslant 1.$$

Chứng minh : Quy nạp theo n.

$n = 1$: Từ $e^t > 1$ với $t > 0$ suy ra $\int_0^x e^t dt > \int_0^x dt$ hay $e^x - 1 > x \Rightarrow e^x > 1 + x$.

Giả sử với $n = k$ có
$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!},\ x > 0$$
$$\Rightarrow \int_0^t e^x dx > \int_0^t \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}\right) dx \text{ với } t > 0$$
$$\Rightarrow e^t - 1 > t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Thay t bởi e^x có
$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Thí dụ 2 : Chứng minh rằng
$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

Chứng minh :
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^x x dx = -\sin^{n-1}x\cos x \Big|_0^{\pi/2} +$$
$$+ (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{x-2}x\cos^2 x dx =$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{x-2}x(1 - \sin^2 x)dx \Rightarrow$$
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (1)$$

Qua công thức truy hồi này, ta có :
$$I_{2m} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m}x dx =$$
$$\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots3.1}{2m(2m-2)\ldots2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (2)$$
$$I_{2m+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1}x dx =$$
$$= \frac{2m(2m-2)\ldots4.2}{(2m+1)(2m-1)\ldots5.3} \quad (3)$$

cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$ có $\sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}x dx.$$

Áp dụng (2) và (3) có :
$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \Rightarrow$$
$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} <$$
$$< \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}, \ (4).$$ Ta có đpcm.

Từ (4) ta còn có :
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2.2.4.4\ldots2n\,.\,2n}{1.3.3.5.5\ldots(2n-1)(2n-1)(2n+1)}$$

công thức Wallis, do nhà toán học John Wallis (người Anh) tìm ra. Và công thức này thường được sử dụng để tính gần đúng π.

(Xem tiếp trang 14)

Bài T1/207. *Tìm tất cả các số hữu tỉ x để số $m = \sqrt{x^2 + 19x + 93}$ là số hữu tỉ.*

Lời giải. Giả sử x và $m \in Q$. Khi đó $m - x \in Q$.

Vậy giả sử $\sqrt{x^2 + 19x + 93} - x = y \in Q$.

Ta có $x^2 + 19x + 93 = x^2 + 2xy + y^2$ (1) $\Rightarrow x(19 - 2y) = y^2 - 93$

Dễ thấy $19 - 2y \neq 0$ (vì nếu $19 - 2y = 0$ suy ra $y = 19/2$. Thay giá trị này của y vào (1)

Ta có $93 = 19^2/4$. Vô lí. Vậy có

$$x = \frac{y^2 - 93}{19 - 2y}, \; y \in Q \qquad (2)$$

Ngược lại nếu x thỏa mãn (2) (với $y \neq 19/2$) ta có :

$$\sqrt{x^2 + 19x + 93} = \sqrt{\left(\frac{y^2 - 93}{19 - 2y}\right)^2 + 19 \cdot \frac{y^2 - 93}{19 - 2y} + 93} =$$

$$= \frac{\sqrt{y^4 - 38y^3 + 547y^2 - 3534y + 93^2}}{|19 - 2y|} =$$

$$= \frac{y^2 - 19y + 93}{|19 - 2y|} \in Q, \text{ với mọi } y \in Q$$

$$y \neq 19/2$$

Vậy tất cả các số hữu tỉ x cần tìm là các số có dạng (2) và chỉ những số có dạng ấy mà thôi

Nhận xét : Tất cả các lời giải gửi đến đều thiếu phần nghiệm lại dạng (2) của x.

TÔ NGUYÊN

Bài T2/207 : *Tồn tại hay không số tự nhiên n thỏa mãn : $n^2 + 2^n$ chia hết cho 1994 ?*

Nhận xét 1 : Bạn *Trịnh Kim Chi* (9TPTNK Hà Tĩnh) đã đề xuất Bài toán tổng quát sau :

Bài toán tổng quát : Cho số nguyên tố p có dạng $p = 4k + 1$ $k \in N^*$. Hỏi có tồn tại hay không số tự nhiên n thỏa mãn $n^2 + 2^n$ chia hết cho 2p ?

Bạn Chi có phương pháp và ý tưởng đúng trong việc giải quyết bài toán vừa nêu. Tuy nhiên, do mắc sai lầm trong tính toán nên bạn đã cho lời giải sai. Dựa theo phương pháp và ý tưởng của bạn Trịnh Kim Chi, dưới đây chúng tôi trình bày một lời giải cho Bài toán tổng quát nêu trên.

Lời giải : Ta có : $4k \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$, $4k - 1 \equiv -2 (\mathrm{mod}\, p)$, ..., $2k + 1 \equiv -2k\ (\mathrm{mod}\, p)$. Suy ra : $(4k)! \equiv [(2k)!]^2$ (modp). Mặt khác, theo Định lí Wilson ta có $(4k)! + 1 \equiv 0$ (mod$p$). Do đó : $[(2k!] + 1 \equiv 0$(mod$p$). (1)

Xét $n = 4k.(2k)!$. Theo định lí Fecma nhỏ, ta có : $2^n - 1 = [2^{(2k)!}]^{4k} - 1 \equiv 0$ (modp). (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $n^2 + 2^n = [4k \, . \, (2k)!]^2 + 2^{4k.(2k)!} \equiv 0$ (mod$p$)

Hơn nữa, dễ thấy $n^2 + 2^n \equiv 0$ (mod2) và $(2, p) = 1$. Suy ra : $n^2 + 2^n \equiv 0$ (modp $2p$).

Vậy tóm lại, câu trả lời của bài toán là có và số n, thỏa điều kiện của bài toán, chẳng hạn là $n = 4k.(2k)!$.

Chọn $k = 249$, từ kết quả của bài toán tổng quát ta có kết quả của Bài đã ra.

Nhận xét : 1. Trong Lời giải của mình bạn Chi đã chọn $n = (2k)!$. Có thể thấy cách chọn đó không thích hợp, chẳng hạn khi $k = 1$.

2. Trong số các bạn gửi lời giải tới Tòa soạn chỉ có ba bạn : *Trịnh Kim Chi, Phạm Huy Tùng* (9A, Bế Văn Đàn, Hà Nội) và *Trịnh Anh Vũ* (9T, Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai) đưa ra câu trả lời đúng cho câu hỏi của bài ra. Bạn Tùng có lời giải không hoàn chỉnh ; bạn Vũ cho lời giải sai vì cho rằng từ $a.b \equiv 0$ (mod$c$) và $a \not\equiv 0$ (mod$c$) suy ra $b \equiv 0$ (mod$c$).

3. Nhiều bạn đưa ra câu trả lời sai cho câu hỏi của bài ra, do đã mắc phải một trong các sai lầm về kiến thức cơ bản sau :

. *Sai lầm 1* : Nếu $a \equiv 0$ (mod$c$) và $b \not\equiv 0$ (mod$c$) thì $a \not\equiv 0$ (mod$b$).

. *Sai lầm 2 :* Nếu m là ước số chung của a và b thì từ $a \equiv b$ (mod$c$) $\Rightarrow \frac{a}{m} \equiv \frac{b}{m}$ (mod$c$)

4. Từ lời giải đã trình bày ở trên các bạn có thể chỉ ra vô số số tự nhiên n thỏa điều kiện đặt ra trong Bài toán tổng quát.

5. Cuối cùng , xin nhắc lại *Định lí Wilson* để các bạn tiện theo dõi lời giải : "*Nếu p là số nguyên tố thì (p - 1) ! + 1 ≡ 0 (mod p)*".

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T3/207. *Chứng minh rằng đa thức :*

$$P(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{7x}{15}$$

Nhận giá trị nguyên khi x là số nguyên.

Lời giải : (Của bạn Trần Lê Nam, Lớp 9CT Quảng Ngãi, Trần Bằng CT Trưng Vương Hà Nội)

Ta có $P(x) = x + \dfrac{x^5 - x}{5} + \dfrac{x^3 - x}{3}$

Theo định lí nhỏ Fécma $x^5 - x \,\vdots\, 5$, $x^3 - x \,\vdots\, 3$ khi $x \in Z$. Vậy $P(x) \in Z\ \forall x \in Z$.

Nhận xét : 1) Hơn 200 bạn đã tham gia giải đúng bài toán này trong đó có nhiều bạn học lớp 6, lớp 7 chỉ sử dụng tính chất chia hết mà không cần dùng đến định lí Fecma nhỏ như : *Nguyễn Đăng Chiểu* 6M Mari Quyri Hà Nội, *Nguyễn Lê Thúy, Trần Thị Việt Anh, Phạm Thị Hương Thúy* (PTCS Hồng Bàng Hải Phòng) *Vũ Trần Cương* (7 Trần Đăng Ninh Nam Hà) *Doãn Thế Dũng, Nguyễn Đức Đông* (7M, Mari Quyri), *Nguyễn Anh Tuấn* (8T Chuyên Quảng Ngãi).

2) Bài toán trên là một ví dụ về một đa thức $P(x)$ với hệ số hữu tỉ (không nhất thiết là nguyên) nhận giá trị nguyên khi x là số nguyên. Các bạn hãy thử chứng minh rằng nếu $P(x)$ là một đa thức bậc n có tính chất như vậy thì $n\,!\,P(x)$ phải là một đa thức có các hệ số nguyên.

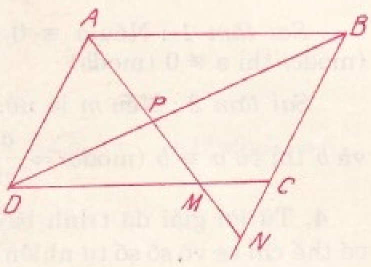
ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/207 : *Cho hình bình hành ABCD. Qua A vẽ đường thẳng sao cho cắt đường chéo BD ở P và cắt DC, BC lần lượt ở M, N.*

1) Chứng minh $\dfrac{AP}{AM} + \dfrac{AP}{AN} = 1.$ *(*)*

2) Có hay không hệ thức (*) khi đường thẳng vẽ qua A cắt tia CD, CB, DB lần lượt ở M, N, P ? Vì sao ?

Lời giải : 1)



Từ $DM \,//\, AB$ suy ra

$$\frac{AP}{AM} = \frac{BP}{BD} \quad (1)$$

Từ $AD \,//\, BN$ suy ra

$$\frac{AP}{AN} = \frac{DP}{BD} \quad (2)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta có :

$$\frac{AP}{AM} + \frac{AP}{AN} = \frac{DP}{BD} + \frac{BP}{BD} = 1. \text{ đpcm}$$

2) Trường hợp thứ nhất : Điểm B nằm giữa D và P. Ta có $\widehat{DBA} < \widehat{CBA} \Rightarrow \widehat{ABP} > \widehat{ABN}$ suy ra N nằm giữa A và $P \Rightarrow AP > AN$.

Do đó $\dfrac{AP}{AN} > 1 \Rightarrow \dfrac{AP}{AM} + \dfrac{AP}{AN} > 1.$

Trường hợp thứ hai : Điểm D nằm giữa B và P ta có $AP > AM \Rightarrow \dfrac{AP}{AM} + \dfrac{AP}{AN} > 1.$

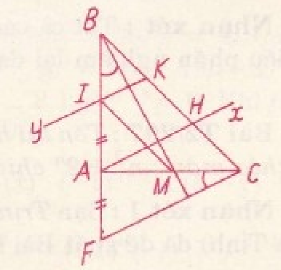
Tóm lại không có hệ thức trên khi đường thẳng vẽ qua A cắt tia CD, CB, DB ở M, N, P.

Nhận xét : Giải tốt bài này có các bạn : *Mai Thanh Bình*, 8M Mari Quyri, *Trần Bàng, Nguyễn Cảnh Nam, Trần Việt Bình, Nguyễn Anh Hoàn, Nguyễn Tường Minh*, 9H, *Quản Diệu Linh*, 8H PTCS Trưng Vương, *Trần Hải Sơn*, 9A1 Giảng Võ II, *Phạm Huy Tùng* 9A THCS Bế Văn Đàn, *Nguyễn Thái Quang* 9CT Chuyên Đông Anh Hà Nội ; *Vũ Huy Hoàng*, 9 Lí, PTNK Hải Hưng, *Nguyễn Ngọc Đông* 9NK Thuận Thành, Hà Bắc, *Nguyễn Thị Thanh*, 7T PTCS Chuyên TX Thái Bình, *Nguyễn Hồng Vũ, Trần Văn Thành*, 9 Toán, NK Ý Yên, *Nguyễn Hồng Dung* 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, *Lê Quang Huy* 9CT PTCSNK Thái Nguyên, Bắc Thái, *Phạm Thị Thanh Vân* 7H PTCS, Hải Phòng, *Nguyễn Minh Thanh, Vũ Thị Lan Hương, Bùi Việt Trung*, 9T Lam Sơn, Thanh Hóa, *Trịnh Kim Chi*, 9T NK Hà Tĩnh, *Trần Thanh Quang*, Quốc học Huế, *Trần Lê Nam*, 9T Chuyên Lê Khiết, *Lê Quang Nẫm*, 9T Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi, *Vũ Đức Phú*, 9T, Trường Nguyễn Du, Gò Vấp, TP Hồ Chí Minh, *Trịnh Anh Vũ*, 9T Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai, *Nguyễn Trung Kiên*, 9T Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/207. *Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh AC, kẻ tia Ax vuông góc với BM. Gọi H là giao điểm của Ax với BC và K là điểm đối xứng với C qua H. Kẻ tia Ky vuông góc với BM, gọi I là giao điểm của Ky với AB. Tính* $\widehat{AIM}$.

Lời giải (Dựa theo *Nguyễn Minh Thanh* - 9T PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa). Ta có $KI \,//\, HA$ (vì cùng $\perp BM$). Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AI$, ta có $CF \,//\, HA \,//\, KI$ (định lí Talét đảo). Suy ra $BM \perp CM$, và $\widehat{ABM} = \widehat{ACF}$ (góc có cặp cạnh tương ứng vuông góc), do đó $\Delta ABM = \Delta ACF$ (g. c.g.). Vậy $AM = AF = AI$, suy ra ΔIAM vuông cân đỉnh A, và $\widehat{AIM} = 45^o$.



Nhận xét Có 154 bài giải gửi về Tòa soạn, tất cả đều giải đúng, lời giải tốt gồm có : *Nguyễn Minh Thanh* - 9T PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa, *Trần Anh Sơn* (8M – Mari Quyri Hà Nội, *Nguyễn Thị Thanh* 7 Toán – PTCS Chuyên – thị xã, *Mai Đình Hoàng* 9T, Trường năng khiếu Nga Sơn – Thanh Hóa, *Trần Hải Sơn* 9A, Giảng Võ II Hà Nội, *Vũ Trần Cường* 7 Toán – PTCS Trần Đăng Ninh – Nam Định – Nam Hà, *Vũ Đức Phúc* 9 Toán, Trường Nguyễn Du – Quận Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh.

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/207 : *Dãy* $\{x_n\}$ *cho bởi* $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n\ \forall n \geqslant 1$. *Tìm phần nguyên của số :*

$$A = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots \frac{1}{x_{1993}+1}.$$

Lời giải (của nhiều bạn) : Với các giả thiết của bài ra ta sẽ tìm phần nguyên của số :

$$A(m) = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_m+1}$$

ở đây m là số nguyên dương cho trước.

Với $m = 1$ ta có

$$A(1) = \frac{1}{x_1+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow [A(1)] = 0$$

Xét $m \geqslant 2$. Từ giả thiết dễ thấy $x_n > 0\ \forall n \in N^*$.

Do đó : $A(m) \geqslant \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} > 1$ (1).

Mặt khác, do

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_n \Leftrightarrow \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$$

(Vì $x_n > 0$) $n \geqslant 1$ nên :

$$A(m) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} + -\frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_{m+1}}$$

$$= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{m+1}} = 2 - \frac{1}{x_{m+1}} < 2 \text{ (2) (do } x_{m+1} > 0)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow [A(m)] = 1$.

$$\text{Tóm lại : } [A(m)] = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m = 1 \\ 1 & \text{nếu } m \geqslant 2 \end{cases}$$

Từ đó, $[A] = [A(1993)] = 1$

Nhận xét : 1. Có rất nhiều bạn gửi lời giải cho Bài toán. Chỉ có hai bạn (một ở Thái Bình và một ở khối PTCT ĐHTH Hà Nội) cho lời giải sai.

2. Các bạn có lời giải tốt : *THCS : Trần Thị Ngọc Hải, Trần Lê Nam, Nguyễn Thị Như Quỳnh* 9T Trường Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Phạm Anh Tuấn* 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa, *Phạm Huy Tùng* 9A, Bế Văn Đàn, Hà Nội, *Mai Thanh Bình* 8M, PTDL Marie Curie, Hà Nội. *THCB : Trương Thuận* PTTH Cà Mau, Minh Hải, *Trần Văn Đạt* PTTH Phan Rang *Võ Thị Lân, Võ Thị Ly* PTTH Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên ; *Đỗ Khoa Hiệp, Phan Hoàng Việt, Nguyễn Minh Thọ* Quốc học, Quy Nhơn, Bình Định. *Nguyễn Thị Hải Yến* Quốc học Huế ; *Nguyễn Anh Văn (B) Lê* Quý Đôn, Nha Trang ; *Võ Quốc Hùng, Nguyễn Chí Linh, Phạm Công Thiện* Trường Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Đào Thị Thiên Hương, Hồ Văn Thảo* PTTH Đông Hà, Quảng Trị ; *Nguyễn Thị Quỳnh Hoa, Lê Anh Tuấn, Thái Anh Vũ* (PTNK Hà Tĩnh ; *Nguyễn Xuân Tương, Kiều Văn Tỵ* PTCTĐHSP Vinh ; *Nguyễn Việt Bắc, Lê Huy Khanh* PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Trần Thị Khuê, Đinh Trường Sơn, Trần Vinh Thu, Trịnh Hữu Trung, Nhữ Quý Thơ, Phạm Minh Tuấn* PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Vũ Đức Sơn, Đinh Văn Tâm* PTTH Lương Văn Tụy, Ninh Bình ; *Phạm Thành Nam* PTTH Nam Ninh, Nam Hà, *Trần Đức Quyền* PTTH Lê Hồng Phong, Nam Hà ; *Lê Văn Mạnh* Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình ; *Nguyễn Công Hiệu* PTTH Nguyễn Du, Thanh Oai, Hà Tây ; *Trần Nguyên Ngọc, Nguyễn Ngọc Tân* PTCT ĐHTH Hà Nội ; *Nguyễn Hải Anh* PTTH Yên Hòa, Hà Nội ; *Nguyễn Sĩ Đăng, Đặng Thanh Hà* PTCT ĐHSPI Hà Nội ; *Trần Thái Hoàng, Vũ Huy Phương, Đỗ Thế Tài* PTNK Hải Hưng ; *Nguyễn Đình Toàn* PTNK Hà Bắc *Ngô Đức Duy, Phạm Đình Trường* PTTH Trần Phú, Hải Phòng ; *Tạ Hải Anh, Trịnh Xuân Mạnh, Lê Quang Minh* PTNK Bắc Thái và *Nguyễn Long Quỳnh* PTTH Chuyên Lạng Sơn.

3. Bài toán đã được nhiều bạn học sinh THCS tham gia giải và hầu hết các bạn cho lời giải đúng.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/207. *Giải phương trình*

$$a\frac{9x^8+84x^6+126x^4+36x^2+1}{x^8+36x^6+126x^4+84x^2+9} + x\frac{9a^8+84a^6+126a^4+36a^2+1}{a^8+36a^6+126a^4+84a^2+9} = 0$$

Lời giải : (của bạn *Đặng Thanh Hà* 11A ĐHSP Hà Nội).

Đặt $f(x) = \frac{9x^8+84x^6+126x^4+36x^2+1}{x^8+36x^6+126x^4+84x^2+9}$

Ta thấy

$$x - f(x) = \frac{(x+1)^9}{x^8+36x^6+124x^4+84x^2+9}$$

$$x + f(x) = \frac{(x+1)^9}{x^8+36x^6+124x^4+84x^2+9}$$

Phương trình đã cho có dạng

$af(x) + xf(a) = 0$

$\leftrightarrow (a - f(a))(x - f(x)) = (a + f(a))(x + f(x))$

$\leftrightarrow (a-1)^9(x-1)^9 = (a+1)^9(x+1)^9$

$\leftrightarrow (a-1)(x-1) = (a+1)(x+1)$

$\leftrightarrow x = -a$

Đáp số : $x = -a$.

Nhận xét : 1) Nhiều bạn có lời giải đúng như *Đinh Trường Sơn* (10^T Lam Sơn Thanh Hóa) *Lê Hà Khương* (11T Quảng Ngãi) *Phạm Minh Phương* (ĐHSP 1), *Thái Minh Hoàng* (11T, Vĩnh Long), *Phạm Tuấn Anh*, (ĐHSP Vinh), *Nguyễn Xuân Thắng* (11T, Đông Hà, Quảng Trị)... Tuy nhiên, lời giải trên đây của bạn Thanh Hà là gọn ghẽ và sáng sủa nhất.

2) Có một số bạn giải như sau : đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Rõ ràng $g(x)$ là hàm lẻ. Phương trình đã cho có dạng $g(x) = -g(a) = g(-a)$. Suy ra $x = -a$. Một sai lầm cơ bản. Yêu cầu của bài là tìm tất cả các nghiệm của phương trình chứ không phải là đoán nhận một nghiệm của phương trình.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/207. *Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{1+\cos 2x} + \frac{1}{1+\cos 4x} + \frac{1}{1-\cos 6x} > 2$$

Lời giải (dựa theo *Nguyễn Thái Hà* – $A_0$11 ĐHTH Hà Nội)

Đặt $P = \cos 4x + \cos 2x - \cos 6x =$

$= 1 - 2\sin^2 2x - 2\sin 4x \sin 2x$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\sin^2 4x + \cos^2 4x) -$

$- 2\sin^2 2x - 2\sin 4x \sin 2x =$

$\frac{3}{2} - (\sin 4x + 2\sin 2x)^2 - \frac{1}{2}\cos^2 4x.$

Suy ra $P \leqslant \frac{3}{2}$.

Nếu xảy ra dấu "=" thì $P = \frac{3}{2}$ (1) đồng thời $\cos 4x = 0$ và $\sin 4x + 2\sin 2x = 0$, suy ra $2\sin 2x = -\sin 4x$. Do đó $P = \cos 2x - \cos 6x = -2\sin 4x \sin 2x = \sin^2 4x = 1 - \cos^2 4x = 1$, mâu thuẫn với (1). Vậy $P < \frac{3}{2}$. Đặt $a = 1 + \cos 4x$; $b = 1 + \cos 2x$; $c = 1 - \cos 6x$, ta có $a, b, c \geqslant 0$. Mà $a, b, c \neq 0$ (để vế trái có nghĩa), nên $a, b, c > 0$, và $0 < a + b + c = P + 3 < \frac{9}{2}$. Vậy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c} > 2$, đpcm.

Nhận xét : có 132 bài giải gửi tới tòa soạn, tất cả đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Nguyễn Thái Hà* $A_0$11, ĐHTH Hà Nội, *Vũ Đức Sơn* 11. Toán – PTTH Lương Văn Tụy – Ninh Bình), *Nguyễn Long Quỳnh* 12 CT PTTH chuyên Lạng Sơn, *Võ Hoàng Trung* 12A, PTTH chuyên Trà Vinh, *Nguyễn Thị Hải Yến* 11CT, PTTH Quốc học Huế, *Doãn Trung Tùng* 10A, ĐHSPHNI.

ĐẶNG VIỄN

Bài T9/207. *Gọi l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong của các góc A, B, C và r, R là bán kính các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của một tam giác ABC. Chứng minh rằng :*

$$\frac{2}{R} \leqslant \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \frac{1}{r} \quad (*)$$

Lời giải. (Dựa theo lời giải của *Phạm Công Thiện*, lớp 11 Toán trường chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi). Gọi h_i, l_i, m_i lần lượt là độ dài đường cao, phân giác và trung tuyến phát xuất từ đỉnh A_i của tam giác $A_1A_2A_3$, thế thì ta có bất đẳng thức kép sau đây (dễ dàng chứng minh) $h_i \leqslant l_i \leqslant m_i$ $(i = 1, 2, 3)$

Từ đó suy ra :

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \leqslant \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad (1)$$

Ta có :

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2.S} = \frac{2p}{2S} = \frac{1}{r} \; ; (2)$$

Vì vậy, chỉ còn phải chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\frac{2}{R} \leqslant \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \quad (3)$$

Theo công thức tính đường trung tuyến, ta có hệ thức :

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

(a, b, c và S là độ dài các cạnh và diện tích của tam giác ABC). Sử dụng bất đẳng thức Côsi, dễ dàng thu được các bất đẳng thức :

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geqslant \frac{9}{m_a + m_b + m_c} \quad (4)$$

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leqslant 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) =$$
$$= \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (5)$$

Theo công thức Lépnit, ta có hệ thức :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$$
$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3MG^2 \ (\forall M)$$

Cho M trùng với tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta được :

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3OG^2$$

Từ đó suy ra : $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2$ (6)

Từ (5) và (6) ta được :

$$m_a + m_b + m_c \leqslant \frac{9}{2}R \qquad (7)$$

Do đó, từ (4) và (7) ta thu được bất đẳng thức (3)

Cuối cùng, từ (1), (2) và (3) ta được các bất đẳng thức (*) cần tìm.

Nhận xét. Có đến 140 bạn tham gia giải bài toán này, điều đó chứng tỏ đa số các bạn đã sử dụng thành thạo công cụ bất đẳng thức đại số áp dụng vào hình học. Tuy nhiên, rất nhiều bạn đưa ra các bất đẳng thức hoặc các hệ thức lượng giác trong tam giác mà không chứng minh. Thậm chí có bạn chứng minh bất đẳng thức đầu tiên $\left(\frac{2}{R} \leqslant \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}\right)$ đã phải sử dụng đến 2 hoặc ba bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, hoặc phải sử dụng công cụ mạnh hơn như tính chất của hàm lồi, hàm lõm. Đó là điều nên tránh, vạn bất đắc dĩ mới cầu cứu đến các kiến thức cao xa ngoài kiến thức cơ bản được trình bày trong SGK. Đặc biệt nên tránh việc giải bài toán này lại chuyển về một bài toán khác mà không trình bày lời giải bài toán đó.

Bài này có rất nhiều cách giải. Để chứng minh bất đẳng thức đầu tiên, nhiều bạn đã chứng minh hoặc sử dụng hệ thức tính đường phân giác : $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, v.v... Tiếp đó, để đánh giá đại lượng $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$ đưa về $l_a \leqslant 2R\cos^2\frac{A}{2}$ v.v... từ đó suy ra : $l_a + l_a + l_b \leqslant R\ (3 + \cos A + \cos B + \cos C)$ và chứng minh bất đẳng thức :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

Có cả cách giải chỉ sử dụng kiến thức hình học bậc PTCS.

– Trước hết, chứng minh :

$$h_i \leqslant l_i \leqslant m_i \ (i = a, b, c)$$

– Bất đẳng thức thứ hai chứng minh dễ dàng nhờ $h_i \leqslant l_i$ và (2) ở trên.

– Từ $l_a \leqslant m_a$ suy ra ngay : $\frac{R}{l_a} \geqslant R_{m_a} \geqslant \frac{AM - OM}{AM} = 1 - \frac{s(OBC)}{S(ABC)}$ trong đó M là trung điểm cạnh BC, còn O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cùng với hai bất đẳng thức tương tự ta được $R\left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}\right) \geqslant 2$. Phải xét cả trường hợp tam giác ABC có góc tù, chứng minh mới hoàn chỉnh. Các bạn sau đây có lời giải gọn theo hướng chứng minh này ; *Hoàng Sao Đỏ*, 10T Lam Sơn, Thanh Hóa, *Đỗ Hồng Sơn*, 9T Lam Sơn, Thanh Hóa, *Kiều Văn Ty*, 11CT, ĐHSP Vinh, *Phạm Tuấn Anh*, 10CT, ĐHSP Vinh, đặc biệt *Nguyễn Ngọc Hưng* lớp 10T, Lam Sơn Thanh Hóa có lời giải hoàn chỉnh hơn cả.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/207. *Giả sử r và R lần lượt là bán kính các mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp một tứ diện có thể tích V. Chứng minh rằng :*

$$8R^2r \geqslant 3\sqrt{3}\,V$$

Khi nào thì đạt được đẳng thức ?

Lời giải. Gọi O, G lần lượt là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện $ABCD$ có độ dài các cạnh : $BC = a$, $DA = a'$, $CA = b$, $DB = b'$, $AB = n$, $DC = c'$; S_a, S_b, S_c, S_d và S lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D và diện tích toàn phần của tứ diện. Ta có :

$$4\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} \qquad (1)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (1) và để ý rằng $2\vec{OA}\vec{OB} = 2R^2 - AB^2$ ta được :

$$16OG^2 = 4R^2 + \sum(2R^2 - AB^2) =$$
$$= 16R^2 - (a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2) ; \qquad (2)$$

Từ (2), ta được bất đẳng thức :

$$16R^2 \geqslant a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 ;$$

hay là :

$$32R^2 \geqslant 2(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2) \qquad (3)$$

Nhưng, trong tam giác ABC ta có bất đẳng thức quen thuộc :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S_d\sqrt{3} \qquad (4)$$

Trong các mặt khác của tứ diện $ABCD$ ta được các bất đẳng thức tương tự, cộng vế đối vế 4 bất đẳng thức có dạng (4) ta thu được :

$$2(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2) \geq 4S\sqrt{3} \quad (5)$$

Từ (3) và (5) suy ra :

$$8R^2 \geq S\sqrt{3} \quad (6)$$

Thay $S = \dfrac{3V}{r}$ vào (6), ta được bất đẳng thức cần tìm : $8R^2r \geq 3\sqrt{3}V$

Chú ý : Có thể chứng minh bất đẳng thức (4) như sau ;

Gọi M là trung điểm của cạnh BC, ta có : $S_d = s(ABC) \leq \dfrac{1}{2}BC\,.\,AM$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}AM\right)BC < \dfrac{\sqrt{3}}{8}\left[\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}AM\right)^2 + BC^2\right] =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{8}\left(\dfrac{4}{3}AM^2 + BC^2\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{8}\left[\dfrac{1}{3}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2) + BC^2\right] =$

$= \dfrac{1}{4\sqrt{3}}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$

hay là : $BC^2 + CA^2 + AB^2 \geq 4\sqrt{3}\,S_d(\Delta ABC)$

Nhận xét. Có 22 bạn tham gia giải bài toán trên. Một số bạn chưa biết sử dụng công cụ véctơ để chứng minh hệ thức (2), rồi từ đó suy ra bất đẳng thức (3) thành thử lời giải khá dài dòng. Nhiều bạn sử dụng bất đẳng thức (4) trong tam giác, thậm chí có bạn sử dụng cả hệ thức

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2)$$

mà không chứng minh gì cả. Đó là điều nên tránh.

Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả : *Tạ Hải Anh,* Toán năng khiếu Bắc Thái, *Nguyễn Xuân Thắng,* 11T Đông Hà, Quảng Trị, *Phan Hoàng Việt,* 12A, Quốc học Quy Nhơn, *Vũ Đức Sơn,* 11 Toán PTTH Lương Văn Tụy Ninh Bình, *Phạm Huy Tùng,* THCS Bế Văn Đàn, Hà Nội

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/207. *Trên đường có 4 xe chạy : xe ô tô (1), xe môtô (2), xe babêta (3) và xe đạp (4). Bốn xe cùng bắt đầu chạy thẳng đều với vận tốc riêng. Xe (1) đuổi kịp xe (3) (chuyển động cùng chiều) sau 12 giờ chạy, gặp xe (4) (chạy ngược chiều) sau 16 giờ chạy. Còn xe (2) gặp xe (3) sau 17 giờ chạy, đuổi kịp xe (4) sau 18 giờ chạy. Hỏi xe (4) gặp xe (3) khi nào ?*

Hướng dẫn. Có thể giải bằng phương pháp đồ thị hoặc bằng cách áp dụng công thức đường đi dựa vào quãng đường mà hai xe đi được khi đuổi kịp nhau, chọn gốc thời gian là lúc xe (1) đuổi kịp xe (3). Dùng phương pháp thứ hai sẽ thuận tiện hơn về mặt tính toán. Kết quả tính toán cho thấy : xe đạp gặp xe máy lúc 15 giờ 20 ph.

Nhận xét. Em *Võ Thanh Tùng,* 10 chuyên Toán PTTH Quốc học Huế đã có lời giải tốt và đúng.

M.T

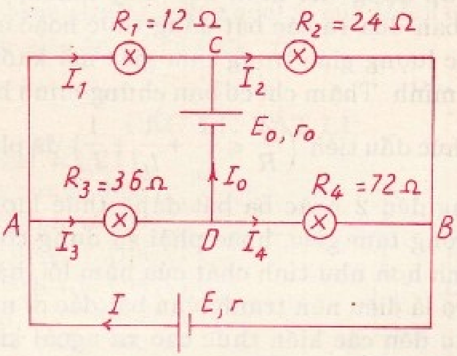
Bài L2/207. *Cho mạch điện vẽ bên, với nguồn (E, r) có hiệu suất H = 0,9, nguồn* E_o, r_o *có hiệu suất 0,8, ngọn đèn* R_4 *không sáng.*

– Tính r và r_o

– I_o *bằng mấy lần I ?*

– E_o *bằng mấy lần E ?*

– Công suất P_2 *của đèn (2) và* P_3 *của đèn (3) bằng mấy lần* P_1 *của đèn (1) ?*



Hướng dẫn. Viết công thức định luật Ôm cho các đoạn mạch ACB, ADB, CAD và CBD và áp dụng công thức $H = \dfrac{E}{U}$, $H_o = \dfrac{E_o}{U_o}$ suy ra : $r = 3\Omega$, $r_o = 8\Omega$; $I_o = 3I/4$; $E_o = E$; $P_2 = 32P_1$ và $P_3 = 27P_1$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng : *Đỗ Khánh Ninh,* 11b5, PTTH Uông Bí, Quảng Ninh ; *Nguyễn Đình Thịnh* 10CL, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An ; *Lê Thanh Tâm* 11CL, THCB Lê Quý Đôn, Hà Đông, Hà Tây ; *Nguyễn ngọc Kiên,* 10A PTT chuyên, Thái Bình ; *Nguyễn Thành Đạt* 11 Lí, PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình ; *Hoàng Cao Thạch* 11 Toán, PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình.

OK

VỀ CÁCH NHÌN HÀM SỐ LỒI

HỒ QUANG VINH
Nghệ An

Trong bài "Bất đẳng thức Jenxen" thầy giáo Trần Văn Vàng đã giới thiệu với các bạn ở số báo 2/1991 về cách nhìn các bất đẳng thức Côsi, Bunhiacốpxki, ... theo quan điểm hàm lồi. Trong bài báo này chúng tôi cũng sẽ dùng cách nhìn trên vào một số bất đẳng thức khác nữa cũng khá thú vị.

I. Định nghĩa hàm số lồi : Hàm số $f(x)$ xác định trên (a, b) gọi là lồi trên khoảng đó, nếu với x_1 ; x_2 bất kì thuộc $(a ; b)$ ta có

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \leqslant (1-t)f(x_1) + t.f(x_2) \qquad (1)$$

II. Tính chất : Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên $(a ; b)$ có đạo hàm cấp hai dương trên khoảng cách đó thì nó lồi trên $(a ; b)$

Nhận xét : Giả sử m_1 ; m_2 là hai số dương có tổng bằng 1.

Ta đặt $m_2 = t$; $m_1 = 1 - t$ và nếu f là hàm lồi thì theo (1) ta có :

$$f(m_1x_1 + m_2x_2) \leqslant m_1.f(x_1) + m_2.f(x_2) \qquad (*)$$

Ta vận dụng nhận xét này vào một vài ví dụ đơn giản về hàm số lồi.

1^o/ $f(x) = x^2$ có đạo hàm cấp hai $f''(x) = 2 > 0$. Vậy nó lồi trên mọi khoảng, từ đó suy ra :

$$(m_1x_1 + m_2x_2)^2 \leqslant m_1x_1^2 + m_2x_2^2 \qquad (2)$$

hay : $$|m_1x_1 + m_2x_2| \leqslant \sqrt{m_1x_1^2 + m_2x_2^2} \qquad (3)$$

Với $m_1 > 0$; $m_2 > 0$ và $m_1 + m_2 = 1$

2^o/ $f(x) = -\ln x$ có đạo hàm cấp hai $f''(x) = 1/x^2$, nó là hàm lồi trên mọi khoảng của nửa trục dương. Từ đó :

$\ln(m_1x_1 + m_2x_2) \geqslant m_1\ln x_1 + m_2\ln x_2$ với $m_1 \geqslant 0$; $m_2 \geqslant 0$ $m_1 + m_2 = 1$ và x_1 ; $x_2 > 0$.

Vì hàm lôga nêpe là hàm tăng nên bất đẳng thức trên còn có dạng :

$m_1x_1 + m_2x_2 \geqslant x_1^{m_1}.x_2^{m_2}$(2)

$$m_1 \geqslant 0 ; m_2 \geqslant 0 ; m_1 + m_2 = 1 \text{ và } x_1 ; x_2 > 0.$$

3^o/ $f(x) = 1/x$ có đạo hàm cấp hai là $f''(x) = 2/x^3$. Nó lồi trên mọi khoảng *trong đó $x > 0$*. Từ đó ta có :

$$1/(m_1x_1 + m_2x_2) \leqslant m/x_1 + m_2/x_2 \qquad (5)$$

Trong đó $m_1 \geqslant 0$; $m_2 \geqslant 0$; $m_1 + m_2 = 1$ và x_1 ; $x_2 > 0$. Từ (4) nếu thay x_1 ; x_2 (là các số dương) bởi $1/x_1$; $1/x_2$. Thì ta có bất đẳng thức :

$$m_1/x_1 + m_2/x_2 \geqslant 1/(x_1^{m_1}.x_2^{m_2}) \qquad (4')$$

$$m_1 \geqslant 0 ; m_2 \geqslant 0 ; m_1 + m_2 = 1.$$

Như vậy từ (4), (4') ; (5) Ta có bất đẳng thức kép sau :

$1/(m_1x_1 + m_2x_2) \leqslant 1/x_1^{m_1}.x_2^{m_2}) \leqslant m_1/x_1 + m_2/x_2$

$m_1 \geqslant 0$; $m_2 \geqslant 0$; $m_1 + m_2 = 1$

Ta có bất đẳng thức $f(\sum\limits_{i=1}^{n} m_ix_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m_if(x_i)$; $\quad m_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 1 \qquad (6)$

Bất đẳng thức này là tổng quát hóa của bất đẳng thức (*). Bây giờ ta vận dụng nó để chứng minh một số bất đẳng thức.

Ví dụ 1 : Chứng minh bất đẳng thức

$$x.\ln\frac{x}{a} + y.\ln\frac{y}{b} \geqslant (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}$$

khi a ; b ; x ; y là các số dương.

(Đây là một bài tập trong cuốn "Bất đẳng thức" của G. Hardy và các tác giả khác).

Bài này ta sẽ nhìn nó theo quan điểm hàm lồi.

Xét hàm $f(x) = x\ln x$, có $f''(x) = 1/x > 0$ với $x > 0$

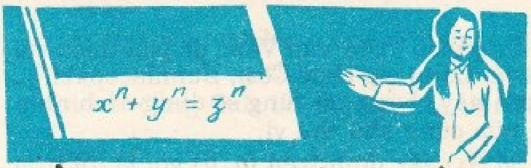
Vậy hàm $f(x) = x\ln x$ lồi trên mọi khoảng của nửa trục thực dung, khi đó áp dụng bất đẳng thức (*) ta được :

$(m_1x_1 + m_2x_2)\ln(m_1x_1 + m_2x_2) \leqslant m_1x_1.\ln x_1 + m_2x_2\ln x_2$

$m_1 > 0$; $m_2 > 0$; $m_1 + m_2 = 1$.

Nếu ta đặt $m_1 = a/(a+b)$; $m_2 = b/(a+b)$; $ax_1 = x$; $bx_2 = y$ khi đó ta sẽ có ngay bất đẳng thức cần chứng minh.

(Xem tiếp trang 16)



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp THCS

Bài T1/211. Giải phương trình :

$$x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}z^2 + 2x + 4y + 7 =$$
$$= \sqrt{(2x^2 + y^2 + 6y + 10)(-3z^2 + 4x + 2y + 4)}$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Bài T2/211. Ba số dương có tổng bằng đơn vị. Chứng minh rằng tổng của hai trong ba số đó không bé hơn 16 lần tích của cả ba số đó.

PHẠM HÙNG

Bài T3/211. Giả sử p là số nguyên tố lẻ. Đặt

$$m = \frac{9^p - 1}{8}$$

Chứng minh rằng m là một hợp số lẻ không chia hết cho 3 và

$$3^{m-1} \equiv 1 \ (mod\, m)$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/211. Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Gọi M, N, P là các trung điểm của các đoạn thẳng CA', AB', AC' tương ứng. Chứng minh rằng $MN = CP$ và góc giữa các đường thẳng MN và CP bằng 60^o.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

Bài T5/211. Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác CA_1HB_1 cắt trung tuyến CM của tam giác ABC tại T. Trung tuyến CM_1 của tam giác CA_1B_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại T_1. Chứng minh T và T_1 đối xứng nhau qua AB.

NGUYỄN ĐỄ

Các lớp THCB

Bài T6/211. Chứng tỏ rằng với n số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ta có bất đẳng thức sau đây là đúng :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào.

NGUYỄN LÊ DŨNG

Bài T7/211. Cho dãy (a_n) xác định :

$$a_1 = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$a_{n+1} = 24a_n^3 - 12\sqrt{6}\, a_n^2 + 15a_n - \sqrt{6} \ \forall\, n \geq 1.$$

Xác định công thức tổng quát a_n

HÙNG CƯỜNG

Bài T8/211. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng :

$$tg\frac{A}{4} + tg\frac{B}{4} + tg\frac{C}{4} + tg\frac{D}{4} +$$
$$+ \frac{16}{4 + tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} + tg\frac{D}{2}} < 4$$

TRẦN DUY HINH

Bài T9/211. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Từ một điểm M di động trên SA dựng đường thẳng song song với AD cắt SD tại N. Trên cạnh CD lấy điểm Q sao cho $\dfrac{CQ}{CD} = \dfrac{SM}{SA}$. Tìm vị trí của M trên SA để tam giác MNQ có diện tích lớn nhất.

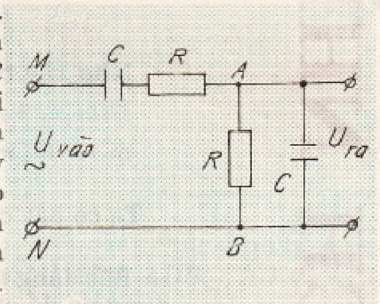
NGUYỄN VĂN LỘC

Bài T10/211. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm O, bán kính R và dây cung BC cố định. Điểm A di động trên cung BXC của đường tròn $(\mathscr{C})$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích hình chiếu (vuông góc) M của H lên đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.

ĐÀO TAM

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/211. Cho mạch điện như hình vẽ : R và C đã biết. Hỏi tần số góc ω của dòng điện xoay chiều bằng bao nhiêu để điện áp ra cùng pha với điện áp vào. Tìm tỉ số giữa các hiệu điện thế hiệu dụng vào và ra.



TRẦN VĂN DŨNG

Bài L2/211. Một chất điểm A, khối lượng m, được treo trên hai dây AB, AC. Các điểm B, C cố định, các dây AB, AC có khối lượng không đáng kể và độ dài không đổi $AB = AC = l$, tam giác ABC có góc A bằng 120^o và ở vị trí cân bằng dây AB nằm ngang.

a) Tính lực căng của các dây AB, AC khi hệ thống cân bằng, biết trọng lượng $P = mg$ của chất điểm A.

b) Tính chu kì của những dao động biên độ nhỏ của hệ thống.

NGUYỄN DŨNG

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/211. Solve the equation :

$$x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}z^2 + 2x + 4y + 7 =$$
$$= \sqrt{(2x^2 + y^2 + 6y + 10)(-3z^2 + 4x + 2y + 4)}$$

NGUYEN DUC TAN

T2/211. The sum of three given positive numbers is 1. Prove that the sum of two of them is not less than 16 times of the product of these three numbers.

PHAM HUNG

T3/211. Let $m = \frac{9^p - 1}{8}$, where p is an odd prime number. Prove that m is an odd composite number, not divisible by 3 and $3^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$

DANG HUNG THANG

T4/211. Construct in the outside of a triangle ABC the equilateral triangles BCA', CAB', ABC'. Let M, N, P be respectively the midpoints of the segments CA', AB', AC'. Prove that $MN = CP$ and the angle between the lines MN and CP is equal to 60^o.

TRAN XUAN DANG

T5/211. The altitudes AA_1, BB_1, CC_1 of an acute triangle ABC meet at H. The circumcircle of quadrilateral CA_1HB_1 cuts the median of triangle ABC at T. The median CM_1 of triangle CA_1B_1 cuts the circumcircle of triangle ABC at T_1. Prove that T and T_2 are symmetric through the line AB.

NGUYEN DE

For Upper Secondary Schools

T6/211. Prove the following relation between n distinct positive integers $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

When does equality occur ?

NGUYEN LE DUNG

T7/211. The sequence (a_n) is defined by :

$$a_1 = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$a_{n+1} = 24a_n^3 - 12\sqrt{6}\, a_n^2 + 15a_n - \sqrt{6},\ \forall n \geq 1$$

Give the general formula for a_n

HUNG CUONG

T8/211. Prove the following inequality for a convex quadrilateral $ABCD$:

$$tg\frac{A}{4} + tg\frac{B}{4} + tg\frac{C}{4}\ tg\frac{D}{4} + $$
$$+ \frac{16}{4 + tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} + tg\frac{D}{2}} < 4$$

T9/211. Let be given a pyramid $SABCD$, the base $ABCD$ of which is a parallelogram. From a moving point M on SA, draw the line parallel to AD ; it cuts SD at N. Take the point Q on CD such that $\frac{CQ}{CD} = \frac{SM}{SA}$. Find the position of M on SA such that triangle MNQ has greatest value.

NGUYEN VAN LOC

T10/211. Let be given a circle $(\mathcal{C})$ with center O, radius R and a fixed chord BC. A point A moves on an arc BC of $(\mathcal{C})$. Let H be the orthocenter of triangle ABC. Find the locus of the orthogonal projections M of H on the inbisector of the angle $\widehat{BAC}$.

DAO TAM

MỜI LĨNH GIẢI THƯỞNG

Tất cả các bạn đoạt giải trong 2 cuộc thi : năm 1993 và cuộc thi đặc biệt đều có giải thưởng.

Trong dịp kỉ niệm 30 năm vì điều kiện không cho phép, ban tổ chức chỉ mời các bạn ở Hà Nội, Hà Tây, Thanh Hóa là các địa phương ở gần hoặc có nhiều giải về dự lễ.

Tòa soạn mời các bạn còn lại chưa lĩnh giải về 45B Hàng Chuối để nhận. Nếu không đi được có thể ủy nhiệm cho người khác đến lĩnh.

Nếu không thể đến được vì ở xa bạn hãy gửi địa chỉ cụ thể hiện nay về để chúng tôi gửi giải thưởng tới. Đặc biệt các bạn lớp 9 và 12, nay đã chuyển trường cần lưu ý để giải thưởng khỏi thất lạc.

THVTT

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Trường PTTH Chuyên

PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH

NGÔ THẾ PHIỆT
Đà Nẵng

Các bạn đều rất quen thuộc công thức tính diện tích của một tam giác :

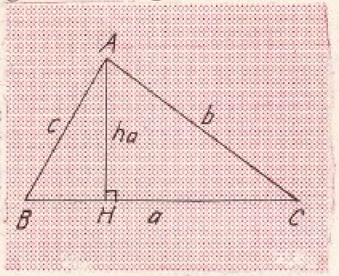
$S = (1/2)a.h_a = (1/2)b.h_b = (1/2)c.h_c$

$S = (1/2)ab\sin C = (1/2)ac\sin B = (1/2)bc\sin A$

Đặc biệt nếu tam giác là tam giác đều cạnh a thì :

$S = (a^2\sqrt{3})/4$

Từ các công thức rất đơn giản đó chúng ta có thể giải một số bài toán khó.



I. Tính tỉ số hình học

Bài toán 1 : *Cho Δ ABC. Trên các cạnh BC, CA và AB của tam giác ta lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại P.*

a) Chứng minh rằng

$$\frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{AB_1}{B_1C}$$

b) Chứng minh định lí Céva :

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

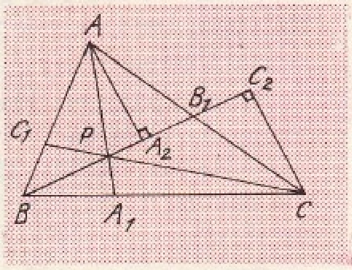
Bài giải. 1) Hạ $AA_2 \perp BB_1$ và $CC_2 \perp BB_1$

Ta có :

$S_{ABP} = BP.AA_2/2$

$S_{BCP} = BP.CC_2/2$

Vậy : $\dfrac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \dfrac{AA_2}{CC_2}$



Mặt khác ta có ΔAB_1A_2 đồng dạng với ΔCB_1C_2 nên :

$$\frac{AA_2}{CC_2} = \frac{AB_1}{B_1C}$$

Từ đây suy ra : $\dfrac{S_{ABP}}{S_{ABP}} = \dfrac{AB_1}{B_1C}$ (1)

2. Chứng minh tương tự :

$\dfrac{S_{ACP}}{S_{ABP}} = \dfrac{CA_1}{A_1B}$ (2) Và : $\dfrac{S_{BCP}}{S_{ACP}} = \dfrac{BC_1}{C_1A}$ (3)

Nhân các vế của (1), (2) và (3) ta suy ra :

$$\frac{AC_1}{C_1B} \times \frac{BA_1}{A_1C} \times \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

II. Chứng minh hai đại lượng hình học bằng nhau

Bài toán 2 : *Cho ΔABC có cạnh $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$, các đường cao tương ứng là h_a, h_b và h_c. Gọi S là diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp là r. Chứng minh :*

a) $S = \dfrac{1}{2}(a+b+c)r$

b) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

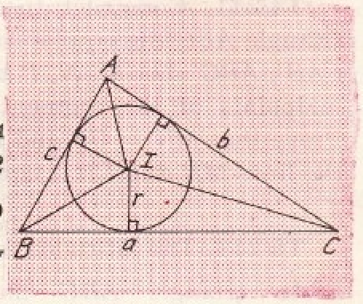
Bài giải :

1) Ta có :

$S = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA}$

$S = cr/2 + ar/2 + br/2$

$S = (a+b+c)r/2$ (4)



2) Từ (4) suy ra :

$$(2S/r) = a + b + c \quad (5)$$

Mặt khác ta có :

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

Suy ra : $a = \dfrac{2S}{h_a}$, $b = \dfrac{2S}{h_b}$, $c = \dfrac{2S}{h_c}$

Vậy : $a + b + c = \dfrac{2S}{h_a} + \dfrac{2S}{h_b} + \dfrac{2S}{h_c}$

$$\Rightarrow a + b + c = 2S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$$

So sánh (5) và (6) ta có :

$$2S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{2S}{r} \quad (7)$$

Rút gọn 2S ở hai vế của (7) ta có hệ thức phải chứng minh.

III. Chứng minh bất đẳng thức hình học

Bài toán 3 : *Cho ΔABC và một điểm O bên trong tam giác. Gọi các khoảng cách từ O đến tam giác là d_a, d_b, d_c và khoảng cách từ O đến các đỉnh A, B, C là R_a, R_b, R_c. Chứng minh*

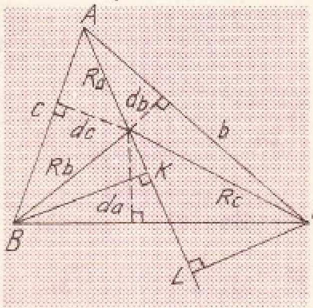
a) $a.R_a \geq c.d_c + b.d_b$

b) $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$

(Bất đẳng thức ERDOS)

(Đề 48 câu II – Bộ đề thi Tuyển sinh)

Bài giải



1) Hạ BK và CL vuông góc xuống AO. Đặt $a_1 = BK$ và $a_2 = CL$ ta có $a_1 + a_2 \leq a$ (vì cạnh góc vuông phải nhỏ hơn cạnh huyền)

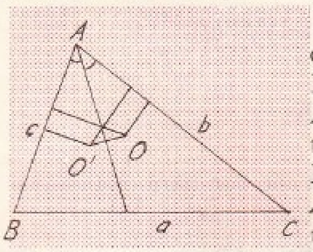
$\Rightarrow a_1.Ra/2 + a_2.Ra/2 \leq a.Ra/2$

$\Rightarrow S_{AOB} + S_{AOC} \leq a.R_a/2$

$\Rightarrow c.d_c/2 + b.d_b/2 \leq a.R_a/2$

$\Rightarrow a.Ra \geq b.d_b + c.d_c$ (8)

2) Bây giờ ta lấy điểm O' đối xứng với O qua phân giác góc BAC. Ta có : $O'A = OA = R_a$



Khoảng cách từ O' đến cạnh AC bằng khoảng cách từ O đến AB. Và khoảng cách từ O' đến AB bằng khoảng cách từ O đến AC. Vậy áp dụng công thức (1) cho O' ta có :

$$a.\,R_a \geq b.d_c + c.d_b$$

Nghĩa là :

$$R_a \geq (b/a)d_c + (c/a)d_b \quad (9)$$

Tương tự :

$$R_b \geq (a/b)d_c + (c/b)d_a \quad (10)$$

$$R_c \geq (a/c)d_b + (b/c)d_a \quad (11)$$

Cộng các vế của (9), (10) và (11) ta được :

$R_a + R_b + R_c \geq$

$\geq (a/b + b/a)d_c + (a/c + c/a)d_b + (b/c + c/b)d_a$

Cuối cùng do : $(\sqrt{a/b} - \sqrt{b/a})^2 \geq 0$, sau khi khai triển ta được :

$$a/b + b/a - 2 \geq 0$$

Suy ra : $a/b + b/a \geq 2$

Tương tự : $a/c + c/a \geq 2$

$b/c + c/b \geq 2$

Từ đó : $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi :

$$\sqrt{a/b} = \sqrt{b/a} \Leftrightarrow a = b$$

và : $\sqrt{b/c} = \sqrt{c/b} \Leftrightarrow b = c$

Suy ra dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều

Đến đây các bạn đã làm quen với phương pháp diện tích. Các bạn hãy bắt tay vào việc giải các bài toán sau đây. Chúc các bạn thành công trong kì thi sắp tới.

Bài tập tự giải

Bài 1 : Cho ΔABC và điểm O nằm trong tam giác . Từ O dựng các đường thẳng DE, FK, MN tương ứng song song với AB, AC, BC sao cho F, M nằm trên AB ; E, K nằm trên BC ; N, D nằm trên AC. Chứng minh rằng :

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BM}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1$$

Bài 2 : Cho ΔABC đều. Lấy điểm P tùy ý trong ΔABC. Từ O hạ các đường vuông góc PD, PE, PF lần lượt tới các cạnh BC, CA, AB. Tính tỉ số :

$$\frac{PB + PE + PF}{BD + CE + AF}$$

Bài 3 : Gọi r_a, r_b, r_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp của ΔABC tương ứng trong các góc A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác đó.

a. Chứng minh : $S = pr = (p - a)r_a$

b. Chứng minh : $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$

Bài 4 : Cho ΔABC có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của ΔABC. Chân các đường cao kẻ từ A, B, C lần lượt là A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :

$$\frac{AH}{A_1H} + \frac{BH}{B_1H} + \frac{CH}{C_1H} \geq 6$$

Với tam giác nào thì xảy ra dấu đẳng thức ?

(Đề 144 câu V – Bộ đề thi tuyển sinh)

THÊM TÍNH CHẤT...

(Tiếp theo trang 2)

Thí dụ 3 : Chứng minh rằng

$$\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x}dx \leqslant \frac{1}{200\pi}$$

Chứng minh :

$$I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x}dx = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{d\sin x}{x} =$$

$$= \frac{\sin x}{x}\Big|_{100\pi}^{200\pi} + \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x^2}dx$$

$$\leqslant \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}\Big|_{100\pi}^{200\pi} =$$

$$= \frac{1}{100\pi} - \frac{1}{200\pi} = \frac{1}{200\pi}$$

Tính chất 2 : Nếu $f(x) \equiv g(x)$ với $\forall x \in (a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Thí dụ 4 : Chứng minh rằng

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} C_n^i = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Chứng minh :

$$(1+x)^n = C_n^o + C_n^1 x + C_n^2x^2 + ... + C_n^n x^n$$

$$\Rightarrow \int_o^1 (1+x)^n\, dx =$$

$$= \int_o^1 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n)dx \Rightarrow$$

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_o^1 =$$

$$= \Big(C_n^0x + \frac{1}{2}C_n^1x^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\Big)\Big|_o^1$$

hay $\sum_{i=o}^{n} \frac{1}{i+1} C_n^i = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Thí dụ 5 : Chứng minh rằng

$$C_{2n}^0 - \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 - \frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... -$$

$$- \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n} = -\frac{1}{2n+1}.$$

Chứng minh : $(1-x)^{2n} =$

$$= C_{2n}^o - C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 - C_{2n}^3x^3 + ... -$$

$$... - C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

$$\Rightarrow \int_o^1 (1-x)^{2n}dx =$$

$$= \int_o^1 (C_{2n}^o - C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 - C_{2n}^3x^3 + ... -$$

$$... - C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n})dx$$

$$\frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\Big|_o^1 = \Big(1C_{2n}^ox - \frac{1}{2}C_{2n}^1x^2 + \frac{1}{3}C_{2n}^2x^3 -$$

$$... - \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}x^{2n} + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}x^{2n+1}\Big)\Big|_o^1.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2n+1} = 1\,.\,C_{2n}^o - \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 -$$

$$-\frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... - \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$$

Tính chất 3 :

$$\int_a^b f(x)g^{(n+1)}xdx = [fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} -$$

$$- f^{(3)}g^{(n-3)} + ... + (-1)^n f^{(n)}g]\Big|_a^b +$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_a^b f^{n+1}g\,dx,$$

ở đó $f(x)$, $g(x)$ và tất cả các đạo hàm của chúng là liên tục trên $[a, b]$.

Vận dụng tính chất này, ta đưa ra công thức khai triển Taylor của một hàm số !

Trong tính chất 3, khi ta lấy $g = (b - x)^n$ thì $g' = -n\,(b-x)^{n-1}$, $g'' = n(n-1)(b-x)^{n-2}$ ..., $g^{(n)} = (-1)^n n(n-1) ... 2.1$, $g^{(n+1)} = 0$. Khi $f(x)$ có $f'(x), f''(x), ..., f^{(n+1)}(x)$,

$$0 = [f(x)\,(-1)^n n! - f'(x)\,.\,(-1)^{n-1}n!\,(b-x) +$$

$$f''(x).(-1)^{n-2}\frac{n!}{2!}(b-x)^2 ... + (-1)^n(-f)^{n-1}f^{(n-1)}(x)$$

$$\frac{n!}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} +$$

$$+ (-1)^n f^{(n)}(x)\frac{n!}{n!}(b-x)^n\Big]\Big|_a^b +$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)dx =$$

$= (-1)^n\left[n!f(b) - n!f(a) - n!f'(x)(b-a) - \right.$
$\left.-\frac{n!}{2!}f''(a)(b-a)^2 \dots - f^{(n)}(a)(b-a)^n\right] +$

$+ (-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-a)^n dx.$

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

Thay b bởi x, x bởi t, ta có :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(x)}_{(a)}}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}_{(t)}(x-t)^n dt$$

Khi $x > a$: Kí hiệu $m = \min\limits_{a \leqslant t \leqslant x}\{f^{(n+1)}(t)\}$,

$M = \max\limits_{a \leqslant b \leqslant x}\{f^{(n+1)}(t)\}$.

Từ $\begin{cases} m(x-t)^n \leqslant f^{(n+1)}(t)(x-t)^x \leqslant M(x-t)^n \\ a \leqslant t \leqslant x \end{cases}$

suy ra $m\int_a^x (x-t)^n dt \leqslant \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

$\leqslant M\int_a^x (x-t)^n dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{m} \leqslant \frac{\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}{\frac{1}{n+1}\cdot(x-a)^{n+1}} \leqslant M.$$ Vậy có

$$c \in (a, x) \text{ để } f^{(n+1)}(c) = \frac{\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt}{\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}}.$$

Từ đó có công thức khai triển Taylor của $y = f(x)$ qua $x - a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

cho mọi $x > a$ với $f(x)$ có nghĩa và $a < c < x$. Tương tự cho $x < a$. Đặc biệt, khi $a = 0$ và ta cho n chạy ra vô tận, ta có :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Thí dụ 6. Cho $p(1) = 1$, $p(x) = p(1)p(x-1) + p(2)p(x-2) + \dots + p(n-1)p(1)$, $\forall\, n > 2$. Tính $p(n)$ theo n và chỉ ra $\frac{p(1)}{4} + \frac{p(2)}{4^2} + \dots + \frac{p(n)}{4^n} < \frac{1}{2}$, $\forall\, n \geqslant 1$.

Bài giải : Xét $f(x) = p(1)x + p(2)x^2 + \dots + p(n)x^n + \dots$ Khi đó $f^2(x) = [p(1)\,.\,p(1)]x^2 + [p(1)p(2) + p(2)p(1)]x^3 + \dots = f(x) - x$.

$$\Rightarrow f^2(x) - f(x) + x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Vì $f(0) = 0$, nên $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ với $x \leqslant \frac{1}{4}$.

Từ $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{1/2}$ suy ra :

$$f'(x) = (1-4x)^{-1/2}.$$

$$f''(x) = (-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1-4x)^{-3/2}, \dots \Rightarrow$$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2, \dots,$

$f^{(n)}(0) = 1.3.5\dots(2n-3)\,.\,2^{n-1}, \dots$ Vậy ta có :

$$p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \dots + p(x)x^x + \dots = f(x)$$
$$= 1\,x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{1.3}{3!}2^3x^3 + \dots +$$
$$+ \frac{1.3.5..(2n-3)}{n!}2^{n-1}x^n + \dots$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{1.3.5..(2n-3)}{n!}\cdot 2^{n-1} = \frac{1}{n-1}C_{2n-2}^{n-2}.$$

$$\text{Từ } \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{p(1)}{4} + \frac{p(2)}{4^2} + \dots + \frac{p(x)}{4^x} + \dots$$
$$\dots > \frac{p(1)}{4} + \frac{p(2)}{4^2} + \dots + \frac{p(x)}{4^x}.$$

Sau đây là một số bài tập để các bạn tự luyện :

1. Chứng minh rằng, nếu

$0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ thì $\cos x < 1 - \frac{x^2}{\pi}$.

2. Chứng minh rằng,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

3. Chứng minh rằng,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

$\forall\, n \geqslant 2$.

VỀ CÁCH NHÌN HÀM ... *(Tiếp theo trang 9)*

Nếu ta sử dụng $f(x) = x\ln x$ là hàm lồi trên mọi khoảng của nửa trục thực dương và bất đẳng thức (6) thì ta có thể tổng quát hóa bất đẳng thức ở ví dụ 1 như sau :

Tổng quát hóa ví dụ 1 : Cho a_i ; b_i $(i = \overline{1, n})$ là các số dương. Ta có bất đẳng thức sau :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right) \qquad (7)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi : $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$

Thực vậy, vì $f(x) = x\ln x$ là lồi trên mọi khoảng của nửa trục thực dương. Từ đó áp dụng (6) ta có :

$(m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n)\ln(m_1x_1 + ... + m_nx_n) \leqslant \leqslant m_1x_1\ln x_1 + ... + m_nx_n.\ln x_n$

$(m_i . 0 ; \sum_{i=1}^{n} m_i = 1)$

Với cách đặt : $\begin{cases} m_i = b_i / \sum_{i=1}^{n} b_i \ (i = \overline{1, n}) \\ b_ix_i = a_i \ \ (i = \overline{1, n}) \end{cases}$

Ta có ngay bất đẳng thức (7)

Ví dụ 2 : Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} . b^{\frac{b}{a+b+c}} . c^{\frac{c}{a+b+c}} \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)$$

Lời giải : Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right) . \ln a + \left(\frac{b}{a+b+c}\right) . \ln b + \left(\frac{c}{a+b+C}\right) . \ln c \geqslant$$

$\geqslant \ln \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$. Bất đẳng thức này tương đương với

$$\Leftrightarrow \frac{a\ln a + b\ln b + c\ln c}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right) \ln \left(\frac{a+b+c}{3}\right) \qquad (8)$$

Sử dụng : $f(x = x\ln x$ là hàm lồi trên mọi khoảng của nửa trục thực dương và sử dụng bất đẳng thức (6) ta sẽ chứng minh được bất đẳng thức (8)

Điều đặc biệt thú vị là từ ví dụ 2, nhờ bất đẳng thức (6) và kết quả $f(x) = x\ln x$ lồi với $x > 0$, ta lại tổng quát hóa được bất đẳng thức ở ví dụ 2. *Tổng quát hóa ví dụ 2 :* Cho a_i $(i = \overline{1, n})$ là các số thực dương. Khi đó ta có bất đẳng thức :

$$a_1^{\frac{a_1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}} . a_2^{\frac{a_2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}} \dots a_n^{\frac{a_n}{\sum_{i=1}^{n} a_i}} \geqslant \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (9)$$

Cách chứng minh bất đẳng thức (9) hoàn toàn tương tự với cách chứng minh bất đẳng thức ở ví dụ 2.

Vì khuôn khổ bài báo có hạn, chúng tôi xin dừng ở đây. Mời các bạn hãy làm các bài tập sau :

1°/ Chứng minh bất đẳng thức :

$\ln(x_1 + x_2/2) \geqslant \sqrt{\ln x_1 . \ln x_2}$ nếu $x_1, x_2 > 1$. Từ đó tổng quát hóa bài toán.

2°/ Chứng minh bất đẳng thức :

$$e^{a+b/2} \leqslant \frac{1}{2}(e^a + e^b) \ (a ; b > 0)$$

Từ đó hãy tổng quát hóa bài toán.

Gợi ý : Đối với bài 1°/ xét hàm lồi $f(x) = -\ln(\ln x)$. Đối với bài 2°/ xét hàm lồi $f(x) = e^x$

ĐẠI HỘI ĐẠI BIỂU TOÀN QUỐC LẦN THỨ III

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Ngày 3-12-1994 tại Hà Nội, Hội Toán Học Việt Nam đã tiến hành Đại hội đại biểu toàn quốc lần thứ III với 103 đại biểu chính thức. Đến dự với tư cách là khách của Đại hội có : Gs Hà Học Trạc, Chủ tịch Liên hiệp các hội KHVKT Việt Nam ; Bí thư thứ nhất Trung ương đoàn TNCS Hồ Chí Minh Hồ Đức Việt ; Gs Nguyễn Văn Đạo, Chủ tịch Hội Cơ học Việt Nam ; Gs Phan Đình Diệu, Chủ tịch Hội Tin học Việt Nam ; các Nhà giáo nhân dân : Nguyễn Thúc Hào, Ngô Thúc Lanh, Nguyễn Cảnh Toàn,...

Giáo sư Nguyễn Đình Trí, Chủ tịch Hội, đã đọc báo cáo tổng kết hoạt động của Hội trong nhiệm kỳ qua. Cho đến nay đã có 624 hội viên đăng ký chính thức. Hội đã góp phần đẩy mạnh các hoạt động của cộng đồng toán học. Hội đã tổ chức thành công nhiều hội nghị Toán học trong nước và quốc tế, đặc biệt là Hội nghị quốc tế về giải tích ứng dụng (TCAA – 93) với 60 khách quốc tế và gần 200 cán bộ toán trong cả nước. Hội đã tham gia xuất bản các tạp chí : "Acta Mathematica Vietnamica", "Toán học", "Vận trù học và phân tích hệ thống", "Toán học và Tuổi trẻ". Hội quan tâm đến quyền lợi hội viên và khuyến khích các tài năng trẻ. Nhiều nhà toán học Việt Nam đã đi trao đổi khoa học ở nước ngoài và tham dự các Đại hội toán học quốc tế tại Kyoto (1990), Zurich (1994),...

Hội đánh giá cao sự đóng góp của các hội viên trong việc bồi dưỡng học sinh có năng khiếu toán học và đạt nhiều giải cao trong các kì thi toán quốc tế.

Trong quan hệ quốc tế Hội đã gia nhập Hội Toán học quốc tế (1981) và Hội toán học Đông Nam Á (1990). Các Gs Phạm Hữu Sách, Đỗ Long Vân đã lần lượt được bầu làm Phó Chủ tịch Hội Toán học Đông Nam Á. Nhiều giáo sư nước ngoài đã sang thăm và làm việc với các nhà toán học nước ta. Hội sẽ xúc tiến chuẩn bị tổ chức Hội nghị giảng dạy Toán học khu vực Đông Nam Á vào năm 1996.

Đại hội đã bầu Ban chấp hành khoá III gồm 15 người như sau : Đặng Đình Áng, Phạm Kỳ Anh, Đinh Dũng, Nguyễn Quý Hỷ, Phan Quốc Khánh, Phạm Thế Long (Tổng Thư ký) ; Nguyễn Văn Mậu, Trần Văn Nhung, Lê Viết Ngư, Nguyễn Khoa Sơn, Trần Văn Tấn, Phan Đức Thành, Đào Trọng Thi, Đỗ Long Vân (Chủ tịch), Trần Đức Vân.

Các bạn trẻ yêu toán Việt Nam mong rằng càng ngày sự quan tâm của Hội tới việc học toán của tuổi trẻ, qua tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ" càng được chú ý đúng mức hơn.

LÊ THỐNG NHẤT

NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý KHI GỬI BÀI CHO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

• Bài cần đánh máy hoặc viết tay không dập xóa trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng.

• Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 6 trang đánh máy. Đề ra cần gửi kèm lời giải.

• Ghi đầy đủ họ và tên thật, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần.

• Ảnh gửi cho tạp chí phải là ảnh màu, cỡ nhỏ nhất là 9 × 12, không ép plastic. Sau ảnh ghi rõ nội dung ảnh và tên người chụp.

• Đối với bài giải dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng. Phía trên bên trái ghi số của bài, bên phải ghi họ tên và lớp, trường, huyện (quận), tỉnh (thành phố). Bài giải chỉ gửi về một địa chỉ : ***TCTHVTT 45B Hàng Chuối, Hà Nội.***

Ngoài phong bì ghi rõ : Dự thi giải toán số tạp chí...
Không gửi bài của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì.

• Thời hạn nhận bài giải là hai tháng tính từ cuối tháng ra số TC đó.

THVTT

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài THAY CHỮ BẰNG SỐ

$$\begin{array}{rrr} \begin{array}{r} HAM \\ +\quad HOC \\ \hline KHEN \end{array} & \quad \begin{array}{r} LUOI \\ -\quad HOC \\ \hline CHE \end{array} & \quad \begin{array}{r} NHAC \\ +\quad HOC \\ \hline CHAN \end{array} \\ \text{a)} & \text{b)} & \text{c)} \end{array}$$

Trước hết ta thấy $K = L = 1$ và để cho HOC có nghĩa thì $H \neq 0$. (1)

Vì CHE là một số chia hết cho 5 nên $E = 0$ hoặc $E = 5$. Nhưng từ b) ta thấy nếu $E = 0$ thì $H = 0$. Vậy $E = 5$ (2)

Từ a) và c) ta có $M + C = C + C = N$ (hoặc $1N$) suy ra $M = C$ (3). Từ đó và từ $A + O = A$; $A + O = E$ suy ra $A = E = 5$ (4)

Từ a), c) và (4) suy ra $O = 0$ hoặc $O = 9$. Nhưng nếu $O = 0$ thì $H + H$ không thể bằng $1H$ được (xem a). Vậy $O = 9$ (5). Và từ $H + H + 1 = 1H$ suy ra $H = 9$ (6)

Từ c) suy ra $N + 1 = C$ và $C + C = 1N$. Vậy ta có $N = 8$ và $C = M = 9$ (7)

Từ b) ta có $1U - (H + 1) = C$ hay $1U - 10 = 9$ suy ra $U = 9$ (8).

$I - C = E$ hay $I - 9 = 5$ Vậy $I = 4$ (9)

Các phép thay chữ bằng số từ (1) đến (9) cho ta :

$K = L = 1, E = A = 5, I = 4, N = 8, M = C = H = U = O = 9.$

Vậy ta có :

$$\begin{array}{r} 959 \\ +\quad 999 \\ \hline 1958 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1994 \\ -\quad 999 \\ \hline 995 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8959 \\ +\quad 999 \\ \hline 9958 \end{array}$$

(Dựa theo Nguyễn Đăng Phong, Lớp 6T, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi).

BÌNH PHƯƠNG

CHỈ HỎI MỘT CÂU, CÂU GÌ ?

Ở một xứ nọ, có hai làng A, B cạnh nhau, có tục lệ chung là : gặp khách lạ, dân làng chỉ trả lời câu hỏi của khách bằng cử chỉ *gật đầu* hay *lắc đầu* ; nhưng để trả lời "đúng đấy" thì dân làng A gật đầu, còn dân làng B lại lắc đầu ; ngược lại, để trả lời rằng "sai rồi" thì dân làng A lắc đầu trong khi đó dân làng B lại gật đầu.

Giả sử bạn đi du lịch đến một trong hai làng đó (không biết là làng nào), gặp một người dân của một trong hai làng đó (không biết là dân làng nào). Bạn có thể chỉ đặt *một câu hỏi* mà biết được mình đang ở làng nào không ?

H.C.

ISSN : 0866 - 8035.
Chỉ số 12884
Mã số : 8BT13M5

Sắp chữ tại Trung tâm Vi tính và
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 1 /1995

Giá : 1500d
Một nghìn năm trăm đồng