BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

# TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

12(210)
1994

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG


Giáo sư tiến sĩ NGUYỄN CẢNH TOÀN – Tổng biên tập đọc báo cáo tổng kết

*Đồng chí HỒ ĐỨC VIỆT, ủy viên Trung ương Đảng, Bí thư thứ nhất BCHTW Đoàn TNCS Hồ Chí Minh trao huy chương "VÌ THẾ HỆ TRẺ" cho các ông Trần Trâm Phương, Hoàng Chúng, Ngô Đạt Tứ.*


Phó tổng biên tập NGÔ ĐẠT TỨ công bố kết quả cuộc thi đặc biệt

Giáo sư HÀ HỌC TRẠC Chủ tịch Liên hiệp các hội KH và KT phát biểu ý kiến

Giáo sư NGUYỄN CẢNH TOÀN và MAI THANH BÌNH, bạn đọc đạt giải nhỏ tuổi nhất

Bí thư HỒ ĐỨC VIỆT trao phần thưởng của Qũy Hỗ trợ tài năng trẻ Việt Nam

*Trụ sở tòa soạn :*
**45B Hàng Chuối, Hà Nội** ĐT: 213786
**231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh** ĐT: 356111

*Tổng biên tập :* NGUYỄN CẢNH TOÀN
*Phó tổng biên tập :* NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHÚNG
*Biên tập và trình bày :* VŨ KIM THỦY

# LỄ KỈ NIỆM 30 NĂM BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

*Tường thuật*

Thời gian đã chuyển sang mùa Đông được gần một tháng nhưng thời tiết Hà Nội vẫn đang như mùa Thu. Sáng 26.11.1994 trời Hà Nội xanh trong báo hiệu một ngày đẹp.

Hội trường chính của Nhà xuất bản Giáo dục được trang hoàng rực rỡ để chào đón gần hai trăm đại biểu đến dự lễ kỉ niệm báo Toán học và tuổi trẻ tròn tuổi 30.

Đúng 8 giờ 30 các đại biểu đã tề tựu đông đủ và hàn huyên vui vẻ trước giờ khai mạc.

Về dự ngày vui của báo có giáo sư Hà Học Trạc, chủ tịch Liên hiệp các hội Khoa học và kĩ thuật Việt Nam, phó tiến sĩ *Hồ Đức Việt* bí thư thứ nhất Trung ương,Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, giáo sư *Nguyễn Đình Trí*, chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, giáo sư *Nguyễn Văn Đạo*, giám đốc Đại học Quốc gia Hà Nội, ông *Quế Liêm* vụ phó Vụ báo chí xuất bản ban Tư tưởng văn hóa Trung ương. Bộ trưởng *Hà Quang Dự* đã gửi lẵng hoa của Ủy ban thanh niên Việt Nam đến chúc mừng. Ban chấp hành TW Đoàn và Đại học Quốc gia cũng gửi lẵng hoa mừng báo. Tổng biên tập báo Tiền phong *Dương Xuân Nam* cùng đại biểu các cơ quan thông tấn và báo chí ở Trung ương và Hà Nội đã đến chia vui với báo THVTT. Nhiều đại biểu các Viện nghiên cứu, các trường đại học đã về dự. Đông đảo hơn cả là đội ngũ các cộng tác viên thân thiết của báo từ nhiều tỉnh, thành đã về mừng tờ báo thân yêu của mình tuổi 30. Giáo sư *Hoàng Chúng* cùng các đại biểu từ TP Hồ Chí Minh là những người đã vượt chặng đường xa nhất về dự ngày vui. Đại biểu của Nhà xuất bản Giáo dục, các ủy viên Hội đồng biên tập và cán bộ tòa soạn, những người trực tiếp và thường xuyên gắn bó với công việc của báo đã về dự đông đủ.

Đặc biệt, các bạn đọc tri kỉ của báo đã được giải trong kì thi từ Hà Nội, Hà Tây, Thanh Hóa đem đến cho ngày hội một sắc thái trẻ trung, sinh động.

Sau khi phó giáo sư *Vũ Dương Thụy* giới thiệu chương trình, giáo sư tiến sĩ *Nguyễn Cảnh Toàn* – tổng biên tập đầu tiên và liên tục suốt 30 năm qua – đã đọc báo cáo. Tất cả mọi người bồi hồi xúc động nhớ lại những ngày đầu tiên ra báo trong hoàn cảnh chiến tranh ác liệt. Những thành công và những điểm yếu của báo đã được đề cập. Báo cáo cũng nêu những phương hướng để trong một tương lai không xa báo có thể phát triển mạnh mẽ, đổi mới về nội dung và hình thức, đáp ứng được những đòi hỏi lớn lao và chính đáng của độc giả.

Những thành tích và vai trò của báo đối với xã hội đã được khẳng định. 10 năm trước đây, báo đã được tặng thưởng huân chương lao động hạng Nhì, còn giáo sư TBT đã được tặng Huy chương "Vì thế hệ trẻ". 10 năm vừa qua lại khẳng định thêm thành tích của báo và lần này Ban bí thư TW Đoàn TNCS Hồ Chí Minh đã quyết định trao tặng Huy chương "Vì thế hệ trẻ" cho giáo sư *Hoàng Chúng*, ông *Ngô Đạt Tứ*, hai phó tổng biên tập của báo và ông *Trần Trâm Phương*, giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục. Thay mặt ban bí thư TW Đoàn, Bí thư thứ nhất TW Đoàn TNCS Hồ Chí Minh đã trao huy chương.

Quỹ Hỗ trợ tài năng trẻ Việt Nam cũng đã trao Bằng khen và tặng phẩm trị giá gần 2 triệu đồng cho 8 học sinh đoạt giải cao nhất của *Cuộc thi đặc biệt* chào mừng *30 năm TC THVTT*. Các ông *Hồ Đức Việt, Hà Học Trạc, Nguyễn Đình Trí* đã trao bằng khen và tặng phẩm của Quỹ và Bằng danh dự giải thưởng cuộc thi cho hơn mười bạn nhỏ thay mặt cho các bạn đoạt giải.

Phát biểu ý kiến trong buổi lễ các giáo sư *Hà Học Trạc* và *Nguyễn Đình Trí* đã đánh giá cao những cố gắng của tạp chí và khuyên các em học sinh hãy tiếp tục làm toán và các em giỏi hãy chọn con đường nghiên cứu toán học.

Mọi người đều xúc động khi nghe ý kiến phát biểu của Nhà giáo *Lê Quốc Hán*, bạn đọc thủy chung và cộng tác viên suốt gần 30 năm của báo, của giáo sư tiến sĩ *Trần Văn Nhung*, chủ tịch hội toán học Hà Nội, nguyên là học sinh đoạt giải của báo từ thuở ban đầu. Em *Nguyễn Anh Tú* nguyên học sinh 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội đoạt giải xuất sắc của cuộc thi thay mặt các bạn đọc nhỏ tuổi tâm sự với các thầy, các bạn.

Buổi lễ kết thúc mà mọi người còn cảm thấy như thiếu thiếu điều gì. Nhiều đại biểu còn lưu lại trò chuyện như chưa muốn về.

Một ngày đẹp của Hà Nội. Một ngày thật vui và đáng nhớ của báo Toán học và tuổi trẻ.

VŨ KIM THỦY

# CỘNG TÁC VIÊN VÀ BẠN ĐỌC NGHĨ VỀ BÁO

## CÔNG LAO VÀ ĐÓNG GÓP CỦA TẠP CHÍ

**(Trích phát biểu của giáo sư *Trần Văn Nhung*)**

... Tháng 10 năm 1965, chúng tôi, những học sinh chuyên toán lớp 9 khóa I của Đại học Tổng hợp Hà Nội, được làm quen với báo "TH và TT" trên khu sơ tán Bắc Thái xa xôi. Cùng với cuốn Tuyển tập các bài toán thi vô địch Matxcơva, tờ Tạp chí là những tài liệu gối đầu giường của những học sinh chuyên toán chúng tôi.

Ngày ấy tôi đọc tiếng Nga còn bập bẹ lắm, thành ra tờ tạp chí xem như là người bạn Việt Nam, gần gũi hơn, còn cuốn sách thì hay đấy, nhưng dẫu sao cũng chỉ như một người bạn nước ngoài mới quen. Chúng tôi cùng nhau háo hức đọc tờ Tạp chí và giải bài Đề ra kì này bên ngọn dèn dầu, dưới mái nhà tranh hoặc dưới hầm trú ẩn ở khu sơ tán.

... Chúng ta đều rõ công lao và đóng góp của Tạp chí "TH và TT" trong sự nghiệp giáo dục nói chung, trong giáo dục toán học nói riêng cho thế hệ trẻ Việt Nam suốt 30 năm qua thật là to lớn, rất đáng trân trọng và cần được ghi nhận. Chắc không thể tìm được một giáo sư, một tiến sĩ toán học nào ở tuổi dưới 45, một giáo viên toán phổ thông xuất sắc nào, một học sinh đoạt giải Olympic toán học quốc gia và quốc tế nào trong 30 năm qua mà lại không phải là một bạn đọc chăm chỉ của Tạp chí "TH và TT"...

## BA MƯƠI NĂM – MỘT MỐI TÌNH

**(Trích phát biểu của nhà giáo *Lê Quốc Hán*)**

... Ba mươi năm qua, cùng với những biến đổi của cuộc sống, báo TH và tuổi trẻ đã có những bước thăng trầm. Nhưng nhờ sự nỗ lực của các anh chị trong ban biên tập và trị sự, các cơ quan hữu trách mà báo có được khuôn mặt đẹp đẽ như ngày nay. Điều đáng quí là dù trong hoàn cảnh nào, chúng tôi, những cộng tác viên xa Hà Nội vẫn luôn luôn nhận được sự giúp đỡ chân thành, cởi mở của các anh, chị trong Tòa soạn. Vẫn còn đây những bức thư đầy ân tình của các thầy *Hoàng Chúng, Trần Thành Trai, Nguyễn Văn Ngân, Phạm Quang Giám*. Vẫn còn đó những nét mặt cởi mở, chân thành của các anh *Ngô Đạt Tứ, Vũ Kim Thủy*... Nhờ vậy chúng tôi luôn luôn xem Tòa soạn như mái ấm gia đình của mình. Hôm nay, nhân 30 năm tạp chí TH và TT thay mặt các bạn đã từng tham gia giải toán, ra đề và viết bài cho Tạp chí chúng tôi xin chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo và các bạn đã cống hiến sức mình làm cho tờ Tạp chí chúng ta ngày càng khởi sắc, góp phần giữ cho ngọn lửa yêu toán của chúng tôi luôn rực sáng. Cuối cùng mong tạp chí TH và TT mãi mãi là nhịp cầu nối giữa những người yêu toán trên mọi miền đất Việt thân yêu...

## MỖI SỐ BÁO LÀ MỘT MÓN QUÀ QUÝ GIÁ

**(Trích bài phát biểu của *Nguyễn Anh Tú* nguyên học sinh 9H PTCS Trưng Vương, đoạt giải xuất sắc phát biểu trong buổi lễ trao thưởng)**

... Qua báo toán, chúng em không chỉ học được những bài toán hay với lời giải độc đáo mà còn học được những phương pháp học tập tốt đạt hiệu quả cao.

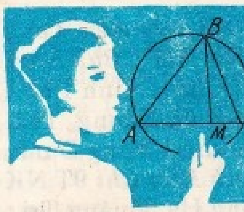
Mỗi số báo mới là một món quà quý giá. Từ đó em được biết những kiến thức mới, những thông tin bổ ích về toán học trong nước và trên thế giới ; biết lại những gì đã biết một cách sâu sắc hơn. Với sự giúp đỡ của báo, chúng em học toán ngày một tiến bộ. Chúng em mong rằng báo sẽ ngày một phong phú hơn và có những thông tin mới, hấp dẫn hơn nữa để trở thành nhịp cầu nối kết những người bạn trẻ yêu toán...

## BÁO ĐẸP HƠN, PHÁT HÀNH ĐỀU ĐẶN VỚI SỐ LƯỢNG LỚN HƠN

**(Trích thư của nhà giáo *Vũ Quốc Lương* PTCS Chu Văn An gửi tới tòa soạn)**

... Hiện nay trong không khí đổi mới và phát triển của cả nước, báo THVTT cũng hòa nhịp chung với sự phát triển đó : Tờ báo ngày nay đẹp hơn, phát hành đều đặn với số lượng lớn hơn, các bài viết có chất lượng ngày càng tốt hơn. Phải nói rằng đó là một nỗ lực rất lớn của ban biên tập còn quá ít ỏi (2 người) cùng những trang thiết bị còn hạn chế, thiếu thốn. Bộ Giáo dục và Nhà xuất bản Giáo dục cần đầu tư thêm người và phương tiện cho báo THVTT để báo có thể làm tốt được nhiệm vụ của mình trong giai đoạn mới... Báo cần có những bài viết gần gũi với trình độ toán của học sinh phổ thông hơn, để tờ báo có thể trở thành một tài liệu "cập nguyệt" của học sinh trong cả nước.

Là một độc giả trung thành của báo trong suốt 30 năm, tôi xin kính chúc báo THVTT ngày càng phát triển và vững mạnh, xứng đáng là một đòn bẩy trong việc giáo dục, đào tạo bồi dưỡng, phát hiện các tài năng trẻ toán học trong cả nước.




# GIẢI BÀI kì trước

**Bài T1/206 :** *Chứng minh rằng có vô số số chính phương viết ở dạng $2n^2+2$ và $2n^2-1$.*

**Lời giải.** của bạn *Bùi Quang Minh*, 9A$_1$, PTCS Giảng Võ, HN xét phương trình nghiệm nguyên

$$2x^2-1=y^2 \qquad (1)$$

ta thấy (1) $\Leftrightarrow (2x)^2=2y^2+2$.

Vậy bài toán đưa về việc chứng minh (1) có vô số nghiệm.

Từ (1) ta thấy $y$ là một số lẻ : $y=2m+1$, $m\in Z^+$

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2-1=(2m+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2m^2+2m+1=x^2 \qquad (2)$$

Xét dãy các cặp số nguyên $(m_k, x_k)$ xác định như sau :

$$\begin{cases} m_1=3\,;\,x_1=5 \\ m_{k+1}=3m_k+2x_k+1 \\ x_{k+1}=4m_k+3x_k+2 \quad \forall k=1,2,\ldots \end{cases}$$

Dễ thấy $(m_1, x_1)$ là một nghiệm của (2).

Giả sử $(m_k, x_k)$ là một nghiệm của (2). Khi đó :

$$2m_{k+1}^2+2m_{k+1}+1=2(3m_k+2x_k+1)^2=$$
$$=2(3m_k+2x_k+1)+1$$
$$=18m_k^2+8x_k^2+24m_kx_k+18m_k+12x_k+5$$
$$=(4m_k+3x_k+2)^2+2m_k^2+2m_k+1-x_k^2$$
$$=x_{k+1}^2 \text{ (vì } 2m_k^2+2m_k+1-x_k^2=0)$$

Chứng tỏ $(m_{k+1}, x_{k+1})$ là một nghiệm của (2).

Mặt khác ta có $m_{k+1}>m_k$, $x_{k+1}>x_k$ $\forall k=1,2\ldots$

Vậy (2) có vô số nghiệm tức (1) có vô số nghiệm. Đpcm.

**Nhận xét :** Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Nguyễn Long*, 9H, PTCS Trưng Vương, Hà Nội ; *Lê Tiến Đạt*, 9, Chuyên Văn Toán, Thường Tín, Hà Tây : *Trần Lê Nam ; Nguyễn Hữu Hội*, 9T, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Nguyễn Lê Lực*, 9A, PTCS Đầm Dơi, Minh Hải.

TỐ NGUYÊN

**Bài T2/206.** *Cho a, b, c là ba số thực sao cho biểu thức ở vế trái của (1) luôn luôn có nghĩa. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c-a}+\frac{b^2(c-a)}{c+a-b}+\frac{c^2(a-b)}{a+b-c}+$$
$$+\frac{(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}=0 \qquad (1)$$

**Lời giải.** Nếu $a=b$ hay $b=c$ hay $c=a$ thì dễ dàng kiểm tra (1) đúng. Với $a, b, c$ đôi một khác nhau, ta có hằng đẳng thức :

$$\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+$$
$$+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c^2}{(c-b)(c-a)(x-c)}$$

Thay $x=\dfrac{a+b+c}{2}$, ta có :

$$\frac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}=$$
$$=\frac{a^2}{(a-b)(b+c-a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-c)(c+a-b)}+$$
$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(a+b-c)}$$

Nhân 2 vế với biểu thức khác không $(a-b)(b-c)(c-a)$, ta có đpcm.

**Nhận xét.** Có 27 bạn gửi lời giải về tòa soạn. Phần lớn các bạn đều giải đúng nhưng diễn đạt còn dài dòng. Có bạn mắc sai lầm do áp dụng điều khẳng định đối với biểu thức nguyên vào phân thức. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Trần Anh Sơn* (8M Marie Curie – Hà Nội), *Phạm Huy Tùng* (Bế Văn Đàn – Đống Đa – Hà Nội), *Lưu Văn Thịnh* (9CT Năng khiếu Thiệu Yên – Thanh Hóa), *Bùi Nam Phương* (9A. Chuyên Phong Châu Vĩnh Phú)

ĐẶNG VIÊN

**Bài T3/206.** *Cho tam thức bậc hai*

$$f(x)=x^2+px+q$$

*ở đó p, q là các số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k để*

$$f(k)=f(1994)f(1995)$$

**Lời giải** (của bạn Phạm Anh Tuấn, 9T Lam Sơn, Thanh Hóa)

Ta chứng minh rằng với mọi x ta có

$$f(f(x)+x)=f(x)\,f(x+1)$$

thật vậy

$$f(f(x)+x)=(f(x)+x)^2+p(f(x)+x)+q$$
$$=f^2(x)+2f(x)x+x^2+pf(x)+px+q$$

$= f(x)\,[f(x) + 2x + p] + (x^2 + px + q)$

$= f(x)[q + p(x+1) + x^2 + 2x + 1]$

$= f(x)[(x+1)^2 + p(x+1) + q] = f(x)f(x+1)$

Với $x = 1994$ đặt $k = f(1994) + 1994$

k là số nguyên và $f(k) = f(1994)f(1995)$.

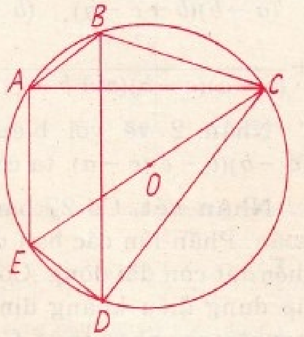
**Nhận xét :** Nhiều bạn có lời giải tốt như : *Nguyễn Văn Cường* 7M Mari Quyri, *Trần Trung Nghĩa* (9, Trần Đăng Ninh) *Trịnh Kim Chi* (9 NK Hà Tĩnh), *Trần Phương* (9 Giảng Võ, Hà Nội), *Phạm Thái Hà* (9 Toán, Đông Hưng, Thái Bình), *Trần Anh Sơn* (8, Mari Quyri), *Vũ Thành Nam* (8H, Trưng Vương Hà Nội), *Tạ Quang Vương* (9 Quảng Ngãi), *Nguyễn Thu Thủy* (9 Hải Hưng). Tuy vậy đáng tiếc cũng có hai bài giải sai

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T4/206.** *Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Chứng minh rằng nếu $AB^2 + CD^2 = 4R^2$ thì $AC \perp BD$.*

**Lời giải**

1) Nếu 1 trong 2 đường chéo hoặc cả hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ đi qua $O$ dễ dàng chứng minh được $AC \perp BD$.




2) Nếu không có đường chéo nào qua $O$ :

Nối $C$ với $O$ kéo dài cắt $(O)$ tại $E$

Ta có $\widehat{CDE} = 90^o$

$\Rightarrow CD^2 + DE^2 = CE^2 = 4R^2$

Cùng với giả thiết $\Rightarrow DE = AB$.

$\Rightarrow AE \,//\, BD$. Mà $\widehat{CAE} = 90^o \Rightarrow BD \perp AC$.

**Nhận xét :**

1) Hầu hết các bạn không xét trường hợp 1) mà mặc nhiên công nhận $E \neq D$.

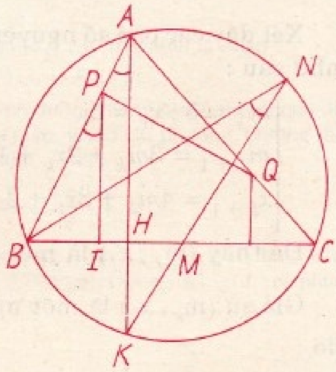
2) Các bạn có lời giải tốt : *Nguyễn Hồng Sơn*, 9T, Năng khiếu Ý Yên, *Trần Trung Nghĩa* 9T Trần Đăng Ninh, Nam Hà ; *Đặng Quốc Khánh* 9A PTDL Lương Thế Vinh, *Mai Thanh Bình* 8M PTDL Mari Quyri, *Trần Phương, Bùi Quang Minh* 9A$_1$, Giảng Võ, *Phạm Huy Tùng* PTCS Bế Văn Đàn, *Vũ Thành Nam, Nguyễn Tường Minh, Trần Bằng* 8H, *Nguyễn Long* 9H PTCS Trưng Vương, Hà Nội ; *Bùi Nam Phương* 9A Chuyên Phong Châu, Vĩnh Phú ; *Đào Thiện Hiệp* 9TChuyên Kiến Xương, Thái Bình ; *Vũ Thị Hồng* tổ 12A khu 1 Vàng Danh, Uông Bí, Quảng Ninh ; *Trịnh Kim Chi* 9T NK Hà Tĩnh ; *Lê Huy* 9NK Đông Hà, Quảng Trị ; *Võ Thanh Tùng* 9CT Quốc học Huế ; *Nguyễn Hữu Hội, Tạ Quang Vương, Trần Lê Nam* 9T, Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Lê Như Thạch* PTTH Ngô Quyền, Đồng Nai, *Trần Hữu Nhơn*, 9T Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long ; *Nguyễn Lê Hồng Minh* 7A$_2$ Bồi dưỡng giáo dục ; *Nguyễn Lê Lực* 9A$_1$ cấp II thị trấn Đầm Dơi, Minh Hải.

VKT

**Bài T5/206.** *Cho tam giác ABC nhọn và điểm M chuyển động trên đường thẳng BC. Vẽ trung trực của các đoạn BM và CM tương ứng cắt các đường thẳng AB và AC tại P và Q. Chứng minh rằng đường thẳng qua M và vuông góc với PQ đi qua một điểm cố định.*

**Lời giải.**

Hạ đường cao $AH$, gọi $I$ là trung điểm của $BM$ và $N$ là điểm đối xứng với $M$ qua $PQ$. Giả sử $M$ không trùng vào $H$, ta có 2 đường thẳng $MN$, $AH$ cắt nhau tại điểm $K$. Do tính chất đối xứng nên ta có $PM = PB = PN$ và $B$, $M$, $N$ nằm trên đường tròn $(P\ ;\ PB)$. Suy ra




$\widehat{BNK} = \frac{1}{2}\ \widehat{BPM} = \widehat{BPI} = \widehat{BAK}$, và bốn điểm $N$, $A$, $B$, $K$ nằm trên cùng một đường tròn. Tương tự, bốn điểm $N$, $A$, $C$, $K$ cũng nằm trên cùng 1 đường tròn. Từ đó suy ra $K$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$. Hơn nữa $AK \perp BC$ nên $K$ cố định.

Khi $M$ trùng vào $H$ thì hai đường thẳng $MN$, $AN$ trùng nhau và đường thẳng $MN$ cũng đi qua $K$. Vậy $K$ là điểm cần tìm.

**Nhận xét.** Các bạn gửi lời giải về tòa soạn đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Xuân Thanh* (9A – PTCS Bế Văn Đàn – Hà Nội), *Trần Phương* (9A, Giảng Võ – Hà Nội), *Mai Thanh Bình* (8M – Marie Curie – Hà Nội), *Phạm Thái Hà* (9T. PTCS Phạm Huy Quang – Đông Hưng – Thái Bình).

ĐẶNG VIỄN

**Bài T6/206.** *Giả sử $F_k$ là số hạng thứ k của dãy Fibonaci 1, 1, 2, 3, 5, 8,... Chứng minh rằng với mọi n số :*

$$4F_{n-2}F_nF_{n+2}F_{n+4}+9$$

*là một số chính phương*

**Lời giải** (của bạn *Đặng Việt Dũng* ĐHSP Hà Nội 1, *Nguyễn Hoành* 10CT Phan Bội Châu Nghệ An).

Ta hãy chứng minh

$$v_n = |F_{n+4}F_{n-2} - F_{n+2}F_n| = 3 \ (*)$$

Thật vậy

$$v_n = |(F_{n+3}+F_{n+2})F_{n-2} - F_{n+2}F_n|$$
$$= |F_{n+3}F_{n-2} - F_{n+2}F_{n-1}|$$
$$= |F_{n+3}(F_{n-1} - F_{n-3}) - F_{n+2}F_{n-1}|$$
$$= |F_{n+3}F_{n-3} - F_{n-1}(F_{n+3} - F_{n+2})|$$
$$= |F_{n+3}F_{n-3} - F_{n+1}F_{n-1}| = v_{n-1}$$

Vậy $v_n = v_3 = |F_7F_1 - F_5F_3| = 3$

Từ đó $4F_{n-2}F_nF_{n+2}F_{n+4}+9 =$

$$4F_nF_{n+2}(F_nF_{n+2}\pm 3)+9 = (2F_nF_{n+2}\pm 3)^2.$$

**Nhận xét :** 1) Một số bạn chứng minh hệ thức (*) bằng cách dùng công thức số hạng tổng quát của dãy Fibônaci

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Rất hoan nghênh bạn Nguyễn Xuân Thắng (Đông Hà Quảng Trị) đã đề xuất và giải ngắn gọn bài toán tổng quát :

"Chứng minh rằng với mọi $k, l \in Z^+$ thì

$4F_nF_{n+k}F_{n+k+l}F_{n+2k+l}+F_k^2F_{k+l}^2$ là số chính phương"

Với $k = l = 2$ ta có bài T6/206 nói trên.

2) Bài này được rất đông bạn tham gia giải. Các lời giải tốt bao gồm lời giải của các bạn : *Hồ Sỹ Hiền* (Quảng Trị) *Bùi Quang Minh* (9A Giảng Võ), *Lê Văn Mạnh* (Hoàng Văn Thụ Hòa Bình) *Nguyễn Hoàng Công* (11, Quảng Ngãi), *Nguyễn Ngọc Kiên* (10A Thái Bình), *Lê Hoàng Linh*, *Nguyễn Bá Hùng* (ĐHTH Hà Nội)

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T7/206.** *Xét hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn các tính chất sau đây :*

1) $|f(u) - f(v)| < |u - v| \ \forall u \neq v$

2) $f(f(f(1992^{19^5}))) = 1992^{19^5}$

*Tìm giá trị $f(1992^{19^5})$.*

**Lời giải :** Điều kiện 1) có thể viết lại dưới dạng :

$|f(u) - f(v)| \leqslant |u - v|$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow u = v$ (1)

Đặt $f(1992^{19^5}) = x$, $f(x) = y$. Theo 2) ta có $f(y) = 1992^{19^5}$.

Do đó :

$$|x - 1992^{19^5}| \geqslant |f(x) - f(1992^{19^5})| =$$
$$= |y - x| \geqslant |f(y) - f(x)| =$$
$$= |1992^{19^5} - y| \geqslant |f(1992^{19^5}) - f(y)| =$$
$$= |x - 1992^{19^5}|.$$

Suy ra, ở tất cả các bất đẳng thức trên phải đồng thời xảy ra dấu "=". Theo (1), điều đó có được khi và chỉ khi $x = 1992^{19^5} = y$. Vậy $f(1992^{19^5}) = 1992^{19^5}$

**Nhận xét :** Tòa soạn nhận được lời giải của 90 bạn gửi tới. Hầu hết các bạn có lời giải đúng. Tuy nhiên, không ít bạn cho lời giải quá rườm rà, cồng kềnh.

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T8/206 :** *Chứng minh rằng :*

$$\cos\frac{8\pi}{35} + \cos\frac{12\pi}{35} + \cos\frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} + \frac{\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\pi}{5}.$$

**Lời giải :** Ta có :

$$\cos\frac{8\pi}{35} + \cos\frac{12\pi}{35} + \cos\frac{18\pi}{35} =$$
$$= \cos\left(\frac{3\pi}{7} - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7} - \frac{\pi}{5}\right)$$
$$= \left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right)\cos\frac{\pi}{5} +$$
$$+ \left(\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{5} \quad (1)$$

Mặt khác, ta có :

$$\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) \cdot 2\sin\frac{\pi}{7} =$$
$$= \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7} +$$
$$+ \sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\left(\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)^2 =$$
$$= \sin^2\frac{4\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} +$$
$$+ 2\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} - 2\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} -$$

$- 2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{8\pi}{7}\right) +$

$+ \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{7}\right) +$

$+ \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} +$

$+ \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} =$

$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{7}{4}$

(theo (2))

$\Rightarrow \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ (3)

(vì $\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$ ).

Từ (1), (2) và (3) ta có Đpcm.

**Nhận xét :** Có nhiều bạn tham gia giải bài. Đa số các bạn đã giải Bài toán theo cách trên. Các bạn có lời giải tốt : *Lê Văn Mạnh* (11CT, Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình) ; *Phạm Đình Trường* (10 CT, Trần Phú, Hải Phòng), *Ngô Đức Duy* (11CT, Trần Phú, Hải Phòng) ; *Phạm Lê Hùng* ($A_o$10 PTCT ĐHTH Hà Nội) ; *Nguyễn Việt Kiên* (12A, Nga Sơn II, Thanh Hóa), *Nhữ Quí Thơ, Lê Minh Hiếu* (11T, Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Phạm Hồng Linh* (10T, Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Hồ Sĩ Hiền, Nguyễn Văn Thanh, Nguyễn Xuân Thắng, Hoàng Kim Long, Nguyễn Quang Ngọc* (Quảng Trị) ; *Nguyễn Hoàng Công, Nguyễn Chí Linh* (11T, Lê Khiết, Quảng Ngãi) ; *Phan Hoàng Việt* (12A, Quốc học Qui Nhơn, Bình Định) ; *Lê Như Thạch* (12CT, Ngô Quyền, Đồng Nai) ; *Nguyễn Xuân Hùng* (12CT, Buôn Ma Thuột, Đaklak) *Ngô Đăng Hà An* (12A, Lê Quí Đôn, Long An) ; *Lăng Lâm Huy Hoàng* ($12A_1$, Bạc Liêu, Minh Hải) và *Võ Hoàng Trung* (12A, Trà Vinh).

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T9/206.** *M là một điểm nằm trong mặt phẳng của đa giác đều $A_1A_2 ...A_n$ có tâm O. Gọi $M_1, M_2, ..., M_n$ lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của M trên các đường thẳng chứa các cạnh $A_1A_2$, $A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ và $A_nA_1$ của đa giác đã cho, và G là trọng tâm của hệ các điểm $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$. Chứng minh rằng :*

*1)* $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{O}$

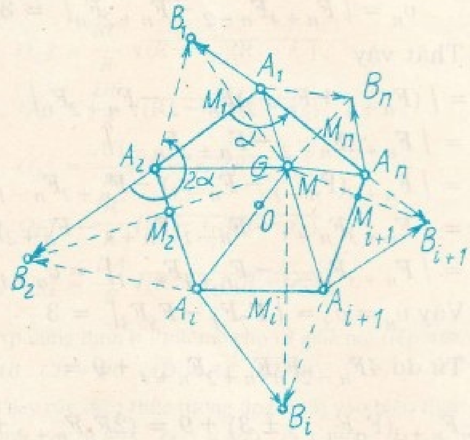
*2) G là trung điểm của OM*

**Lời giải**

1) Kí hiệu $f = Q_{\frac{2\pi}{n}}$ là phép quay véctơ góc $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ và qui ước $A_{n+1}$ là $A_1$. Vì $(\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OA_{i+1}}) = \frac{2\pi}{n}$, nên nếu $A_1A_2...A_n$ có hướng dương (xem hình vẽ...) thì : $\overrightarrow{OA_{i+1}} = f(\overrightarrow{OA_i}), \forall i = \overline{1,n}$ Do đó :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} [f(\overrightarrow{OA_i})] = f(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}),$$

nghĩa là : $\vec{s} = f(\vec{s})$, trong đó ta đã đặt : $\vec{s} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}$. Điều đó chứng tỏ $\vec{s} = \vec{o}$. Thật vậy, nếu $\vec{s} \neq \vec{o}$ thì $(\vec{s}, f(\vec{s})) = (\vec{s}, \vec{s}) = $ o, trái với $(\vec{s}, f(\vec{s})) = \frac{2\pi}{n}$.




2) Gọi $B_i$ là điểm đối xứng của M qua đường thẳng $A_iA_{i+1}$, cũng có nghĩa $B_i$ là ảnh của $M_i$ trong phép vị tự $V_{M,k=2}$ tâm $M$, tỉ số $k = 2$. Dễ thấy rằng :

$(\overrightarrow{A_iB_i}, \overrightarrow{A_iB_{i-1}}) =$

$= 2[(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{A_iM}) + (\overrightarrow{A_iM}, \overrightarrow{A_iA_{i-1}})] =$

$= 2(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}) = 2\alpha = 2\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi$

Suy ra : $\overrightarrow{A_iB_{i-1}} = f'(\overrightarrow{A_iB_i}), \forall i = \overline{1,n}$

trong đó $f' = Q_{2\alpha}$ là phép quay véctơ góc

$$2\alpha = 2\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi.$$

Do đó : $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_{i-1}} =$

$= \sum_{i=1}^{n} [f'(\overrightarrow{A_iB_i})] = f'(\sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{A_iB_i})$, nghĩa là :

$\vec{v} = f'(\vec{u})$, trong đó ta đã đặt : $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i}$

và $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_{i-1}}$.

Nhưng, lại có (xét đa giác $A_1B_1A_2B_2...A_iB_i...A_nB_nA_1$) :

$\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v} = \vec{o}$, nghĩa là : $\vec{u} = \vec{v}$ Từ đó, ta được : $\vec{u} = f(\vec{u})$

Lý luận tương tự như trên (1), ta đi đến kết luận : $\vec{u} = \vec{v} = \vec{o}$ nghĩa là :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OB_i} - \overrightarrow{OA_i}) = \vec{O} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OB_i} = \sum \overrightarrow{OA_i} = \vec{O}$$

Điều đó chứng tỏ rằng O cũng là trọng tâm của hệ điểm $\{B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B_n\}$.

– Cuối cùng, vì phép vị tự $V_{M,k'} = \frac{1}{2}$, biến $B_i$ thành $M_i$ $(i = \overline{1,n})$ nên cũng biến trọng tâm O của hệ điểm $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ thành trọng tâm $G$ của hệ điểm $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$. Vậy ta được : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$, nghĩa là $G$ là trung điểm của $OM$ (đ.p.c.m).

**Nhận xét.** 1°) Để chứng minh $\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = \vec{O}$, có thể lập luận rằng $\vec{s}$ cộng tuyến với mọi véctơ $\overrightarrow{OA_i}$ $(i = \overline{1,n})$ do $OA_i$ là trục đối xứng của đa giác $A_1A_2 ... A_n$.

2°) Để chứng minh $G$ là trung điểm của $OM$, ngoài cách diễn tả $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$, còn có thể thay bởi : $n\overrightarrow{MG} = \frac{n}{2}\overrightarrow{MO}$, hay là : $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + ... + \overrightarrow{MM_n} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + ... + \overrightarrow{MA_n})$. Với ý tưởng này, bạn Phan Hoàng Việt (lớp 12A, trường Quốc học Qui Nhơn) và một số bạn nữa đề xuất cách giải sau : Qua $M$ kẻ đường song song với cạnh $A_iA_{i+1}$ của đa giác đều. Đường song song này cắt hai đường thẳng chứa hai cạnh $A_{i-1}A_i$ và $A_{i+1}A_{i+2}$ (cùng liền kề với cạnh $A_iA_{i+1}$) lần lượt ở $D_i$ và $C_i$ thì

$$\overrightarrow{MM_i} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC_i} + \overrightarrow{MD_i}) \text{ và } \overrightarrow{MC_i} + \overrightarrow{MD}_{i+1} = \overrightarrow{MA}_{i+1}.$$

Từ đó suy ra $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{MM_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{MA_i}$ (đ.p.c.m).

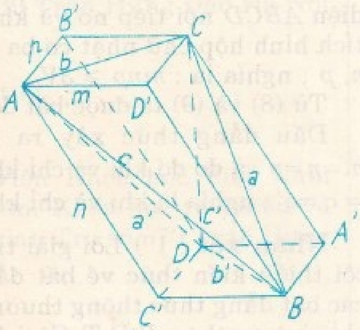
**Nhận xét :** Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả *Phạm Minh Phương*, 11A ĐHSPHN1, *Lê Anh Vũ* 11CT Quốc học Huế, *Trần Hiền Thanh*, 10 Trường Đào Duy Từ, Quảng Bình, *Bùi Nguyên Minh*, 10A, PTTH chuyên Thái Bình, *Phạm Đình Trường 10CT Trần Phú, Hải Phòng*, Phan Hoàng Việt, *12A, Quốc học* Quy Nhơn

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

**Bài T10/206.** *Gọi a, a' ; b, b' và c, c' là độ dài các cặp cạnh đối diện của một tứ diện có thể tích V. Chứng minh rằng :*

$$36V\sqrt{2} \leqslant a^3 + a'^3 + b^3 + b'^3 + c^3 + c'^3$$

**Lời giải.** (Dựa theo *Phạm Mạnh Quang*, 11T, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa). Dựng hình hộp $AB'CD'.C'DA'B$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, mỗi cạnh của tứ diện là một trong hai đường chéo của một mặt của hình hộp (x.hình...). Đặt : $AD' = m$, $AC' = n$, $AB' = p$ và $BC = a$, $DA = a'$ ; $CA = b$, $DB = b'$ ; $AB = c$, $DC = c'$. Thế thì ta có : $a^2 + a'^2 = 2(n^2 + p^2)$.




Từ đó suy ra :

$$(a^2 + a'^2)\sqrt{\frac{a^2 + a'^2}{2}} =$$

$$= 2(n^2 + p^2)\sqrt{n^2 + p^2} \geqslant 4\sqrt{2}\ np\sqrt{np}\ ; (1)$$

Mặt khác, ta có bất đẳng thức :

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + a'^3}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{a^2 + a'^2}{2}}\ ; (*)$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức :

$$a^3 + a'^3 \geqslant (a^2 + a'^2)\sqrt{\frac{a^2 + a'^2}{2}}\ ; \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + a'^3)^2 \geqslant \left[(a^2 + a'^2)\sqrt{\frac{a^2 + a'^2}{2}}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow a^6 + a'^6 + 4a^3a'^3 - 3a^4a'^2 - 3a^2a'^4 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (a - a')^2(a^4 + 2a^3a' + 2aa'^3 + a'^4) \geqslant 0$$

Từ (1) và (2) ta được : $a^3 + a'^3 \geqslant$

$$\geqslant 4\sqrt{2}\ np\sqrt{np}\ ; \quad (3)$$

Chứng minh tương tự : $b^3 + b'^3 \geqslant$

$$\geqslant 4\sqrt{2}\ pm\sqrt{pm}\ ; \quad (4)$$

$$c^3 + c'^3 \geqslant 4\sqrt{2}\ mn\sqrt{mn}\ ; \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta được

$$(a^3 + a'^3)(b^3 + b'^3)(c^3 + c'^3) \geqslant (4\sqrt{2}mnp)^3; \quad (6)$$

Mặt khác, lại có (bất đẳng thức Côsi đối với ba số $\geqslant 0$) :

$$\left[\frac{(a^3+a'^3)+(b^3+b'^3)\,(c^3+c'^3)}{3}\right]^3 \geq$$

$$\geq (a^3+a'^3)\,(b^3+b'^3)\,(c^3+c'^3)\,; \qquad (7)$$

Từ (6) và (7) suy ra :

$$a^3+a'^3+b^3+b'^3+c^3+c'^3 \geq 12\sqrt{2}mnp \quad (8)$$

Dễ thấy rằng thể tích hình hộp $AB'CD'.C'DA'B$ gấp 3 lần thể tích $V$ của tứ diện $ABCD$ nội tiếp nó và không lớn hơn thể tích hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $m$, $n$, $p$ ; nghĩa là : $mnp \geq 3V$ (9)

Từ (8) và (9) ta được bất đẳng thức cần tìm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=n=p$ và do đó khi và chỉ khi : $a=a'=b=b'=$ $=c=c'$ ; nghĩa là khi và chỉ khi tứ diện là đều.

**Nhận xét** : 1°) Lời giải trên đây sử dụng tối thiểu kiến thức về bất đẳng thức ; ngoài các bất đẳng thức thông thường có trong SGK chỉ sử dụng thêm B.Đ.T. Côsi đối với 3 số không âm và chứng minh thêm B. Đ.T (2) mà thôi.

2°) Nếu không sử dụng hình hộp ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thì có thể xuất phát từ B.Đ.T. hiển nhiên sau đây : $V \leq \frac{1}{6}BC\,.\,AM\,.\,DD'$[trong đó $AM$ là trung tuyến (xuất phát từ $A$) của đáy $ABC$, $DD'$ là trọng tuyến (xuất phát từ đỉnh $D$) của tứ diện] và thiết lập công thức : $9DD'^2 = 3(a'^2+b'^2+c'^2)-(a^2+b^2+c^2)$.

Từ đó suy ra :

$$12(36V)^2 \leq 6a^2\,(4b^2+4c^2-2a^2)\times$$
$$\times\,(3a'^2+3b'^2+3c'^2-a^2-b^2-c^2), \text{ và :}$$

$$6(36V\sqrt{2})^2 \leq (a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2)^3$$

Cuối cùng, sử dụng B.Đ.T (2) suy rộng cho 6 số :

$$\left(\frac{a^2+a'^2+b^2+b'^2+c^2+c'^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{a^3+a'^3+b^3+b'^3+c^3+c'^3}{6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

3°) Nhìn chung, nhiều bạn sử dụng thành thạo các bất đẳng thức Côsi và Bunhiacốpski, và vì vậy lời giải khá ngắn gọn. Tuy nhiên, một số lời giải thừa nhận khá nhiều kết quả về BĐT hình học cũng như đại số. Có bạn, ngoài B.Đ.T. đại số (*) trên đây, còn sử dụng cả B.Đ.T. trong tam giác $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ (trong đó $S$ là diện tích tam giác có ba cạnh là $a$, $b$, $c$) và BĐT sau trong tứ diện : $S^3 \geq 216\sqrt{3}\,V^2$ (Bài toán 10/114 trong THTT số 2/1981) mà việc chứng minh cũng không phải dễ dàng. Đó là điều nên tránh.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

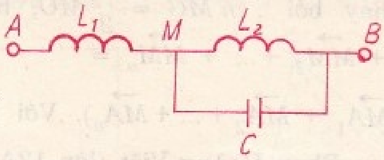
**Bài L1/206.** *Một xe máy xuống dốc, từ đỉnh một quả đồi, hình bán cầu, đi theo một đường tròn lớn. Xe rời khỏi mặt đồi sau khi đi được một quãng. Sau đó xe có rơi xuống mặt đồi không. Lực ma sát của mặt đồi và lực cản của không khí không đáng kể.*

**Hướng dẫn giải.** Khi rời khỏi mặt đồi, phản lực $N$ triệt tiêu, và sau đó xe chuyển động theo quỹ đạo parabol. Dễ dàng (bằng hình học hoặc dựa vào việc khảo sát chuyển động của xe theo quỹ đạo parabol). Chứng minh rằng xe không rơi xuống mặt đồi (mà rơi xuống mặt đường ngang cách chân đồi một khoảng xác định).

**Nhận xét :** Các em có lời giải đúng : *Trương Hàm Yếng*, 12A, Lí Tự Trọng, Cần Thơ ; *Nguyễn Hữu Hải* 12A PTTHII Hoài Nhơn Bình Định ; *Nguyễn Đình Thịnh* 10CL, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An ; *Phan Đứng Hùng* 11CL Quốc học Huế, *Nguyễn Trọng Nghĩa*, 12A, PTTH Việt Trì, Vĩnh Phú.

OK

**Bài L2/206.** *Cho mạch diện AB như hình vẽ, trong đó hai cuộn dây $L_1$ và $L_2$ hoàn toàn giống nhau. Điện trở thuần của toàn mạch là 200Ω. Khi mắc với AB một hiệu diện thế xoay chiều hình sin có tần số 50Hz thì hiệu diện thế hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây ở cả $L_1$ và $L_2$ có cùng một giá trị và dòng điện chạy trong hai cuộn dây lệch pha so với nhau một góc là $\frac{\pi}{2}$. Hãy tính độ tự cảm của mỗi cuộn dây, điện dung của tụ điện và hệ số công suất của toàn mạch.*




**Hướng dẫn giải.** Dựng phương pháp giản đồ véctơ. Vẽ véctơ $U_{MB}$, từ đó vec véctơ $\vec{I_c}$ và $\vec{I_{L_2}}$ và do đó vẽ được véctơ $\vec{I}$. Theo đề bài $U_{AM} = U_{MB}$ và $2R = 200\omega$($R$ là điện trở thuần của mỗi cuộn), ngoài ra $\vec{I_{L_1}} \perp \vec{I_{L_2}}$. Từ đó sẽ tìm được $L = \frac{1}{\pi}H \approx 0{,}318H$ ; $C = \frac{10^{-4}}{\pi}F \approx 31{,}8\mu F$ ; $k = \cos\varphi = 1$.

**Nhận xét.** Các em có lời giải đúng : *Đạo Lý*, 12A, PTTH chuyên, Thái Bình ; *Nguyễn Hồng Vũ*, 12A, PTTH Vụ Bản A, Nam Hà ; *Nguyễn Hữu Hải*, 12A, PTTH II Hoài Nhơn, Bình Định.

MT

## LỜI CẢM ƠN

Nhân dịp TC Toán học và tuổi trẻ kỉ niệm 30 năm ngày ra mắt bạn đọc, THVTT đã nhận được tài trợ của các cơ quan và các cá nhân sau đây :

| | |
|---|---|
| - Hội toán học Việt Nam | 300 000 đ |
| - Trường PTDL Mari Quyri Hà Nội | 1000000 đ |
| - Viện Khoa học Giáo dục | 300 000 đ |
| - Viện Năng lượng Nguyên tử quốc gia | 500 000 đ |
| - Đại học quốc gia Hà Nội | 1000000 đ |
| - Trung tâm đào tạo tin học FPT | 500 000 đ |
| - Viện Cơ học | 300 000 đ |
| - Viện Toán học | 500 000 đ |
| - Tổng công ti thiết bị trường học | 500 000 đ |
| - Trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh | 200 000 đ |
| - Công ti FPT | 1000000 đ |
| - Công ti GUARTON | 1000000 đ |
| - Sở Giáo dục Thanh Hóa | 1000000 đ |
| - Ông Lê Vinh Thọ | 500 000 đ |
| - Ông Đoàn Hải | 50 000 đ |
| - Ông Dương Ngọc Quý | 500 000 đ |
| - Báo Tiền phong | 1 tặng phẩm |

**Toán học và tuổi trẻ** xin chân thành cảm ơn thịnh tình của các quý vị.

THVTT

## MỘT SỐ MỐC ĐÁNG NHỚ

**10.1964**

Ra số báo đầu tiên. Số lượng 6000 bản. Cơ quan chủ quản : Ủy ban khoa học và kĩ thuật nhà nước (nay là Bộ khoa học công nghệ và môi trường). Phát hành mỗi tháng một kì. Trụ sở : 39 Trần Hưng Đạo Hà Nội.

**1968**

Ra 2 tháng một kì.

**1970**

Trực thuộc Viện Khoa học Việt Nam (Nay là Trung tâm Khoa học tự nhiên và công nghệ quốc gia). Trụ sở : 70 Trần Hưng Đạo Hà Nội

**1975**

Phát hành toàn quốc. Số lượng 15000 bản

**1992**

Trực thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Trụ sở : 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

Có bộ phận thường trực tại miền Nam. 231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

**1993**

Ra 1 tháng 1 kì.

**1994**

Chuyển thành tạp chí. Có bìa in 4 màu. Số lượng phát hành trên 15000 bản. Trụ sở : 45B Hàng Chuối, Hà Nội

## ỐNG KÍNH

### CẢI CÁCH DẠY VÀ HỌC TOÁN

## LÀM THẾ NÀO ĐỂ DỰ ĐOÁN HÌNH DẠNG CỦA TẬP HỢP ĐIỂM

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Một số tài liệu toán hiện hành viết về loại toán Tập hợp điểm cho rằng : Dự đoán hình dạng của tập hợp điểm bằng cách vẽ hình trên giấy nháp ba điểm khác nhau của tập hợp điểm và :

- Nếu ba điểm thẳng hàng thì tập hợp điểm dạng thẳng

- Nếu ba điểm không thẳng hàng thì tập hợp điểm dạng cung tròn, đường tròn (cong).

Điều này không chính xác hoàn toàn vì nếu nhỡ rơi vào loại "Tập hợp các điểm có khoảng cách a không đổi đến đường thẳng cố định xy là hai đường thẳng song song với xy".

Và như vậy ba điểm thuộc tập hợp điểm này có thể thẳng hàng hoặc có thể không thẳng hàng. Khắc phục điều này theo tôi nên làm như sau : Vẽ ba điểm khác nhau của tập hợp điểm nếu ba điểm này thẳng hàng thì tập hợp điểm dạng thẳng. Còn nếu ba điểm không thẳng hàng ta vẽ thêm một điểm nữa của tập hợp điểm : nếu ba trong bốn điểm thẳng hàng thì tập hợp điểm có dạng thẳng và dạng nêu trên còn nếu không thẳng hàng thì tập hợp điểm có dạng cung tròn hay đường tròn.


# ĐỀ RA KÌ NÀY

## Các lớp THCS

**Bài T1/210 :** Tìm $x, y \in Z$ sao cho :

$$8x^3 = 3^y + 997$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

**Bài T2/210 :** Ba số thực $x, y, z$ đôi một khác nhau, thỏa mãn điều kiện

$(y - z)\sqrt[3]{1 - x^3} + (z - x)\sqrt[3]{1 - y^3} +$
$+ (x - y)\sqrt[3]{1 - z^3} = 0$. Chứng minh rằng :

$$(1 - x^3)(1 - y^3)(1 - z^3) = (1 - xyz)^3.$$

NGỌC ĐẠM

**Bài T3/210 :** $a, b, c$ là ba số tùy ý thuộc đoạn $[0, 1]$. Chứng minh rằng :

1) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

2) $2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \leq 3$

3) $\dfrac{a}{bc + 1} + \dfrac{b}{ca + 1} + \dfrac{c}{ab + 1} \leq 2.$

TRẦN XUÂN ĐÁNG

**Bài T4/210 :** Cho đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$, tiếp xúc với cạnh $AB$ tại điểm $D$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác $ABC$ vuông tại $C$ là $CA . CB = 2.DA.DB$

NGUYỄN VĂN LỘC

**Bài T5/210 :** Trên hai đường thẳng $a$ và $b$ cắt nhau ở điểm $C$ có hai động tử (chẳng hạn, hai bộ hành) chuyển động thẳng đều nhưng với vận tốc khác nhau : $A$ có vận tốc $v_1$ trên $a$ và $B$ có vận tốc $v_2$ trên $b$ $(v_1 \neq v_2)$. Biết rằng $A$ và $B$ không gặp nhau ở $C$. Chứng minh rằng ở bất cứ thời điểm nào, đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ luôn luôn đi qua một điểm cố định $O$ nào đó, khác $C$.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

## Các lớp THCB

**Bài T6/210 :** Tính tổng :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}\cos 2^k}{1 - \cos 2^{k+1}}$$

TRẦN DUY HINH

**Bài T7/210 :** Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn điều kiện :

$0 < u_n < 1$ và $u_{n+1}(1 - u_n) > \dfrac{1}{4}$ với mọi $n = 1, 2, 3...$ Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

NGUYỄN XUÂN HUỲNH

**Bài T8/210 :** Giả sử có một đường tròn được chia thành 35 cung bằng nhau bởi 35 điểm. Người ta tô các điểm này hoặc xanh hoặc đỏ một cách hú họa. Chứng minh rằng bao giờ cũng thu được 5 điểm cùng mầu sao cho chúng là các đỉnh của hai tam giác cân với một đỉnh chung.

ĐẶNG VIỄN

**Bài T9/210 :** Cho hai đường tròn $(O, R)$ và $(O', R')$ với $R > R'$ cắt nhau ở hai điểm $A$ và $B$. Hai tiếp tuyến chung ngoài $MM'$ và $NN'$ $(M, N \in (O), M', N' \in (O'))$. Dây $MN$ cắt $OO'$ ở $C$ ; dây $M'N'$ cắt $OO'$ ở $D$.

Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

ĐÀO TRƯỜNG GIANG

**Bài T10/210 :** Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD . A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng $(P)$ thay đổi song song với hai đáy lăng trụ, cắt $AB_1$, $BC_1$, $CD_1$, $DA_1$ tại các điểm $M, N, P, Q$.

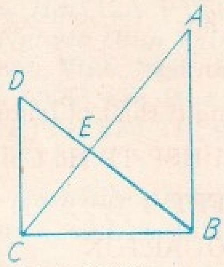
Xác định vị trí của mặt phẳng $(P)$ sao cho tứ giác $MNPQ$ có diện tích bé nhất.

HOÀNG HOA TRẠI

## Các đề Vật lí

**Bài L1/210 :** – Với những vận tốc không đổi, anh $X$ đi theo đường tam giác kín $ABCA$, chị $Y$ đi theo đường tam giác kín $BCDB$, với $AB \parallel CD \perp BC$ và $AB = \dfrac{4}{3}BC$.

– Lúc $t_1$ anh $X$ ra đi từ $A$ và chị $Y$ ra đi từ $B$. Lúc $t_2$ anh $X$ đi qua $B$ và chị $Y$ đi qua $C$. Khoảng cách ngắn nhất giữa 2 người trong khoảng thời gian $(t_2 - t_1)$ này là 960m.



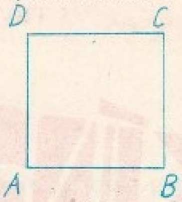

1) – Lúc $t_3$ anh $X$ đi qua $C$ thì chị $Y$ đi qua $D$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa hai người trong khoảng thời gian $(t_3 - t_2)$ này.

2) – Tính khoảng cách ngắn nhất giữa 2 người khi anh $X$ đi nốt đoạn $CA$ và chị $Y$ đi nốt đoạn $DB$.

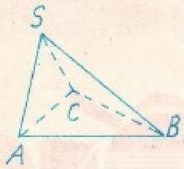
TRẦN VĂN MINH

**Bài L2/210 :** Có các thanh điện trở bằng nhau được lắp thành các cạnh của các hình như hình vẽ.

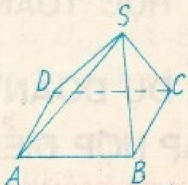
h.1 do 4 thanh tạo thành ; h.2 do 6 thanh tạo thành



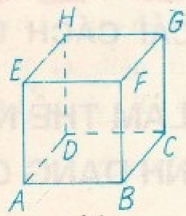

h1




h2




h3




h4

h.3 do 8 thanh tạo thành ; h.4 do 12 thanh tạo thành.

Giả sử lấy nguồn điện $U = 6V$ nối vào hai điểm $AB$ của h.1 thì người ta đo được dòng điện do nguồn phát ra là $2A$. Hỏi nguồn trên sẽ phát dòng là bao nhiêu khi nối hai cực của nó vào các điểm $AB$ của các hình còn lại ?

*Ghi chú :* Câu hỏi này có thể mở rộng cho tất cả các cặp điểm còn lại từ h. 1 đến h.4.

LẠI THẾ HIỀN

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/210 :** Find $x, y \in \mathbb{Z}$ such that

$$8x^3 = 3^y + 997.$$

NGUYEN DUC TAN

**T2/210 :** Three distinct real numbers satisfy

$$(y - z)\sqrt[3]{1 - x^3} + (z - x)\sqrt[3]{1 - y^3} + (x - y)\sqrt[3]{1 - z^3} = 0.$$

Prove that

$$(1 - x^3)(1 - y^3)(1 - z^3) = (1 - xyz)^3.$$

NGOC DAM

**T3/210 :** Let $a$, $b$, $c$ be three arbitrary numbers in $[0, 1]$. Prove that :

1) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

2) $2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) \leq 3$

3) $\dfrac{a}{bc + 1} + \dfrac{b}{ca + 1} + \dfrac{c}{ab + 1} \leq 2.$

TRAN XUAN DANG

**T4/210 :** The inscribed circle of triangle $ABC$ touches $AB$ at $D$. Prove that a necessary and sufficient condition that triangle $ABC$ be right at $C$ is $CA \cdot CB = 2\,DA \cdot DB$.

NGUYEN VAN LOC

**T5/210 :** Two moving points $A$ and $B$ run along two lines $a$ and $b$, intersecting each other at $C$, with distinct constant velocities : $A$ with velocity $v_1$ along $a$, $B$ with velocity $v_2$ along $b$ $(v_1 \neq v_2)$. $A$ and $B$ do not meet at $C$. Prove that at every moment, the circumctrcle of triangle $ABC$ passes throught a fixed point, different from $C$.

NGUYEN DANG PHAT

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/210 :** Calculate the sum

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}\cos 2^k}{1 - \cos 2^{k+1}}.$$

TRAN DUY HINH

**T7/210 :** Let be given a sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfying the conditons :

$$0 < u_n < 1,\ u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4} \text{ for every } n = 1, 2, 3\ldots$$

Find $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

NGUYEN XUAN HUYNH

**T8/210 :** A circle is divided by 35 points to form 35 equal arcs. These points are colored red and blue at random. Prove there are always 5 points with same color such that they are the vertices of two isosceles triangles with a common vertex.

DANG VIEN

**T9/210 :** Let be given two circles $(O, R)$ and $(O', R')$, $R > R'$, intersecting each other at two points $A$ and $B$. Consider the two common tangents $MM'$ and $NN'$ ($M, N \in (O)$, $M', N' \in (O')$). $OO'$ cuts the chords $MN$ and $M'N'$ respectively at $C$ and $D$. Prove that the quadrilateral $ABCD$ is a rhombus.

DAO TRUONG GIANG

**T10/210 :** Let be given a quadrilateral prism $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. A variable plane $(P)$, parallel to the two bases, cuts $AB_1$, $BC_1$, $CD_1$, $DA_1$ respectively at $M$, $N$, $P$, $Q$. Determine the position of $(P)$ such that the area of quadrilateral $MNPQ$ has least value.

HOANG HOA TRAI

**CÙNG BẠN ĐỌC**

1. TC Toán học và tuổi trẻ có mặt ở Hà Nội ngày 15 và tới các địa phương khác vào tuần cuối hàng tháng. Thời hạn nhận bài giải là 2 tháng tính từ cuối tháng báo ra. Khi gửi bài giải các bạn cần viết *sạch sẽ* trên một mặt giấy. Mỗi bài viết riêng trên một mảnh giấy. Góc trên *bên trái để số của bài, bên phải để tên, họ, lớp, trường, huyện, tỉnh.* Không gấp bài quá phức tạp và không dán nhiều hồ.

2. Bạn có thể đặt mua TC dài hạn tại các cơ sở Bưu điện trong cả nước.

THTT

# TỪ ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ ĐẾN ĐỊNH LÍ PHƠ BÁCH
# MỘT PHƯƠNG THỨC TÌM TÒI SÁNG TẠO

NGUYỄN VĂN LỘC
ĐHSP Vinh - Nghệ An

Tên bài báo dường như đã hướng sự suy nghĩ của chúng ta vào việc tìm tòi sự ứng dụng và mối liên hệ của định lí Ptôlême và định lí Phơbách. Định lí Ptôlêmê "Trong một tứ giác nội tiếp, tích hai đường chéo bằng tổng các tích các cặp cạnh đối diện", có thể xem như là sự khái quát hóa định lí Pitago trong trường hợp tứ giác đã cho là hình chữ nhật. Đôi khi người ta cũng gọi sự hợp nhất của cặp định lí thuận đảo là định lí Ptôlêmê" Tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn khi và chỉ khi $AB.CD + BC.AD = AC.BD$". Để chứng minh định lí này có thể sử dụng tam giác đồng dạng hoặc các tính chất của phép nghịch đảo (Xem B.I. Acgunốp - M.B.Ban : Hình học sơ cấp tập 2 NXBGD 1977 tr. 65). Ứng dụng trực tiếp định lí Ptôlêmê có thể giải được nhiều bài toán, ví dụ như các bài toán sau :

1. Nếu điểm $P$ thuộc cung $AB$ của đường tròn $S$ ngoại tiếp tam giác đều $ABC$ thì $PA + PB = PC$ (Hãy áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác PACB)

2. Nếu trong bài toán 1, $\Delta ABC$ cân ($AC = BC$) và không nhất thiết phải đều thì $\dfrac{PA + PB}{PC} = \dfrac{AB}{AC}$ (Tức là không phụ thuộc vào việc chọn điểm $P$ trên cung $AB$).

3. Nếu điểm $P$ thuộc cung $AB$ của đường tròn $S$ ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ thì $\dfrac{PA + PC}{PB + PD} = \dfrac{PD}{PC}$

(Hãy áp dụng định lí Ptôlêmê cho các tứ giác $PADC$ và $PBCD$).

4. Nếu điểm $P$ thuộc cung $AB$ của đường tròn $S$ ngoại tiếp ngũ giác đều $ABCDE$ thì $PA + PB + PD = PC + PE$ (Hãy áp dụng định lí Ptôlêmê cho các tứ giác $PAED$, $PEDC$, $PDCB$, $CBPA$, $BPAE$)

5. Nếu điểm $P$ thuộc cung $AB$ của đường tròn $S$ ngoại tiếp lục giác đều $ABCDEF$ thì $PD + PE = PA + PB + PC + PF$ (Hãy áp dụng bài toán 1 cho các tam giác $ACE$ và $BDF$).

Để tìm được các ứng dụng rộng rãi hơn nữa của định lí Ptôlêmê, chúng ta hãy xét định lí khái quát của nó. Xuất phát từ quan niệm trong định lí Ptôlême mỗi điểm là "đường tròn điểm", độ dài đoạn thẳng nối hai điểm là độ dài tiếp tuyến chung của "các đường tròn điểm" này, chúng ta xét bốn đường tròn $O_A$, $O_B$, $O_C$, $O_D$ tiếp xúc trong (hoặc tiếp xúc ngoài) với đường tròn O ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ tại các đỉnh $A$, $B$, $C$, $D$. Độ dài tiếp tuyến chung ngoài d $(O_A, O_B)$ của hai đường tròn tương ứng $O_A$, $O_B$ đóng vai trò khoảng cách giữa hai đỉnh này (hình 1). Chúng ta có định lí sau :

*Định lí :* Nếu các đường tròn $O_A$, $O_B$, $O_C$, $O_D$ tiếp xúc trong (hoặc tiếp xúc ngoài) với đường tròn $O$ ngoại tiếp tứ giác lồi $ABCD$ tại các đỉnh $A$, $B$, $C$, $D$ thì độ dài các tiếp tuyến chung ngoài của chúng thỏa mãn hệ thức

$$d(O_A, O_B) \cdot d(O_C, O_D) + d(O_B, O_C) \cdot d(O_D, O_A) = = d(O_A, O_C) \cdot d(O_B, O_D) \quad (1)$$

*Chứng minh :* Giả sử $A_1$, $B_1$ là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $O_A$, $O_B$, thì

$d^2(O_A, O_B) = A_1B_1^2 = O_AO_B^2 - (r_A - r_B)^2$ với

$O_AO_B^2 = (R - r_A)^2 + (R - r_B)^2 - 2(R - r_A)(R - r_B)\cos\varphi$ và $AB^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\varphi$, trong đó $R$, $r_A$, $r_B$ là bán kính các đường tròn $O$, $O_A$, $O_B$ $\varphi = \widehat{AOB}$. Từ các phương trình trên sau khi khử $O_AO_B$ và $\cos\varphi$ ta có :

$$d(O_A, O_B) = \frac{AB}{R}\sqrt{(R - r_A)(R - r_B)} \quad (2)$$

Tương tự :

$$d(O_B, O_C) = \frac{BC}{R}\sqrt{(R - r_B)(R - r_C)};$$

$$d(O_D, O_B) = \frac{DB}{R}\sqrt{(R - r_D)(R - r_B)} \quad (3)$$

$$d(O_C, O_A) = \frac{AC}{R}\sqrt{(R - r_C)(R - r_A)};$$

$$d(O_D, O_C) = \frac{DC}{R}\sqrt{(R - r_D)(R - r_C)}$$

$$d(O_D, O_A) = \frac{DA}{R}\sqrt{(R - r_D)(R - r_A)};$$

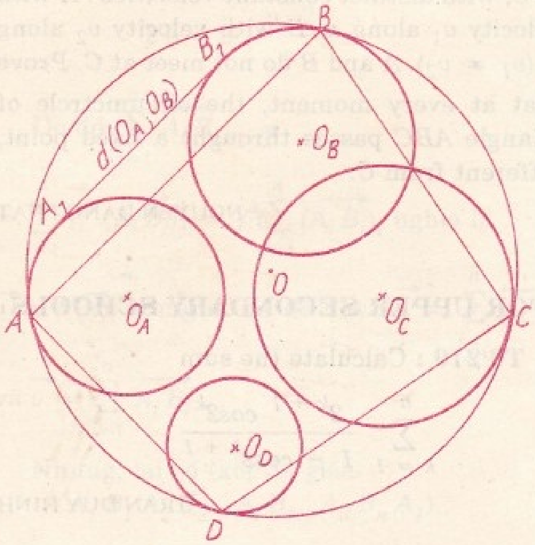
Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ :

$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ (4)

Thay các biểu thức tương ứng ở (3) vào biểu thức :

$$d(O_A, O_B) \cdot d(O_C, O_D) + d(O_B, O_C) \cdot d(O_D, O_A) - - d(O_A, O_C) \cdot d(O_B, O_D)$$

và chú ý tới (4) ta thu được đẳng thức cần chứng minh (1). Nếu hai đường tròn $O_A$, $O_B$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $O$ thì $d(O_A, O_B) = \dfrac{AB}{R}\sqrt{(R + r_A)(R + r_B)}$. Điều đó cho phép chứng minh hệ thức (1) với bốn đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn tâm $O$. Định lí vẫn còn đúng nếu mỗi cặp đường tròn tương ứng có một đường tròn tiếp xúc ngoài, đường tròn còn lại tiếp xúc trong với đường tròn $O$ và trong công thức (1) độ dài tiếp tuyến chung ngoài thay bởi độ dài tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn. Điều đáng chú ý là định lí đảo cũng đúng, hơn nữa nếu thay đường tròn $O$ bởi đường thẳng thì định lí vẫn đúng (đề nghị các bạn tự mình kiểm tra lại các khẳng định trên xem như những bài tập), như vậy chúng ta đã xem xét được định lí có tên là định lí Kezu



"Điều kiện cần và đủ để bốn đường tròn $S_1, S_2, S_3, S_4$ tiếp xúc với một đường tròn $S$ (hay một đường thẳng), sao cho các tiếp điểm sắp xếp trên đường tròn $S$ theo thứ tự đã nêu là : $t_{12}.t_{34} + t_{23}.t_{14} = t_{13}.t_{24}$; Trong đó $t_{ij}$ ($i, j$ có thể bằng 1, 2, 3, 4) là độ dài tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn $S_i$ và $S_j$ nếu $S_i$ và $S_j$ cùng tiếp xúc trong hoặc cùng tiếp xúc ngoài với đường tròn $S$, $t_{ij}$ là độ dài tiếp tuyến chung trong của $S_i$ và $S_j$ nếu một trong hai đường tròn tiếp xúc ngoài, đường tròn còn lại tiếp xúc trong với đường tròn $S$". Trong tam giác, đường tròn nội tiếp và ba đường tròn bàng tiếp có những đặc điểm "tương tự nhau" chúng ta thử tìm hiểu xem bốn đường tròn này có thỏa mãn điều kiện của định lí Kezu hay không ? Giả sử $\Delta ABC$ với các cạnh $a, b, c$ để xác định ta giả thiết $a \geqslant b \geqslant c$. Kí hiệu đường tròn $\tau$ $(= \tau_0)$ nội tiếp $\Delta ABC$, các đường tròn bàng tiếp góc $A, B, C$ là $\tau_a$ $(= \tau_1)$, $\tau_b$ $(= \tau_2)$, $\tau_c$ $(= \tau_3)$. Dễ thấy, nếu đường tròn $\tau_0$ tiếp xúc với cạnh $BC = a$ tại điểm $P_0$ thì $BP_0 = P - b$ trong đó $P = \frac{1}{2}(a + b + c)$, đường tròn $\tau_1$ tiếp xúc với cạnh $BC$ tại $P_1$ thì $BP_1 = P - C$. Ta có $t_{O1} = (P - c) - (P - b) = b - c$. Tương tự $t_{O2} = a - c$, $t_{O3} = a - b$. Mặt khác nếu các đường tròn $\tau_1$, $\tau_2$ tiếp xúc với đường thẳng $AB$ tại $R_1$ và $R_2$ thì $AR_1 = BR_2 = P$ từ đó $t_{12} = (AR_1 + BR_2 - AB) = 2p - c = a + b$. Tương tự $t_{13} = a + c$, $t_{23} = b + c$. Do đó :

$t_{12}.t_{03} + t_{23}.t_{01} = (a+b)(a-b)+(b+c)(b-c) =$

$+(a^2 - b^2)+(b^2 - c^2) = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = t_{13}t_{02}$. Như vậy theo định lí Kezu các đường tròn $\tau_0$, $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ cùng tiếp xúc với đường tròn $S$. Vấn đề đặt ra là : xác định đường tròn $S$ bằng cách nào ? Một lần nữa cách quan niệm điểm như là "đường tròn điểm" để sử dụng định lí Kezu lại tỏ ra có hiệu lực. Thật vậy, xét ba "đường tròn điểm" $P_a$ $(= P_1)$, $P_b$ $(= P_2)$, $P_c$ $(= P_3)$ là trung điểm các cạnh tương ứng $BC$, $AC$ và $AB$ của tam giác $ABC$. Khi đó độ dài "tiếp tuyến" giữa các đường tròn này hiển nhiên bằng $T_{12} = \frac{c}{2}$, $T_{13} = \frac{b}{2}$, $T_{23} = \frac{a}{2}$. Mặt khác tiếp tuyến $T_{01}$ của đường tròn $\tau_0$ nội tiếp $\Delta ABC$ và "đường tròn" $P_1$ là :

$$T_{01} = P_1P_0 = \frac{a}{2} - BP_0 = \frac{a}{2} - (P - b) = \frac{a}{2} - \frac{a - b + c}{2} = \frac{b - c}{2}$$

Tương tự : $T_{02} = \frac{a - c}{2}$, $T_{03} = \frac{a - b}{2}$. Khi đó :

$$T_{12}.T_{03} + T_{23}T_{01} = \frac{c}{2}.\frac{a - b}{2} + \frac{a}{2}.\frac{b - c}{2} =$$

$$= \frac{ab}{4} - \frac{bc}{4} = \frac{b}{2}.\frac{a - c}{2} = T_{13}T_{02}$$

Theo định lí Kezu "các đường tròn" $P_1$, $P_2$, $P_3$ và đường tròn $\tau_0$ tiếp xúc với đường tròn $S$ đi qua trung điểm $P_1$, $P_2$, $P_3$ của các cạnh $\Delta ABC$. Hoàn toàn tương tự áp dụng định lí Kezu, chứng minh được rằng các đường tròn $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ tiếp xúc với đường tròn $S$ đi qua các điểm $P_1$, $P_2$, $P_3$. Đường tròn $S$ còn đi qua chân $H_1$, $H_2$, $H_3$ của các đường cao và đi qua các trung điểm $G_1$, $G_2$, $G_3$ của các đoạn thẳng nối trực tâm và các đỉnh của tam giác $ABC$. Vì vậy đường tròn $S$ còn gọi là đường tròn Ơle hay đường tròn chín điểm (Xem X.J ĐÊCHEN Hình học mới của tam giác NXBGD 1963 tr. 61). Như vậy con đường khái quát hóa và đặc biệt hóa đã đưa chúng ta đi từ định lí Pitago, định lí Ptôlêmê qua định lí Kezu đến với định lí Phơbách" Đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp tam giác cùng tiếp xúc với đường tròn Ơle". Cuối cùng đề nghị các bạn hãy sử dụng phương thức tìm tòi nêu trong bài báo và định lí Kezu để giải các bài toán sau :

1. Cho $\Delta$ cân $ABC$ $(AC = BC)$ nội tiếp trong đường tròn $O$. Đường tròn $O_1$ tùy ý nội tiếp trong hình viên phân $AB$ không chứa tam giác. Chứng minh rằng độ dài $t$ của đoạn thẳng tiếp tuyến vẽ từ đỉnh $C$ tới đường tròn $O_1$ không phụ thuộc cách chọn đường tròn $O_1$. Tìm $t$.

2. Trong đường tròn $O$ vẽ dây $AB$ và đường kính $CD$ vuông góc với nó. Giả sử đường tròn $O$ tiếp xúc trong với đường tròn $O_2$ tại điểm $O$ còn đường tròn $O_1$ tùy ý nội tiếp trong hình viên phân $ABC$. Chứng minh rằng độ dài tiếp tuyến của đường tròn $O_1$ và $O_2$ không phụ thuộc vào cách chọn đường tròn $O_1$.

3. Cho đường tròn $O$ đường kính $AB$ và điểm $C$ thuộc $AB$. Vẽ hai đường tròn $O_1$ và $O_2$ với đường kính $AC$ và $CB$ và tiếp tuyến chung trong cắt đường tròn $O$ tại các điểm $M$ và $N$. Độ dài tiếp tuyến $t$ của các đường tròn $O_1$ và $O_2$ bằng bao nhiêu ?

---

# BỆNH "CẦU PHƯƠNG HÌNH TRÒN"

Bài toán cầu phương hình tròn (tức là dùng compas và thước dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn cho trước) xuất hiện ở Ai Cập từ 2000 năm trước công nguyên. Số người lao vào giải quyết bài toán vô nghiệm này nhiều không đếm xiết, với một quyết tâm rất cao, đến nỗi phát sinh "bệnh dịch cầu phương hình tròn". Tất nhiên đó chỉ là "công dã tràng". Bài toán "cầu phương hình tròn" về thực chất là khẳng định hay bác bỏ tính siêu việt của số $\pi$.

Xung quanh vấn đề này có nhiều giai thoại lí thú :

Năm 1892 trên tờ báo NewYork Tribune có người công bố rằng đã tìm được giá trị xác thực của $\pi$ là 3,2 !

Bài báo này đã gây ra nhiều cuộc cãi vã ồn ào. Chưa hết, từ năm 1934 tòa báo còn nhận nhiều "công trình toán học về số $\pi$", trong đó có "luận án khoa học" chứng minh rằng $\pi = 3\frac{13}{81}$ !

Vẫn chưa hết, dự thảo luật số 246 của Nghị Viện Bang Indiana năm 1897 có "điều khoản quy định giá trị số $\pi$ :

"Thấy rằng diện tích một hình tròn bằng diện tích một hình vuông, có cạnh bằng $\frac{1}{4}$ chu vi hình tròn, cũng như diện tích một hình chữ nhật có hai cạnh bằng nhau thì bằng diện tích một hình vuông dựng trên cạnh bằng nhau đó..."

Dự thảo này đã được Nghị viện thông qua, nhưng báo chí hồi đó chế riễu nhiều quá, nên Thượng viện giữ lại để chờ các vị "tai to mặt lớn" của Hội đồng Giáo dục Bang cho phán quyết cuối cùng...

(Cũng nên nhắc lại rằng Lindemann, năm 1882 đã chứng minh được $\pi$ không phải là số đại số).

**PHAN THANH QUANG**
**TP Hồ Chí Minh**

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

# Về bài toán : "LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU."

NGUYỄN MỘNG HY
ĐHSP TP Hồ Chí Minh

**Đ**ây là bài toán thuộc nội dung chương trình Hình học 12 CCGD. Có một số cách giải bài toán này và để minh họa chung ta hãy lấy đề toán 63 trong bộ "Đề thi tuyển sinh Toán" năm 1993 của Bộ GD–ĐT làm thí dụ.

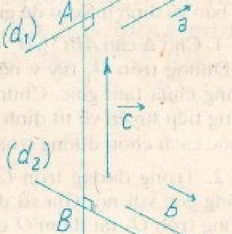
*Đề toán :* Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng :

$$(d_1)\ \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}.$$

$$(d_2)\ \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

*Giải :*

Qua phương trình chính tắc của $(d_1)$ và $(d_2)$ chúng ta biết rằng đường thẳng $(d_1)$ đi qua điểm $A(7, 3, 9)$ nhận vectơ $\vec{a}=(1, 2, -1)$ làm vectơ chỉ phương và đường thẳng $(d_2)$ đi qua điểm $B(3, 1, 1)$ nhận vectơ $\vec{b}=(-7, 2, 3)$ làm vectơ chỉ phương.




Gọi $\vec{c}$ là vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung $\Delta$, ta có $\vec{c}\perp\vec{a}$ và $\vec{c}\perp\vec{b}$.

Do đó : $\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -7\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ -7 & 2\end{vmatrix}\right)=(8, 4, 16)$

Ta lấy $\vec{c'}=(2, 1, 4)$ cùng phương với $\vec{c}$ và dùng $\vec{c'}$ làm vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ cần tìm. Ta có các cách giải sau đây :

*Cách 1.* Ta lập phương trình tổng quát của mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua điểm $A$ thuộc $(d_1)$ và nhận $(\vec{a}, \vec{c'})$ làm cặp vectơ chỉ phương. Gọi $\vec{n_\alpha}$ là pháp vectơ của mặt phẳng $\alpha$, dựa vào tọa độ của $\vec{a}$ và $\vec{c'}$ ta tính được tọa độ của $\vec{n_\alpha}$ như sau :

$$\vec{n_\alpha}=\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)=(9, -6, -3)$$

Lấy $\vec{n'_\alpha}=(3, -2, -1)$ cùng phương với $\vec{n_\alpha}$, làm pháp vectơ của $(\alpha)$ ta được phương trình tổng quát của $(\alpha)$ có dạng :

$$3x-2y-z+D=0.$$

Vì $A(7, 3, 9)\in(\alpha)$ nên ta có $21-6-9+D=0\Rightarrow D=-6$.

Vậy $(\alpha)$ có phương trình tổng quát là :

$$3x-2y-z-6=0.$$

Tương tự ta lập phương trình tổng quát của mặt phẳng $(\beta)$ đi qua điểm $B$ thuộc $(d_2)$ và nhận $(\vec{b}, \vec{c'})$ làm cặp vectơ chỉ phương :

Gọi $\vec{n_\beta}$ là pháp vectơ của mặt phẳng $(\beta)$ ta có :

$$\vec{n_\beta}=\left(\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -7\\ 4 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-7 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)=(5, 34, -11)$$

Vì $B(3, 1, 1)\in(\beta)$ và tương tự như trên ta lập được phương trình tổng quát của mặt phẳng $(\beta)$ là :

$$5x+34y-11z-38=0.$$

Đường vuông góc chung $\Delta$ cần tìm là giao tuyến của $(\alpha)$ và $(\beta)$ nên có phương trình tổng quát là :

$$(\Delta):\begin{cases}3x-2y-z-6=0\\ 5x+34y-11z-38=0\end{cases}$$

*Cách 2.* Ta lập phương trình của mặt phẳng $(\alpha)$ như ở cách 1 và tìm giao điểm của $(d_2)$ với $(\alpha)$. Ta có thể chuyển phương trình đường thẳng $(d_2)$ về dạng tham số như sau :

$$\begin{cases}x=3-7t\\ y=1+2t\\ z=1+3t\end{cases}$$

Giao điểm của $(d_2)$ với $(\alpha)$ được xác định bởi phương trình :

$$3(3-7t)-2(1+2t)-(1+3t)-6=0$$

$$28t=0\Rightarrow t=0$$

Vậy giao điểm của $(d_2)$ với $(\alpha)$ chính là điểm

$$B(3, 1, 1)\in(d_2).$$

Ta lập phương trình đường thẳng $\Delta$ cần tìm đi qua điểm $B$ và nhận $\vec{c'}=(2, 1, 4)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng $\Delta$ có phương trình chính tắc là :

$$(\Delta):\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{4}$$

*Cách 3.* Ta lập phương trình mặt phẳng $\beta$ như ở cách 1 và tìm giao điểm của $(d_1)$ với $(\beta)$. Đường thẳng $(d_1)$ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases}x=7+u\\ y=3+2u\\ z=9-u\end{cases}$$

Giao điểm của $(d_1)$ với $(\beta)$ được xác định bởi phương trình :

$$5(7+u)+34(3+2u)-11(9-u)-38=0$$

$$84u=0\Rightarrow u=0.$$

Vậy giao điểm của $(d_1)$ với $(\beta)$ chính là điểm $A(7, 3, 9)\in(d_1)$

Ta lập phương trình đường thẳng $\Delta$ cần tìm đi qua điểm $A$ và nhận $\vec{c'}=(2, 1, 4)$ làm vectơ chỉ phương :

$$(\Delta):\frac{x-7}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-9}{4}.$$

*Chú thích :* Cách giải này cho kết quả giống như kết quả ghi trong sách "Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh" của Bộ GDĐT.

*Cách 4.* Ta có phương trình của $(d_1)$ và $(d_2)$ dưới dạng tham số :

$$(d_1):\begin{cases}x=7+u\\ y=3+2u\\ z=9-u\end{cases}\quad(d_2):\begin{cases}x=3-7t\\ y=1+2t\\ z=1+3t\end{cases}$$

Một điểm $M$ trên đường thẳng $(d_1)$ có tọa độ là :

$$M(7+u, 3+2u, 9-u).$$

Một điểm $N$ trên đường thẳng $(d_2)$ có tọa độ là :

$$N(3-7t, 1+2t, 1+3t).$$

*(Xem tiếp trang 16)*

# HẢI HƯNG, THANH HÓA với TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Giao lưu giữa tòa soạn với độc giả luôn luôn là một mối quan tâm của những người làm báo. Việc tổ chức góp ý kiến qua thư là một trong những biện pháp nối lại gần nhau giữa nguyện vọng của độc giả và những suy nghĩ của người biên tập. Song như thế vẫn chưa đủ. Nhằm nắm được sát đúng hơn những ý kiến của bạn đọc và dư luận xã hội về báo, cũng đồng thời thiết thực kỉ niệm 30 năm THVTT, tòa soạn đã tổ chức hai chuyến đi về Thanh Hóa và Hải Hưng.

Thị xã Thanh Hóa đang trong những ngày chuẩn bị để chính thức ra mắt một thành phố cấp III. Nhiều hoài bão lớn đặt ra trong những chương trình của những người quản lí nhằm làm cho thành phố của mình sớm có bộ mặt một thành phố thực sự. Mấy con đường lớn được trải nhựa lại và lắp đèn cao áp, đặt dải phân cách mềm. Còn lại đa số các đường phố vẫn chưa có hè phố, chưa có đèn chiếu sáng và cả tên phố. Trường PTTH chuyên Lam Sơn cũng được dự định xây dựng to đẹp đàng hoàng. Nhưng hiện nay trường còn đang phải dùng chung phòng ốc với trường PTTH Đào Duy Từ. Cùng dự tọa đàm với chúng tôi buổi sáng hôm ấy có hai thầy *Nguyễn Văn Thu* và *Phạm Ngọc Quang* hiệu phó nhà trường và các thầy *Lưu Xuân Tình, Đỗ Đức Bình, Nguyễn Anh Dũng, Ngô Quốc Khánh* dạy toán và tin học của trường. Vấn đề đặt ra là bạn đọc nhận xét thế nào về báo và mong muốn những gì để THVTT đáp ứng tốt nhất những đòi hỏi của người đọc hôm nay. Dĩ nhiên là có những lời khen về sự thay đổi nội dung và đặc biệt là về hình thức cũng như thời gian ra báo nếu so với năm 1990 về trước. Song chúng tôi muốn nêu ra ở đây những ý kiến đòi hỏi về báo để THVTT thực sự chuyển mình thành người bạn đồng hành của đông đảo bạn đọc yêu toán. Thầy *Dũng*, một độc giả của báo từ số 1 đề nghị nên tăng bài cho mục *Học sinh tìm tòi*, các vấn đề toán học của phổ thông đại trà. Có thể thảo luận thành các chuyên đề. Nếu được thì hình thành mục *Vấn đề số này*.

Thầy Thu đánh giá học sinh thích báo vì qua đó các em tự phát hiện được mình, kích thích lòng say mê học tập. Đây vừa là tài liệu có các vấn đề cơ bản, cổ điển vừa hàm chứa những nội dung mới. Báo thực sự là diễn đàn bồi dưỡng học sinh giỏi. Tuy nhiên báo cần phản ánh sâu hơn về các địa phương. Thầy Tình đề nghị báo nên mang tính cập nhật hơn. Đề cập nhiều hơn đến các vấn đề mới dựa vào chương trình cải cách. Nên quan tâm đến mảng *Ôn thi đại học*. Đăng các bài dịch tạp chí nước ngoài và đề thi của các địa phương. Đa số các thầy đều nhất trí không tách thành 2 số riêng cho PTCS và PTTH.

Sáng hôm sau, tại hội trường Sở Giáo dục đã có buổi tọa đàm thân tình và thẳng thắn giữa báo và các em học sinh chuyên toán của Lam Sơn. Bạn *Lê Nguyên Chất* nói đã tham gia giải bài từ lớp 9. Đây là những bài không có trong SGK nên rất gây hứng thú, phải tập trung tinh lực mới giải được. Những số gần đây bài cho PTCS hơi nhiều. Một bạn khác lại cho rằng còn quá ít bài cho PTCS. Bạn *Cao Văn Hạnh* khen báo có ích cho các bạn học chuyên : đẹp, phù hợp nhiều đối tượng. Bạn *Nguyễn Mạnh Quang* phê bình báo về đất Thanh quá muộn. Đề nghị báo tăng trang. Bạn *Viên Ngọc Quang* mong báo có thêm nhiều bài cho lớp 6, 7. Bạn *Nguyễn Thị Lộc* muốn báo mở thường xuyên mục *Bạn đọc tìm tòi*.

Sau đó đã có cuộc hội thảo bổ ích giữa đại biểu Sở Giáo dục, trường Cao đẳng sư phạm, trường Lam Sơn Thanh Hóa và báo. Phó tiến sĩ *Cao Danh Đẳng* giám đốc Sở Giáo dục rất tâm huyết với việc bồi dưỡng học sinh giỏi và quan tâm đến báo *Toán học và tuổi trẻ*. Thầy *Nguyễn Văn Đảm* cán bộ chuyên trách toán của Sở cho biết sau đây Thanh Hóa sẽ quan tâm đến việc tuyên truyền cho THTT nhằm làm cho báo phát hành sâu rộng vào các nhà trường.

Tạm biệt Thanh Hóa, một vùng đất học, người làm báo Toán tin rằng Thanh Hóa sẽ còn giành được nhiều giải mới trong các kì thi học sinh giỏi.

Sau chuyến đi Thanh Hóa ít ngày là chuyến đi về Hải Hưng mà tiêu điểm là trường PTNK Hải Hưng đặt tại thị xã Hải Dương.

Bấy giờ đang là dịp Hải Dương chuẩn bị kỉ niệm 40 năm giải phóng. Thành Đông rợp đỏ cờ Tổ quốc. Nói chuyện với chúng tôi có thầy giáo hồn nhiên hỏi Nam Định có bằng Hải Dương không ? Thật là khó so sánh một thành phố 25 vạn dân với một thị xã nhỏ xinh 14 vạn dân. Thị xã lớn thứ tư trên miền Bắc trước đây (sau Hà Nội, Hải Phòng, Nam Định) nay chưa thể bằng Thái Nguyên, Việt Trì, Hạ Long và Vinh song so với nhiều thị xã khác thì vẫn nhộn nhịp và có dáng dấp đô thị hơn. Tuy vậy, các đường phố chính Trần Hưng Đạo, Phạm Ngũ Lão, Quang Trung cũng chỉ rộng chừng gần 10m. Phố Canh Nông, con đường có trường PTNK đóng chỉ vừa chiếc xe tải đi. Song ngôi trường mới xây tọa lạc trên một khuôn viên đẹp đến bất ngờ giáp mặt nước hồ Đu đủ (theo cách gọi dân dã). Có thể nói đây là trường chuyên có cơ sở khang trang nhất trong số các trường trong nhóm G6 (tức là 6 tỉnh đồng bằng duyên hải Bắc Bộ mới lập quan hệ kết nghĩa). Hiệu trưởng Đặng Tử Ân niềm nở tiếp chúng tôi. Một buổi tọa đàm đầm ấm diễn ra trong hội trường khá đẹp của trường. Một số em học sinh thường xuyên giải bài trên THVTT cùng dự. Trường PTNK Hải Hưng tự hào vì có *Đinh Tiến Cường* giải nhất toán Quốc tế, *Trần Trọng Hùng* hai lần thi toán Quốc tế và *Nguyễn Anh Linh* hai lần thi Tin học Quốc tế vốn là học sinh cũ của trường.

Thầy *Trần Quang Vỵ* cho biết đã dùng báo làm tư liệu giảng dạy. Nay báo đã có xu hướng dễ hơn nhưng vẫn còn nhiều bài quá khó. Báo nên tập trung phục vụ cấp PTCS và 2 lớp 10, 11. Bạn *Vũ Thành Long* đề nghị Báo cần vừa phục vụ bạn đọc có nhu cầu cao vừa phục vụ bạn đọc có nhu cầu thấp. Bạn *Ngô Xuân Phong* một học sinh chuyên Lí cho biết đã dùng báo để ôn thi vào đại học làm mục tiêu chính. Thầy *Chu Thừa Tuyên* phàn nàn là báo mới chỉ đăng được các đề vụn vặt, khó, tính hệ thống chưa có, giáo viên khó sử dụng báo. Thầy *Tô Xuân Hải* khen báo đã cải tiến nhiều về nội dung, đặc biệt là 4 năm gần đây. Không nên cầu toàn quá khi đòi hỏi về báo. Thầy *Chiến* trưởng phòng phổ thông của Sở cho rằng báo còn khó. Cần phục vụ nhiều đối tượng hơn.

Buổi tọa đàm sau đó với Sở Giáo dục Hải Hưng cũng diễn ra thú vị và rất bổ ích.

Hai chuyến đi : một vào miền Trung, một ở đồng bằng Bắc bộ giúp cán bộ Tòa soạn hiểu thêm độc giả. Những đòi hỏi của người đọc là chính đáng. Rồi đây **Toán học và tuổi trẻ** chắc sẽ hấp dẫn và bổ ích hơn với bạn đọc.

**TKVPV**

# MỘT CÁCH CHỨNG MINH CÔNG THỨC HÉRON BẰNG KIẾN THỨC PTCS

1) Chúng ta biết rằng có thể tính diện tích $S$ của một tam giác với độ dài ba cạnh là $a$, $b$, $c$ theo công thức Héron :

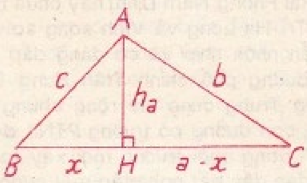
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (1)$$

trong đó $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi.

Trong sách Hình học lớp 10 do GS Trần Văn Hạo chủ biên, NXBGD xuất bản, công thức (1) được chứng minh nhờ một số hệ thức lượng trong tam giác. Phần lớn các hệ thức lượng này lại được chứng minh bằng công cụ vectơ.

Sau đây là một cách chứng minh công thức (1) chỉ bằng kiến thức PTCS.

2) Trong tam giác $ABC$, tồn tại một đỉnh mà chân đường cao hạ từ đỉnh đó thuộc cạnh đối diện. Không mất tổng quát, giả sử đỉnh đó là $A$. Gọi $AH = h_a$ là đường cao của tam giác $ABC$. Ta có :




$$BH + HC = BC \quad (2)$$

Đặt $BH = x$ $(0 \leq x \leq a)$. Từ (2) ta có $HC = a - x$. Áp dụng định lý Pythagore cho các tam giác vuông $AHB$ và $AHC$, ta có hệ :

$$\begin{cases} h_a^2 + x^2 = c^2 & (3) \\ h_a^2 + (a-x)^2 = b^2 & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) trừ (4) vế theo vế, ta được :

$$2ax - a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \quad (5)$$

Thay (5) vào (3), ta được :

$$h_a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2 = c^2$$

$$\Rightarrow h_a^2 = \left(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

Vì $p$ là nửa chu vi của tam giác nên $a+b+c = 2p$, $a + c - b = 2(p-b)$, $b + a - c = 2(p-c)$, $b - a + c = 2(p-c)$. Do đó :

$$h_a^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (6)$$

Vậy, diện tích của tam giác $ABC$ là :

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Công thức (1) đã được chứng minh.

3) Công thức (6) thu được nhờ đặt thêm ẩn số $x$ và giải hệ 2 phương trình với 2 ẩn $h_a$ và $x$.

Từ (6), bằng cách thay đổi vai trò của $a$, $b$, $c$, ta được :

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Rất mong được đọc bài của các bạn trong những số báo sau với một cách chứng minh công thức (1) bằng công cụ sơ cấp hơn.

**TRẦN LƯƠNG CÔNG KHANH**
**Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Thuận**

---

## Về bài toán *(tiếp theo trang 14)*

Ta có $\overrightarrow{NM} = (4 + u + 7t, 2 + 2u - 2t, 8 - u - 3t)$.

Muốn $\overrightarrow{NM}$ là vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung $\Delta$ thì ta phải có điều kiện $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{a} = 0$ và $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{b} = 0$ với $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của $(d_1)$ và $(d_2)$.

$$\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{a} = 4 + u + 7t + 4 + 4u - 4t - 8 + u + 3t = 0$$
$$= 6t + 6u = 0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{b} = -28 - 7u - 49t + 4 + 4u - 4t + 24 - $$
$$- 3u - 9t = 0$$
$$-6u - 62t = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $t = 0$ và $u = 0$.

Vậy điểm $M$ chính là điểm $A$ và điểm $N$ chính là điểm $B$.

Đường vuông góc chung $\Delta$ cần tìm là đường thẳng $AB$.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (4, 2, 8)$ là vectơ chỉ phương của $\Delta$. Ta có thể lấy vectơ $\overrightarrow{v} = (2, 1, 4)$ cùng phương với $\overrightarrow{BA}$ làm vectơ chỉ phương của $\Delta$.

Do đó đường thẳng $\Delta$ có phương trình chính tắc là :

$$\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4} \text{ hoặc } \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}.$$

*Nhận xét* a) Từ các phương trình chính tắc của $\Delta$ ta có thể chuyển về dạng phương trình tham số hay phương trình tổng quát của $\Delta$.

b) Việc lập phương trình theo cách IV này giúp ta dễ dàng tính được độ dài đoạn vuông góc chung của $(d_1)$ và $(d_2)$ vì ta có khoảng cách giữa $(d_1)$ và $(d_2)$ bằng $|\overrightarrow{NM}|$ $(= |\overrightarrow{BA}|)$.

Vui mừng với những thành tích đá đạt được


Phó giáo sư
VÚ DƯƠNG THỤY
dấn chương trình

*Các cộng tác viên từ mọi miền đất nước hội tụ trong ngày vui.*


Giáo sư tiến sĩ TRẦN VĂN NHUNG,
Vụ trưởng Vụ Hợp tác Quốc tế,
Bộ Giáo Dục và Đào Tạo
Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội nguyên
là một học sinh được giải của báo từ
những năm đầu tiên


Bạn đọc – Cộng tác viên thủy chung :
nhà giáo LÊ QUỐC HÁN tâm sự ...


Với thế hệ
bạn đọc
năm thứ 30

ISSN : 0866 – 8035.
Chỉ số 12884
Mã số : 8BT12M4

Sắp chữ tại Trung tâm Vi tính và
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 12 /1994

Giá : 1500đ
Một nghìn
năm trăm đồng