BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

9 (207)
1994

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

THAY ĐỔI CÁCH PHÁT BIỂU BÀI TOÁN MỘT THỦ THUẬT TÌM KIẾM LỜI GIẢI

Kết quả thi giải toán trên tạp chí THVTT

MÁY TÍNH
"NGÓN XÒE, NGÓN CỤP"

Mở rộng một kết quả của TORICELLI

Đoàn học sinh thi Toán Quốc tế của Việt Nam trong buổi lễ phát thưởng tại Hà Nội.

HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN PTTH NĂM HỌC 1993-1994

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : ĐOÀN HỒNG

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

THAY ĐỔI CÁCH PHÁT BIỂU BÀI TOÁN MỘT THỦ THUẬT TÌM KIẾM LỜI GIẢI

NGUYỄN VĂN VĨNH

Một trong các phương pháp thường được sử dụng để tìm kiếm lời giải của một bài toán là thay đổi cách phát biểu bài toán, thay đổi cách biểu thị các mối liên quan giữa các dữ kiện của bài toán. Đó cũng là một cách thay thế bài toán đã cho bằng một bài toán tương đương với nó, nhưng đơn giản hơn hoặc quen thuộc với ta hơn.

Sau đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. *Chứng minh rằng nếu tử số hoặc mẫu số của phân số*

$$A = \frac{a^2 + 2a + 15}{a^2 - 10a - 3}$$

chia hết cho 6 thì phân số A rút gọn được cho 6.

Có thể phát biểu lại bài toán như sau : *Nếu tử số (hoặc mẫu số) của phân số A chia hết cho 6 thì mẫu số (tử số) cũng chia hết cho 6.*

Sử dụng tính chất : Nếu $a + b \vdots\ 6$ và $a \vdots\ 6$ thì $b \vdots\ 6$

Nếu $a - b \vdots\ 6$ và $a \vdots\ 6$ thì $b \vdots\ 6$

Ta biểu diễn $(a^2 + 2a + 15) - (a^2 - 10a - 3) = 6(2a + 3)$ thì suy ra được cách chứng minh.

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0, phân số*

$$B = \frac{5n + 2}{(2n + 1)(3n + 1)}$$

là phân số tối giản

Chúng ta phát biểu lại bài toán : Chứng minh rằng *với mọi số tự nhiên n khác 0, ước số chung lớn nhất của các số 5n + 2 và (2n + 1) (3n + 1) bằng 1.*

Muốn vậy chỉ cần chứng minh $(5n + 2, 2n + 1) = 1$ và $(5n + 2, 3n + 1) = 1$.

Thật vậy : giả sử $(5n + 2, 2n + 1) = d$, suy ra

$$\begin{cases} 5n + 2 \vdots\ d \\ 2n + 2 \vdots\ d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10n + 4 \vdots\ d \\ 10n + 5 \vdots\ d \end{cases} \Rightarrow 1 \vdots\ d \Rightarrow d = 1$$

Chứng minh tương tự ta có $(5n + 2, 3n + 1) = 1$

Ví dụ 3. *Tìm tất cả các số x thỏa mãn* $|x - 5| < |x + 3|$

Theo ý nghĩa hình học của giá trị tuyệt đối của một số a, ta có $|x - 5|$ là khoảng cách giữa điểm x và điểm 5 trên trục số. Số $|x + 3| = |x - (-3)|$ là khoảng cách giữa điểm x và điểm −3. Vì vậy có thể phát biểu lại bài toán như sau : *Tìm tất cả các điểm của trục số gần điểm 5 hơn điểm −3.*

Nhận thấy trung điểm của các điểm 5 và −3 là điểm 1, vậy $x > 1$.

Kết luận : Với mọi $x > 1$ ta đều có

$$|x - 5| < |x + 3|.$$

Ví dụ 4. *Tìm tất cả các nghiệm của phương trình*

$$|x - 2| + |x + 7| = 9$$

Lập luận tương tự bài 3, có thể phát biểu lại bài toán như sau : *Tìm tất cả các điểm của trục số mà tổng các khoảng cách từ điểm đó tới các đầu của đoạn thẳng [−7, 2] bằng 9.*

Nhận thấy độ dài của đoạn thẳng [−7, 2] bằng 9 vì vậy mọi điểm của đoạn thẳng [−7, 2] đều thỏa mãn.

Kết luận mọi x thỏa mãn : $-7 \leq x \leq 2$ đều là nghiệm của phương trình

$$|x - 2| + |x + + 7| = 9.$$

Ví dụ 5. *Chứng minh rằng phương trình* $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$ *không có nghiệm x, y nguyên dương.*

Bài toán này có thể được phát biểu lại như sau : *Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên dương (x, y), biểu thức*

$A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}$ *đều khác 1* (lớn hơn hoặc nhỏ hơn 1)

Khi $x = 1$ và $y = 1$ ta có $A = 3 > 1$.

Khi $x = 1$ và $y = 2$ ta có $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > 1$

Khi $x = 2$ và $y = 1$ ta có $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > 1$

Khi $x = 2$ và $y = 2$ ta có $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$

Khi $x > 2$ và $y > 2$ ta có :

$$A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$$

Kết luận : Phương trình $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$ không có nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 6. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} (x - y + 1)^3 + y = 10 \\ (x - y + 1)^3 + x = 11 \end{cases}$$

Với nhận xét là nếu (x, y) là nghiệm của hệ phương trình thì giữa x và y ta còn có sự liên hệ mới là $x - y = 1$, do đó, việc giải hệ phương trình đã cho tương đương với việc giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (1 + 1)^3 + y = 10 \\ (1 + 1)^3 + x = 11 \end{cases}$$

Ta nhận được nghiệm $x = 3$ và $y = 2$.

Ví dụ 7. *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$$

Nếu quy đồng mẫu số hoặc áp dụng bất đẳng thức Côsi ta đều dẫn tới chỗ bế tắc.

Nếu thay đổi cách xem xét bài toán :

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} >$$

$$> \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+a} + \frac{1}{c+a+b}$$

ta nhận thấy chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c} ; \frac{1}{b+c} > \frac{1}{b+c+a} ;$$

$$\frac{1}{c+a} > \frac{1}{c+a+b}$$

Nhưng các bất đẳng thức cuối cùng dễ dàng nhận được vì

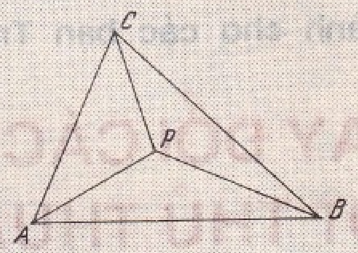
$a + b + c > a + b$; $a + b + c > b + c$;

$a + b + c > c + a$.

Ví dụ 8. *Tìm tập hợp tất cả các điểm P nằm bên trong tam giác ABC sao cho :*

$$S_{APC} + S_{BPC} = S_{APB} \quad (1)$$

Bài toán này không dễ. Nhưng có thể làm cho dễ hơn bằng cách phát biểu lại, với chú ý là :



$$S_{APC} + S_{CPB} + S_{BPA} = S_{ABC}$$

do đó (1) $\Leftrightarrow S_{APC} + S_{BPC} + S_{APB} = 2S_{APB}$

$\Leftrightarrow S_{ABC} = 2S_{APB}$

Ta có bài toán : *Tìm tập hợp tất cả các điểm P nằm bên trong tam giác ABC sao cho*

$$S_{APB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

Lại chú ý rằng các tam giác APB và ABC có chung đáy AB do đó nếu $S_{APB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ thì khoảng cách từ điểm P tới AB bằng một nửa khoảng cách từ điểm C tới AB. Như vậy ta có thể phát biểu lại bài toán một lần nữa.

Tìm tập hợp tất cả các điểm P nằm bên trong tam giác ABC sao cho khoảng cách từ P tới AB bằng một nửa khoảng cách từ C tới AB.

Dễ dàng thấy rằng tập hợp các điểm P là đường trung bình DE với D là trung điểm của AC, E là trung điểm của BC (loại ra các điểm D và E).

Từ đó ta suy ra được kết quả của bài toán 8.

Bài T1/203. *Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ thuộc đoạn $[-1, 1]$ sao cho*

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 0$$

Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \dfrac{n}{3}$

Lời giải (của đa số các bạn) :

Ta có $4a^3 - 3a + 1 = 4(a+1)\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$ (*)

$$\forall a \in [-1, 1]$$

Vậy
$$4a_1^3 - 3a_1 + 1 \geqslant 0$$
$$4a_2^3 - 3a_2 + 1 \geqslant 0$$
$$\vdots$$
$$4a_n^3 - 3a_n + 1 \geqslant 0$$

Cộng các vế tương ứng, sẽ có :

$$4(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3) -$$
$$- 3(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n \geqslant 0$$

hay $\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \dfrac{n}{3}$

Nhận xét. Đa số các bạn đều có lời giải đúng theo cách trên. Một số bạn còn sử dụng lượng giác để chứng minh.

Từ nhận xét (*) đúng với mọi $a \geqslant -1$, các bạn *Nguyễn Duy Tuấn* (9 năng khiếu Lạng Giang, Hà Bắc) *Lưu Văn Thịnh* (9T Thiệu Yên, Thanh Hóa), *Bành Xuân Quang* (7H Trưng Vương, Hà Nội), đã đề nghị giảm nhẹ giả thiết bằng cách thay bằng điều kiện $a_1, a_2, ..., a_n \geqslant -1$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T2/203. *Phân tích đa thức $x^8 + 98x^4 + 1$ thành nhân tử.*

Lời giải : *Cách 1 :* của *Trần Thị Ngọc Hải*, 8T, Trường Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi : và *Cao Trần Kiên*, 8H, Trưng Vương, Hà Nội.

$$x^8 + 98x^4 + 1 = x^8 + 64x^4 + 1 + 16x^6 +$$
$$+ 16x^2 + 2x^4 - 16x^6 + 32x^4 - 16x^2$$
$$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 - 4x)^2$$
$$= (x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1) \times$$
$$\times (x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 4x + 1)$$

Cách 2 : của *Viên Ngọc Quang*, 8E, Ba Đình, Thanh Hóa *Vũ Tất Thắng*, 9CT, Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội và *Trần Hữu Nhơn* 9T, chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long.

$$x^8 + 98x^4 + 1 =$$
$$= (x^4 + 49 + 20\sqrt{6})(x^4 + 49 - 20\sqrt{6})$$
$$= [x^4 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^4][x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^4]$$

Áp dụng công thức $a^4 + b^4 =$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \text{ ta có :}$$

$$x^8 + 98x^4 + 1 =$$
$$= [x^4 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^4][x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^4)]$$
$$= [x^2 + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2] \times$$
$$\times [x^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2] \times$$
$$\times [x^2 + \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2] \times$$
$$\times [x^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2]$$

Vậy :

$$x^8 + 98x^4 + 1 = [x^2 + (2 + \sqrt{6})x +$$
$$+ (5 + 2\sqrt{6})][(x^2 - (2 + \sqrt{6})x + (5 + 2\sqrt{6})] \times$$
$$\times [x^2 + (2 - \sqrt{6})x + (5 - 2\sqrt{6})]$$
$$\times [x^2 - (2 - \sqrt{6})x + (5 - 2\sqrt{6})]$$

Nhận xét : Làm theo cách 1 với trình độ lớp 8 còn có các bạn : *Nguyễn Bá Hùng*, 9H, Trưng Vương ; *Nguyễn Phú Bình*, 9A, Bế Văn Đàn, Đống Đa, Hà Nội ; *Trần Nguyên Hồng*, 9T, Trường NK Vinh ; *Lê Sỹ Dũng*, 9A, Quỳ Hợp ; *Phạm Tuấn Anh* 9CT, Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Trịnh Hoài Nam*, 9T, Trường chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long ; *Phạm Thái Hà*, 9T, Phạm Huy Quang, Đông Hưng, Thái Bình.

Làm theo cách 2 với kiến thức lớp 9 còn có : *Bùi Quang Minh* Giảng Võ II, Hà Nội ; *Lê Phước Danh*, 9 Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên Huế ; *Hồ Sĩ Thuận*, NKBD, Vĩnh Linh, Quảng Trị ; *Bùi Thị Phương Uyên, Trần Lê Nam*, 8T, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi.

TÔ NGUYÊN

Bài T3/203. *Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa A, B và tia Cx vuông góc với AB. Trên tia Cx lấy hai điểm D, E sao cho* $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{CA}{CD} = \sqrt{3}$ *. Đường tròn ngoại tiếp Δ ADC cắt đường tròn ngoại tiếp ΔBEC tại H(H ≠ C).*

Chứng minh rằng HC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi C chuyển động trên đoạn thẳng AB.

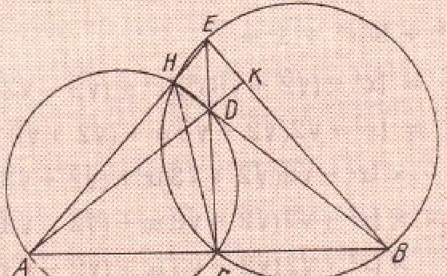
Bài toán còn đúng không khi thay $\sqrt{3}$ bởi m cho trước (m > 0)

Lời giải : $\widehat{ACD} = \widehat{ECB} = 90^o$

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CB}$$

$$\Rightarrow \Delta CAD \backsim \Delta CEB$$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{EBC}$$



Mà $\widehat{ADC} = \widehat{AHC}$ nên $\widehat{EBC} = \widehat{AHC}$

Ta có $\widehat{AHE} = \widehat{AHC} + \widehat{CHE} = 180^o$ (Vì $\widehat{CHE} + \widehat{EBC}) = 180^o$)

Từ đó, A, H, E thẳng hàng.

Kéo dài AD cắt EB tại K.

Dễ thấy $\widehat{KAB} + \widehat{KBA} = 90^o$ nên $\widehat{AKB} = 90^o$ hay $AK \perp EB$. Mặt khác $EC \perp AB$ nên D là trực tâm ΔEAB.

Vậy $BD \perp AE$. Mà $DH \perp AE$ (Do $\widehat{AHD} = 90^o$)

Từ đó B, D, H thẳng hàng.

Suy ra H chuyển động trên đường tròn đường kính AB cố định.

Mặt khác $\widehat{AHC} = \widehat{ADC}$ mà $\widehat{ADC} = 60^o$ $\left(\text{Vì } \widehat{C} = 90^o, \dfrac{CA}{CD} = \sqrt{3}\right)$ nên HC đi qua điểm I của cung $\overset{\frown}{AB}$ (không chứa H) sao cho sđ $\overset{\frown}{AI} = \dfrac{2}{3}\overset{\frown}{AB}$.

Rõ ràng I cố định.

Bài toán vẫn đúng khi thay $\sqrt{3}$ bởi m cho trước (m > 0). Thật vậy : $\widehat{ADC} = \alpha$ (không đổi)

$\Rightarrow \widehat{AHC} = \alpha \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AI} =$ sđ $2\alpha \Rightarrow I$ cố định.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn : *Trần Đình Tri*, 9A1 PTTH Chuyên Phong Châu, Vĩnh Phú ; *Hoàng Anh Tuấn* 9B Chuyên Văn Toán Ứng Hòa, Hà Tây ; *Nguyễn Phú Bình* 9A THCS Bế Văn Đàn, *Bùi Quang Minh* THCS Giảng Võ II, *Nguyễn Kiều Cương* 9M Mari Quyri, *Nguyễn Bá Hùng* 9H, *Cao Trần Kiên* 8H Trưng Vương, Hà Nội ; *Nguyễn Thị Diệu Tiên* 9 chuyên NK Ý Yên, Nam Hà ; *Phạm Thị Thanh Vân*, 6H THCS Minh Khai, Hải Phòng ; *Phạm Tuấn Anh* 9CT Phan Bội Châu, Nghệ An, *Trần Lê Nam* 8T Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Hoàng Viết Ngữ*, 173 QL phường Tân Tiến, Biên Hòa, Đồng Nai.

VŨ KIM THỦY

Bài T4/203. *Giải bất phương trình*

$$x^2 + 6x + 7 < \sqrt{x+5}$$

Lời giải : (Của các bạn *Đặng Đại Thọ*, 10A Lệ Thủy, Quảng Bình, *Trần Hoài Việt*, 10A PTTH Chí Linh Hải Hưng, *Vũ Đức Sơn* 10CT Ninh Bình)

Điều kiện $x \geqslant -5$. Đặt $t = \sqrt{x+5} \geqslant 0$ ta có bất phương trình tương đương với

$$(x+5)^2 - 4(x+5) - \sqrt{x+5} + 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 4t^2 - t + 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+1)\left(t + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(t - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) < 0$$

Do $t \geqslant 0$ nên

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < t < 2$$

Từ đó ta được $-\dfrac{(7+\sqrt{5})}{2} < x < -1$

Nhận xét : Gần 200 bạn gửi lời giải bài toán này hầu hết ; đều làm đúng, trừ 5 bạn có đáp số sai.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T5/203. *Các đa thức P(x) và Q(x) nhận các giá trị nguyên tại cùng các điểm (nghĩa là $P(x) \in Z \Leftrightarrow Q(x) \in Z$). Chứng minh rằng hoặc $P(x) - Q(x) = const$ hoặc $P(x) + Q(x) = const$*

Lời giải : (của bạn *Đinh Thành Trung* A_0 10ĐHTH, *Vũ Văn Điệp* 11A Lê Hồng Phong, Nam Hà, *Nguyễn Việt Kiên* 11A Thanh Hóa). Nếu P(x) và Q(x) là hằng số thì khẳng định là đúng. Giả sử P(x) và Q(x) không là hằng số. Nếu cần nhân P(x) hoặc Q(x) với −1 ta có thể giả sử hệ số cao nhất của P và Q là dương. Khi đó tồn tại khoảng $[N, +\infty]$ để P(x) và Q(x) là thực sự tăng trên đó. Tồn tại $x_0 > N$ sao cho $P(x_0) = a \in Z$ và $Q(x_0) = b \in Z$. Do P(x) liên tục nên tồn tại dãy tăng $\{x_n\}$ $n \geqslant 0$ sao cho

$P(x_n) = a + n$ $(n \geq 0)$. Ta sẽ chứng minh rằng khi đó $Q(x_n) = b + n$. Chứng minh bằng quy nạp với $n = 0$. Hiển nhiên đúng. Giả sử khẳng định đúng với n. Vì $x_{n+1} > x_n$ nên $Q(x_{n+1}) > Q(x_n)$

Do đó $Q(x_{n+1}) = b + m$ với $m > n$

Nếu $m = n + 1$ thì khẳng định được chứng minh. Nếu $m > n + 1$ ta có $Q(x_n) < b + n + 1 < Q(x_{n+1})$. Do tính liên tục của Q tồn tại $x'_n : x_n < x'_n < x_{n+1}$ để $Q(x'_n) = b + n + 1$

Vì P đơn điệu nên $P(x_n) < P(x'_n) < P(x_{n+1}) \Rightarrow$

$$a + n < P(x'_n) < a + n + 1 \qquad (*)$$

Vì $Q(x'_n)$ nguyên nên theo giả thiết $P(x'_n)$ nguyên. Điều này mâu thuẫn với (*). Vậy $Q(x_n) = b + n$. Suy ra $P(x_n) - Q(x_n) = a - b = R$ $\forall n \geq 0$ suy ra $P(x) - Q(x) =$ const $\forall x$

Nhận xét : Mặc dù bài toán này không khó nhưng Tòa soạn nhận được ít bài giải gửi đến. Các bài giải này đều làm đúng tuy chưa gọn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T6/203. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :*

$$f(x, y) = |7x^2 + 13xy - 7y^2|$$

trong đó x, y nhận giá trị nguyên và không đồng thời bằng 0.

Lời giải : Kí hiệu CP là tập các số chính phương.

• Có $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = 7x^2 + 13xy - 7y^2 = 0$. Coi $g(x, y)$ là tam thức bậc 2 đối với x, có $\Delta = 365y^2$. Do $365 \notin CP$ nên $\Delta \notin CP$ $\forall y \in Z, y \neq 0 \Rightarrow g(x, y) \neq 0$ $\forall x, y \in Z, y \neq 0$. Mà $g(x, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, nên $g(x, y) \neq 0$ $\forall x, y \in Z, x^2 + y^2 \neq 0$. Do đó $f(x, y) \neq 0$ $\forall x, y \in Z, x^2 + y^2 \neq 0$. Suy ra, với $a = f(x_o, y_o)$ là giá trị cần tìm thì $a \in N^*$.

• Nếu a chẵn thì phải có x_o, y_o chẵn. Khi đó $\frac{x_o}{2}, \frac{y_o}{2} \in Z$ và $f\left(\frac{x_o}{2}, \frac{y_o}{2}\right) = \frac{a}{4} < a$, trái với định nghĩa của a. Như vậy, a là số lẻ. Dễ thấy $f(1, 2) = 5$. Suy ra $a \leq 5$. Vậy $a \in \{1, 3, 5\}$.

• Nếu $a = 1$ thì $g(x_o, y_o) = \pm 1 \Leftrightarrow 7x_o^2 + 13x_oy_o - 7y_o^2 \mp 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 365y_o^2 \pm 28 \in$ CP (*). Mặt khác, có $365y_o^2 \pm 28 \not\equiv \pm 3$ (mod5) mâu thuẫn với (*) (do $b^2 \not\equiv \pm 3$ (mod5) $\forall b \in Z$).

• Nếu $a = 3$ thì $f(x_o, y_o) = |(x_o - y_o)^2 + y_o^2 + (6x_o^2 + 15x_oy_o - 9y_o^2)| = 0$ (mod3) $\Rightarrow (x_o - y_o)^2 + y_o^2 \equiv 0$ (mod3)

$\Rightarrow x_o - y_o \equiv y_o \equiv 0$ (mod3) $\Rightarrow x_o \equiv y_o \equiv 0$ (mod3)

$\Rightarrow f(x_o, y_o) \equiv 0$ (mod9), mâu thuẫn với $f(x_o, y_o) = 3$.

Vậy $a = \min\limits_{\substack{x, y \in Z \\ x^2 + y^2 \neq 0}} f(x, y) = 5$

Nhận xét : Các bạn có lời giải tương đối tốt : *Nguyễn Phú Bình* (9A PTCS Bế Văn Đàn, Hà Nội) ; *Viên Ngọc Quang* (8E PTCS Ba Đình, Thanh Hóa) ; *Lê Văn An* (9T Trường Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Trần Lê Nam, Lê Quang Nẫm* (8T Trường Lê Khiết và trường Đức Phổ, Quảng Ngãi) ; *Đinh Thành Trung* (A_o10 ĐHTH Hà Nội) ; *Nguyễn Công Hiệu* (11A PTTH Nguyễn Du, Thanh Oai, Hà Tây) ; *Nguyễn Duy Hùng, Vũ Minh Phương, Nguyễn Việt Kiên* (10 trường PTTH Lam Sơn, 12B PTTH Ba Đình, 11A PTTH Nga Sơn II, Thanh Hóa) ; *Lê Anh Tuấn* (10 trường PTTH NK Hà Tĩnh) ; *Đặng Đại Thọ* (10A PTTH Lệ Thủy, Quảng Bình) ; *Đào Thị Thiên Hương, Võ Hồng Sơn* (10 trường PTTH Đông Hà, Quảng Trị) ; *Nguyễn Thị Hải Yến* (10T Quốc Học Huế). *Mai Quang Trí* (10A Quốc học Quy Nhơn, Bình Định) ; *Nguyễn Nhật Nam* (10A Trường Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu) ; *Thái Minh Hoàng* ($10T_1$ PTTH Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/203. *Xác định tất cả các hàm số $f : R \setminus \{1\} \to R$ thỏa mãn điều kiện :*

$$f\left(\frac{4x - 2}{x + 1}\right) = 2f(x) \;\forall x \neq -1 \qquad (*)$$

Lời giải (*Đinh Thành Trung* A_o10 ĐHTH Hà Nội, *Vũ Thành Long* 11CT Hải Hưng).

Xét nghiệm của phương trình

$$\frac{4x - 2}{x + 1} = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy tại $x = 1$ và $x = 2$ thì $f(x) = 0$

Đặt

$$x = \frac{2t-1}{t-1} \quad \left(t \neq 1,\ t \neq \frac{2}{3}\right)$$

thì $\frac{4x-2}{x+1} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{2}t - 1}$; $x = 2 + \frac{1}{t-1}$

khi đó (*) có dạng :

$$f\left(2+\frac{1}{\frac{3}{2}t-1}\right) = 2f\left(2+\frac{1}{t-1}\right)$$

Hay $g\left(\frac{3}{2}t\right) = 2g(t)$ với $g(t) = f\left(2+\frac{1}{t-1}\right)$

$$f(x) = g\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \quad (**)$$

Đặt $g(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ |t|^{\log_{3/2} 2}\, h(t), & t \neq 0 \end{cases}$

Khi đó

$$(**) \Leftrightarrow h\left(\frac{3}{2}t\right) = h(t)\ \forall t \neq 0$$

Vậy : $\begin{cases} f(t) = g\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) ; f(1) = f(2) = 0 \\ g(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ |t|^{\log_{3/2} 2}\, h(t), & t \neq 0 \end{cases} \end{cases}$

Trong đó $h(t)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kì $\frac{3}{2}$.

Nhận xét. Có rất ít bạn có lời giải đúng. Đa số chỉ nhận được nghiệm $f(x) \equiv 0\ \forall x$.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/203. *Cho một bảng hình vuông gồm có 1994 × 1994 ô vuông bằng nhau. Trong mỗi ô vuông ta viết một số nguyên không âm tùy ý thỏa mãn điều kiện : Nếu một ô nào đó được viết số 0 thì tổng của tất cả các số viết ở dòng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 1994.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các số được viết trong bảng.

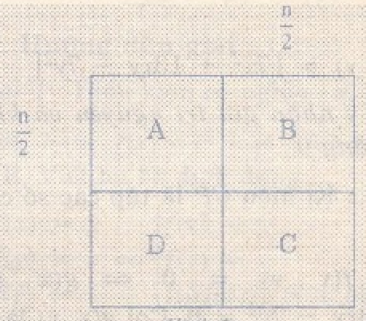
Lời giải (theo phương pháp của *Nguyễn Nhật Nam,* trường Vũng Tàu, Bà Rịa – Vũng Tàu ; *Mai Nam Long,* 12A PTTH số 1 Quảng Trạch, Quảng Bình ; *Phạm Lê Sơn,* 10 trường PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa) : Ta giải *Bài toán tổng quát* – là bài nhận được từ bài đã ra bằng cách thay 1994 bởi n ($n \geqslant 2$, $n \in N$). Với mỗi $i = \overline{1, n}$ kí hiệu a_i là tổng tất cả các số được viết ở dòng thứ i (kể từ trên xuống dưới). Với mỗi $j = \overline{1, n}$ kí hiệu b_j là tổng tất cả các số được viết ở cột thứ j (kể từ trái qua phải). Từ giả thiết của bài toán suy ra $a_i + b_j \geqslant n$ $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Do đó :

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i + b_j) \geqslant n^3 \quad (1)$$

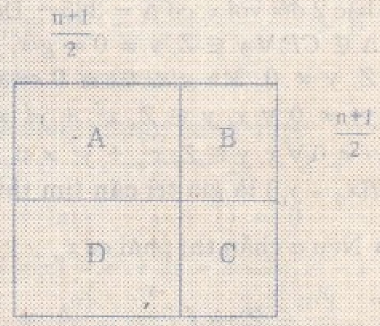
Dễ thấy, mỗi số được viết trong bảng xuất hiện trong tổng T đúng $2n$ lần. Vì vậy, nếu kí hiệu S là tổng tất cả các số được viết trong bảng thì $T = 2n \cdot S$. Kết hợp với (1) suy ra $S \geqslant \frac{n^2}{2}$. Và do S nguyên nên $S \geqslant \left[\frac{n^2+1}{2}\right]$.

Mặt khác, chia bảng đã cho thành 4 bảng con A, B, C, D như hình 1a nếu n chẵn, như hình 1b nếu n lẻ ($n \geqslant 2$), rồi viết vào mỗi ô của bảng A và bảng C một số 1, và viết vào mỗi ô của bảng B và bảng D một số 0. Dễ thấy, cách viết số nói trên thỏa mãn các điều kiện của bài toán và có $S = \left[\frac{n^2+1}{2}\right]$.

Vậy $S_{min} = \left[\frac{n^2+1}{2}\right]$ Với $n = 1994$, có $S_{\min} = 1994 \times 997$



Hình 1a



Hình 1b

Nhận xét : 1. Trong tổng số 22 bạn gửi lời giải cho bài toán, có tới 13 bạn, hoặc do không đọc kĩ đề bài hoặc do yếu Văn, đã hiểu sai đề bài.

2. Bạn *Nhật Nam* đã giải đúng Bài toán tổng quát trong trường hợp n chẵn. Bằng một phương pháp khác với phương pháp của lời

giải trên, bạn *Lê Anh Vũ* (10CT, Quốc học Huế) đã chỉ ra được $S \geq \left[\frac{n^2+1}{2}\right]$, song rất tiếc bạn đã chứng minh sai sự tồn tại của dấu "=" trong trường hợp n lẻ.

3. Có hai bạn (một ở PTTH Lương Văn Tụy, Ninh Bình, và một ở Quốc học Quy Nhơn - Bình Định) cho lời giải sai tuy có kết quả đúng. Một bạn khác (ở PTTH Buôn Ma Thuột) đã mắc một sai lầm cơ bản, khi bạn vội vã kết luận $S_{min} = \frac{1994^2}{2}$ trong lúc mới chỉ chứng minh được $S \geq \frac{1994^2}{2}$. (1).

4. Ngoài các bạn đã nêu tên ở phần đầu của lời giải, các bạn sau cũng có lời giải tốt : *Đinh Thành Trung* ($A_0$10 ĐHTH Hà Nội), *Phạm Đình Trường* (10CT PTTH Trần Phú, Hải Phòng) và Lê Anh Vũ.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/203. *Trên mặt phẳng cho điểm I cố định, ba đường tròn $(O_1 ; R_1)$, $(O_2 ; R_2)$, $(O_3 ; R_3)$ cùng qua I ; ngoài ra các điểm A, B, C theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (O_2) với (O_3) ; (O_3) với (O_1) ; (O_1) với (O_2). Biết rằng I nằm ở bên trong tam giác ABC. Một đường thẳng MN tiếp xúc với (O_1), (O_2) lần lượt tại M và N và không cắt (O_3) ; tương tự, đường thẳng PQ tiếp xúc với (O_2), (O_3) và đường thẳng EF tiếp xúc với (O_3), (O_1). Giả sử các đường tròn (O_1), $(O_2$ và $O_3)$ thay đổi sao cho $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \leq 3$.*

a) Hãy tính bán kính của các đường tròn và khoảng cách tâm các đường tròn sao cho tổng :

$S = S_{\Delta IMN} + S_{\Delta IPQ} + S_{\Delta IEF}$ *lớn nhất.*

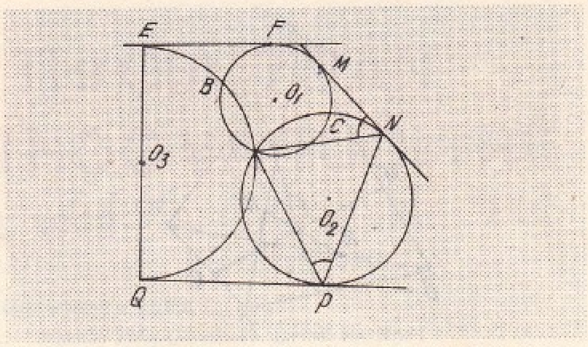
b) Chứng minh rằng khi S đạt được giá trị lớn nhất thì diện tích lục giác lồi MNPQEF cũng đạt được giá trị lớn nhất của nó.

Lời giải. a) Gọi x, y, z lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp ΔIPQ, ΔIEF, ΔIMN. Theo định lí hàm số sin thì :

$$\begin{cases} \dfrac{MI}{\sin\widehat{MNI}} = 2z \\ \dfrac{NI}{\sin\widehat{NPI}} = 2R_2 = \dfrac{NI}{\sin\widehat{MNI}} \end{cases}$$

(vì $\widehat{MNI} = \frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{NI} = \widehat{NPI}$). Suy ra $z = \frac{MI}{NI} \cdot R_2$.

Tương tự ta cũng có $z = \frac{NI}{MI} \cdot R_1$, do đó



$z^2 = R_1 \cdot R_2$. Cũng vậy, $x^2 = R_2R_3$; $y^2 = R_1R_3$. Ngoài ra, ta đã biết : $S_{\Delta IPQ} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2$; $S_{\Delta IEF} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}y^2$; $S_{\Delta IMN} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}z^2$ nên $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}(x^2+y^2+z^2) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \times (R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2) \leq \frac{9\sqrt{3}}{4}$. Dấu "=" xẩy ra khi và chỉ khi các dấu "=" thành phần xẩy ra, hay các tam giác IPQ, IMN, IEF đều, $R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = \frac{3}{3} = 1$. Vậy $R_1 = R_2 = R_3 = 1$. Và $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = \sqrt{3}$.

b) $S_{MNPQEF} = S + S_{\Delta INP} + S_{\Delta IQE} + S_{\Delta IFM} \leq$

$$\leq \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) \leq \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xẩy ra khi và chỉ khi xẩy ra dấu "=" ở câu a), từ đó ta có đpcm.

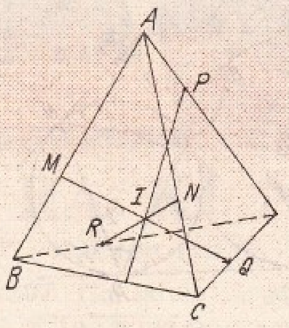
Nhận xét : Lời giải tốt rơi vào một bài giải không có địa chỉ

ĐẶNG VIỄN

Bài T10/203. *Giả sử tứ diện ABCD có tất cả các cạnh tiếp xúc với một mặt cầu nào đó. Gọi các tiếp điểm của mặt cầu với các cạnh AB ; AC ; AD ; CD ; DB ; BC theo thứ tự là M, N, P, Q, R, S. Chứng minh rằng MQ, NR, PS đồng quy.*

Lời giải : Theo giả thiết AM, BS, CQ, DP lần lượt bằng PA, MB, SC, QD và các điểm M, N, P, Q, R, S đều nằm trên các cạnh của tứ diện $ABCD$ nên : $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1$.

Suy ra bốn điểm M, P, Q, S nằm trên một mặt phẳng (định lí Mênêlauyt mở rộng cho không gian). Hơn nữa, xét nhị diện cạnh AD chẳng hạn, số đo của nó nhỏ hơn 180° nên $\widehat{MPQ} < 180°$, các góc còn lại của tứ giác phẳng $MPQS$ cũng đều $< 180°$, và tứ giác $MPQS$ lồi, hay hai đường chéo MQ, PS cắt nhau tại 1 điểm gọi là I. Chứng minh tương tự ta có MQ, PS, NR đôi một cắt nhau. Mà

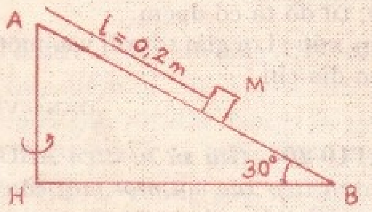


chúng không đồng phẳng nên chúng đồng quy tại I, đpcm.

Nhận xét. Có 22 bạn giải bài này. Lời giải tốt thuộc về : *Nguyễn Tuấn Hải* 11M Marie Curie, *Đinh Thành Trung* $A_0$10 ĐHTH Hà Nội, *Nguyễn Thị Yến* 10 CT PTTH Quốc học Huế, *Mai Quang Trí* (10A, Quốc học Quy Nhơn, Bình Định, *Võ Hoàng Trung* 11A, PTTH Chuyên Trà Vinh.

ĐẶNG VIỄN

Bài L1/203. *Vật M khối lượng 1kg được giữ trên mặt AB bằng một sợi dây, mặt AB nghiêng 30°. Mặt AB quay quanh trục thẳng đứng AH với vận tốc góc không đổi ω = 10 rad/s, dây bị giãn ra và có chiều dài 0,2m, lúc này M vẫn nằm trên AB. Ma sát giữa M và AB không đáng kể. Tìm lực căng của dây treo và lực ép của M lên AB.*



Lời giải. Vật M chịu tác dụng của các lực : trọng lực $P = mg$; lực căng của dây T ; phản lực Q của mặt AB. Chiếu hợp lực lên phương thẳng đứng Oy và phương nằm ngang Ox và dựa vào điều kiện $F_y = 0$ và $F_x = m\omega^2R$ (R là khoảng cách từ M đến trục quay), suy ra $Q = 0$ và $T = 20N$.

Nhận xét : Có 37 em gửi bài, trong đó có 24 bài giải đúng.

OK

Bài L2/203. *Mắc hai vôn kế V_1, V_2 nối tiếp nhau vào hai cực của nguồn điện một chiều thì kim của vôn kế V_1 chỉ 6V, kim vôn kế V_2 chỉ 4V. Khi chỉ mắc vôn kế V_1 vào hai cực của nguồn điện trên thì kim của nó chỉ 9V*

a) Tìm suất điện động của nguồn điện

b) Khi chỉ mắc vôn kế V_2 vào hai cực của nguồn điện trên thì kim của nó chỉ mấy vôn.

Qua kết quả tính toán hãy nêu ý nghĩa (ứng dụng) thực tế của bài toán trên.

Lời giải : Gọi : R_1 , R_2 là điện trở của V_1 và V_2, E, r là suất điện động và điện trở trong của nguồn điện.

– Khi mắc V_1 R V_2 nối tiếp nhau vào hai cực của nguồn ta có $\dfrac{E-(U_1+U_2)}{r} = \dfrac{U_1}{R_1} = \dfrac{U_2}{R_2}$ (1) với U_1 , U_2 là số chỉ của V_1 , V_2

– Khi mắc một trong 2 vôn kế vào nguồn : $\dfrac{E-U}{U} = \dfrac{r}{R}$ (2) với U là số chỉ vôn kế và R là điện trở vôn kế đó.

a) Với $R = R_1$, $U = 9V$. Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{E-(U_1+U_2)}{U_1} = \frac{E-U}{U} \text{ hay}$$

$$E = \frac{U_2U}{U-U_1} = \frac{9 \cdot 4}{9-6} = 12V$$

b) Với $R = R_2$, từ (1) và (2) ta có

$$\frac{E-(U_1+U_2)}{U} = \frac{E-U}{U} \text{ hay}$$

$$U = \frac{EU_2}{E-U_1} = \frac{12 \cdot 4}{12-6} = 8V$$

Vậy số chỉ vôn kế V_2 là 8V.

Ứng dụng : Bằng phương pháp này ta có thể đo chính xác suất điện động của một nguồn điện bằng hai vôn kế theo công thức

$$E = \frac{U_2U}{U-U_1}, \text{ trong đó}$$

U_1 , U_2 là số chỉ của hai vôn kế khi chúng được mắc nối tiếp vào hai cực của nguồn, và U là số chỉ của một vôn kế trước đây đã chỉ U_1 bây giờ được mắc riêng vào nguồn.

Nhận xét. Có 43 em đã gửi bài giải, trong đó 41 em đã có đáp số đúng. Có 7 em có lời giải tốt : *Trương Hàm Yêng*, $11A_1$ PTTH Lí Tự Trọng, Cần Thơ, *Phạm Anh Dũng*, 9LT, PT Năng khiếu Hải Hưng ; *Lê Thanh Minh*, 91, Nguyễn Tri Phương, Huế ; *Nguyễn Hữu Hải* 11A PTTH Hoài Nhơn 2, Bình Định ; *Nguyễn Đình Thịnh*, 9 chuyên Lí, PT năng khiếu Vinh, Nghệ An ; *Lê Lương Tuấn*, 9 chuyên toán, PT Năng khiếu Đông Sơn, Thanh Hóa ; *Nguyễn Đức Phương* 9H PTCS Trưng Vương, Hà Nội. Lời giải ở trên là của em *Trương Hàm Yêng*.

M.T.

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

NĂM 1993

Cuộc thi thường kì giải Toán trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ năm 1993 đã được đông đảo các bạn học sinh tham gia. Các địa phương có nhiều bạn hưởng ứng cuộc thi là : Vĩnh Phú, Hà Nội, Hà Tây, Hải Hưng, Thái Bình, Nam Hà, Thanh Hóa, Nghệ An, Quảng Bình, Quảng trị, Thừa Thiên – Huế, Quảng Nam – Đà Nẵng, Bình Định, Khánh Hòa, Đắc Lắc, Thành phố Hồ Chí Minh, Vĩnh Long, Cần Thơ, Minh Hải...

Nhìn chung các tỉnh ở miền núi phía Bắc và đồng bằng sông Cửu Long còn ít gửi bài dự thi. Rất có thể nhiều bạn vẫn giải bài song không gửi về toà soạn.

Thắng lợi của cuộc thi là đã đẩy lên được một phong trào học toán tốt ở nhiều địa phương. Nhiều bạn đã giỏi toán hơn qua một năm giải bài trên tạp chí.

Các bạn không đạt giải chắc cũng có được những niềm vui khi giải được nhiều bài toán khó.

Bên cạnh cuộc thi giải Toán còn có cuộc thi mini giải các bài Vật lí.

Sau đây là danh sách các bạn trúng giải :

A – GIẢI TOÁN

• Lớp 12

Giải nhất : *Phùng Sơn Lâm*, 12 Phan Bội Châu, Nghệ An

Giải nhì : *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Đào Duy Từ, Quảng Bình
Hoàng Thị Tuyết, 12 Lam Sơn, Thanh Hóa

Giải ba : *Tô Huy Quỳnh*, 12 Chuyên Thái Bình
Nguyễn Hải Hà, 12 Chuyên ĐHSP Vinh,
Hà Thanh Hải, 12 Lam Sơn, Thanh Hóa

Giải khuyến khích :
Nguyễn Thanh Bình, 12 chuyên Thái Bình
Nguyễn Viết Toàn, 12 Lam Sơn, Thanh Hóa
Trương Bá Tú, 12 chuyên ĐHSP Vinh
Nguyễn Minh Phương 12 Nguyễn Huệ, Hà Tây.
Nguyễn Lê Minh, 12 Lam Sơn, Thanh Hóa
Nguyễn Viết Trung, 12 Lam Sơn, Thanh Hóa
Vũ Quốc Ánh, 12 Đào Duy Từ, Quảng Bình
Bùi Đình Tiến, 12 chuyên Quảng Ngãi
Đinh Quang Cường, 12 Lê Qúy Đôn, Quảng Nam – Đà Nẵng
Giang Kiệt Quốc, 12 Nguyễn Thượng Hiền, TP Hồ Chí Minh

• Lớp 11

Giải nhất : *Nguyễn Tuấn Hải*, 11, MariQuyri, Hà Nội.
Phạm Bảo Sơn, 11 ĐHTH Hà Nội.

Giải nhì : *Nguyễn Tiến Dũng* 11, ĐHSP Hà Nội 1
Nguyễn Thế Phương 11, ĐHSP Hà Nội 1
Lê Nguyên Chất 11, Lam Sơn, Thanh Hóa

Giải ba : *Cao Văn Hạnh* 11, Lam Sơn, Thanh Hóa
Vũ Văn Điệp, 11, Lê Hồng Phong, Nam Hà

Giải khuyến khích :
Nguyễn Tiến Quỳnh, 11, ĐHSP Hà Nội 1
Đào Đạo Lý, 11 chuyên Thái Bình
Nguyễn Văn Sơn, 11 Quốc học Huế, Thừa Thiên – Huế
Phan Hoàng Việt, 11 Quốc học Quy Nhơn, Bình Định.
Nguyễn Xuân Hùng, 11 chuyên Buôn Mê Thuột

• Lớp 10

Giải nhất : *Nguyễn Thái Hà*, 10 ĐHTH Hà Nội

Giải nhì : *Phạm Lê Sơn*, 10 Lam Sơn, Thanh Hóa

Giải ba : *Phạm Mạnh Quang*, 10 Lam Sơn, Thanh Hóa
Nguyễn Quốc Tuấn, 10 Lê Hồng Phong, Nam Hà
Nguyễn Thị Hải Yến, 10 chuyên Quảng Trị

Giải khuyến khích :
Nguyễn Hồng Tâm, 10 Hùng Vương, Vĩnh Phú
Lê Anh Vũ 10 Quốc học Huế, Thừa Thiên – Huế

• Lớp 9

Giải nhất : *Trần Minh Anh*, 9 Trưng Vương, Hà Nội
Nguyễn Anh Tú, 9 Trưng Vương, Hà Nội
Trần Nguyên Ngọc, 9 Cần thơ, Hà Tây.

Giải nhì : *Phan Ngọc Lan*, 9 Việt Trì, Vĩnh Phú
Nguyễn Thúc Dương, 9 Trưng Vương, Hà Nội
Nguyễn Bá Hùng, 9 Trưng Vương, Hà Nội
Mai Quang Trí, 9 Quang Trung, Tây Sơn, Bình Định

Giải ba : *Bùi Quang Minh*, 9 Giảng Võ II, Hà Nội
Nguyễn Minh Quốc, 9 Hoài Ân, Bình Định.
Trương Thuận, 9 Phan Ngọc Hiển, Minh Hải
Lê Nam Hải, 9 Đoàn Thị Điểm, Cần Thơ.

Giải khuyến khích
Trần Đức Quyền, 9 Trần Đăng Ninh, Nam Hà
Nguyễn Văn Nam, 9 Trần Đăng Ninh, Nam Hà
Trần Đăng Hòa, 9 Cần Thơ, Hà Tây
Nguyễn Trung Dũng, 9 Lê Quý Đôn, Bà Rịa – Vũng Tàu

• Lớp 8

Giải nhất : *Nguyễn Long*, 8 Trưng Vương, Hà Nội

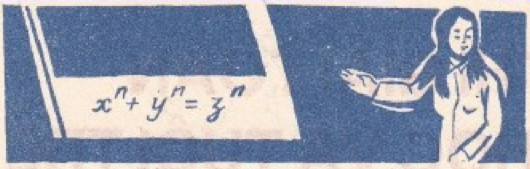
Giải nhì : *Phạm Huy Tùng*, 8 Bế Văn Đàn, Hà Nội

Giải ba : *Doãn Trung Tùng*, 8 Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội.
Nguyễn Lê Lực, 8 Đầm Dơi, Minh Hải

B – GIẢI VẬT LÍ

Giải nhất : Nguyễn Hồng Thắng, 12 CA1, Bùi Thị Xuân, TP Hồ Chí Minh.

Giải ba : *Phùng Minh Hoàng*, 12L Hà Nội – Amsterdam
Vũ Thị Bích Hà, 11 chuyên Thái Bình
Nguyễn Quỳnh Nam, 10 Mari Quyri, Hà Nội
Trương Hàm Yêng, PTTH Lý Tự Trọng, Cần Thơ



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp THCS

Bài T1/207. Tìm tất cả các số hữu tỉ x để số $m = \sqrt{x^2 + 19x + 93}$ là số hữu tỉ.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

Bài T2/207. Tồn tại hay không số tự nhiên n thỏa mãn : $n^2 + 2^n$ chia hết cho 1994

TẠ HỒNG QUẢNG

Bài T3/207. Chứng minh rằng đa thức
$$P(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{7x}{15}$$ nhận giá trị nguyên khi x là số nguyên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/207. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A vẽ đường thẳng sao cho cắt đường chéo BD ở P và cắt DC, BC lần lượt ở M, N.

1) Chứng minh $\frac{AP}{AM} + \frac{AP}{AN} = 1$ (*)

2) Có hay không hệ thức (*) khi đường thẳng vẽ qua A cắt tia CD, CB, DB lần lượt ở M, N, P ?

NGUYỄN ĐỄ

Bài T5/207. Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh AC, kẻ tia Ax vuông góc với BM. Gọi H là giao điểm của Ax với BC và K là điểm đối xứng với C qua H, kẻ tia Ky vuông góc với BM, gọi I là giao điểm của Ky với AB. Tính $\widehat{AIM}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Các lớp THCB

Bài T6/207

Dãy $\{x_n\}$ cho bởi $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$.

Tìm phần nguyên của số :
$$A = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_{1993} + 1}$$

TÔ HẢI

Bài T7/207

Giải phương trình
$$a \cdot \frac{9x^8 + 84x^6 + 126x^4 + 36x^2 + 1}{x^8 + 36x^6 + 126x^4 + 84x^2 + 9} + x \cdot \frac{9a^8 + 84a^6 + 126a^4 + 36a^2 + 1}{a^8 + 36a^6 + 126a^4 + 84a^2 + 9} = 0$$

TRẦN HANH

Bài T8/207

Chứng minh rằng :
$$\frac{1}{1 + \cos 2x} + \frac{1}{1 + \cos 4x} + \frac{1}{1 - \cos 6x} > 2$$
với mọi x làm cho vế trái có nghĩa.

TRẦN DUY HINH

Bài T9/207. Cho tam giác ABC. Kí hiệu l_a , l_b , l_c là độ dài các đường phân giác trong của các góc A, B, C, R, r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $\frac{2}{R} \leqslant \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \frac{1}{r}$

TRẦN XUÂN ĐÁNG

Bài T10/207. Giả sử r và R lần lượt là bán kính các mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp một tứ diện có thể tích V. Chứng minh rằng $8rR^2 \geqslant 3\sqrt{3}V$.

Khi nào thì đạt được đẳng thức.

DƯƠNG QUỐC VIỆT

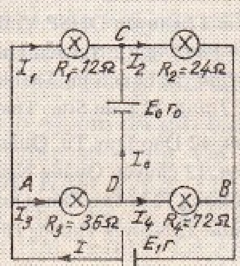
Các đề Vật lí

Bài L1/207. Trên đường có 4 xe chạy : xe ôtô (1), xe môtô (2), xe máy (3) và xe đạp (4). Bốn xe cùng bắt đầu chạy thẳng đều với vận tốc riêng. Xe (1) đuổi kịp xe (3) (chuyển động cùng chiều) sau 12 giờ chạy, gặp xe (4) (chuyển động ngược chiều) sau 16 giờ chạy. Còn xe (2) gặp xe (3) sau 17 giờ chạy, đuổi kịp xe (4) sau 18 giờ chạy.

Hỏi xe (4) gặp xe (3) khi nào ?

TÔ GIANG

Bài L2/207. Cho mạch điện vẽ bên, với nguồn (E, r) có hiệu suất $H = 0{,}9$, nguồn (E_0, C_0) có hiệu suất 0,8, ngọn đèn R_4 không sáng.



1) Tính r và r_0.

2) I_0 bằng mấy lần I ?

3) E_0 bằng mấy lần E ?

4) Công suất P_2 của đèn (2) và P_3 của đèn (3) bằng mấy lần P_1 của đèn (1) ?

TRẦN VĂN MINH

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/207 : Find all rational numbers x such that $\sqrt{x^2+19x+93}$ is rational.

NGUYEN KHANH NGUYEN

T2/207 : Does there exist a natural number n such that n^2+2^n is divisible by 1994 ?

TA HONG QUANG

T3/207 : Show that the polynomial

$P(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+\frac{7x}{15}$ takes integral value whenever x is an integer

DANG HUNG THANG

T4/207 : A line passing through the vertex A of a parallelogram $ABCD$ intersects the diagonal BD and the lines DC, BC at P, and M , N, respectively.

1) Prove that

$$\frac{AP}{AM}+\frac{AP}{AN}=1 \quad (*)$$

2) Does hold the equality (*) if the line from A intersects the rays CD, CB and DB at M, N and P, respectively ?

NGUYEN DE

T5/207 : Given an isosceles triangle ABC with right angle A. M is an arbitrary point on AC. The ray Ax, orthogonal to BM, cuts the line BC at H. Let K be the point symmetric to C with respect to H. The ray Ky orthogonal to BM, cuts the line AB at I. Calculate $\widehat{AIM}$.

NGUYEN DUC TAN

For Upper Secondary Schools

T6/207 : The sequence $\{x_n\}$ is given by $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=x_n^2+x_n$ $(n=1, 2, ...)$

Determine the entire part of the number :

$$A=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+...+\frac{1}{x_{1993}+1}$$

TO HAI

T7/207 : Solve the equation

$$a\cdot\frac{9x^8+84x^6+126x^4+36x^2+1}{x^8+36x^6+126x^4+84x^2+9}+$$
$$+x\cdot\frac{9a^8+84a^6+126a^4+36a^2+1}{a^8+36a^6+126a^4+84a^2+9}=0$$

TRAN HANH

T8/207 : Prove that

$$\frac{1}{1+\cos 2x}+\frac{1}{1+\cos 4x}+\frac{1}{1-\cos 6x}>2$$

provided that the left side is defined.

TRAN DUY HINH

T9/207 : Given a triangle ABC. Prove that

$$\frac{2}{R}\leqslant\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\leqslant\frac{1}{r}$$

where l_a, l_b, l_c are the lengths of the inbisectors, r and R are the radii of inscribed and circumscribed circles of ABC.

TRAN XUAN DANG

T10/207 : Let r and R be the radii of inscribed and circumscribed spheres of a tetrahedron with volume V.

Prove that $8rR^2\geqslant 3\sqrt{3}V$.

DUONG QUOC VIET

Bạn có biết

MÁY TÍNH "NGÓN XOÈ NGÓN CỤP"

PHAN THANH QUANG

Khi con vượn người đầu tiên đứng thẳng trên hai chân sau, giải phóng hai chân trước, biến nó thành hai tay, thì cũng là lúc "chất xám" có một bước nhảy vọt mới về chất lượng.

Hai tay không chỉ là công cụ lao động mà còn là công cụ thông tin, giao tiếp, hơn nữa là một máy tính thô sơ bậc nhất, do "Trời" cho.

Các ngón tay, đốt tay, với các kiểu xòe, cụp khác nhau không những dùng để biểu hiện số lượng, mà còn để làm phép tính. Các phép cộng, trừ, nhân, chia đơn giản được thực hiện khéo léo trên hai bàn tay, giúp giảm bớt việc nhớ các con số.

Trong nhiều thế kỉ con người đã làm phép nhân hai số, mà mỗi số lớn hơn 5, bé hơn 10, như sau :

Ví dụ nhân 7 với 9 :

* 7 − 5 = 2, trước hết xòe 2 ngón ở bàn tay trái ra

* 9 − 5 = 4, xòe 4 ngón ở bàn tay phải ra

* 2 ngón xòe ra + 4 ngón xòe ra = 6 ngón xòe ra.

* Bàn tay trái còn 3 ngón cụp, bàn tay phải còn 1 ngón cụp, vậy 3 × 1 = 3.

Kết quả 7 . 9 = 63.

Một số nông dân ở Châu Âu vẫn còn làm phép nhân kiểu này.

Bằng cách này bạn làm phép nhân 8.6 thử xem ! Cơ sở toán học của phép nhân kiểu này là gì ?

Một gợi ý :

ab = [(a − 5) + (b − 5)] 10 + (10 − a) (10 − b).

Hướng dẫn giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi toán PTTH quốc gia (bảng A)

NĂM HỌC 1993 - 1994

NGUYỄN VIỆT HẢI - NGUYỄN KHẮC MINH

I. Đề thi :

Ngày thi thứ nhất (02-3-1994)

Bài 1 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$$

Bài 2 : Xét tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng BC ; B' là điểm đối xứng với B qua đường thẳng CA ; C' là điểm đối xứng với C qua đường thẳng AB. Hãy tìm điều kiện cần và đủ về dạng của tam giác ABC để tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều.

Bài 3 : Cho số thực a thuộc khoảng $(0 ; 1)$. Xét dãy số $\{x_n\}^{\infty}\ n = 0$ được xác định bởi :

$$x_o = a$$

$$x_n = \frac{4}{\pi^2}\left(arccos x_{n-1} + \frac{\pi}{2}\right) arcsin x_{n-1}$$

$$\forall n = 1, 2, 3, ...$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}^{\infty}\ n = 0$ có giới hạn hữu hạn khi n dần tới ∞. Hãy tìm giới hạn đó.

Ngày thi thứ hai (03 - 3 - 1994)

Bài 4 : Tại đỉnh A_o của đa giác lồi $A_oA_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 3)$ người ta đặt n viên bi. Thực hiện việc chuyển chỗ các viên bi theo cách sau : mỗi lần lấy một viên bi ở A_i rồi đặt nó vào một đỉnh kề A_i và đồng thời lấy một viên bi ở A_j rồi đặt nó vào một đỉnh kề A_j, với $i, j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ (có thể $i = j$).

Hãy tìm tất cả các giá trị của n sao cho sau một số hữu hạn lần thực hiện việc chuyển bi nói trên một cách thích hợp thì ở mỗi đỉnh $A_1, A_2, \ldots A_n$ đều có một viên bi.

Bài 5 : Cho mặt cầu $(\mathcal{E})$ tâm O bán kính R $(R > 0)$. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau, cùng đi qua tâm O và cắt mặt cầu $(\mathcal{E})$ lần lượt theo các đường tròn (T_P), (T_Q).

Tìm quỹ tích trực tâm của các tứ diện trực tâm $ABCD$ mà tam giác BCD nội tiếp đường tròn (T_P) và đỉnh A nằm trên đường tròn (T_Q).

(Tứ diện trực tâm là tứ diện có bốn đường cao đồng quy tại một điểm gọi là trực tâm của tứ diện).

Bài 6 : Hỏi có tồn tại hay không các đa thức $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

1. Tất cả các hệ số của $P(x)$, $Q(x)$ và $T(x)$ đều là các số nguyên dương.

2. $T(x) = (x^2 - 3x + 3)$

$$P(x) = \left(\frac{x^2}{20} - \frac{x}{15} + \frac{1}{12}\right) Q(x).$$

II. Hướng dẫn giải :

Bài 1 : Điều kiện có nghĩa : $x, y, z \in R$.

Xét hàm $f(x) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1)$ trên R. Viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(f(f(x))) = x \end{cases} \quad (1) \qquad (I)$$

Có : $f'(t) = 3t^2 + \dfrac{3t^2 - t + 2}{t^2 - t + 1} > 0$

$\forall t \in R \Rightarrow f(t) \uparrow$ trên R.

Từ đó dễ dàng chứng minh được :

$(1) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = 0 \quad (2).$

Xét hàm $g(x) = x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1)$ trên R. Có : $g'(x) = 3x^2 + \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1} > 0$

$\forall x \in R \Rightarrow g(x) \uparrow$ trên R. Mà $g(1) = 0$, nên suy ra : $(2) \Leftrightarrow x = 1$, và do vậy :

$$(I) \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 2 : Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Kí hiệu $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$ lần lượt bởi A, C, B.

Kí hiệu $(\widehat{\overrightarrow{OX}, OY})$ là góc có hướng tạo bởi tia OX và tia OY. Có : $BC' = B'C = a$; $CA' = AC' = b$; $AB' = A'B = c$; và $(\widehat{\overrightarrow{AB'}, AC'}) = 3\,(\widehat{\overrightarrow{AC}, AB})$; $(\widehat{\overrightarrow{BC'}, BA'}) = 3\,(\widehat{\overrightarrow{BA}, BC})$; $(\widehat{\overrightarrow{CB'}, CA'}) = 3\,(\widehat{\overrightarrow{CA}, CB})$. Suy ra : $\cos\widehat{B'AC'} = \cos 3A$; $\cos\widehat{C'BA'} = \cos 3B$; $\cos\widehat{A'BC'} = \cos 3C$.

Áp dụng định lí hàm số cosin cho $\widehat{CA'B'}$ ta được :

$$\begin{aligned} A'B'^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos 3C \\ &= c^2 + 2ab\cos C - 2ab\cos 3C \\ &= c^2 + 8ab\cos C \,.\, \sin^2 C = \\ &= \frac{c^2}{R^2}\,(R^2 + a^2 + b^2 - c^2) \quad (3) \end{aligned}$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta\, ABC$).

Tương tự, có : $B'C'^2 = \dfrac{a^2}{R^2}(R^2 + b^2 + c^2 - a^2)$; $C'A'^2 = \dfrac{b^2}{R^2}(R^2 + c^2 + a^2 - b^2)$. Từ đó : $\Delta\, A'B'C'$ đều

$$\Leftrightarrow a^2(R^2 + b^2 + c^2 - a^2) = b^2(R^2 + c^2 + a^2 - b^2) = c^2(R^2 + a^2 + b^2 - c^2) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a^2 - b^2)(R^2 + c^2 - a^2 - b^2) = 0 \\ (b^2 - c^2)(R^2 + a^2 - b^2 - c^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta\, ABC \text{ đều} \\ \Delta\, ABC \text{ cân có góc ở đỉnh bằng } 30^o \\ \Delta\, ABC \text{ cân có góc ở đỉnh bằng } 150^o \end{array}\right.$$

Chú ý : Có thể thu được (3) từ các hệ thức : $A'B'^2 = (\overrightarrow{A'B'})^2$; $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{A'A}$ và $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{A'A}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Bài 3 : Viết lại công thức xác định dãy dưới dạng :

$$x_n = 1 - \frac{4}{\pi^2}\arccos^2 x_{n-1} \quad (4)$$

Từ đó dễ thấy $x_n \in (0,1)\ \forall n \in N$

Với mỗi $n \in N$ đặt $t_n = \arccos x_n$, có $t_n \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)\ \forall n \in N$. Hơn nữa, từ (4) có :

$$\cos t_n = 1 - \frac{4}{\pi^2}t_{n-1}^2 \Leftrightarrow t_n = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\, t_{n-1}\right).$$

Xét hàm $f(t) = 2\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}.t\right) - t$ trên $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, có :

t	0		t_o		$\pi/2$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(t_o)$	$\nearrow$	$f(\pi/2)$

$$t_o = \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{\sqrt{2}}$$

Mà $f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ nên suy ra $f(t) \leqslant 0$ $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ và $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = \dfrac{\pi}{2}$ (5)

Từ đó : $t_{n+1} - t_n = f(t_n) < 0\ \forall n \in N \Rightarrow$ dãy $\{t_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 0 $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} t_n\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \alpha$, có $0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ và $\alpha = 2\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}.\alpha\right)$. Kết hợp với (5) suy ra $\alpha = 0$, và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Bài 4 : Dễ thấy $n = 2k$ ($k \in N^*$, $k \geqslant 2$) thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

● Xét $n = 2k + 1$, $k \in N^*$. Tô các đỉnh $A_o, A_1, \ldots A_{2k+1}$ bởi hai màu X, Đ sao cho A_o được tô bởi màu Đ với mỗi $i = 0, 1, 2, \ldots 2k+1$ đỉnh A_i có màu khác với màu của đỉnh kề với nó. Nhận thấy : Trong mỗi lần chuyển bi, mỗi bi đều được chuyển từ đỉnh có màu này sang đỉnh có màu kia. Do vậy, sau mỗi lần chuyển bi, tổng số bi có tại tất cả các đỉnh được tô bởi màu X không thay đổi tính chẵn, lẻ. Suy ra, có thể xếp được vào mỗi đỉnh $A_1, A_2, \ldots A_{2k+1}$ một bi chỉ khi $k + 1 \equiv 0$ (mod2), hay $n \equiv 3$ (mod4).

Ngược lại, với $n = 4m + 3$, $m \in N$, thực hiện việc chuyển bi, chẳng hạn, theo phương án :

+ Lần lượt, với mỗi $l = \overline{1, 2m+1}$ ở bước thứ l ta làm như sau : Lấy 2 bi ở A_o rồi chuyển chúng tuần tự qua các đỉnh $A_1, A_2, \ldots$ tới đỉnh A_{2l} thì dừng lại. Sau bước thứ $2m+1$, tại đỉnh A_o sẽ có 1 bi, tại mỗi đỉnh $A_2, A_4, \ldots, A_{4m+2}$ đều có 2 bi, còn tại các đỉnh $A_1, A_3, \ldots A_{4m+3}$ đều không có bi. Tiếp theo :

+ Lần lượt, với mỗi $l = \overline{1, m+1}$ ở bước thứ l ta làm như sau : Lấy 1 bi ở A_{4l} chuyển sang A_{4l-1} và đồng thời lấy 1 bi ở A_{4l-2} chuyển sang A_{4l-3} (Quy ước coi A_o là A_{4m+4}). Sau bước thứ $m + 1$, tại mỗi điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{4m+3}$ sẽ có 1 bi.

● Tóm lại, tất cả các giá trị $n \geqslant 3$ cần tìm là $n \not\equiv 1$ (mod4)

Bài 5 : Gọi M, N là hai giao điểm của (T_P) và (T_Q). Gọi H_o là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

● Trước hết, hãy chứng minh : *H là trực tâm của tứ diện $ABCD$ thỏa mãn đề bài $\Leftrightarrow H$ là trung điểm của AH_o, với $A \in (T_Q) \setminus \{M, N\}$ (*)*

● Từ đó : Quỹ tích cần tìm chính là quỹ tích trung điểm H của AH_o khi A chạy trên $(T_Q) \setminus \{M, N\}$.

Trong (Q), xét hệ trục tọa độ trực chuẩn Oxy, ta có trục hoành nằm trên đường thẳng MN. Trong hệ trục Oxy đường tròn (T_Q) có phương trình : $x^2 + y^2 = R^2$ (6). Gọi (x, y) là tọa độ của A. Khi đó $H(x', y')$ là trung điểm của AH_o khi và chỉ khi $x' = x$ và $y' = \frac{1}{2}y$. Bởi vậy, từ (6) suy ra : $H(x', y')$ là trung điểm của AH_o, với $A \in (T_Q) \setminus \{M, N\}$, khi và chỉ khi $x'^2 + 4y'^2 = R^2$ và $y' \neq 0$. Vậy :

Quỹ tích cần tìm là $(E) \setminus \{M, N\}$, với (E) là elip, vẽ trong (Q), tâm O, trục lớn là MN và các bán trục là R, $\frac{R}{2}$.

Chú ý : Có thể chứng minh (*) theo nhiều cách.

Bài 6 : Viết lại đẳng thức của đề bài dưới dạng :

$$60T(x) = 60(x^2 - 3x + 3)\,P(x) = (3x^2 - 4x + 5)\,Q(x) \qquad (7)$$

Do các đa thức $60(x^2 - 3x + 3)$ và $(3x^2 - 4x + 5)$ vô nghiệm nên chúng nguyên tố cùng nhau. Vì vậy, từ (7) suy ra : *Tồn tại $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài $\Leftrightarrow$ Tồn tại đa thức $S(x)$ sao cho $(3x^2 - 4x + 5)\,S(x)$, $60(x^2 - 3x + 3)\,S(x)$ và $(3x^2 - 4x + 5)(x^2 - 3x + 3)\,S(x)$ đều là các đa thức với hệ số nguyên dương.*

● Xét đa thức $(x + 1)^n$.

1. Chọn n sao cho $P_1(x) = (3x^2 - 4x + 5)(x+1)^n$ là đa thức với hệ số nguyên dương. Có :

$$P_1(x) = 3x^{n+2} + (3C_n^1 - 4)x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (3C_n^{k+1} - 4C_n^k + 5C_n^{k-1})x^{n-k+1} + (5C_n^{n-1} - 4)x + 5$$

+ Dễ thấy $3C_n^1 - 4$ và $5C_n^{n-1} - 4$ nguyên dương $\forall n \geq 2$.

+ Hệ số của x^{n-k+1} nguyên dương $\forall k = \overline{1, n-1}$ khi và chỉ khi : $3C_n^{k+1} - 4C_n^k + 5C_n^{k-1} > 0$ $\forall k = \overline{1, n-1}$

$\Leftrightarrow 12k^2 - 2(5n - 1)k + 3n^2 - n - 4 > 0$ $\forall k = \overline{1, n-1}$ (8)

Điều kiện đủ để có (8) là :

$\Delta_k = 11n^2 - 2n - 49 > 0$ (9). Dễ thấy, có (9) $\forall n \geq 3$.

Như vậy, $\forall n \geq 3$ thì $P_1(x)$ là đa thức với hệ số nguyên dương.

2. Bằng cách tương tự sẽ có : $\forall n \geq 15$ thì $Q_1(x) = (x^2 - 3x + 3).(x + 1)^n$ là đa thức với hệ số nguyên dương.

3. Từ các kết quả của 1) và 2) suy ra $S(x) = (x + 1)^{18}$ thỏa mãn các điều kiện đã đặt ra ở trên.

● Vậy, câu trả lời của bài toán là có, và các đa thức $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$; chẳng hạn là :

$$P(x) = (3x^2 - 4x + 5)(x + 1)^{18}$$

$$Q(x) = 60(x^2 - 3x + 3)(x + 1)^{18}$$

$$T(x) = (x^2 - 3x + 3)(3x^2 - 4x + 5)(x + 1)^{18}$$

Chú ý : Bài toán còn có thể được giải một cách "du kích" như sau : Xuất phát từ Nhận xét :

$$(x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 3)(x^4 + 3x^2 + 9) = x^8 + 9x^4 + 81$$

$$(3x^2 - 4x + 5)(3x^2 + 4x + 5) = 9x^4 + 14x^2 + 25$$

có thể thấy các đa thức $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$ sau thỏa mãn các điều kiện của bài ra :

$$P(x) = (x^2 + 3x + 3)(x^4 + 3x^2 + 9) \times (9x^4 + 14x^2 + 25).R(x)$$

$$Q(x) = 60(3x^2 + 4x + 5)(x^8 + 9x^4 + 81).R(x)$$

$$T(x) = (x^8 + 9x^4 + 81)(9x^4 + 14x^2 + 25).R(x)$$

Với : $R(x) = x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

III. Nhận xét :

Theo chúng tôi, các bài toán thi năm nay mang "màu sắc chuyên" ít hơn so với các bài toán thi của những năm trước. Để đạt được

(Xem tiếp bìa 3)

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

MỞ RỘNG MỘT KẾT QUẢ CỦA TORICELLI

NGUYỄN MINH HÀ

Trong tam giác có một bài toán kinh điển :

Bài toán 1 : Cho tam giác ABC. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho tổng (MA + MB + MC) nhỏ nhất.

Bài toán 1 đã được nhà toán học Toricelli giải và kết quả cụ thể như sau : Nếu max $\{\widehat{A}\ ;\ \widehat{B}\ ;\ \widehat{C}\} < 120^o$ thì tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi $\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120^o$

Nếu $\widehat{A} \geqslant 120^o$ thì tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi M trùng A

Nếu $\widehat{B} \geqslant 120^o$ thì tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi M trùng B

Nếu $\widehat{C} \geqslant 120^o$ thì tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi M trùng C

Bài toán 1 có sự mở rộng tất yếu

Bài toán 2 : Cho tam giác ABC và ba số dương x, y, z. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho tổng (xMA + + yMB + zMC) nhỏ nhất.

Bài toán 2 đã được đề cập trong một vài tài liệu

Tuy nhiên, chưa có tài liệu nào cho một lời giải tường minh. Bài báo này xin giới thiệu một lời giải như vậy. Trước hết xin phát biểu không chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề : Cho tam giác ABC. M là một điểm trong không gian. Khi đó :

1. Nếu M không thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ba số $BC.MA\ ;\ CA.MB,\ AB.MC$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó

2. Nếu M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì trong ba số $BC.MA\ ;\ CA.MB\ ;\ AB.MC$ có một số bằng tổng hai số còn lại. Cụ thể là :

a) Nếu M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A) thì : $BC.MA = CA.MB + AB.MC$

b) Nếu M thuộc cung $\overset{\frown}{CA}$ (không chứa B) thì :
$$CA.MB = AB.MC + BC.MA$$

c) Nếu M thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ (không chứa C) thì :
$$AB.MC = BC.MA + CA.MB$$

Bổ đề trên là sự phát biểu chi tiết bất đẳng thức nổi tiếng Ptôlêmê.

Trở lại việc giải bài toán 2 :

A – Trường hợp $\begin{cases} y + z \leqslant x \\ z + x \leqslant y \\ x + y \leqslant z \end{cases}$ Chẳng hạn : $y + z \leqslant x$

Ta có : $xMA + yMB + zMC \geqslant (y + z)MA + yMB + zMC =$
$$= y(MA + MB) + z(MA + MC) \geqslant yAB + zAC$$

Đẳng thức xẩy ra $\Leftrightarrow M$ trùng A.

Vậy : $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng A và giá trị nhỏ nhất đó bằng : $yAB + zAC$.

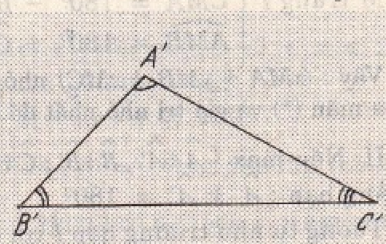
B – Trường hợp $\begin{cases} y + z > x \\ z + x > y \\ x + y > z \end{cases}$

Khi đó tồn tại $\Delta\, A'B'C'$ thỏa mãn điều kiện : $B'C' = x'\ ;\ C'A' = y,$ $A'B' = z$ (h.1)

I. Nếu max $\{\widehat{A} + \widehat{A'}\ ;\ \widehat{B} + \widehat{B'}\ ;\ \widehat{C} + \widehat{C'}\} < 180^o$

Về phía ngoài $\Delta\, ABC$ ta dựng

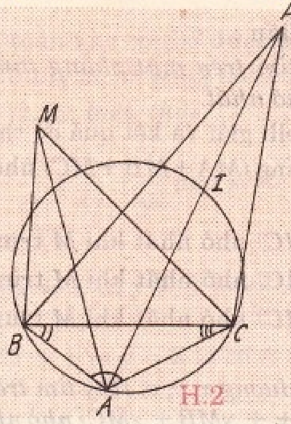
$\Delta\, A_1BC$ đồng dạng với $\Delta\, A'B'C'$ (h.2) Gọi I là giao (khác A_1) của đường thẳng AA_1 với đường tròn ngoại tiếp $\Delta\, A_1BC$.



Vì $\widehat{A} + \widehat{A'} < 180^o \Rightarrow \widehat{A} < 180^o - \widehat{A'} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{BAC} < 180^o - \widehat{BA_1C} \Rightarrow A$ không thuộc hình tròn ngoại tiếp $\Delta\, A_1BC$

$\Rightarrow I$ thuộc đoạn thẳng AA_1 (1)



H.2

Vì : $\begin{cases}\widehat{B} + \widehat{B'} < 180^o \\ \widehat{C} + \widehat{C'} < 180^o\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\widehat{ABA_1} < 180^o \\ \widehat{ACA_1} < 180^o\end{cases}$

$\Rightarrow I$ thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A_1) của đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BC (2)

Từ (1) và (2) ta thấy : I đồng thời thuộc đoạn AA_1 và cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A_1) của đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BC.

Hơn thế, bạn đọc có thể thấy : I thuộc ΔABC và :

$$\begin{cases}\widehat{BIC} = 180^o - \widehat{A'} \\ \widehat{CIA} = 180^o - \widehat{B'} \\ \widehat{AIB} = 180^o - \widehat{C'}\end{cases}$$

Lấy điểm M bất kì ta có :

$$xMA + yMB + zMC =$$
$$= B'C'.MA + C'A'.MB + A'B'.MC$$
$$= B'C'.MA + \frac{B'C'}{BC} \cdot CA_1.MB + \frac{B'C'}{BC} \cdot A_1B.MC$$
$$= B'C'\left(MA + \frac{CA_1.MB + A_1B.MC}{BC}\right)$$

Áp dụng bổ đề cho ΔA_1BC và điểm M ta có :

$$xMA + yMB + zMC \geq B'C'\left(MA + \frac{MA_1.BC}{BC}\right)$$
$$= B'C'(MA + MA_1) \geq B'C'.AA_1 = x.AA_1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ đồng thời thuộc đoạn AA_1 và cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A_1) của đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BC

$$M \text{ trùng } I \begin{cases}\widehat{BMC} = 180^o - \widehat{A'} \\ \widehat{CMA} = 180^o - \widehat{B'} \quad (*) \\ \widehat{AMB} = 180^o - \widehat{C'}\end{cases}$$

Vậy : $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M thỏa mãn (*) và giá trị nhỏ nhất đó bằng : xAA_1

II. Nếu $\max\{\widehat{A}+\widehat{A'}, \widehat{B}+\widehat{B'}; \widehat{C}+\widehat{C'}\} = 180^o$. Chẳng hạn : $\widehat{A} + \widehat{A'} = 180^o$.

Tương tự như trường hợp I với chú ý rằng : A chính là giao của đoạn AA_1 với cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A_1) của đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BC, ta thấy : $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng A và giá trị nhỏ nhất đó bằng : $xAA_1 = yAB + zAC$.

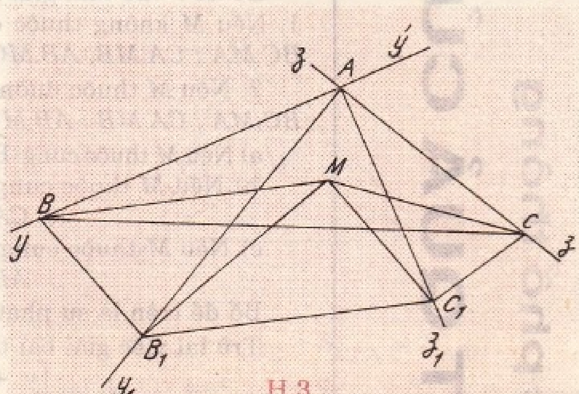
III. Nếu $\max\{\widehat{A}+\widehat{A'}; \widehat{B}+\widehat{B'}; \widehat{C}+\widehat{C'}\} > 180^o$. Chẳng hạn : $\widehat{A} + \widehat{A'} > 180^o$

Qua A kẻ các đường thẳng yy' ; zz' sao cho : B thuộc tia Ay ; C thuộc tia Az. Lấy điểm M bất kì.

1) Nếu M nằm trong góc $\widehat{yAz}$ (h.3)

Vì : $\widehat{A} + \widehat{A'} > 180^o$ nên ta dựng được các tia Ay_1, Az_1 thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases}\widehat{y_1Az_1} + \widehat{A'} = 180^o \\ \text{Các tia } Ay_1, Az_1 \text{ nằm trong góc } \widehat{yAz} \text{ (h.3)} \\ M \text{ nằm trong góc } \widehat{y_1Az_1}\end{cases}$$



H.3

Trên Ay_1 ; Az_1 lần lượt lấy các điểm B_1 ; C_1 sao cho : $AB_1 = AB$; $AC_1 = AC$

Áp dụng trường hợp II cho ΔAB_1C_1 ta có :

$$xMA + yMB_1 + zMC_1 \geq yAB_1 + zAC_1$$
$$\Rightarrow xMA + yMB_1 + zMC_1 \geq yAB + zAC$$

Vì ΔABB_1 cân tại A nên :

$$MB \geq MB_1$$

Tương tự như vậy :

$$MC \geq MC_1$$

Suy ra : $xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC$ (3)

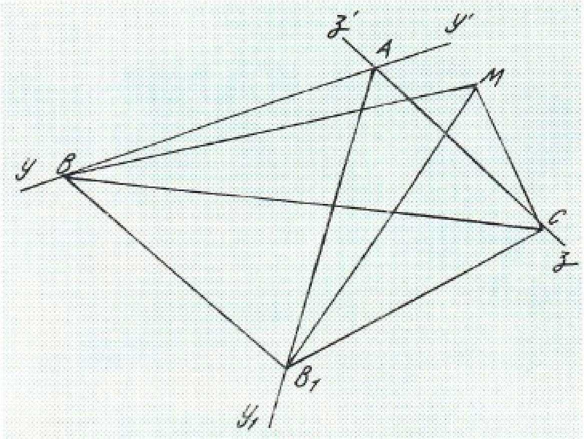
2. Nếu M nằm trong góc $\widehat{zAy}$ (h.4)

Vì $\widehat{A} + \widehat{A'} > 180^o$ nên ta dựng được tia Ay_1 nằm trong góc $\widehat{yAz}$ thỏa mãn điều kiện :

$\widehat{y_1Az} + \widehat{A'} = 180^o$ (h.4). Trên Ay_1 lấy điểm B_1 sao cho : $AB_1 = AB$.

Áp dụng trường hợp II cho ΔAB_1C ta có :

$$xMA + yMB_1 + zMC \geq yAB_1 + zAC$$
$$\Rightarrow xMA + yMB_1 + zMC \geq yAB + zAC$$



H.4

Vì ΔABB_1 cân tại A nên : $MB \geq MB_1$

Suy ra : $xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC$ (4)

3) Nếu M nằm trong góc $y'Az'$ (h.5)

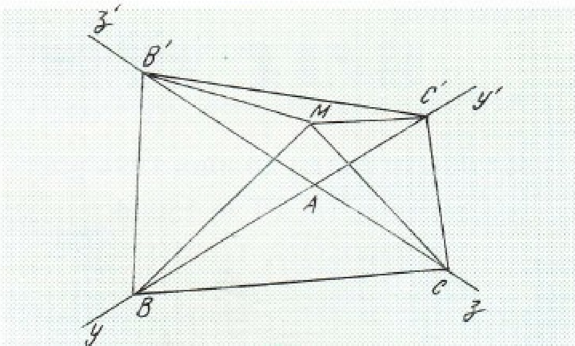
Trên Ay' ; Az' lấy các điểm B', C' sao cho : $AB' = AB$; $AC' = AC$. Áp dụng trường hợp 1 cho $\Delta AB'C'$ ta có :

$xMA + yMB' + zMC' \geq yAB' + zAC'$

$\Rightarrow xMA + yMB' + zMC' \geq yAB + zAC$

Vì $\Delta ABB'$ cân tại A nên :

$$MB \geq MB'$$



H.5

Tương tự như vậy : $MC \geq MC'$

Suy ra :

$xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC$ (5)

4) Nếu M nằm trong góc $z'Ay$: Tương tự như trường hợp 2 ta có

$xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC$ (6)

Từ (3) ; (4) ; (5) ; (6) ta có :

$xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC \ \forall M$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ trùng A

Vậy : $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng A và giá trị nhỏ nhất đó bằng : $yAB + zAC$.

Kết luận :

A – Nếu x, y, z không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó :

1) $y + z \leq x$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng A

2) $z + x \leq y$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng B

3) $x + y \leq z$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng C

B – Nếu x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

Ta kí hiệu tam giác đó là $A'B'C'$ ($B'C' = x$; $C'A' = y$; $A'B' = z$)

1) $\text{Max}\{\hat{A} + \hat{A'}, \hat{B} + \hat{B'}, \hat{C} + \hat{C'}\} < 180^\circ$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi :

$$\begin{cases} \widehat{BMC} = 180^\circ - \hat{A'} \\ \widehat{CMA} = 180^\circ - \hat{B'} \\ \widehat{AMB} = 180^\circ - \hat{C'} \end{cases}$$

2) $\hat{A} + \hat{A'} \geq 180^\circ$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng A

3) $\hat{B} + \hat{B'} \geq 180^\circ$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng B

4) $\hat{C} + \hat{C'} \geq 180^\circ$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng C

Để kết thúc xin nêu một vài bài tập áp dụng

Bài tập 1 : Cho ΔABC. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho : $\left(MA + \frac{\sqrt{3}}{2} MB + \frac{1}{2} MC\right)$ nhỏ nhất

Bài tập 2 : Cho ΔABC. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho : $(BC.MA + CA.MB + AB.MC)$ nhỏ nhất

Bài tập 3. Cho ΔABC. m_a ; m_b ; m_c theo thứ tự là độ dài các trung tuyến xuất phát từ A ; B ; C. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho $(m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC)$ nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI ...

(tiếp theo trang 14)

điểm từ trung bình trở lên chỉ đòi hỏi các thí sinh nắm vững các kiến thức cơ bản và biết cách vận dụng chúng với mức độ linh hoạt tương đương với mức cần có để giải được các bài toán "*" trong các SGK phổ thông hiện nay. Tuy vậy, nhìn chung, tình hình làm bài của các thí sinh không được khả quan như mong đợi. Xin nêu ra đây một số con số thống kê để bạn đọc tham khảo :

Bài \ Tỉ lệ	t_1	t_2	t_3
1	51%	42%	21%
2	13%	68%	41%
3	5%	92%	
4	12,5%	72%	46%
5	11%	69%	48%
6	3%		97%

Ở đây : t_1 – Tỉ lệ thí sinh đạt điểm tối đa và xấp xỉ tối đa.

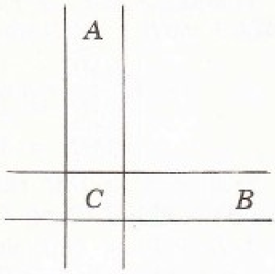
t_2 – Tỉ lệ thí sinh đạt dưới một nửa số điểm tối đa.

t_3 – Tỉ lệ thí sinh được từ 0 đến 1 điểm.

Giải đáp bài :

Ai cao ai thấp ?

Gọi A là học sinh được chọn trong lần chọn thứ nhất và B là học sinh được chọn trong lần chọn thứ hai. Gọi C là học sinh đứng cùng hàng dọc với A và cùng hàng ngang với B. (Xem hình vẽ)

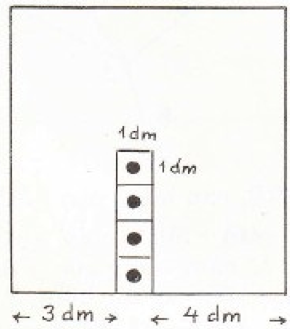


Vì A là học sinh cao nhất trong hàng dọc của mình nên A cao hơn C : $h(A) \geq h(C)$ (1). Vì B là học sinh thấp nhất trong hàng ngang của mình nên B thấp hơn C : $h(C) \geq h(B)$ (2) (với $h()$ là kí hiệu chiều cao của học sinh). Từ (1) và (2) ta có $h(A) \geq h(B)$; Nghĩa là học sinh được chọn lần đầu không thấp hơn học sinh được chọn lần thứ hai. Trong trường hợp dấu "=" xảy ra ở cả hai bất đẳng thức (1) và (2) thì A cao bằng B.

BÌNH PHƯƠNG

CHIA BÁNH

Có một cái bánh trung thu rất lớn, có kích thước 8dm × 8 dm, nhưng vì sơ ý lúc làm bánh người làm bánh đã đặt các quả trứng làm nhân bánh ở vị trí sai sót như hình trên. Hãy tìm cách chia bánh ra thành những phần bằng nhau sao cho mỗi phần phải có nhân là một quả trứng.



NGUYỄN ĐỨC TẤN

Bắt đầu từ tháng 10 năm 1994 giá mỗi số THVTT là 1500đ

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

THÔNG BÁO
CHUYỂN TRỤ SỞ

- Từ 9.1994 trụ sở của Tạp chí Toán học và tuổi trẻ chuyển về 45B phố Hàng Chuối, Hà Nội.
  Bạn đọc và cộng tác viên gửi thư cho Tạp chí theo địa chỉ mới như sau :

  TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
  45B Hàng Chuối - Hà Nội.

- Bạn đọc ở Hà Nội liên hệ với Tòa soạn theo số điện thoại mới **213786.**
  Bạn đọc ở các tỉnh, thành phố khác quay số **014 213786.**

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ.

ISSN : 0866 - 8035
Mã số : 8BT09M4

Chỉ số : 12884
Sắp chữ và In tại Trung tâm vi tính và Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 9.1994

Giá : 1200đ
Một nghìn hai trăm đồng.