

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

8(206)
1994

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

MỘT VÀI TÍNH CHẤT CÁC NGHIỆM CỦA
MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

ĐỊNH LÝ PITAGO
TRONG CÁC NỀN
VĂN MINH CỔ ĐẠI



Các thầy giáo và học sinh lớp 12, lớp 9 dự thi học sinh giỏi Quốc gia
của trường PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa

BÀI TOÁN
CON LẠC ĐÁ

KÌ THI OLIMPIC TOÁN QUỐC TẾ (IMO) LẦN THỨ 35

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

	Trang
• Phan Đức Chính, Đặng Hùng Thắng Kì thi Ôlimpic Toán quốc tế lần thứ 35	1
• <i>Dành cho các bạn Trung học cơ sở</i> <i>For Lower Secondary School Level Friends</i> Nguyễn Đức Tấn – Một số bài toán chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp hình học	2
• <i>Giải bài kì trước</i> <i>Solutions of problems in previous issue</i> Các bài của số 202	4
• <i>Đề ra kì này</i> <i>Problems in this issue</i> Các bài từ T1/206 đến T10/206, L1/206, L2/206	10
• <i>Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông</i> <i>Further study of school Maths</i> Phan Huy Khải – Một vài tính chất các nghiệm của một phương trình bậc cao	12
• <i>Lịch sử Toán học</i> <i>History of Mathematics</i> Ngô Việt Trung – Định lí Pitago trong các nền văn minh cổ đại	14
• <i>Bước đầu tìm hiểu toán học hiện đại</i> <i>Your first steps in Modern Mathematics</i> Nguyễn Tiến Dũng – Bài toán con lạc đà	16
• <i>Giải trí toán học</i> <i>Fun with Mathematics</i> <i>Bình phương</i> – Giải đáp bài Thay chữ bằng số Nguyễn Hữu Du – Chạy như thế nào	Bìa 4
• Kết quả của đoàn học sinh Việt Nam tại cuộc thi Tin học quốc tế lần thứ sáu	

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP :

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng
Chúng, Ngô Đạt Tử, Lê Khắc
Bảo, Nguyễn Huy Doan,
Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang
Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan
Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê
Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu,
Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc
Minh, Trần Văn Nhung,
Nguyễn Đăng Phát, Phan
Thanh Quang, Tạ Hồng
Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ
Dương Thụy, Trần Thành
Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô
Việt Trung, Đặng Quan Viên.

Trụ sở tòa soạn :

81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

ĐT: 260786

231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh

ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : ĐOÀN HỒNG



KÌ THI OLIMPIC TOÁN QUỐC TẾ (IMO) LẦN THỨ 35

PHAN ĐỨC CHÍNH – DẶNG HÙNG THẮNG

Cuộc thi Toán quốc tế lần thứ 35 được tổ chức tại Hồng Kông từ ngày 8 đến 20 tháng 7 năm 1994 – Tham dự cuộc thi lần này có 385 học sinh của 69 nước (mỗi nước được cử một đội nhiều nhất là 6 học sinh). Ngoài ra còn có một số khá đông quan sát viên của 22 nước, trong đó có Srilanka, Malaysia, Brunây và Papua Niu Ghinê là 4 nước không có học sinh dự thi mà chỉ gửi quan sát viên. Đoàn Việt Nam gồm 6 học sinh : *Đào Hải Long, Trần Ngọc Nam, Tô Đông Vũ, Nguyễn Quý Tuấn, Nguyễn Chu Gia Vượng* (ĐHTH Hà Nội) và *Nguyễn Duy Lâm* (ĐHSP Hà Nội). Hai bạn *Long* và *Vũ* là học sinh lớp 11, số còn lại là lớp 12.

Theo điều lệ của cuộc thi IMO tổng số thí sinh được giải không được vượt quá một nửa số thí sinh tham dự. Số giải nhất (huy chương vàng), giải nhì (huy chương bạc) và giải ba (huy chương đồng) sẽ xấp xỉ tỉ lệ 1 : 2 : 3.

Cuộc thi diễn ra trong hai ngày 13 và 14/7 năm 1994. Mỗi ngày học sinh phải giải 3 bài toán trong 4 tiếng rưỡi. Điểm tối đa của mỗi bài là 7.

Căn cứ vào kết quả kì thi, Ban Giám khảo đã quyết định trao :

- 30 huy chương Vàng cho các thí sinh đạt từ 40 đến 42 điểm.
- 64 huy chương Bạc cho các thí sinh đạt từ 30 đến 39 điểm.
- 98 huy chương Đồng cho các thí sinh đạt từ 19 đến 29 điểm.

Ban Tổ chức không xét giải đồng đội. Tuy nhiên khi xếp thứ tự (không chính thức) của các đội có đủ 6 học sinh thì đội Việt Nam xếp thứ 6 sau Hoa Kỳ, Nga, Trung Quốc, Bungari và Hunggari. Đoàn Hoa Kỳ đã lập một thành tích "giật gân" : Cả 6 học sinh của đội đều đạt điểm tuyệt đối 42.

Cuộc thi IMO lần này được tổ chức rất chu đáo. Nhiều cuộc đi chơi, tham quan, du lịch ... rất hấp dẫn bổ ích được tổ chức cho các thí sinh ngoài thời gian thi. Các em học sinh Việt Nam, mặc dù vốn ngoại ngữ chưa nhiều đã cố gắng kết bạn, trao đổi các đề toán, các tặng phẩm lưu niệm với học sinh của các nước khác. Cuộc thi đã thành công tốt đẹp, đạt được mục đích đề ra là : phát hiện, khuyến khích các tài năng toán học trẻ ở tất cả các nước, tăng cường tình hữu nghị sự hiểu biết lẫn nhau giữa các thầy giáo và học sinh và tạo cơ hội trao đổi kinh nghiệm về giáo dục Toán học giữa các nước trên thế giới.

Dưới đây là 6 đề thi.

Bài 1. Giả sử m, n là hai số nguyên dương và $a_1, a_2, \dots, a_m$ là những phần tử khác nhau của tập $\{1, 2, \dots, n\}$. Giả thiết rằng hệ $a_i + a_j \leq n$ với i, j nào đó, $1 \leq i \leq j \leq m$ thì tồn tại k , $1 \leq k \leq m$ sao cho $a_i + a_j = a_k$.

Chứng tỏ rằng

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

(Xem tiếp bài 3)

Kết quả của đoàn Việt Nam trong kì thi này là như sau :

Tên	Mã số	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5	Bài 6	Tổng số	Giải
Đào Hải Long	VIE 1	7	7	7	6	7	7	41	Huy chương Vàng
Nguyễn Chu Gia Vượng	VIE 2	0	7	6	6	5	7	31	Huy chương Bạc
Nguyễn Duy Lâm	VIE 3	7	7	7	6	7	0	34	Huy chương Bạc
Nguyễn Quý Tuấn	VIE 4	6	7	6	7	7	0	33	Huy chương Bạc
Tô Đông Vũ	VIE 5	7	7	0	7	7	2	30	Huy chương Bạc
Trần Ngọc Nam	VIE 6	4	7	7	7	6	7	38	Huy chương Bạc
Tổng số		31	42	33	39	39	23	207	

Dành cho các bạn Phổ thông Trung học Cơ sở

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Trong các tài liệu sách báo viết về các phương pháp giải bài toán chứng minh bất đẳng thức ở P.T.TH.C.S hầu như ít đề cập đến phương pháp sử dụng kiến thức hình học để giải. Với vốn liếng hình học P.T.TH.C.S trong một số trường hợp ta có thể giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức một cách ngắn gọn và có thể nói là "đẹp".

Xin được cùng bạn đọc tìm tòi về vấn đề này thông qua các bài toán sau :

Bài toán 1 : Chứng minh rằng

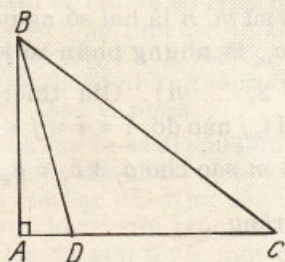
$$|\sqrt{x^2 - 6x + 34} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}| \leq 4$$

Giải :

$$\text{Đặt } S = |\sqrt{|x-3|^2 + 5^2} - \sqrt{|x-3|^2 + 1^2}|$$

- Với $x = 3$ ta có $S = 4$.
- Với $x \neq 3$. dựng $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$

$AC = 5$ (đơn vị độ dài), $AB = |x-3|$ (đơn vị độ dài)



Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = 1$ (đơn vị dài)

Dễ thấy :

$$BC = \sqrt{|x-3|^2 + 5^2}$$

$$BD = \sqrt{|x-3|^2 + 1^2}$$

$$\text{Mà } |BC - BD| < DC = AC - AD$$

$$S < 4 \text{ với mọi } x \neq 3$$

$$\text{Tóm lại } S \leq 4.$$

Bài toán 2 : Chứng minh rằng với x, y, z, t dương thì

$$\sqrt{(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)} + \sqrt{(x^2 + t^2)(y^2 + t^2)} \geq (x+y)(z+t)$$

Giải :

Vì x, y, z, t dương nên luôn luôn tồn tại tứ giác ABCD có $AC \perp BD$ tại O với $OA = x$; $OC = y$, $OB = z$, $OD = t$

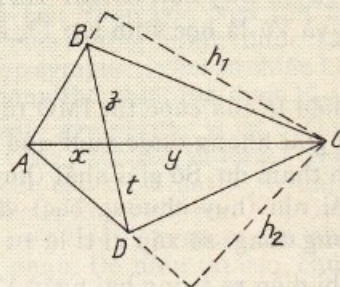
Dễ thấy

$$AB = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$BC = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$CD = \sqrt{y^2 + t^2}$$

$$AD = \sqrt{x^2 + t^2}$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} h_1 AB \leq \frac{1}{2} BC \cdot AB$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} h_2 AD \leq \frac{1}{2} DC \cdot AD$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} (x+y)(z+t)$$

$$\text{Vậy } \sqrt{(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)} + \sqrt{(x^2 + t^2)(y^2 + t^2)} \geq (x+y)(z+t)$$

Bài toán 3 : Gọi a, b, c là ba cạnh của một tam giác có ba đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c .

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{(a+b+c)^2}{h_a^2 + h_b^2 + h_c^2} \geq 4$$

Giải :

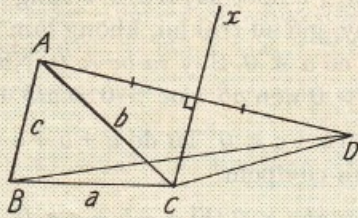
Qua C kẻ $Cx \parallel AB$

Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx
Ta có

$$AB^2 + AD^2 = BD^2 \leq (BC + CD)^2$$

$$\text{Vậy } 4h_c^2 + c^2 \leq (a+b)^2$$

$$\text{hay } 4h_c^2 \leq (a+b)^2 - c^2$$



Tương tự $4h_b^2 \leq (a+c)^2 - b^2$

$4h_a^2 \leq (b+c)^2 - a^2$

Suy ra

$4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \leq (a+b+c)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{h_a^2 + h_b^2 + h_c^2} \geq 4$$

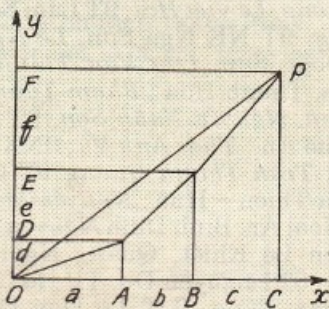
Bài toán 4 : Cho a, b, c, d, e, f là các số dương

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{(a+b+c)^2 + (d+e+f)^2} \leq \sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{b^2 + e^2} + \sqrt{c^2 + f^2}$$

Giải :

Dựng $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Trên Ox lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = a, AB = b, BC = c$



Trên Oy lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $OD = d, DE = e, EF = f$ Qua A, B, C kẻ các đường thẳng d_1, d_2, d_3 song song với Oy ; qua D, E, F kẻ các đường thẳng a_1, a_2, a_3 song song với Ox ; a_1 cắt d_1 tại M, a_2 cắt d_2 tại N ; a_3 cắt d_3 tại P. Dễ thấy :

$$OM = \sqrt{a^2 + d^2}, MN = \sqrt{b^2 + e^2}; NP = \sqrt{c^2 + f^2}$$

$$OP = \sqrt{(a+b+c)^2 + (d+e+f)^2}$$

$$\text{Mà } OP \leq OM + MN + NP$$

$$\text{Vậy : } \sqrt{(a+b+c)^2 + (d+e+f)^2} \leq \sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{b^2 + e^2} + \sqrt{c^2 + f^2}$$

Bài toán 5 : Cho x, y là hai số thỏa mãn các điều kiện sau :

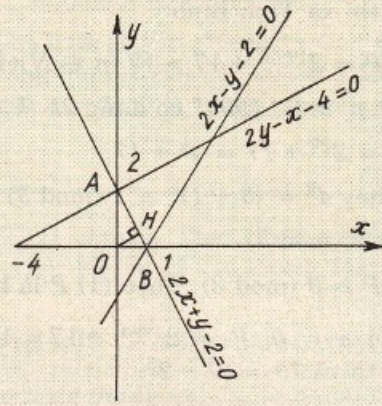
$$\begin{cases} 2x + y - 2 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \\ 2y - x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \geq \frac{4}{5}$

Giải :

Gọi $I(x, y)$ là điểm trên mp Oxy trong đó x, y thỏa mãn đầu bài.

Tập hợp các điểm $I(x, y)$ là thuộc miền mặt phẳng giới hạn bởi ΔABC .



Cần chứng minh $OI^2 \geq \frac{4}{5}$

Mà $OH \perp AB$; $OI \geq OH$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \text{ Vậy } OH^2 = \frac{4}{5}$$

$$x^2 + y^2 \geq \frac{4}{5}$$

Sau đây là các bài toán tự luyện :

1) Cho x, y là các số thỏa mãn điều kiện $2x + y \geq 2, 2x - y \leq 2$.

$$\text{Và } x + 4 \geq 2y$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $x^2 + y^2$.

2) Cho $a, b, c > 0, a \geq c, b \geq c$

1. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

3. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số dương.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq$$

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}$$

4. Cho $a, b, c > 0$

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} \geq (a+b)c$$

5. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$$



Bài T1/202. Tìm các số nguyên tố dạng $2^{1994^n} + 17$ ($n \in \mathbb{N}$), biểu diễn được dưới dạng hiệu lập phương của hai số tự nhiên.

Lời giải : Theo Vũ Quang Hòa, 8T, PTCS chuyên thị xã Thái Bình

$$\text{Đặt } P = 2^{1994^n} + 17 > 17 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1)$$

- Với $n \geq 1$: 1994^n có dạng $2k$ ($k \in \mathbb{N}^+$)

$$\Rightarrow P = 2^{2k} + 17 = 4^k + 17.$$

$$\text{Ta thấy } 4^k = (3+1)^k \equiv 1 \pmod{3}$$

$$17 \equiv 2 \pmod{3}$$

Vậy $P \equiv 0 \pmod{3}$. Theo (1) P là hợp số

- Với $n = 0$, $P = 2^{1994^0} + 17 = 19$ là số nguyên tố và $19 = 3^3 - 2^3$.

Vậy số nguyên tố phải tìm là 19 (với $n = 0$).

Nhận xét : Hầu hết các lời giải đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : Kim Ngọc Minh, 7M, Marie Curie ; Phạm Huy Tùng, 8A, Bế Văn Đàn ; Trần Việt Bình, 8H, Trưng Vương ; Vũ Tất Thắng, 9CT, Nghĩa Tân, Hà Nội. Nguyễn Khắc Tuấn, Lê Ngọc Giáp, 7A, NK Đông Sơn ; Phạm Anh Tuấn, 8H chuyên Bim Sơn ; Lưu Văn Thịnh, 8T, NK Thiệu Yên, Lê Văn Cường, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa. Phạm Hồng Linh, Nguyễn Xuân Tương, 9T, Phan Bội Châu ; Nguyễn Khánh Quỳnh, 9T, NK Yên Thành, Nghệ An. Đinh Tiến Hoàng, 9T, NK Tiên Hải. Đào Lê Dung, 9T, NK Vũ Thư, Thái Bình. Vũ Thu Hường, Nguyễn Thành Nam, 9T, NK Hải Hưng. Nguyễn Minh Vũ, 7, NK Quế Võ, Hà Bắc. Lê Quang Năm, 8T, Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi. Nguyễn Minh Quốc, 9, Hoài An, Bình Định. Lê Tuấn Anh, 9K, Lê Lợi, Hà Đông, Hà Tây.

TỔ NGUYÊN

Bài T2/202. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để các số a, b, c cùng dấu là

$$ab + ac + bc > 0 \text{ và } \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} > 0$$

Lời giải :

. Điều kiện cần : Hiển nhiên

. Điều kiện đủ :

$$\text{Từ } \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} > 0 \text{ ta có } abc(a+b+c) > 0$$

- Nếu $abc > 0 \Rightarrow a + b + c > 0$. Lại có $ab + ac + bc > 0$ ta sẽ suy ra a, b, c cùng lớn hơn 0. Thật vậy, giả sử trái lại, không làm mất tổng quát ta có $a < 0$. Suy ra $bc < 0$. Nhưng $ab + ac + bc > 0$ nên $ab + ac > 0 \Rightarrow a(b+c) > 0$

Do đó $b+c < 0$. Từ đó $a+b+c < 0$. Mâu thuẫn, ta có đpcm.

- Nếu $abc < 0$ thì $a+b+c < 0$. Lại có $ab + ac + bc > 0$. Ta sẽ suy ra a, b, c cùng nhỏ hơn 0. Thật vậy, giả sử trái lại, chẳng hạn $a > 0 \Rightarrow b+c < 0$ và $bc < 0$. Mà $ab + ac + bc > 0$ nên $ab + ac > 0$ hay $a(b+c) > 0$. Do đó $b+c > 0$

$\Rightarrow a+b+c > 0$. Mâu thuẫn.

Vậy ta luôn có a, b, c cùng dấu.

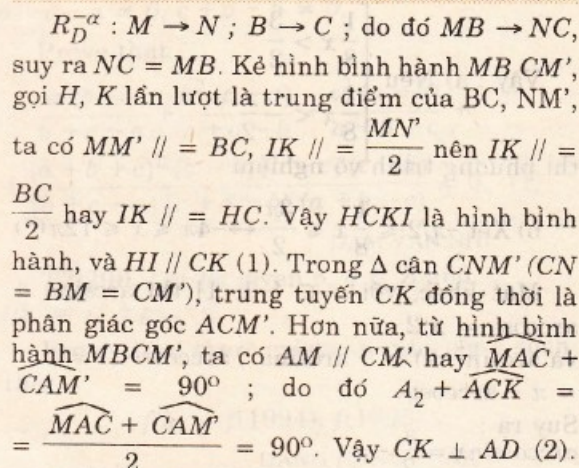
Nhận xét :

Bài này nhiều bạn làm được nhưng lí luận dài. Giải tốt bài này là các bạn Phạm Huy Tùng, 8A Bế Văn Đàn, Nguyễn Hồng Hà^A, Nguyễn Dong, Trần Việt Bình, 8H Trưng Vương, Hà Nội ; Đỗ Đặng Tạo, 9B Chuyên Ứng Hòa, Hà Tây ; Phạm Thị Thanh Vân, 6H Minh Khai, Hải Phòng ; Bùi Nam Phương, 8A₂ Chuyên Phong Châu, Phan Ngọc Lan, 9CT Chuyên Việt Trì, Vĩnh Phú ; Trần Phú Sơn, 8T PTNK Hải Hưng ; Nguyễn Đình Quân, 8A Chuyên Tân Yên, Hà Bắc ; Lê Thanh Tinh, Lê Văn Cường, Lê Việt Hải, 9T Lam Sơn, Phạm Tiến Dũng, 9T NK Nga Sơn, Lê Ngọc Giáp, 7A NK Đông Sơn, Lưu Văn Thịnh, 8T NK Thiệu Yên, Thanh Hóa ; Phạm Tuấn Anh, Võ Như Quỳnh, Nguyễn Xuân Sơn, 9T Phan Bội Châu, Nghệ An ; Thái Anh Vũ, 9NK Can Lộc, Hà Tĩnh ; Trần Thanh Quang 9T Quốc Học Huế, Thừa Thiên - Huế ; Nguyễn Minh Quốc, 9 PTTH Hoài An, Bình Định Nguyễn Hữu Hội, 8T Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; Lương Tuấn Anh, 8T1 Nguyễn Du, TP Hồ Chí Minh ; Trần Thanh Tùng, 9 T Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai.

VŨ KIM THỦY

Bài T3/202. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của góc A cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Một đường tròn thay đổi luôn luôn đi qua A, D cắt các đường thẳng AB, AC tại các điểm tương ứng M, N. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

Lời giải : Do các tứ giác AMDN, ABDC nội tiếp nên đặt $\alpha = \widehat{MDN}$, ta có $\alpha = \widehat{180^\circ - \widehat{MAC}} = \widehat{BDC}$. Mặt khác, do $A_1 = A_2$ nên $\widehat{DB} = \widehat{DC}$; $\widehat{DM} = \widehat{DN}$ hay $DB = DC$; $DM = DN$. Ta có phép quay thuận chiều kim đồng hồ (hình vẽ bên) :



Nhận xét : Có 68 bài giải, giải đúng phần thuận. Còn phần đảo thì giải hoặc thiếu chất chẽ, hoặc dài dòng. Lời giải tốt thuộc về : *Lê Viết Hải* (9 CT Lam Sơn, Thanh Hóa), *Trần Thanh Quang* (9CT Quốc Học Huế), *Bùi Thị Phương Uyên* (8 toán - Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi).

Bài T4/202 : Cho ba số nguyên a, b, c ,
 $a > 0, ac - b^2 = P = p_1 p_2 \dots p_m$ trong đó $p_1, \dots, p_m$
 là các số nguyên tố khác nhau. Gọi $M(n)$ là
 số các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

Chúng minh rằng $M(n)$ là hữu hạn và $M(n) = M(p^k m)$ với mọi $k \geq 0$

Lời giải : (của các bạn *Phạm Huy Tùng*,
8A Bế Văn Đàn, Hà Nội; *Trần Trung Thành*,
8CT Nghĩa Đô, Từ Liêm; *Nguyễn Xuân*
Thắng, 10CT (Quảng Trị))

Từ đó $y^2 \leq \frac{a}{p}$, $x^2 \leq \frac{nc}{p}$. Vậy

$M(n)$ hũu han.

Để chứng minh $M(n) = M(p^k n) \quad \forall k \geq 0$
ta chỉ cần chứng minh $M(n) = M(p_n)$

Ta hãy lập mọi phép tương ứng giữa tập A các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn (1) và tập B các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = p_n \quad (2)$$

Xét phép tương ứng

$$\xi = -bx - cy$$

$$\eta = ax + by$$

Rõ ràng từ đảng thức

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n \rightarrow$$

$$a(cy + bx)^2 - 2(cy + bx)(ax + by) + c(ax + by)^2 = p,$$

suy ra nếu $(x, y) \in A$ thì $(\xi, \eta) \in B$. Phép tương ứng trên rõ ràng là một - một. Thật vậy từ (3) suy ra

$$a_{\xi}^{\dagger} + b\eta = -p_v$$

$$b\xi + c\eta = p_v$$

Cuối cùng ta cần chứng minh với mọi cặp $(\xi, \eta) \in B$ tồn tại cặp $(x, y) \in A$ sao cho chúng liên hệ với nhau bởi (3) (hoặc bởi (4)). Ta có $(\xi, \eta) \in B$ suy ra

$$(a\xi + b\eta)^2 + p\eta^2 = apn$$

$$\sup_{\mathbf{r} \in \mathbf{A}} (a\xi + b\eta)^2: \quad \mathbf{p} \rightarrow a\xi + b\eta = -py, y \in \mathbf{Z}$$

Tương tự $(b\xi + c\eta)^2 + p\xi^2 = cp_n \rightarrow$

$$b\xi + c\eta: p \rightarrow b\xi + c\eta = px, x \in Z$$

với (x, y) liên hệ với (ξ, η) bởi (3)

Ta có

$$(a\xi + b\eta)^2 + p\eta^2 = ap_n \rightarrow$$

$$(p_y)^2 + p(ax + by)^2 = ap_y \Leftrightarrow$$

$$(ax + by)^2 + py^2 = an$$

$$\leftrightarrow (x, y) \in A \text{ (dpcm)}$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T5/202. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_2 \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_3 \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_4 \\ x_4 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_1 \end{cases}$$

Lời giải : (Của các bạn *Trần Quang Huy* 11CT Vĩnh Phú ; *Võ Hoàng Trung*, 11CT Trà Vinh ; *Phạm Đình Trường*, 10C Trần Phú ; *Lê Anh Dũng*, 11A PTTH Bắc Thái ; *Tô Đông Vũ*, 11CT ĐHTH Hà Nội)

Ta có $|x_i| \leq \frac{\sqrt{3}}{9} < \frac{1}{2} \forall i = 1, 4 \rightarrow \cos \pi x_i > 0$
 $\rightarrow 0 < x_i < \frac{1}{2}$

Nếu $x_1 \geq x_3 \rightarrow \cos \pi x_2 \geq \cos \pi x_4$.

Do $\pi x_2, \pi x_4 \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\rightarrow \pi x_2 \leq \pi x_4 \rightarrow x_2 \leq x_4 \rightarrow \cos \pi x_1 \geq \cos \pi x_3$, do
 $\pi x_1, \pi x_3 \in (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \pi x_1 \leq \pi x_3 \rightarrow x_1 \leq x_3$.

Vậy $x_1 = x_3 \rightarrow x_2 = x_4$. Vậy $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_2$,
 $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_1$. Xét hàm $f(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x$

$f'(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} \pi \sin \pi x > 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} \pi > 0$

$\rightarrow f$ là đồng biến. Vậy từ $f(x_1) = f(x_2)$ suy ra
 $x_1 = x_2$. Vậy $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Ta quy về giải

phương trình $3\sqrt{3}x = \cos \pi x$ với $0 < x < \frac{1}{2}$

Vẽ trái là hàm đồng biến, vẽ phải là hàm nghịch

biến nên phương trình chỉ có nghiệm duy nhất

$x = \frac{1}{6}$

Đáp số : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{6}$.

Nhận xét : Khá nhiều bạn mắc sai lầm khi cho rằng không giảm tổng quát có thể giả thiết

$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$
 (chú ý rằng hệ không đối xứng)

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T6/202. Giải phương trình

$$\arcsin \cos x + \arccos \sin x = \frac{1}{8}x \quad (1)$$

Lời giải (*Nguyễn Tuấn Ngọc* (10CT ĐHTH Hà Nội), *Phạm Minh Phương* (10CT ĐHSPT Hà Nội), *Nguyễn Trần Hoài Nhân* (PTCN Hà Đông), *Trần Quang Huy* (11 CT Vĩnh Phú))

Phạm Đình Trường (10CT Trần Phú, Hải Phòng), *Tô Đức Thắng* (10E PTTH chuyên Thái Bình) *Phạm Mạnh Quang* (10T Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Nguyễn Minh Thọ* (11A, Quốc học Quy Nhơn)

Nhận xét rằng

$$-\pi/2 \leq \arcsin u \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \arccos v \leq \pi \text{ nên}$$

$$-\pi/2 \leq \arcsin u + \arccos v \leq \frac{3u}{2} \forall u, v \in [-1, 1].$$

$$\text{Vậy : a) Nếu } \begin{cases} \frac{1}{8}x > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8}x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

thì phương trình vô nghiệm

$$\text{b) Xét } -\pi/2 \leq \frac{1}{8}x \leq \frac{3\pi}{2} \leftrightarrow -4\pi \leq x \leq 12\pi (*)$$

Mặt khác, với $u \in [-1, 1]$ thì $\arcsin u + \arccos u = \pi/2$

và $\arcsin(-u) = -\arcsin u$; $\arccos(-u) = \pi - \arccos u$.

Suy ra :

$$\arccos \sin x = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\text{với } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} (**)$$

$$\arcsin \cos x = \frac{\pi}{2} - x$$

1) Với $2k\pi - 4\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi - 4\pi$. Thì

để có (*) cần lấy $k \in \{0, 1, \dots, 8\}$. Khi đó

$$0 \leq x + 4\pi - 2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$$

nên $\arcsin \cos x + \arccos \sin x = \pi - 2(x + 4\pi - 2k\pi)$

$$\text{Vậy } (1) \leftrightarrow \pi - 2(x + 4\pi - 2k\pi) = \frac{1}{8}x \leftrightarrow$$

$$x = -\frac{56\pi}{17} + \frac{32}{17}k\pi \text{ với } k \in \{2, 3, \dots, 6\}$$

2) Với $2k\pi - 4\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi - 4\pi + \pi$ thì

$$(1) \leftrightarrow \pi - 2(\pi - x - 4\pi + 2k\pi) = \frac{1}{8}x$$

$$\leftrightarrow x = \frac{-56\pi}{15} + \frac{32}{15}k\pi \text{ với } k \in \{2, 3, 4, 5\}$$

3) Với $2k\pi - 4\pi + \pi \leq 2k\pi - 4\pi + \frac{3\pi}{2} \leftrightarrow 0$

$$\leq x + 3\pi - 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \text{ thì } (1) \leftrightarrow \pi - 2(x + 3\pi -$$

$$2k\pi) = \frac{1}{8}x \leftrightarrow x = \frac{-40\pi + 32k\pi}{17}$$

với $k \in \{2, 3, 4, 5\}$

4) Với $-4\pi + 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \leq x \leq -4\pi + 2k\pi + 2\pi$

$$\leftrightarrow 0 \leq x + 4\pi - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \text{ thì}$$

$$(1) \Leftrightarrow \pi - 2(x + 4\pi - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi) = \frac{1}{8}x \Leftrightarrow \\ x = \frac{-32\pi + 32k\pi}{17} \text{ với } k \in \{0, 1, \dots, 5\}$$

Nhận xét : Hầu hết các lời giải gửi đến đều giải sai, không chú ý đến tính chất của hàm số $f(t) = \arcsin t$, $g(t) = \arccos t$ có các tập xác định $[-1, 1]$ và tập giá trị lần lượt là $[-\pi/2, \pi/2]$ và $[0, \pi]$.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/202 : Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với các hệ số dương và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k thì :

$$f(x) \geq [f(\sqrt[2^k]{x})]^{2^k} \quad \forall x \geq 0$$

Lời TS. Hầu hết các bạn gửi lời giải cho bài toán đều nhận xét đúng rằng "BDT đã nêu trong bài ra chỉ đúng với $x \geq 0$ ". Xin cáo lỗi cùng bạn đọc về thiếu sót mà các bạn đã chỉ ra, và nay xin bổ sung điều kiện $x \geq 0$ vào đề bài để bài toán được hoàn chỉnh.

Lời giải. Cách 1 : Với $x \geq 0$, xét dãy $u_n = [f(\sqrt[2^n]{x})]^{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Với mọi $n \in \mathbb{N}$, theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$$u_{n+1} = (a \sqrt[2^{n+1}]{x^2} + b \sqrt[2^{n+1}]{x} + c)^{2^{n+1}} = \\ [(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[2^{n+1}]{x^2} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[2^{n+1}]{x} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c})^2]^{2^n} \\ \leq (a + b + c)^{2^n} (a \sqrt[2^n]{x^2} + b \sqrt[2^n]{x} + c)^{2^n} = u_n.$$

Như vậy, dãy $\{u_n\}$ là dãy không tăng. Suy ra :

$$u_0 \geq u_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow f(x) \geq [f(\sqrt[2^k]{x})]^{2^k} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 0,$$

Cách 2 : $\forall x \geq 0$, theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki suy rộng, ta có :

$$[f(\sqrt[2^k]{x})]^{2^k} = (\sqrt[2^k]{a} \dots \sqrt[2^k]{a} \cdot \sqrt[2^k]{ax^2} + \sqrt[2^k]{b} \dots \\ \dots \sqrt[2^k]{b} \cdot \sqrt[2^k]{bx} + \sqrt[2^k]{c} \dots \sqrt[2^k]{c})^{2^k} \\ \leq (a + b + c)^{2^k - 1} \cdot (ax^2 + bx + cx) = f(x).$$

Cách 3 : Vì hàm $g(x) = x^{2^k}$ là hàm lồi trên $[0, +\infty)$ và do $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1$ nên theo bất đẳng thức hàm lồi ta có :

$$a \cdot g(\sqrt[2^k]{x^2}) + b \cdot g(\sqrt[2^k]{x}) + c \cdot g(1) \\ \geq g(a \sqrt[2^k]{x^2} + b \sqrt[2^k]{x} + c) \quad \forall x \geq 0 \\ \Leftrightarrow f(x) \geq [f(\sqrt[2^k]{x})]^{2^k} \quad \forall x \geq 0.$$

Nhận xét : 1. Có rất nhiều bạn gửi lời giải cho bài toán và đa số đã giải bài toán theo cách 1 hoặc cách 2. Duy nhất bạn Nguyễn Việt Kiên (11A PTTH Nga Sơn II, Thanh Hóa) đã giải bài ra theo Cách 3 : Hơn nữa, bạn Kiên cũng là người duy nhất đã giải bài theo cả 3 cách.

2. Bằng phương pháp của Cách 2, các bạn Nguyễn Quang Hải (10CT, PTTH Chuyên, Vĩnh Phú), Nguyễn Việt Linh (10CT PTTH Trần Phú, Hải Phòng), Nguyễn Tuấn Hải (11M, Marie Curie, Hà Nội), Vũ Đức Sơn (10 CT, PTTH Lương Văn Tuy, Ninh Bình), Nguyễn Việt Kiên (Thanh Hóa), Nguyễn Xuân Sơn (9T PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An) và Nguyễn Quang Tuyền (10A PTTH Sào Nam, Duy Xuyên, Quảng Nam- Đà Nẵng) đã chứng minh đúng khẳng định sau :

"Cho đa thức bậc n ($n \in \mathbb{N}^*$) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với hệ số dương. Khi đó, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, ta có $a_m^{m-1} f(x) \geq$

$$[f(\sqrt[m]{x})]^m \quad \forall x \geq 0 \quad (a = a_0 + a_1 + \dots + a_n).$$

3. Cùng bằng phương pháp của Cách 2, bạn Nguyễn Vũ Hưng (10C Chuyên ngữ ĐHSPTN Hà Nội) đã chứng minh được : "Nếu $f(x)$ là đa thức với hệ số dương và $f(1) = 1$ thì

$$\alpha \in (0, 1] \text{ ta có } f(x) \geq [f(x^\alpha)]^\alpha \quad \forall x > 0.$$

4. Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau đây có lời giải tốt : Trần Nguyễn Ngọc (9K, PTTH Lê Lợi, Hà Tây) ; Phạm Huy Tùng (8A, PTCS Bế Văn Đàn, Hà Nội), Trần Trung Thành (8CT, PTCS Nghĩa Tân, Hà Nội) ; Võ Như Quỳnh (9T, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An), Nguyễn Lê Lộc (8A, PTCS Đám Dơi, Minh Hải) ; Phạm Thái Hà (9T, PTCS Phạm Huy Quang) ; Trần Mạnh Dũng, Lê Anh Dũng (11A, PTTH Gang Thép, Bắc Thái) ; Trần Hồng Quang (12A PTDL Châu Phong, Vĩnh Phú) ; Hồng Cẩm (12T, PTTH Hạ Long, Quảng Ninh) ; Đỗ Mạnh Cường (11A, PTTH Khoái Châu, Hải Hưng), Phạm Đào Lâm (11T, PTNK Hải Hưng) ; Hoàng Quế Vương (11A, PTTH Thăng Long, Hà Nội) ; Phạm Tuấn Anh (10 T, PTTH Sơn Tây, Hà Tây) ; Nguyễn Văn Năng, Nguyễn Cao Sơn (10T, PTTH Lương Văn Tuy, Ninh Bình) ; Phan Quang Vinh, Lê Thái Phong, Nguyễn Tri Phương (10T, PTNK Hà Tĩnh) ; Văn Đình Quân (11A, PTTH Hương Sơn, Hà Tĩnh) ; Nguyễn Chí Linh, Nguyễn Hoàng Công, Phạm Công Thiện (10T, PTTH Lê Khiết Quảng Ngãi) ; Nguyễn Minh Thọ, Lê Văn Thông (Quốc học, Quy Nhơn) ; Phạm Quang Hữu, Nguyễn Văn Hiền (10 CT, PTTH Ngô Quyền, Đồng Nai) ; Ngô Đăng Hà An (11A PTTH Lê Quý Đôn, Long An) ; Nguyễn Nhật Nam (10A PTTH Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu) ; v.v...

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/202 : Kí hiệu $\mathbb{N}^*$ là tập các số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

$$1) f(n+1) > f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2) f(f(n)) = n + 1994 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Lời giải (của Nguyễn Hải Minh ĐHSPT HN I) : Vì $f(n) \in \mathbb{N}^*$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên từ giả thiết 1) suy ra $f(n+1) \geq f(n) + 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, kết hợp với giả thiết 2), ta có :
 $n + 1995 = f(f(n+1)) \geq f(f(n) + 1) \geq f(f(n)) + 1 =$
 $= n + 1995 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra : $f(n+1) = f(n) + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow f(n) = f(1) + n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (i)

$\Leftrightarrow f(n) - n = f(1) - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow f(f(1)) - f(1) = f(1) - 1$

$\Leftrightarrow 1995 - f(1) = f(1) - 1 \Leftrightarrow f(1) = 998$ (ii)

Từ (i) và (ii), ta được $f(n) = n + 997 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dễ thấy hàm $f(n) = n + 997$ thỏa mãn các điều kiện 1) và 2). Vậy có duy nhất hàm cần tìm là $f(n) = n + 997$.

Nhận xét : 1. Đa số các bạn có lời giải đúng đã chứng minh $f(n+1) = f(n) + 1$ bằng cách xuất phát từ đây bất đẳng thức sau : $f(n) + 1994 = f(f(f(n))) = f(n + 1994) \geq f(n + 1993) + 1 \geq \dots \geq f(n) + 1994$.

2. Không ít bạn tìm ra kết quả đúng, nhưng có lời giải sai. Một vài bạn cho lời giải sai do quan niệm rằng $f(n)$ là hàm đa thức (? !).

3. Sử dụng ý tưởng của lời giải nêu trên, bạn **Võ Hoàng Trung** (11A, PTTH Chuyên, Trà Vinh) đã giải đúng bài toán khái quát sau :
 "Cho các số $a, b, k \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $b : k$ và

$b : \frac{a^k - 1}{a - 1}$ (nếu $a > 1$). Tìm tất cả các hàm

$f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) $f(n+1) > f(n) + a - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) $f_k(n) = a^k \cdot n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ở đây $f_k(n) = \underbrace{f(f(\dots f(n) \dots))}_{k \text{ lần } f}$

(Đáp số : $f(n) = n + \frac{b}{k}$, nếu $a = 1$

$f(n) = an + \frac{b(a-1)}{a^k - 1}$, nếu $a > 1$).

4. Các bạn có lời giải tốt : **Nguyễn Việt Linh**, **Phạm Đình Trường** (10CT, PTTH Trần Phú, Hải Phòng) ; **Hồng Cẩm** (12T, PTTH Hạ Long, Quảng Ninh) ; **Tô Đông Vũ** (11CT, ĐHTH, Hà Nội) ; **Đinh Tiến Hoàng** (9T, PTNK Tiến Hải, Thái Bình) ; **Vũ Đức Sơn** (10T, PTTH Lương Văn Tụy, Ninh Bình) ; **Phạm Lê Sơn** (10T, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa) ; **Lê Văn An** (9T, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An) ; **Nguyễn Hải Minh** và **Võ Hoàng Trung**.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/202 : Quay hình vuông $ABCD$ quanh tâm O của nó một góc φ ; $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ được hình vuông $A'B'C'D'$. Ta gọi giao điểm của AB và $A'B'$ là M ; BC và $B'C'$ là N ; CD và $C'D'$ là P ; DA và $D'A'$ là Q .

a) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo $a = AB$ và φ .

b) Với góc φ nào thì chu vi phần chung hai hình vuông bé nhất ?

Lời giải : a) Gọi K là điểm chính giữa cung nhỏ AB , ta có A, A' lần lượt đối xứng với B, B' qua trục OK . Đặt $\alpha = \angle AOK$, ta có $2\alpha = \angle AOK + \angle KOB' = \angle AOB + \angle BOB' = 90^\circ + \varphi$ hay $\alpha = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$

Trong ΔAOM , ta có :

$$\frac{OM}{OA} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(180^\circ - 45^\circ - \alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin(90^\circ - \frac{\varphi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos \frac{\varphi}{2}} (=k).$$

Từ đó, ta có phép đồng dạng sau đây : $H_o, R_o^{-\alpha} : A \rightarrow M ; B \rightarrow N ; C \rightarrow P, D \rightarrow Q$. Suy ra $MNPQ$ là hình vuông và $MN = kAB = a\sqrt{2}$

$$2\cos \frac{\varphi}{2}$$

Vậy

$$S_{MNPQ} = \frac{a^2}{2\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{a^2}{2\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

b) Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm của cặp đoạn thẳng $A'B', B'C', C'D', D'A'$ với $BC, B'C', C'D', D'A'$ tương tự như trên, hình tạo bởi hai hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ còn có các trục đối xứng EG, NQ, FH . Suy ra các cạnh của bát giác $MENFPGQH$ bằng nhau. Đặt $z = HM$, ta cần tìm điều kiện để z đạt min. Đặt tiếp $x = A'H, y = A'M$, từ Δ vuông $A'HM$, ta có $x^2 + y^2 = z^2$. Mặt khác, $x + y + z = A'H + HM + A'M = AH + HM + MB = AB = a$. Do đó

$$z^2 = x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(a-z)^2}{2} \Leftrightarrow z^2 + 2az - a^2$$

≥ 0 hay $z \geq a(\sqrt{5} - 1)$ và $z_{\min} = a(\sqrt{5} - 1)$ khi $x = y$ hay $\varphi = 45^\circ$. Đáp số : $\varphi = 45^\circ$.

Nhận xét : Có 48 bạn giải bài này và tất cả đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Nguyễn Cao Sơn** (10CT PTTH Lương Văn Tụy, Ninh Bình), **Lê Thái Phong** (10T, PTTH NK, Hà Tĩnh) ; **Nguyễn Hoàng Công** (10T, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi), **Đặng Thanh Hà** (CT, ĐHSPT HN I).

DẶNG VIÊN

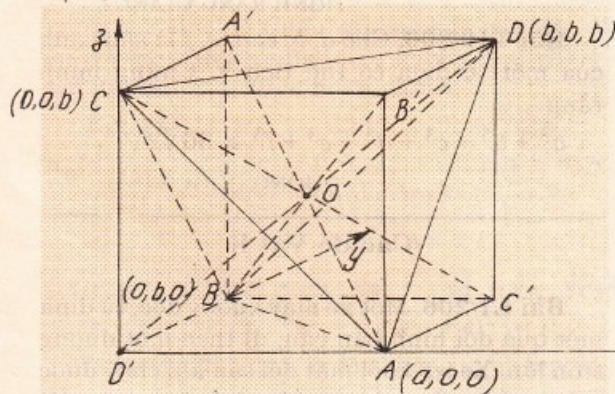
Bài T10/202 : Cho tứ diện đều $ABCD$. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho tổng bình

phương các khoảng cách từ đó đến các mặt của tứ diện bằng k^2 cho trước.

Lời giải : Có thể giải bài toán này bằng hai phương pháp : phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ. Sau đây là lời giải của Tô Đông Vũ (11 chuyên Toán, ĐHTH Hà Nội) bằng phương pháp tọa độ.

Dựng hình lập phương $AB'CD'$. $C'DA'B$ ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ đã cho. Chọn đỉnh D' , đối xứng với đỉnh D qua tâm O của hình lập phương làm gốc tọa độ và các tia $[D'A]$, $[D'B]$, $[D'C]$ làm các tia dương của trục hoành, trục tung và trục cao. Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện đều đã cho, b là độ dài cạnh của hình lập phương, thế thì các đỉnh A, B, C, D là tâm O của tứ diện đều (cũng là tâm O của hình lập phương) trong hệ tọa độ Đề Các $D'xyz$ này có các tọa độ như sau : $A(b, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, b)$, $D(b, b, b)$ và $O(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2})$, trong đó :

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



Để thấy rằng trong hệ tọa độ này, các mặt phẳng chứa các mặt của tứ diện đều $ABCD$ có phương trình lần lượt là :

$$\text{mp}(ABC) : x + y + z - b = 0$$

$$\text{mp}(DBC) : -x + y + z - b = 0$$

$$\text{mp}(DCA) : x - y + z - b = 0$$

$$\text{mp}(DAB) : x + y - z - b = 0$$

Gọi (x_0, y_0, z_0) là tọa độ của điểm M và $d = d_4(M, ABC)$ là khoảng cách từ M đến $\text{mp}(ABC)$; thế thì ta được :

$$d_4^2(M, ABC) = \frac{(x_0 + y_0 + z_0 - b)^2}{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0 - b)^2; \quad (1)$$

Tương tự, ta được :

$$d_1^2(M, DBC) = \frac{1}{3}(-x_0 + y_0 + z_0 - b)^2; \quad (2)$$

$$d_2^2(M, DCA) = \frac{1}{3}(x_0 - y_0 + z_0 - b)^2; \quad (3)$$

$$d_3^2(M, DAB) = \frac{1}{3}(x_0 + y_0 - z_0 - b)^2; \quad (4)$$

Cộng vế đối vế (1), (2), (3) và (4), ta được :

$$d_4^2(M, ABC) + d_1^2(M, DBC) + d_2^2(M, DCA) + d_3^2(M, DAB) = \sum_{i=1}^4 d_i^2 = \frac{4}{3}[x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - b(x_0 + y_0 + z_0) + b^2] = \frac{4}{3}\left[\left(x_0 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z_0 - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}b^2\right]; \quad (5)$$

Điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ thỏa mãn điều kiện của bài toán khi và chỉ khi :

$$\sum_{i=1}^4 d_i^2 = k^2 \quad (k \text{ là một độ dài cho trước}); \quad (*)$$

Vậy :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left[\left(x_0 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z_0 - \frac{b}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{3}b^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}OM^2 + \frac{1}{3}b^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}OM^2 = k^2 - \frac{a^2}{6}$$

$$OM^2 = \frac{3}{4}\left(k^2 - \frac{a^2}{6}\right); \quad (**)$$

Ta đi đến kết luận :
a) Nếu $k^2 - \frac{a^2}{6} > 0 \rightarrow k > \frac{a\sqrt{6}}{6}$ thì quỹ tích của M là mặt cầu $(\mathcal{C})$, tâm O , bán kính

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{k^2 - \frac{a^2}{6}}$$

b) Nếu $k = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ thì $\{M\} = \{O\}$

c) Nếu $k < \frac{a\sqrt{6}}{6}$ thì $\{M\} = \emptyset$, t.l. không tồn tại một điểm M nào để

$$\sum_{i=1}^4 d_i^2 = k^2$$

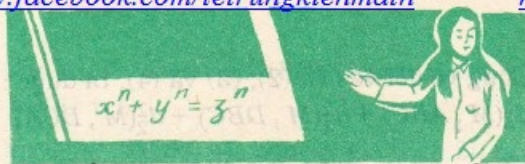
Cách 2. (Phương pháp vectơ). Ngoài cách giải trên, ta còn có thể sử dụng vectơ để giải bài toán này. gọi A', B', C' và D' lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các mặt phẳng (BCD) , (CDA) , (DAB) và (ABC) , bài toán đưa về các mặt phẳng (BCD) , (CDA) , (DAB) và (ABC) , bài toán đưa về bài toán sau đây : Nếu $ABCD$ là một tứ diện đều tâm O thì ta có hệ thức sau :

$$\vec{MA'} + \vec{MB'} + \vec{MC'} + \vec{MD'} = \frac{4}{3}\vec{MO}$$

Nhận xét : Bạn Tô Đông Vũ đã đưa ra 2 cách giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt : Nguyễn Thanh Hải, 12CT Đào Duy Từ, Quảng Bình, Phạm Đình Trường 10CT Trần Phú, Hải Phòng, và Vũ Thị Bích Hà, 11C trường PTTH chuyên Thái Bình.

NGUYỄN DẰNG PHÁT

(Xem tiếp trang 13)



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp Trung học Cơ sở

Bài T1/206. Chứng minh rằng có vô số số chính phương viết ở dạng $2n^2 + 2$ và $2n^2 - 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

NGUYỄN LÊ DŨNG

Bài T2/206. Cho a, b, c là ba số thực sao cho biểu thức ở vế trái của (1) luôn luôn có nghĩa. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c-a} + \frac{b^2(c-a)}{c+a-b} + \frac{c^2(a-b)}{a+b-c} + \frac{(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = 0 \quad (1)$$

DÀM VĂN NHÌ

Bài T3/206. Cho tam thức bậc hai

$f(x) = x^2 + px + q$ ở đó p, q là các số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k để

$$f(k) = f(1944) f(1995)$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/206. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . Chứng minh rằng nếu $AB^2 + CD^2 = 4R^2$ thì $AC \perp BD$

DÀO TAM

Bài T5/206. Cho ΔABC nhọn và điểm M chuyển động trên đường thẳng BC . Vẽ trung trực của các đoạn BM và CM tương ứng cắt các đường thẳng AB và AC tại P và Q . Chứng minh rằng đường thẳng qua M và vuông góc với PQ đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

Các lớp PTTH

Bài T6/206. Giả sử F_k là số hạng thứ k của dãy số Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$. Chứng minh rằng với mọi n số

$$4F_{n-2} F_n F_{n+2} F_{n+4} + 9$$

là số chính phương.

TÀ HỒNG QUẢNG

Bài T7/206. Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất sau đây :

$$1) |f(u) - f(v)| < |u - v| \quad \forall u \neq v$$

$$2) f(f(f(1992^{19^5}))) = 1992^{19^5}$$

Tìm giá trị : $f(1992^{19^5})$

DÀO TRƯỜNG GIANG

Bài T8/206. Chứng minh

$$\cos \frac{8\pi}{35} + \cos \frac{12\pi}{35} + \cos \frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{5} + \frac{\sqrt{7}}{2} \sin \frac{\pi}{5}$$

TÔ XUÂN HẢI

Bài T9/206. M là một điểm nằm trong mặt phẳng của đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) có tâm O .

Gọi $M_1, M_2, \dots, M_n$ lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của M trên các đường thẳng chứa các cạnh $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots$, và $A_n A_1$ của đa giác đã cho.

Giả sử G là trọng tâm của hệ các điểm $(M_1, M_2, \dots, M_n)$. Chứng minh rằng :

$$1) \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{O}$$

2) G là trung điểm của OM .

TRỊNH BẢNG GIANG

Bài T10/206. Cho a, b, c, d, e, f là sáu cạnh của một tứ diện có thể tích V . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 \geq 36\sqrt{2}V$$

DUƠNG QUỐC VIỆT

Các đề Vật lí

Bài L1/206. Một xe máy xuống dốc, từ đỉnh một quả đồi hình bán cầu, đi theo một đường tròn lớn. Xe rời khỏi mặt đồi sau khi chạy được một quãng. Sau đó xe có rơi xuống mặt đồi không ? Lực ma sát của mặt đồi và lực cản của không khí không đáng kể.

NGUYỄN DŨNG

Bài L2/206. Cho mạch điện AB như hình vẽ, trong đó hai cuộn dây hoàn toàn giống nhau. Điện trở thuần của toàn mạch là 200Ω . Khi mắc với A và B một hiệu điện thế xoay chiều hình sin có tần số 50Hz thì hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây ở cả hai cuộn dây có cùng một giá trị và dòng điện



chạy trong hai cuộn dây lệch pha so với nhau một góc là $\frac{\pi}{2}$. Hãy tính độ tự cảm của mỗi cuộn dây, điện dung của tụ điện và hệ số công suất của toàn mạch.

PHẦN TUẤN KHANH

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/206. Show that there exists an infinite number of perfect squares of the form

$$2n^2 + 2 \text{ and } 2n^2 - 1, n \in \mathbb{Z}$$

NGUYEN LE DUNG

T2/206. Let $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a + b - c \neq 0$, $b + c - a \neq 0$, $c + a - b \neq 0$.

Prove that

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c-a} + \frac{b^2(c-a)}{c+a-b} + \frac{c^2(a-b)}{a+b-c} + \frac{(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = 0 \quad (1)$$

DAM VAN NHI

T3/206. Let be given $p, q \in \mathbb{Z}$ and $f(x) = x^2 + px + q$.

Prove that there exists an integer k such that

$$f(k) = f(1994) \cdot f(1995).$$

DANG HUNG THANG

T4/206. Given a convex quadrangle $ABCD$ inscribed in a circle of radius R . Prove that $AC \perp BD$ provided that $AB^2 + CD^2 = 4R^2$

DAO TAM

T5/206. Given an acute triangle ABC . M is a moving point on the line BC . The perpendicular bisectors of BM and CM meet the lines AB and AC at P and Q respectively. Prove that the perpendicular to PQ drawn from M passes through a fixed point.

NGUYEN KHANH NGUYEN

Đố vui Toán học

Chỉ dùng chữ số 3 và các phép toán để viết số 1992.

Chẳng hạn, ta biết

$$1992 = 36 + 5.35 + 48$$

Suy ra

$$1992 = 3^{3+3} + (3 + 3/3 + 3/3)3^{3+3/3+3/3} + (3 + 3)(3/3 + 3/3)^3.$$

For Upper Secondary Schools

T6/206. Let F_k be the k -th term of the Fibonacci sequence 1, 1, 2, 3, 5, 8,...

Prove that the number

$$4F_{n-2}F_nF_{n+2}F_{n+4} + 9$$

is a perfect square.

TA HONG QUANG

T7/206. Consider the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the following conditions:

$$1) |f(u) - f(v)| < |u - v| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, u \neq v.$$

$$2) f(f(f(a))) = a; \text{ where } a = 1992^{19^5}$$

Calculate $f(a)$.

DAO TRUONG GIANG

T8/206. Prove that

$$\cos \frac{8\pi}{35} + \cos \frac{12\pi}{35} + \cos \frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{5} + \frac{\sqrt{7}}{2} \sin \frac{\pi}{5}$$

TO XUAN HAI

T9/206. M is a point in the plane of a regular polygon $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) with center O

Let $M_1, M_2, \dots, M_n$ be respectively the orthogonal projections of M on the lines $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$ and let G be the center of gravity of the system of points $(M_1, M_2, \dots, M_n)$

Prove that

$$1) \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{O}$$

2) G is the middle point of OM .

TRINH BANG GIANG

T10/206. a, b, c, d, e, f are the lengths of the six edges of a tetrahedron of volume V .

Prove that

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 \geq 36\sqrt{2} \cdot V$$

DUONG QUOC VIET

CHỈ DÙNG CHỮ SỐ 3

Vì $6 = 3!$ nên ta có thể viết:

$$1992 = 3^3! + (3! - 3/3) 3^{3!-3/3} + 3!(3/3 + 3/3)^3$$

Mời các bạn chỉ dùng chữ số 3 và các phép toán để tìm các cách viết số 1994.

LÊ KHẮC BẢO

Tìm hiểu sâu thêm Toán học phổ thông

MỘT VÀI TÍNH CHẤT CÁC NGHIỆM CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

PHAN HUY KHẢI

Bài viết này giới thiệu với các bạn một vài quy tắc để khảo sát tính chất các nghiệm của một phương trình bậc cao, từ đó trong nhiều trường hợp ta có thể áp dụng để giải nhiều bài toán cụ thể.

Phương trình bậc n có dạng tổng quát

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ (1) trong đó $a_n \neq 0$. Ta kí hiệu $P'(x)$, $P''(x)$ tương ứng là đạo hàm bậc nhất và bậc hai của $P(x)$, $P^{(i)}(x)$ là đạo hàm bậc i của $P(x)$, $i = 1, 2, \dots$ (xin nhắc lại là $P^{(i)}(x) = (P^{(i-1)}(x))'$)

Như đã biết, phương trình (1) có tối đa là n nghiệm thực. Để khảo sát số nghiệm, cũng như để đánh giá nghiệm của (1), người ta thường dùng các định lí sau đây :

Định lí 1 : Nếu $P(\alpha) P(\beta) < 0$, thì trong khoảng $\alpha < x < \beta$, (1) có ít nhất một nghiệm.

Sự đúng đắn của định lí 1 suy ra từ chỗ vì mọi đa thức $P(x)$ đều là liên tục mà $P(\alpha)$ và $P(\beta)$ trái dấu, nên tồn tại ít nhất một giá trị x_0 , $\alpha < x_0 < \beta$ sao cho $P(x_0) = 0$.

Định lí 2 (định lí Rolle). Nếu $P(\alpha) = P(\beta)$, thì tồn tại ít nhất một điểm x_0 , $\alpha < x_0 < \beta$ sao cho $P'(x_0) = 0$.

Thật vậy theo định lí Lagrange, ta có tồn tại x_0 , $\alpha < x_0 < \beta$, thỏa mãn điều kiện $P(\beta) - P(\alpha) = (\beta - \alpha) P'(x_0)$. Từ đó suy ra $P'(x_0) = 0$.

Định lí 3 (định lí Newton). Nếu $P(x_0) \geq 0$ và $P^{(i)}(x_0) \geq 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ thì nếu x là một nghiệm bất kì của (1), ta đều có $x \leq x_0$. Chứng minh : Ta có $P^{(n)}(x) = a_n n! = \text{const}$, do đó từ giả thiết có $P^{(n)}(x) \geq 0$ với mọi x (nói riêng với mọi $x \geq x_0$). Từ đó suy ra $P^{(n-1)}(x)$ là hàm đồng biến khi $x > x_0$, tức là $P^{(n-1)}(x) > P^{(n-1)}(x_0) \geq 0$, $\forall x > x_0$, vậy $P^{(n-2)}(x)$ lại là hàm đồng biến khi $x > x_0$. Lập luận tương tự như vậy, ta đi đến $P(x)$ là hàm đồng biến khi $x > x_0$, do đó $P(x) > P(x_0) \geq 0$. Điều đó có nghĩa là mọi $x > x_0$ đều không phải là nghiệm của (1). Ta có đ.p.c.m.

Dưới đây chúng tôi đưa ra một vài ví dụ minh họa cho các định lí nêu ở trên.

Ví dụ 1 : Cho phương trình $P(x) = x^3 - 3x^2 + (2m - 2)x + m - 3 = 0$ (2). Tìm m để (3) có nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

Điều kiện cần. Giả sử thỏa mãn đầu bài, khi đó theo định lí Bezu, ta có $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Rõ ràng $P(x) > 0$ nếu $x_1 < x < x_0$, vì thế $P(-1) = -m - 5 > 0 \Rightarrow m < -5$.

Điều kiện đủ. Đảo lại giả sử $m < -5$. Khi đó ta có $P(-1) = -m - 5 > 0$. Do $P(0) = m - 3 < 0$, nên theo định lí 1, tồn tại nghiệm x_2 mà $-1 < x_2 < 0$. Rõ ràng tồn tại a (mà $a > 0$ đủ lớn) sao cho $f(-a) < 0$, vậy tồn tại nghiệm x_1 mà $-a < x_1 < -1$. Lại tồn tại $b > 0$ đủ lớn mà $f(b) > 0$, do đó áp dụng định lí 1 một lần nữa suy ra tồn tại nghiệm x_3 mà $0 < x_3 < b$. Như vậy ta có $-a < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < b$, tức là $x_1 < -1 < x_2 < x_3$. Tóm lại $m < -5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2 : Cho phương trình

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 15x^3 - x^2 + 3x - 7 = 0 \quad (3)$$

Chứng minh rằng phương trình (3) có nghiệm thực duy nhất. Ta có $P'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 2x + 3$

$$P''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 90x - 2$$

$$P'''(x) = 60x^2 - 120x + 90$$

$$P^{(4)}(x) = 120x - 120$$

$$P^{(5)}(x) = 120$$

Dễ thấy $P(1), P'(1), P''(1), P'''(3), P^{(4)}(1), P^{(5)}(1)$ đều dương. Theo định lí Newton, thì mọi $x > 1$ đều không phải là nghiệm của (3).

Rõ ràng khi $x < 0$ thì $P(x) < 0$, vậy mọi $x < 0$ cũng không phải là nghiệm của (3). Ta có $P(0) = -7 < 0, P(1) > 0$, do đó theo định lí 1, thì (3) có ít nhất một nghiệm x mà $0 < x < 1$. Mặt khác dễ thấy $P'(x) > 0$ khi $0 < x < 1$, nên $P(x)$ là hàm thực sự tăng trên khoảng $(0, 1)$, do đó x cũng là nghiệm duy nhất của (3) trên khoảng ấy. Như vậy ta đi đến điều phải chứng minh.

Ví dụ 3 : Cho a, b, c là ba số thực khác nhau. Đặt $m = \min(a, b, c)$, $M = \max(a, b, c)$

Chứng minh rằng

$$3m < a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < 3M$$

Không giảm tổng quát có thể giả sử $a < b < c$. Xét đa thức

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

Rõ ràng phương trình $P(x) = 0$ có 3 nghiệm $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$. Theo định lý Rolle phương trình $P'(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab+bc+ca = 0$ có hai nghiệm $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ mà $a < \bar{x}_1 < b < \bar{x}_2 < c$.

$$\bar{x}_1 = \frac{a+b+c - \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{a+b+c + \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3},$$

suy ra đ.p.c.m.

Để kết thúc cho bài viết, xin đưa ra một vài bài tập để các bạn luyện tập với các phương pháp vừa trình bày ở trên để khảo sát nghiệm của một phương trình bậc cao.

1) (định lý Budan - Fourier). Xét phương trình $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = O(*)$, trên

đoạn $[a, b]$. Giả sử $P(a)P(b) \neq 0$. Kí hiệu $v(x)$ là số lần đổi dấu trong dãy $P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x)$. Chứng minh rằng nếu gọi k là số nghiệm của (*) trên đoạn $[a, b]$, thì $k = v(a) - v(b) - 2m$, trong đó m là số tự nhiên nào đấy. (Nói cách khác k có cùng tính chẵn lẻ với $v(a) - v(b)$).

2) (định lý Descartes). Xét phương trình (*), trong đó $a_0a_n \neq 0$. Kí hiệu v là số lần đổi dấu của dãy $a_0, a_1, \dots, a_n$. Gọi k là số nghiệm của (*), thì $k = v - 2m$, với m là số tự nhiên nào đấy.

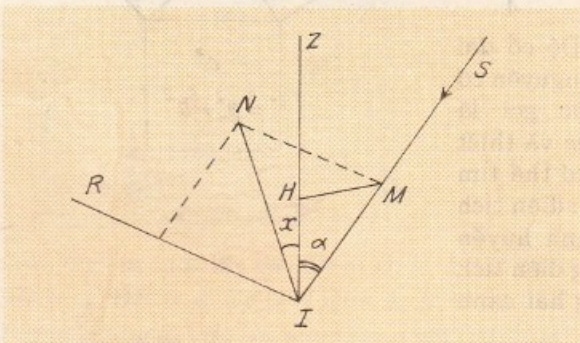
3) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có 5 nghiệm thực.

4) Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6$. Chứng minh rằng hàm số đạt cực trị tại 3 điểm A, B, C, và gốc tọa độ O là trọng tâm của tam giác ABC.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC (Tiếp theo)

Bài L1/202. Ánh sáng Mặt Trời chiếu song song với một bức tường thẳng đứng và tạo với phương thẳng đứng góc nhọn α . Đứng trước tường, dùng một gương phẳng, một em bé chiếu ánh sáng vuông góc với mặt tường. Khi đó mặt phẳng của gương tạo với mặt đất một góc bằng bao nhiêu?

Lời giải. Ở hình vẽ bên cạnh, SI là tia tới, IR là tia phản xạ, IN là pháp tuyến với mặt gương, IZ là phương thẳng đứng. Mặt gương tạo với mặt đất một góc bằng góc x giữa IN



và IZ. IR vuông góc với tường nên nằm ngang và cũng vuông góc với IS vì tia tới song song với tường. Vậy $IR \perp mp \text{ SIZ}$ và góc $SIN = 45^\circ$. Muốn chiếu một điểm N lên IZ ta chiếu nó lên SIZ, được điểm M, rồi chiếu M lên IZ, được điểm H: H là hình chiếu của N lên IZ.

$$\text{Vậy } \cos x = \frac{IH}{IN} = \frac{IH}{IM} \cdot \frac{IM}{IN} = \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{hay } x = \arccos \left(\cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right).$$

Nhận xét: Có 5 em có lời giải đúng; đặc biệt có 2 em có lời giải tốt: Vũ Thị Bích Hà,

11C PTTH chuyên Thái Bình; Ngô Thành Trung 11A, PTTH Lí Tự Trọng, Cần Thơ.

OK

Bài L2/202. Có một ampe kế có nhiều thang đo, có độ chính xác cao, có những sơn riêng biệt cho từng thang đo. Dùng ampe kế này để đo cường độ dòng điện trong một đoạn mạch. Nếu sử dụng thang đo 10mA thì ampe kế chỉ $I_1 = 2,95\text{mA}$. Sau khi chuyển sang thang đo 3mA, nó chỉ $I_2 = 2,90\text{mA}$. Hỏi cường độ dòng điện lúc trước khi mắc ampe kế là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi V_o, R_o là hiệu điện thế và điện trở trước khi mắc ampe kế của đoạn mạch; R_1, R_2 là điện trở của ampe kế ứng với khi sử dụng thang đo 10mA, 3mA. Với mọi thang đo nếu giả sử cường độ dòng điện qua ampe kế có giá trị bằng giới hạn đo thì khi đó hiệu điện thế giữa hai đầu ampe kế là cực đại và không đổi với mỗi thang đo khác nhau, do đó $U_{\max} = 10R_1 = 3R_2$ (1). Ta lại có

$$I_1(R_o + R_1) = U_o \quad (2);$$

$$I_2(R_o + R_2) = U_o \quad (3);$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } I_o = \frac{U_o}{R_o} =$$

$$= \frac{(R_2 - R_1)}{I_2 R_2 - I_1 R_1} \cdot I_1 I_2 = \frac{7 I_1 I_2}{10 I_2 - 3 I_1} \approx 2,97\text{mA}$$

Nhận xét: Có 15 bài giải đúng. Các em sau đây có bài giải tốt: Ngô Thành Trung, 11A₁, PTTH Lí Tự Trọng, Cần Thơ; Nguyễn Trọng Tâm, 9L Năng khiếu Thái Thụy, Thái Bình; Đỗ Thu Thủy 11A₂ Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, Nghệ An; Nguyễn Hữu Hải 11A, PTTH số II Hoài Nhơn, Bình Định; Nguyễn Đức Thành, 11A, PTTH Đô Lương I, Nghệ An. Bài giải ở trên dựa vào bài của em Ngô Thành Trung.

MT

Định lý *Pytago* nói rằng nếu a, b, c là các cạnh bên và cạnh huyền của một tam giác vuông thì ta có

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Tên của định lý là tên của nhà triết học và toán học Hy Lạp *Pitago* sống khoảng 500 năm trước công nguyên. Đây là một trong những kết quả quan trọng nhất trong lịch sử phát triển toán học. Sau này người ta phát hiện ra rằng định lý *Pytago* đã được biết đến trước đó từ lâu trong các nền văn minh cổ đại trên toàn thế giới.

Người ta đã tìm thấy một bảng đất sét nung của nền văn minh Babilon hơn một nghìn năm trước *Pitago* trong đó có vẽ một hình vuông có cạnh cho trước và bên cạnh đó là hai con số khác. Một số là số gần đúng của $\sqrt{2}$ và số kia bằng tích của số đầu và cạnh hình vuông. Theo định lý *Pitago* thì đây chính là độ dài đường chéo hình vuông.

Bài toán sau đây tìm thấy trên một bảng đất sét nung khác của thời Babilon cổ đại cho ta thấy những người Babilon đã biết ứng dụng định lý *Pitago* để giải các vấn đề hình học.

Bài toán : Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam giác có các cạnh là 50, 50, 60.

Lời giải : Ta có $AD^2 = AC^2 - DC^2$

Do $DC = BC : 2 = 30$, nên

$AD = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$. Ta lại có

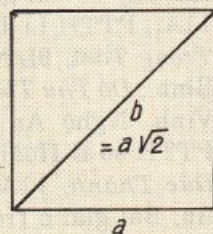
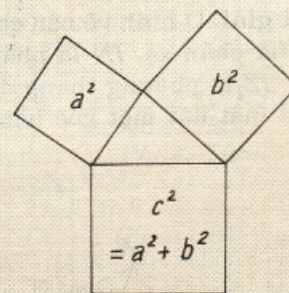
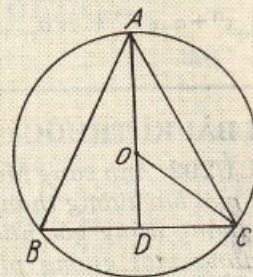
$$OC^2 = DC^2 + (AD - OA)^2$$

$$= DC^2 + AD^2 = 2AD \cdot OC + OC^2$$

Do đó

$$OC = \frac{DC^2 + AD^2}{2AD} = \frac{30^2 + 40^2}{2 \cdot 40} = \frac{125}{4}$$

Trong những văn tự Ấn Độ cổ đại khoảng 1500 năm trước công nguyên có một phần quan trọng được gọi là *Sulbasutras* nói về việc đo đạc và thiết kế các đền thờ. Ở phần này có thể tìm thấy định lý *Pitago* dưới dạng : diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh huyền một tam giác vuông bằng tổng diện tích hai hình vuông có cạnh bằng hai cạnh bên của tam giác vuông đó.



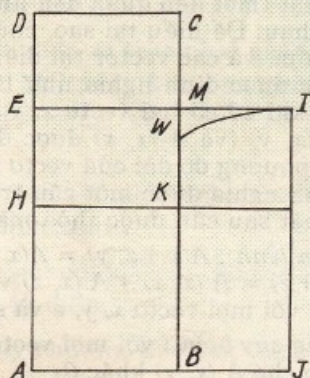
Phần Sulbasutras cũng có những chỉ dẫn về việc dựng các hình trong đó có cùng đến định lý Pitago như việc giải bài toán sau.

Bài toán : Dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình chữ nhật cho trước.

Lời giải : Cho hình chữ nhật $ABCD$. Ta vẽ hình vuông $ABKH$ trong $ABCD$. Sau đó xác định các trung điểm E và M của DH và CK . Dựng hình vuông $AEFJ$ đi qua M . Lấy J làm tâm vẽ một đường tròn có bán kính JF cắt BM ở W . Hình vuông có cạnh bằng BW sẽ có diện tích bằng diện tích $ABCD$ vì theo định lý Pitago ta có

$$BW^2 = JW^2 - BJ^2 = JF^2 - KM^2 \\ = (JF - BJ)(JF + KM) = AB \cdot BC$$

Quyển sách toán cổ nhất của Trung Quốc được viết khoảng 500 năm trước công nguyên rất nổi tiếng vì có một chứng minh cho định lý Pitago. Cần lưu ý là quyển sách này thu thập những kiến thức toán học được lưu truyền từ những thời gian trước Pitago. Trong đó người ta tìm thấy hình vẽ sau :



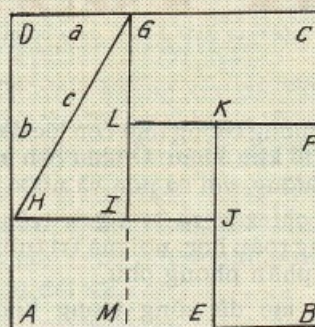
Lời diễn giải kèm theo có thể viết lại như sau :

$$c^2 = S_{IKL} + S_{GHI} + S_{GLF} + S_{FKE} + S_{EJH} \\ = S_{IKL} + S_{AEJH} + S_{EBFK} \\ = S_{AMIH} + S_{MBFL} \\ = a^2 + b^2$$

Đặc biệt người Trung Quốc cổ đại đã biết áp dụng định lý Pitago để giải nhiều bài toán thực tiễn như những bài toán sau đây.

Bài toán : Từ đỉnh một cái cây có treo một cái dây thả xuống đất thì thừa một đoạn có độ dài là d . Nếu kéo căng dây ra thì đầu dây

chạm đất ở một khoảng cách là b so với gốc cây. Hãy tìm độ dài của dây.



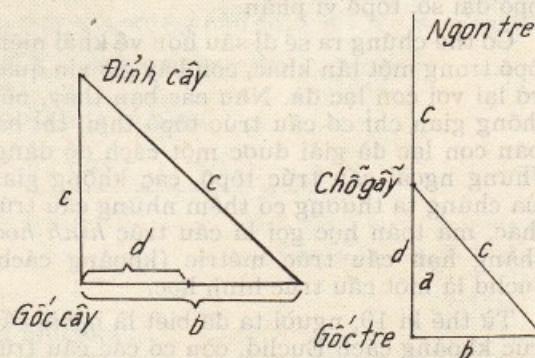
Lời giải : Nếu cây có độ dài a thì bài toán là tính độ dài C của cạnh huyền một tam giác vuông có cạnh bên là $a = c - d$ và b . Theo định lý Pitago ta có

$$(c - d)^2 + b^2 = c^2$$

Từ đây suy ra

$$c = \frac{b^2 + d^2}{2d}$$

Bài toán : Có một cây tre có độ cao là a . Khi gãy ngọn tre chạm đất ở một khoảng cách là b so với gốc tre. Hãy tìm độ cao chỗ cây tre gãy.



Lời giải : Ta phải tính cạnh a của một tam giác vuông có cạnh bên là b và cạnh huyền là $c = d - a$. Theo định lý Pitago ta có

$$a^2 + b^2 = (d - a)^2$$

Từ đây suy ra

$$a = \frac{d^2 - b^2}{2d}$$

Bước đầu tìm hiểu toán học hiện đại

BÀI TOÁN CON LẠC ĐÀ

NGUYỄN TIẾN DŨNG

Bạn hãy tưởng tượng một con lạc đà cần chui qua một cái lỗ kim khâu. Ở phía bên kia lỗ kim sẽ là thiên đường, với cỏ non và nước uống.

Điều đó chỉ xảy ra trong truyện cổ tích. Hoặc là trong toán học, nơi mà trí tưởng tượng không kém phần phong phú.

Nếu con lạc đà sống trong không gian Euclid thông thường của chúng ta, ắt hẳn nó không có cách gì chui qua lỗ kim được. Nhưng nếu trong không gian ba chiều, độ dài Euclid không còn được tôn trọng nữa, mà mọi vật có thể biến dạng liên tục tùy ý, thì con lạc đà đã có thể thu mình nhỏ lại bằng con vi trùng rồi bay qua lỗ kim một cách dễ dàng.

Không gian mà trong đó các vật có thể biến dạng liên tục được gọi là không gian *tôpô*. Hai vật được gọi là tương đương với nhau về mặt tôpô, nếu vật này có thể biến dạng liên tục thành vật kia và ngược lại. Chẳng hạn về mặt tôpô, hình vuông và hình tròn tương đương với nhau. Cái kim khâu và cái cốc một quai cũng tương đương với nhau, nhưng chúng không tương đương với con lạc đà (bạn thử nghĩ xem vì sao).

Ngày nay tôpô là một trong những khái niệm cơ bản nhất của toán học hiện đại. Bạn nào yêu toán ắt hẳn là sẽ phải tìm đọc những quyển sách về tôpô, như quyển *Tôpô đại cương* (General Topology) của Kelley, đã được dịch ra tiếng Việt, hoặc những sách cao cấp hơn về tôpô đại số, tôpô vi phân...

Có thể chúng ta sẽ đi sâu hơn về khái niệm tôpô trong một lần khác, còn bây giờ xin quay trở lại với con lạc đà. Như các bạn thấy, nếu không gian chỉ có cấu trúc tôpô thôi, thì bài toán con lạc đà đã giải được một cách dễ dàng. Nhưng ngoài cấu trúc tôpô, các không gian của chúng ta thường có thêm những cấu trúc khác, mà toán học gọi là cấu trúc *hình học*. Chẳng hạn cấu trúc *mêtric* (khoảng cách) Euclid là một cấu trúc hình học.

Từ thế kỉ 19, người ta đã biết là ngoài cấu trúc khoảng cách Euclid, còn có các cấu trúc khoảng cách khác, được gọi là khoảng cách *Riemann* hoặc *giả Riemann*, nơi mà tổng ba góc trong một tam giác thường khác 2π . Những không gian như vậy được gọi là không gian *cong*, vì chúng có *độ cong* khác không. Lý thuyết tương đối của (Einstein) Anhtan chính là dựa trên toán học của các không gian cong đó.

Cấu trúc thể tích cũng là một cấu trúc hình học. Nếu bạn biết độ dài ba cạnh của một hình khối chữ nhật, thì bạn có thể tính được thể tích của nó. Nhưng điều ngược lại không đúng.

Nói cách khác, cấu trúc thể tích yếu hơn là cấu trúc khoảng cách, và một không gian có thể không có cấu trúc khoảng cách nhưng vẫn có cấu trúc thể tích. Ta thử giải bài toán con lạc đà trong không gian với cấu trúc thể tích: con lạc đà biến mình thành một con giun đường kính rất nhỏ nhưng rất dài, sao cho thể tích không bị mất đi, rồi trườn mình dần qua lỗ kim.

Trong toán học, bài toán con lạc đà chỉ thực sự nổi tiếng vì một cấu trúc hình học khác, gọi là cấu trúc *symplectic*. Trong khi bài toán con lạc đà với cấu trúc thể tích hoặc *mêtric* đều có đáp số dễ dàng, thì mãi đến năm 1985 một nhà hình học Pháp gốc Nga tên là Michael Gromov mới chứng minh được rằng trong trường hợp *symplectic* (và số chiều khác 2) con lạc đà không thể chui qua được lỗ kim.

Cấu trúc *symplectic* là gì? Ông Atiyah, người đã từng được giải thưởng Fields về Toán học, gọi các cấu trúc *metric*, (*complex*) *phức* và *symplectic* là ba chị em. Nói thể có nghĩa là chúng mật thiết liên quan đến nhau, và "bù đắp" cho nhau. Để hiểu tại sao, chúng ta hãy xét một điểm, và các vector tại điểm đó. Cấu trúc *metric* được định nghĩa như là một tích vô hướng, khi cứ có hai vector x, y thì cho ra một số $A(x, y)$ (và $A(x, x)$ được định nghĩa bằng bình phương độ dài của vector x). Để cho $A(x, y)$ định nghĩa được một cấu trúc *metric*, các tính chất sau cần được thỏa mãn:

1. *Tuyến tính*: $A(x+z, y) = A(x, y) + A(z, y)$, $A(x, y+z) = A(x, y) + A(x, z)$ và $A(cx, y) = cA(x, y)$ với mọi vector x, y, z và số c .

2. *Không suy biến*: với mọi vector x tồn tại vector y sao cho $A(x, y)$ khác 0.

3. *Đối xứng*: $A(x, y) = A(y, x)$

4. *Dương tính*: $A(x, x) > 0$ nếu x khác 0.

Nếu A thỏa mãn hai tính chất đầu tiên, thì nó được gọi là một dạng *tuyến tính bậc hai* không suy biến. Nếu ba tính chất đầu tiên được thỏa mãn mà tính chất thứ tư không được thỏa mãn, thì A được gọi là cấu trúc *giả khoảng cách* (*pseudo-metric*).

Bây giờ giả sử có một hàm số $B(x, y)$ thỏa mãn hai tính chất đầu tiên, nhưng từ tính chất thứ ba được thay bằng tính chất sau đây:

3'. *Phản đối xứng*: $B(x, y) = -B(y, x)$.

Khi đó B được gọi là một cấu trúc *symplectic*. Bạn hãy chứng minh rằng nếu B là một cấu trúc *symplectic* thì nó không thể thỏa mãn tính chất thứ tư. Để lấy ví dụ, xét mặt phẳng Euclid thông thường. Khi đó tích

vô hướng của hai vectơ $x = (x_1, x_2)$ và $y = (y_1, y_2)$ là $A(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, còn diện tích của hình bình hành tạo bởi hai vectơ đó là $B(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Bạn có thể kiểm tra rằng diện tích là một cấu trúc symplectic.

Như vậy trong trường hợp hai chiều, cấu trúc symplectic chẳng qua là cấu trúc diện tích. Một điều thú vị là cấu trúc symplectic chỉ tồn tại trong các không gian có số chiều chẵn (bạn hãy thử chứng minh rằng nó không tồn tại trong không gian ba chiều). Và tương tự như khoảng cách, từ một cấu trúc symplectic cũng sinh ra được một cấu trúc thể tích.

Định nghĩa của cấu trúc symplectic ở trên mới chỉ là tại một điểm. Để có một cấu trúc symplectic trong toàn không gian (hay nói chính xác hơn, trong một đa tạp), thì trước hết tại mỗi điểm cần một cấu trúc symplectic của điểm đó (tương tự như trường hợp metric). Nếu tại mỗi điểm ta có một cấu trúc symplectic, thì hợp lại ta có một cái mà toán học gọi là một *dạng vi phân* bậc hai không suy biến. Điều kiện để dạng vi phân này là một cấu trúc symplectic là nó là một dạng vi phân đóng, tức là đạo hàm của nó bằng 0. Việc giải thích thế nào là đạo hàm của một dạng vi phân vượt quá khuôn khổ bài báo này, nhưng nó tương tự như đạo hàm của các hàm số, và bạn có thể tìm hiểu về nó qua các sách về hình học vi phân.



Thế người ta cần nghiên cứu hình học symplectic để làm gì? Câu trả lời xuất xứ từ những bài toán cơ học cổ điển. Nếu có một hàm số, gọi là hàm năng lượng (chính là tổng của động năng và thế năng mà các bạn vẫn được học), thì thông qua cấu trúc symplectic sẽ viết được một (hệ) phương trình vi phân, chính là phương trình chuyển động của bài toán cơ học đang xét. Phương trình vi phân viết ở dạng như vậy được gọi là phương trình Hamilton. Điều này được trình bày một cách sáng sủa trong những quyển sách về cơ học cổ điển từ quan điểm toán học, chẳng hạn quyển *Các phương pháp toán học trong cơ học cổ điển* của V.I. Arnold. Ngày nay không chỉ có các bài toán của cơ học cổ điển, mà nói chung mọi bài toán vật lý, đều viết được dưới dạng phương trình Hamilton.

Kì thi Ôlimpic Toán ...

(Tiếp theo trang 1)

Bài 2 : ABC là một tam giác cân với $AB = AC$.

Giả thiết rằng

i) M là trung điểm của đoạn BC và O là điểm trên đường thẳng AM sao cho OB vuông góc với AB ;

ii) Q là một điểm tùy ý thuộc đoạn BC, khác với B và C.

iii) E là một điểm trên đường thẳng AB, F là một điểm trên đường thẳng AC, sao cho E, Q, F là phân biệt và thẳng hàng. Chứng minh rằng $OQ \perp EF$ khi và chỉ khi $QE = QF$.

Bài 3 : Với mọi số nguyên dương k , gọi $f(k)$ là số các phần tử thuộc tập $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ với dạng biểu diễn theo cơ số 2 có đúng 3 chữ số 1.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m , tồn tại ít nhất một số nguyên dương k sao cho $f(k) = m$.

b) Xác định tất cả các số nguyên dương m sao cho chỉ tồn tại duy nhất một số k với $f(k) = m$.

Bài 4 : Xác định tất cả các cặp có thứ tự gồm hai số nguyên dương (m, n) sao cho

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

là một số nguyên.

Bài 5 : Giả sử S là tập các số thực lớn hơn -1 . Tìm tất cả các hàm số $f: S \rightarrow S$ thỏa mãn hai điều kiện :

$$i) f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$$

với mọi x và mọi y thuộc S .

$$ii) \frac{f(x)}{x} \text{ là tăng thực sự trong các khoảng}$$

$$-1 < x < 0 \text{ và } x > 0.$$

Bài 6 : Chứng tỏ rằng có tồn tại một tập A các số nguyên dương có tính chất sau : Với mọi tập S gồm vô số các số nguyên tố, tồn tại hai số nguyên dương $m \in A$ và $n \notin A$, mỗi số này là tích của k phần tử phân biệt của S với $k \geq 2$ nào đó.



CHẠY NHƯ THẾ NÀO ?

Một huấn luyện viên muốn thử tài toán học của cầu thủ bóng đá của mình đã ra lệnh cho cầu thủ đó như sau : Anh hãy chạy một lượt sao cho đường chạy của anh bao được chu vi và chia sân bóng thành tám phần bằng nhau. Không chạy lặp lại đoạn nào cũng không chạy ra ngoài sân bóng

Các bạn tìm giúp xem cầu thủ đó phải chạy như thế nào để đáp ứng được yêu cầu của huấn luyện viên.

NGUYỄN HỮU DƯ

Giải đáp bài

THAY CHỮ BẰNG SỐ

$$\begin{array}{r} \text{T O A N H O C} \\ - \text{H O C T O A N} \\ \hline 8 * 2 3 * 8 1 \end{array}$$

Nhìn vào các chữ số của con tính ta thấy ngay $T = 9$, $H = 1$ dấu $*$ (hàng trăm nghìn) = 0

Ta lại thấy tổng các chữ số của số TOAN HOC và của số HOC TOAN là bằng nhau nên tổng các chữ số của hiệu của hai số này chia hết cho 9. Do vậy : $(8 + 0 + 2 + 3 + * + 8 + 1) : 9$ hay $4 + x = 9$. Nghĩa là dấu $*$ (hàng trăm) = 5. Vậy ta có :

$$\begin{array}{r} 9 \text{ O A N } 1 \text{ O C} \\ - 1 \text{ O C } 9 \text{ O A N} \\ \hline 8 \text{ O } 2 \text{ 3 } 5 \text{ 8 } 1 \end{array}$$

Từ hàng trăm và hàng nghìn của con tính bên suy ra $N = 3$

Từ hàng đơn vị suy ra $C = 4$

Từ hàng vạn suy ra $A = 7$

Từ hàng chục suy ra $O = 5$

Tóm lại ta có :

$$\begin{array}{r} 9573154 \\ - 1549573 \\ \hline 8023581 \end{array}$$

Các bạn : Huỳnh Minh Sơn, 6T, Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi, Nguyễn Ngọc Kiên, 9T, NK Thái Thụy, Thái Bình có giải đáp đúng.

BÌNH PHƯƠNG

KẾT QUẢ CỦA ĐOÀN HỌC SINH VIỆT NAM TẠI CUỘC THI TIN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ SÁU

Cuộc thi TIN HỌC QUỐC TẾ lần thứ Sáu đã diễn ra tại Stockholm (Thủ đô của Thụy Điển) từ ngày 3 đến 10-7-1994. Đoàn Việt Nam có 4 học sinh tất cả đều đoạt giải :

Huy chương bạc : Trương Xuân Nam (Lớp 12), Trần Minh Châu (Lớp 12), Nguyễn Bảo Sơn (Lớp 11), ĐHTH Hà Nội.

Huy chương đồng : Cao Minh Trí (lớp 12), PTTH Lê Hồng Phong, Nam Hà.

THÔNG BÁO

BẠN ĐỌC CÓ THỂ TÌM MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÈ TẠI :

- Công ty Phát hành sách và Thiết bị trường học.
- Bưu điện thành phố, tỉnh, thị xã.
- Các cửa hàng sách báo trung tâm của thành phố, tỉnh, thị xã, thị trấn hoặc Đặt mua dài hạn tại Bưu điện thành phố, thị xã, huyện, thị trấn trong cả nước.

ISSN : 0866 - 8035.
Mã số : 8BT08M4

Chỉ số 12884
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiếu tháng 8 /1994

Giá : 1200đ
Một nghìn
hai trăm đồng