

• BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

7(205)
1994

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

Anh Hùng PGĐ Sở

PHẦN NGUYÊN CỦA MỘT SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN CHIA HẾT

*Tâm của hệ điểm và
khoảng cách giữa tâm
của hai hệ điểm*

**Ai cao
Ai thấp**

Một con đường
đi tới bài toán mới



Học sinh chuyên Toán, Tin học, Vật lý, Ngoại ngữ trường Lê Hồng Phong
TP. Hồ Chí Minh trong ngày phát thưởng cuối năm học

THI TUYỂN VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG ĐHSX HÀ NỘI 1

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

	Trang
● Dành cho các bạn phổ thông trung học cơ sở <i>For Lower Secondary School Level Friends</i>	
Nguyễn Văn Vĩnh – Phần nguyên của một số và các bài toán chia hết	1
● Giải bài kì trước <i>Solution of problems in previous issue</i> Các bài của số 201	3
● Bạn có biết ? <i>Do you know ?</i> Nguyễn Cang – Đường "Vô sò" Nicomède và ứng dụng của nó vào việc dựng nghiệm thực của phương trình bậc 3	9
● Đề ra kì này <i>Problems in this issue</i> Các bài từ T1/205 đến T10/205 và L1/205, L2/205	10
● Thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán DHSP Hà Nội	12
● Học sinh tìm tòi <i>Young friends' search in Maths</i> Nguyễn Thái Hà – Một con đường đi tới bài toán mới	14
● Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông <i>Further study of school Maths</i> Trần Quang Vỹ – Tâm của hệ điểm và khoảng cách giữa tâm của hai hệ điểm	15
● Giải trí toán học <i>Fun with Mathematics</i> Bình phương – Ai họ gì Xuân Trung – Ai cao ai thấp	Bìa 4
● Ổng kính cải cách dạy và học toán <i>Kaleidoscope : Reform of Maths teaching and learning</i> Nguyễn Đức Tấn – Đổi điều về bài công thức nghiệm thu gọn	

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP :

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng Chúng, Ngô Đạt Tử, Lê Khắc Bảo, Nguyễn Huy Doan, Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu, Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc Minh, Trần Văn Nhung, Nguyễn Đăng Phát, Phan Thanh Quang, Tạ Hống Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ Dương Thụy, Trần Thành Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô Việt Trung, Đặng Quan Viên.

Trụ sở tòa soạn :

81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

ĐT: 260786

ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : DOÀN HỒNG

Dành cho các bạn phổ thông Trung học cơ sở

PHẦN NGUYÊN CỦA MỘT SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN CHIA HẾT

NGUYỄN VĂN VINH

Ở lớp 7 các bạn đã biết : Cho x là một số hữu tỉ bất kì. Kí hiệu $[x]$ (đọc là phần nguyên của x) là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Chẳng hạn $[2,8] = 2$; $[-3,78] = -4$; $[-3] = -3$; $[0] = 0$.

Từ định nghĩa trên đây ra suy ra ngay một số tính chất đơn giản. Nếu $[x] = a$ thì $x = a + d$ với a là số nguyên, và $0 \leq d < 1$. Nếu $[x + y] = x$ thì x là số nguyên và $0 \leq y < 1$. Nếu n là số nguyên thì $[n + x] = n + [x]$.

Để sử dụng khái niệm "phần nguyên của một số" giải các bài toán chia hết, trước hết ta chứng minh một số mệnh đề sau đây :

Mệnh đề 1 : Nếu n là một số tự nhiên thì $n.[x] \leq [nx]$

Thật vậy : Đặt $[x] = a$, ta có $x = a + d$ với $0 \leq d < 1$.

Vì $[nx] = [n(a + d)] = [na + nd] = na + [nd]$ (vì na - nguyên)

Do $nd \geq 0$ nên $[nd] \geq 0$. Suy ra :
 $na = n[x] \leq [nx]$.

Mệnh đề 2 : Với mọi số tự nhiên n và q (q khác 0) ta có

$$q \cdot \left[\frac{n}{q} \right] \leq n.$$

Thật vậy theo mệnh đề 1 ta có :

$$q \cdot \left[\frac{n}{q} \right] \leq \left[q \cdot \frac{n}{q} \right] = [n] = n$$

Mệnh đề 3 : Với mọi số tự nhiên n và q (q khác 0) ta có

$$n < q \cdot \left(1 + \left[\frac{n}{q} \right] \right)$$

Thật vậy : chia n cho q , ta có :

$$n = m \cdot q + r \text{ với } 0 \leq r < q$$

$$\text{Do đó } \frac{n}{q} = m + \frac{r}{q} \text{ với } 0 \leq \frac{r}{q} < 1$$

$$\text{Suy ra } \left[\frac{n}{q} \right] = m.$$

Mặt khác, từ $n = mq + r$ suy ra
 $n = (m + 1)q + r - q$ với $r - q$ âm, nên

$$n < (m + 1)q = \left(\left[\frac{n}{q} \right] + 1 \right) \cdot q$$

Mệnh đề 4 : Trong dãy n số tự nhiên :
 $1, 2, 3, \dots, n$ có đúng $\left[\frac{n}{q} \right]$ số tự nhiên chia hết cho số tự nhiên q khác 0.

Thật vậy, xét ba trường hợp :

- Nếu $n < q$ thì $\frac{n}{q} < 1$, suy ra $\left[\frac{n}{q} \right] = 0$.

Rõ ràng trong dãy $1, 2, 3, \dots, n$ ($n < q$) không có số nào chia hết cho q .

- Nếu $n = q$ thì $\left[\frac{n}{q} \right] = 1$. Trong dãy số $1, 2, 3, \dots, n = q$ có đúng một số chia hết cho q .

- Nếu $n > q$ thì $\frac{n}{q} > 1$, suy ra $\left[\frac{n}{q} \right] \geq 1$.

Nhận thấy trong dãy số : $1, 2, 3, \dots, q, q + 1, \dots, n$ chỉ có các số $1.q, 2.q, 3.q, \dots, \left[\frac{n}{q} \right] \cdot q$ là chia hết cho q .

Thật vậy, theo mệnh đề 2 thì $q \cdot \left[\frac{n}{q} \right] \leq n$

nên số tự nhiên $\left[\frac{n}{q} \right] \cdot q$ chia hết cho q là một số hạng của dãy : $1, 2, 3, \dots, n$.

Mặt khác theo mệnh đề 3 thì

$n < q \cdot \left(1 + \left[\frac{n}{q} \right] \right)$ nên số tự nhiên $\left(1 + \left[\frac{n}{q} \right] \right) \cdot q$ không là số hạng của dãy $1, 2, \dots, n$. Như vậy, có đúng $\left[\frac{n}{q} \right]$ số chia hết cho q .

Từ mệnh đề 4 ta suy ra ngay kết quả : Trong dãy số tự nhiên $1, 2, 3, \dots, n$ có đúng $\left[\frac{n}{q^2} \right]$ số chia hết cho q^2 , có đúng $\left[\frac{n}{q^3} \right]$ số chia hết cho $q^3, \dots$

Mệnh đề 5 : Nếu số nguyên tố p có mặt trong phân tích ra thừa số nguyên tố của $n!$ $= 1, 2, 3 \dots n$ thì số mũ cao nhất của p bằng

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right] \text{ với } p^k \leq n < p^{k+1}$$

Thật vậy, theo kết quả trên đây : số các nhân tử của tích $1.2.3 \dots n$ chia hết cho p đúng bằng $\left[\frac{n}{p} \right]$, số các nhân tử chia hết cho p^2 đúng bằng $\left[\frac{n}{p^2} \right]$, ...

Điều này có nghĩa : số các thừa số nguyên tố p có trong phân tích ra thừa số nguyên tố của tích : $1.2.3 \dots n$ đúng bằng :

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k} \right]$$

Chúng ta sử dụng các kết quả nhận được trên đây vào giải toán.

Ví dụ 1. Tích số $100! = 1.2.3 \dots 100$ tận cùng là bao nhiêu chữ số 0 ?

(Đề thi học sinh giỏi Mátxcơva, vòng 1, 1940)

Giải : Tích của 5 và một số chẵn là một số có chữ số tận cùng 0.

Trong 100 số của $100!$ có 50 số chẵn, 50 số lẻ, vì vậy chỉ cần tìm tất cả các bội số của 5 trong tích đã cho.

Theo mệnh đề 5, số mũ cao nhất của 5 có trong phân tích ra thừa số nguyên tố $100!$ bằng :

$$\left[\frac{100}{5} \right] + \left[\frac{100}{25} \right] + \left[\frac{100}{125} \right] = 24$$

Vậy tích số $100!$ tận cùng là 24 chữ số 0.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu $(n-1)!$ chia hết cho n thì n không phải là số nguyên tố.

Giải : Giả sử ngược lại n là số nguyên tố, suy ra n chỉ có hai ước số là 1 và n . Theo mệnh đề 4, trong dãy số 1, 2, ..., $n-1$ có $\left[\frac{n-1}{n} \right] = 0$ số chia hết cho n . Từ đó suy ra tích : $1.2.3 \dots (n-1)$ không chia hết cho n , trái với giả thiết $(n-1)!$ chia hết cho n . Vậy n không phải là số nguyên tố.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $n!$ không chia hết cho 2^n .

Giải : Theo mệnh đề 5 : số mũ k cao nhất của số 2 có trong phân tích ra thừa số nguyên tố của $n!$ là

$$k = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{2^m} \right] \text{ với } 2^m \leq n < 2^{m+1}. \text{ Do đó chỉ cần chứng minh cho } n > k \text{ là đủ.}$$

Theo nhận xét mở đầu ta có :

$$\left[\frac{n}{2} \right] \leq \frac{n}{2}, \left[\frac{n}{2^2} \right] \leq \frac{n}{2^2}, \dots, \left[\frac{n}{2^m} \right] \leq \frac{n}{2^m}$$

Cộng từng vế m bất đẳng thức trên ta có :

$$k \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^m} = n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^m} \right)$$

$$\text{Đặt } S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m}$$

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$\text{Do đó } S = 2S - S = 1 - \frac{1}{2^m} < 1$$

Từ đó suy ra $k = n.S < n$, hay $k < n$

Vậy $n!$ không chia hết cho 2^n .

Ví dụ 4

a) Chứng minh rằng tổng

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \quad (n \geq 2) \text{ không phải là số nguyên.}$$

b) Chứng minh rằng tổng

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{16} \text{ không phải là số nguyên}$$

(Đề thi vào chuyên toán vòng 2, 1973)

$$\text{Giải : Ta có : } S - 1 = \frac{\frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \dots + \frac{n!}{n}}{n!}$$

Từ mệnh đề 5 ta suy ra mẫu số $n!$ chia hết cho một lũy thừa của 2 có bậc cao hơn của tử số. Điều này chứng tỏ $S - 1$ không phải là số nguyên, do đó S cũng không phải là số nguyên.

b) Có thể làm tương tự như câu a.

Ví dụ 5. Tìm lũy thừa a cao nhất của 7 mà $1000!$ có thể chia hết cho 7^a .

Giải : Theo mệnh đề 5, lũy thừa a cao nhất của số 7 có trong khai triển thành tích các thừa số nguyên tố của $1000!$ bằng :

$$a = \left[\frac{1000}{7} \right] + \left[\frac{1000}{49} \right] + \left[\frac{1000}{343} \right] = 164$$

Vậy $1000!$ chia hết cho 7^{164} .



Bài T1/201 : Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để số $25x + 46$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Lời giải : Cách 1. (Của Đàm Khánh Hòa, 9A, PTTH chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên). Giả sử có $x, n \in \mathbb{Z}$ sao cho

$$25x + 46 = n(n + 1)$$

$$\Leftrightarrow 100x + 184 = 4n^2 + 4n$$

$$\Leftrightarrow 100x + 185 = (2n + 1)^2$$

Tức là $100x + 185$ là số chính phương (1).

Mặt khác ta có : $100x + 185 = 5(20x + 37)$

Tức là $(100x + 185) : 5$ (5 là số nguyên tố) nhưng $\nmid 25$ (vì $20x + 37 \not\equiv 5 \pmod{5} \forall x \in \mathbb{Z}$)

Vậy $100x + 185$ không thể là số chính phương (2).

(1) mâu thuẫn với (2) chứng tỏ rằng : không tồn tại $x \in \mathbb{Z}$ để số $25x + 46$ là tích của hai số nguyên liên tiếp

Cách 2. Giả sử có $x, n \in \mathbb{Z}$ sao cho

$$25x + 46 = n(n + 1)$$

$$\Leftrightarrow 25x + 50 = n^2 + n + 4$$

$$\Leftrightarrow 25x + 50 = (n + 3)(n - 2) + 10 \quad (3)$$

Ta có $(n + 3) - (n - 2) = 5$ nên $n + 3$ và $n - 2$ hoặc cùng chia hết cho 5, hoặc cùng không chia hết cho 5. Song, trong cả hai trường hợp đều dẫn đến vế phải của (3) không chia hết cho 25, mà vế trái của (3) lại luôn luôn chia hết cho 25. Mâu thuẫn này cho thấy không tồn tại $x \in \mathbb{Z}$ để số $25x + 46$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Nhận xét : Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : Kim Ngọc Minh, Trần Trung Tiến, 7M, Mari Quyri ; Bùi Đức Minh, 8A, Bế Văn Đàn ; Trần Việt Bình, Nguyễn Anh Hoàn, Nguyễn Hồng Hà, Trần Bằng, Nguyễn Long, Hoàng Trà My, 8H ; Nguyễn Đức Phương 9H, Trưng Vương ; Hà Nội ; Đặng Anh Tuấn, 7T Chu Văn An ; Nguyễn Vũ Anh Thư, 9A₁, Hồng Bàng, Hải Phòng ; Lê Văn An, Phạm Hồng Lĩnh, Nguyễn Xuân Tương, 9T, Phan Bội Châu, Nghệ An ; Trần Thị Khuê, 9B, Quang Trung ; Nguyễn Ngọc Hưng, 9A, Năng khiếu Hoàng Hóa, Thanh Hóa ; Phạm Hải hòa, 7^T, Vũ Thùy Dương 8T, PTNK ; Nguyễn Hoài

Dức, 8A, Ngô Gia Tự, Hải Hưng ; Bạch Hồng Y, Nguyễn Phương Lan, 9T, PTTH Năng Khiếu Hà Tĩnh ; Đỗ Đăng Tạo, 9B, chuyên V.T Ứng Hòa, Hà Tây.

TỔ NGUYÊN

Bài T2/201 : Tìm các chữ số x, y, z, t mà $\overline{xy} \cdot \overline{yz} = \overline{ztz}$ ($x \neq y, z \neq 0$)

Lời giải : Ta có $\overline{xy} \cdot \overline{yz} > 10x \cdot 10y$

$$= 100xy < 1000 \text{ do đó } xy < 10$$

Vì yz có tận cùng là z nên $(y - 1)z : 10$. Ta có các trường hợp sau

a) $z = 5, y$ lẻ, $\neq 1$. Do (1) nên $y \in \{3, 5, 7, 9\}$. Với $y \in \{5, 7, 9\}$ thì $x = 1$. Với $y = 3$ thì $x \in \{1, 2, 3\}$

Bằng cách thử ta thấy tích $\overline{xy} \cdot \overline{yz}$ trong các trường hợp này đều không có dạng $\overline{5t5}$

b) $y = 6, z$ chẵn. Theo (1) thì điều này không xảy ra

c) $y = 1$. Ta có $\overline{x1} \cdot \overline{1z} = \overline{ztz}$

$$\Leftrightarrow 100x + 10(xz + 1) + z = 100z + 10t + z$$

$$\text{Nếu } x + 1 \leq 9 \rightarrow x = z \rightarrow x = z = 2 \rightarrow t = 5.$$

Vậy ta được bộ nghiệm (2, 1, 2, 5)

Nếu $xz + 1 \geq 10$. Khi đó $xz + 1 = 10a + b$ ($a \geq 1$) và $z = x + a$. Vì $z > x$ nên.

$$z \geq 4. \text{ Ta có } zx + 1 = 10a + b \Leftrightarrow$$

$$z^2 - za + 1 = 10a + b \Leftrightarrow \frac{z^2 - c}{10 + z} = a \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ở đó } -1 \leq c = b - 1 \leq 8.$$

Như vậy ta sẽ thử $z \in \{4, 5, \dots, 9\}$ sao cho $z^2 \equiv c \pmod{10 + z}$ với $-1 \leq c \leq 8$ (2)

Ta có :

$$\text{Với } z = 4 \quad 16 \equiv 2 \pmod{14}$$

$$z = 5 \quad 25 \equiv 10 \pmod{15}$$

$$z = 6 \quad 36 \equiv 4 \pmod{16}$$

$$z = 7 \quad 49 \equiv 15 \pmod{17}$$

$$z = 8 \quad 64 \equiv 10 \pmod{18}$$

$$z = 9 \quad 81 \equiv 5 \pmod{19}$$

Từ bảng trên ta thấy $z = 4, 6, 9$ nghiệm đúng điều kiện (2). Các giá trị của x và t tương ứng sẽ là $x = 3, 4, 5$,

$$t = 3, 5, 6$$

$$\text{Đáp số : } (2, 1, 2, 5), (3, 1, 4, 3),$$

$$(4, 1, 6, 5), (5, 1, 9, 6)$$

Nhận xét : Đã có các lời giải gửi đến đều không hoàn chỉnh (thiếu nghiệm hoặc thừa

nghiệm). Một số bạn có lời giải đúng như Nguyễn Ngọc Hưng 9A Hoàng Hóa, Thanh Hóa, Tô Quang Chính Năng khiếu Thái Thụy, Thái Bình nhưng lời giải còn dài.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T3/201. Biết các cạnh của tam giác ABC là 3 số nguyên liên tiếp. Tìm độ dài các cạnh của tam giác nếu :

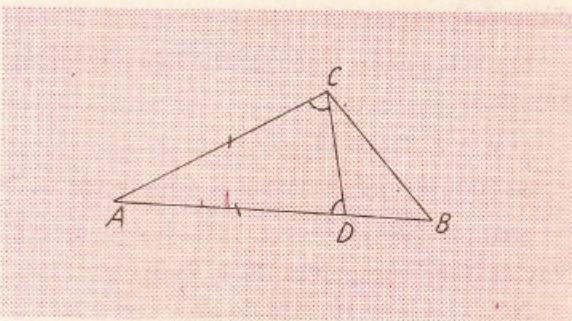
$$3\hat{A} + 2\hat{B} = 180^\circ$$

Lời giải :

Từ giả thiết suy ra
 $\hat{C} = 2\hat{A} + \hat{B}$
 $\Rightarrow \hat{C} > \hat{A}, \hat{C} > \hat{B}$. Do đó $AB > AC, AB > CB$.
 Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

$$\text{Tacó } \widehat{CDB} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$$

$$= 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = \hat{C}$$



Từ đó $\triangle ABC \sim \triangle CBD \Rightarrow$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DB}{CB} \Rightarrow BC^2 = AB \cdot DB$$

$$\text{hay } BC^2 = AB(AB - AC) (*)$$

Theo bài ra $AB - BC = 1$ hoặc $AB - BC = 2$

a) Nếu $AB - BC = 1 \Rightarrow AB = BC + 1$ và $AC = CB - 1$

Thay vào (*) ta có :

$$BC^2 - 2BC - 2 = 0$$

Phương trình này không có nghiệm nguyên

b) Nếu $AB - CB = 2 \Rightarrow AB = CB + 2$ và $AC = CB + 1$

Thay vào (*) ta có : $BC^2 - BC - 2 = 0$

$$\text{Suy ra } BC = \begin{cases} 2 \\ -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Do đó $BC = 2, AC = 3, AB = 4$.

Nhận xét :

Giải tốt bài này có các bạn : Đàm Khánh Hòa, 9A Lương Văn Chánh, Phú Yên ; Võ Như

Quỳnh, 9T Phan Bội Châu, Nghệ An ; Trần Thị Khuê, 9B Quang Trung, Nguyễn Ngọc Hưng 9A NK Hoàng Hóa, Thanh Hóa ; Vũ Huy Hoàng 8T, PTNK Hải Hưng ; Hoàng Bảo Nam 8A₂ Phong Châu, Vĩnh Phú ; Phạm Anh Tuấn 9NK Thuận Thành, Hà Bắc ; Phạm Huy Tùng 8A Bế Văn Đàn, Nguyễn Hồng Hà^A 8H Trưng Vương, Hà Nội.

Nhiều bạn khác giải đúng nhưng viết dài dòng.

VŨ KIM THỦY

Bài T4/201 : Cho p là một số nguyên dương lẻ khác 5, d là một số nguyên dương khác 2, $p, p + 8$. Chứng minh rằng từ tập hợp $M = \{2, p, p + 8, d\}$ có thể tìm được ít nhất 3 cặp (a, b) khác nhau trong đó a, b là các phần tử khác nhau thuộc tập hợp M sao cho $ab - 1$ không là bình phương của một số nguyên. Quy ước cặp (a, b) và cặp (b, a) là như nhau.

Lời giải (của bạn Phạm Huy Tùng 8A, Bế Văn Đàn, Đống Đa, Hà Nội ; Lê Anh Vũ 10 CT, Quốc Học, Huế)

+ Trước hết ta chọn được cặp $(p, p + 8)$

Thật vậy nếu $p(p + 8) - 1 = m^2 \rightarrow$

$$(p + 4 - m)(p + 4 + m) = 17 \rightarrow$$

$$\begin{cases} p + 4 - m = 1 \\ p + 4 + m = 17 \end{cases}$$

Suy ra $p = 5$ trái giả thiết.

+ Từ hai cặp $(2, p)$ và $(2, p + 8)$ là luôn chọn được ít nhất một cặp. Thật vậy nếu trái lại thì $2p - 1 = y^2, 2(p + 8) - 1 = x^2$

$$\rightarrow x^2 - y^2 = 16 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 16$$

Vì $x - y, x + y$ cùng tính chẵn lẻ, $x - y < x + y$

$$\text{nên } \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases} \rightarrow p = 5 \text{ loại}$$

+ Từ 3 cặp $(2, d), (p, d)$ và $(p + 8, d)$ ta luôn chọn được ít nhất một cặp. Thật vậy

$$\text{Nếu trái lại } \begin{cases} 2d - 1 = a^2 \\ pd - 1 = b^2 (*) \\ (p + 8)d - 1 = c^2 (**) \end{cases}$$

Vì $2d - 1$ là số chính phương lẻ suy ra $2d - 1 \equiv 1 \pmod{4} \rightarrow d$ lẻ. Từ (*) và (**) suy ra b chẵn, c chẵn, $b < c$. Đặt $b = 2b_1, c = 2c_1$
 $\rightarrow 8d = 4(c_1 - b_1)(c_1 + b_1) \Leftrightarrow$

$2d = (c_1 - b_1)(c_1 + b_1) = c_1^2 - b_1^2$. Dễ thấy hiệu hai số chính phương chia cho 4 có dư 0, 1 hoặc 3. Vì d lẻ nên $2d \equiv 2 \pmod{4}$. Mâu thuẫn. $\Rightarrow$ DPCM.

Nhận xét : Các bạn có lời giải tốt : Nguyễn Trọng Nghĩa, 11A, PTTH, Việt Trì ; Ngô Xuân Phong, 11L, PTNK, Hải Hưng, Lê Văn An, 9CT, Nghệ An ; Ngô Bích Thảo, 10CT, Hải Phòng, Sao Đỏ, 9T, Hoàng Hóa, Thanh Hóa ; Phạm Đình Trường, 10CT, Hải Phòng.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T5/201. Cho $\alpha \geq \sqrt{2}$ và $q > 0$. Chứng minh rằng

$$(q^\alpha + q^{-\alpha})^2 \geq 2(q^2 + q^{-2})$$

Lời giải (Nguyễn Minh Thọ (11A, Quốc Học, Quy Nhơn) ; Vũ Huy Phương (PTNK Hải Hưng) ; Nguyễn Mạnh Thắng (10A, chuyên Thái Bình), Đinh Khâm (11T, Lương Văn Tụy, Ninh Bình) ; Nguyễn Thái Hà (Mari Quyri HN)

Không mất tính tổng quát, coi $q \geq 1$. Viết bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$(q^\alpha - q^{-\alpha})^2 \geq 2(q - q^{-1})^2$$

$$\Leftrightarrow q^\alpha - q^{-\alpha} \geq \sqrt{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) \quad (1)$$

Xét hàm số

$$f(q) = q^\alpha - q^{-\alpha} - \sqrt{2} \left(q - \frac{1}{q} \right), q \geq 1$$

$$f'(q) = \frac{1}{q} [\alpha(q^\alpha + q^{-\alpha}) - \sqrt{2} \left(q + \frac{1}{q} \right)]$$

Vì $\alpha \geq \sqrt{2}$, $q \geq 1$ nên

$$f'(q) \geq \frac{\sqrt{2}}{q} [(q^\alpha + q^{-\alpha}) - \left(q + \frac{1}{q} \right)] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{q} \left[(q^\alpha - q) + \frac{q - q^\alpha}{q^\alpha + 1} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{q} (q^\alpha - q) \left(1 - \frac{1}{q^\alpha + 1} \right) \geq 0$$

Vậy $f(q)$ là hàm đồng biến trong $[1, +\infty)$

Do đó :

$$f(q) \geq f(1) = 0, \text{ đpcm}$$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T6/201 : Xét hàm số $P : R \rightarrow R$ thỏa mãn : Nếu $Q(x)$ là đa thức với hệ số thực có bậc ≥ 2 thì $P(Q(x))$ cũng là một đa thức. Chứng minh rằng P là một đa thức.

Lời giải (của Nguyễn Thái Hà 10M Marie-Curie Hà Nội) : Xét đa thức

$Q(x) = x^2$. Từ giả thiết của bài ra ta có $P(x^2)$ là đa thức. Đặt :

$$P(x^2) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Dễ thấy, hàm số (biến x) $P(x^2)$ là hàm chẵn trên R . Do đó $\alpha_i = 0$ với mọi i lẻ thuộc $\{0; 1; 2; \dots; k\}$. Từ đó suy ra $P(x)$ là đa thức trên $[0, +\infty)$

Tương tự, từ việc xét đa thức $Q(x) = -x^2$ ta được $P(x)$ là đa thức trên $(-\infty; 0]$.

Như vậy, tồn tại các đa thức $R(x)$ và $S(x)$ sao cho

$$P(x) = \begin{cases} R(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ S(x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Chọn $Q(x) = x^3$, ta được $P(x^3)$ là đa thức. Đặt $T(x) = P(x^3)$. Mặt khác, từ (1) có :

$$T(x) = R(x^3) \quad \forall x \geq 0 \text{ và } T(x) = S(x^3) \quad \forall x \leq 0$$

Suy ra : $R(x^3) \equiv T(x) \equiv S(x^3)$. Do đó $R(x) \equiv S(x)$, và điều này chứng tỏ $P(x)$ là đa thức (DPCM)

Nhận xét : Bạn Vũ Thị Bích Hà, 11C trường Chuyên Thái Bình cũng có lời giải đúng. Bạn Lê Văn An cho lời giải sai vì chưa hiểu đúng khái niệm đa thức và không hiểu đúng đề bài.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/201. Tìm một hàm số $f(x)$, xác định với mọi giá trị thực của x , sao cho với x bất kì $f(f(x)) = -x$ và $f(x)$ nhận giá trị nguyên khi x nguyên.

Lời giải. (theo Nguyễn Thái Hà 10M Marie-Curie Hà Nội, Nguyễn Huy Hoàng 11B trường chuyên Vĩnh Lạc, Vĩnh Phú và Lê Anh Vũ 10 CT Quốc Học Huế) : Với mỗi $n \in N$ kí hiệu E_n là nửa khoảng $(n; n+1]$. Dễ thấy, với mỗi $x \in R^*$ đều tồn tại duy nhất $n \in N$ sao cho $x \in E_n$. Xét hàm $f(x)$ được xác định bởi :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \in E_n \text{ với } n \text{ chẵn} \\ -x+1 & \text{nếu } x \in E_n \text{ với } n \text{ lẻ} \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -f(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh hàm $f(x)$ thỏa tất cả các điều kiện của đề bài. Thật vậy, trước hết, dễ thấy $f(x)$ xác định trên R và $f(x)$ nhận giá trị nguyên khi x nguyên. Tiếp theo, ta chứng minh $f(f(x)) = -x \quad \forall x \in R$.

* Với $x = 0$ hiển nhiên có Đpcm.

* Với $x > 0$ ta có :

+ Nếu $x \in E_n$ với n chẵn thì $x+1 \in E_{n+1}$ và $n+1$ lẻ. Do đó : $f(f(x)) = f(x+1) = -(x+1)+1 = -x$

+ Nếu $x \in E_n$ với n lẻ thì $-x+1 < 0$ và $x-1 \in E_{n-1}$, $n-1$ chẵn. Do đó : $f(f(x)) = f(-x+1) = -f(x-1) = -(x-1+1) = -x$.

* Với $x < 0$ thì $-x > 0$ và do đó $f(f(-x)) = -(-x) = x$. Mặt khác, từ công thức xác định $f(x)$ dễ thấy $f(x)$ là hàm lẻ trên R . Bởi vậy :

$$f(f(x)) = f(-f(-x)) = -f(f(-x)) = -x.$$

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/201. Ký hiệu l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong được kẻ tới các cạnh tương ứng a, b, c của tam giác. Chứng minh :

$$a) \frac{a}{l_b+l_c} + \frac{b}{l_c+l_a} + \frac{c}{l_a+l_b} \geq \sqrt{3}$$

$$b) \frac{l_a}{b+c} + \frac{l_b}{c+a} + \frac{l_c}{a+b} \leq \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

Lời giải. Do hàm số $\cos x$ lồi trên đoạn

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ và trong } \triangle ABC, 0 < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{nên } \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq 3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều).

Mặt khác áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}bc \sin A$

và

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \text{ ta dễ dàng có}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{l_a}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right), \cos \frac{B}{2} = \frac{l_b}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right),$$

$$\cos \frac{C}{2} = \frac{l_c}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (1). \text{ Suy ra}$$

$$\frac{l_b+l_c}{a} + \frac{l_a+l_c}{b} + \frac{l_b+l_a}{c} = 2 \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \leq 3\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } 9 &\leq \left(\frac{l_b+l_c}{a} + \frac{l_c+l_a}{b} + \frac{l_a+l_b}{c} \right) \times \\ &\times \left(\frac{a}{l_b+l_c} + \frac{b}{l_c+l_a} + \frac{c}{l_a+l_b} \right) \leq \\ &\leq 3\sqrt{3} \left(\frac{a}{l_b+l_c} + \frac{b}{l_c+l_a} + \frac{c}{l_a+l_b} \right), \text{ và ta có} \\ &\text{đpcm ở a).} \end{aligned}$$

Từ các công thức (1), ta lại có :

$$\begin{aligned} \frac{l_a}{b+c} + \frac{l_b}{c+a} + \frac{l_c}{a+b} &= \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{(b+c)^2} + \frac{2ca \cos \frac{B}{2}}{(c+a)^2} + \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{(a+b)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{3} \text{ (đpcm ở b) (vì ta luôn luôn} \\ &\text{có } (x+y)^2 \geq 4xy). \text{ Đồng thời ta cũng đã chứng} \\ &\text{minh dấu "=" trong a) và b) đều xảy ra được,} \\ &\text{khi } \triangle ABC \text{ đều.} \end{aligned}$$

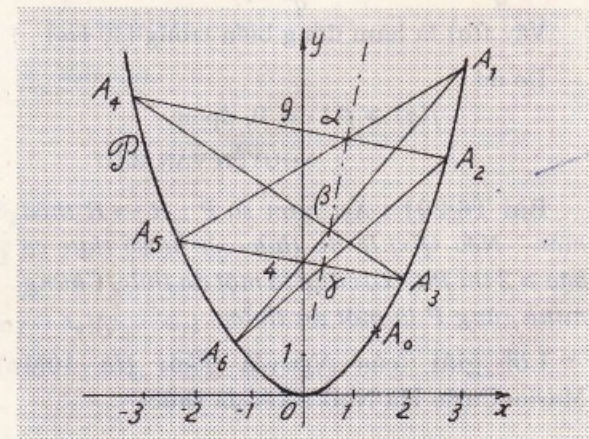
Nhận xét. Hầu hết các bạn đều giải như trên, số ít bạn giải cách khác và dài hơn. Các bài sau đây có lời giải tốt : Trần Thị Khuê (9B. Quang Trung, Thanh Hóa) ; Phạm Đình Trường (10 CT PTTHNK Hải Phòng) ; Phạm Đức Minh (10 CT PTTH Sơn Tây), Đàm Anh Tài (11 CT ĐHSV Vinh), Đinh Khâm 11 CT PTTH Lương Văn Tuy - Ninh Bình) ; Vũ Huy Phương (11 CT PTNK Hải Hưng) ; Nguyễn Lâm Hiếu (11A CT Đại Học Vinh) ; Đoàn Phương Đông (10A₁ PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng).

DẶNG VIÊN

Bài T9/201. Trên parabol $\mathcal{P}: y = x^2$ ta lấy 6 điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. A_1, A_5 cắt A_2, A_4 tại α , A_2, A_6 cắt A_3, A_5 tại β , A_3, A_4 cắt A_6, A_1 tại γ . Chứng minh rằng α, β, γ thẳng hàng.

Lời giải. Ký hiệu $l_{ij} = l_{ij}(x, y) = 0$ là phương trình đường thẳng qua A_i, A_j ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sao cho $i \neq j$). Đặt $P(x, y) = l_{15}l_{26}l_{34} + kl_{16} \cdot l_{24} \cdot l_{35}$ trong đó k là một số tùy chọn. Đây là một đa thức bậc 3 đối với x, y và với mọi điểm $A_i(x_i, y_i)$ thuộc $\mathcal{P}$ ta đều có $P(x_i, y_i) = 0$ ($i = 1; 2; 3, 4, 5, 6$). Bây giờ, ta lấy điểm $A_0(x_0, y_0)$ nào đó trên sao cho $A_0 \notin \mathcal{P}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) đồng thời cho k lấy

$$\text{giá trị } k_0 = \frac{-l_{15} \cdot l_{26} \cdot l_{34}}{l_{16} \cdot l_{24} \cdot l_{35}} \Big|_{x=x_0, y=y_0}$$



Hiển nhiên ta có $P(x_0, y_0) = 0$. Như vậy, ta có 7 điểm thuộc $\mathcal{P}$ sao cho $P(x, y) = 0$ (1). Thế y bằng x^2 vào vế trái của (1), ta có: $P(x, x^2) = 0$. Đây là một phương trình đa thức nguyên bậc 6 đối với x thỏa mãn với 7 giá trị khác nhau của x nên $P(x, x^2) \equiv 0$, hay mọi điểm thuộc $\mathcal{P}$ đều thỏa mãn $P(x, y) = 0$. Lại coi $P(x, y)$ là một đa thức nguyên biến y , ta có thể viết $P(x, y) = (y - x^2) Q(x, y) + R(x)$ (2) trong đó $Q(x, y)$ là thương và $R(x)$ là phần dư. Mọi điểm của $\mathcal{P}$ $y - x^2 = 0$ đều thỏa mãn $P(x, y) = 0$ nên $R(x) \equiv 0$ hay (2) trở thành $P(x, y) = (y - x^2) Q(x, y)$. Do $P(x, y)$ là 1 đa thức bậc 3 đối với x, y nên $Q(x, y)$ là một đa thức bậc nhất đối với x, y hay có dạng $ax + by + c$, và $P(x, y) = (y - x^2)(ax + by + c)$. Các điểm α, β, γ không thuộc $\mathcal{P}$ nên tại đó $y - x^2 \neq 0$, suy ra $ax + by + c = 0$ hay chúng thuộc đường thẳng $ax + by + c = 0$ dpcm.

Nhận xét. 1. Bài toán vẫn đúng với mọi hình conic.

2. Có 5 bạn giải bài này và giải đúng.

DẶNG VIỄN

Bài T10/201. Tứ diện $OABC$ vuông ở O có đường cao OH cố định, còn các đỉnh A, B, C chuyển động. Gọi A', B' và C' lần lượt là hình chiếu của H trên OA, OB và OC . Chứng minh rằng 6 điểm A, B, C, A', B', C' cùng nằm trên một mặt cầu và mặt cầu này luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải: Từ các tam giác OAH, OBH và OCH vuông ở H , ta có: $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OH}{OC'} = h^2$ (đặt $OH = h$); (1) Qua bốn điểm A, B, C và A' không đồng phẳng có một mặt cầu ($\mathcal{C}$) duy nhất. Mặt cầu này chứa đường tròn $(AA'B)$ nên cũng đi qua B' vì $ABB'A'$ là một tứ giác nội tiếp. Cũng vậy ($\mathcal{C}$) chứa đường tròn $(AA'C)$ nên đi qua C' . Tóm lại, 6 điểm A, B, C, A', B' và C' cùng nằm trên một mặt cầu ($\mathcal{C}$) nào đó. ($\mathcal{C}$) thay đổi vì các điểm A, B và C chuyển động trên mặt phẳng (π) vuông góc với OH ở H .

Gọi P và Q là hai giao điểm của ($\mathcal{C}$) và đường thẳng $OH, D = (AH) \cap (BC)$ và E là giao điểm thứ hai của ($\mathcal{C}$) với đường thẳng AH , thế thì ta được:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = h^2 = \mathcal{P}_O(\mathcal{C}) \quad (2)$$

$$\overline{HP} \cdot \overline{HQ} = \overline{HA} \cdot \overline{HE} = \mathcal{P}_H(\mathcal{C}) \quad (3)$$

trong đó $\mathcal{P}_M(\mathcal{C})$ là phương tích

của điểm M đối với mặt cầu ($\mathcal{C}$)

- Dễ dàng chứng minh được rằng H là trực tâm của tam giác ABC và E đối xứng với H qua BC , nghĩa là: $\overline{HE} = 2\overline{HD}$, do đó: $\overline{HP} \cdot \overline{HQ} = 2\overline{HA} \cdot \overline{HD}$ (4)

Lại vì tam giác OAD vuông ở O , nên ta được:

$$\overline{HA} \cdot \overline{HD} = -\overline{OH}^2 = -h^2 \quad (5)$$

Suy ra:

$$\overline{HP} \cdot \overline{HQ} = -2h^2 = \mathcal{P}_H(\mathcal{C}) \quad (6)$$

$$(\overline{OP} - \overline{OH})(\overline{OQ} - \overline{OH}) = -2\overline{OH}^2$$

Sau khi thay $\overline{OH} = h$ và $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = h^2$ vào (6), ta được:

$$\overline{OP} + \overline{OQ} = 4\overline{OH} = 4h; \quad (7)$$

Các hệ thức (2) và (7) chứng tỏ rằng $\overline{OP} = x_1$ và $\overline{OQ} = x_2$ là hai nghiệm dương phân

biệt của phương trình bậc hai sau đây:

$$x^2 - 4hx + h^2 = 0; \quad (8)$$

Phương trình này cho ta 2 nghiệm:

$$x_{1,2} = h(2 \pm \sqrt{3})$$

$$\text{Các hệ thức: } \begin{cases} \overline{OP} = (2 - \sqrt{3})\overline{OH} \\ \overline{OQ} = (2 + \sqrt{3})\overline{OH} \end{cases}$$

chứng tỏ rằng P và Q là hai điểm cố định. Đó là dpcm.

Nhận xét: Đáng tiếc là 2 bạn giải chưa đạt (vì ngộ nhận, không chứng minh cẩn thận đã kết luận P và Q là hai điểm cố định). Chưa có lời giải nào hoàn chỉnh, hoặc vì chưa chứng minh cẩn thận 6 điểm đồng cầu, hoặc vì chứng minh chưa thật chính xác (do không biết sử dụng độ dài đại số). Lời giải tương đối đạt hơn cả là của hai bạn: Đào Thu Hương và Phạm Đình Trường, lớp 10 chuyên toán Trần Phú, Hải Phòng.

Bạn Nguyễn Thái Hà 10M, Mari Quyri Hà Nội, có lời giải đúng song trình bày quá tắt và không sáng sủa.

NGUYỄN DẶNG PHÁT

Bài L1/201. Một mạch điện gồm một nguồn điện (suất điện động E_o , điện trở trong r) và 3 điện trở x, y, z .

a) Trong 3 cách mắc sau đây: 3 điện trở nối tiếp nhau, 3 điện trở song song, 2 điện trở y và z song song nhau rồi nối tiếp với x , người ta đều thấy công suất tiêu thụ bởi z là không đổi.

Hãy tính y, z , tỉ số $\frac{E_o}{I_o}$ (I_o là cường độ dòng điện qua z) theo r và x .

b) Áp dụng số: Cho $r = 1\Omega$; $x = 2\Omega$; $I_o = 5A$, tính y, z, E_o .

Lời giải: Vì z không đổi, trong 3 cách mắc công suất tiêu thụ đều bằng $P_o = U_o I_o = \frac{U_o^2}{z}$;

vậy U_o và I_o cũng không đổi và tỉ số $E = \frac{E_o}{I_o}$ cũng không đổi.

- Khi x, y, z nối tiếp nhau thì $E_o = I_o(r + x + y + z) \rightarrow E = r + x + y + z$ (1)

- Khi x, y, z song song nhau, hiệu điện thế chung của mạch $U_o = z I_o$ và dòng điện chính là

$$I = I_o + \frac{I_o z}{y} + \frac{I_o z}{x}, \text{ từ đó}$$

$$E = I_o r \left(1 + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} \right) + I_o z \rightarrow$$

$$E = r + \frac{rz}{y} + \frac{rz}{x} + z \quad (2)$$

- Khi $(y \parallel z) n + x$, hiệu điện thế chung của y và z là $U_o = z I_o$: dòng điện chính

$$I = \frac{3I_o}{y} + I_o = I_o \left(1 + \frac{z}{y} \right); \text{ ta có}$$

$$E_o = I_o \left(1 + \frac{z}{y} \right) (r + x) + z I_o$$

$$\rightarrow E = r + x + \frac{rz}{y} + \frac{xz}{y} + z \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } y = \frac{x(r+x)}{r},$$

$$z = \frac{x^2(r+x)}{r^2},$$

$$\frac{E_o}{I_o} = E = \frac{(x^2 + rx + r^2)(r+x)}{r^2}$$

Với $r = 1\Omega, x = 2\Omega, I_o = 5A$ ta có $y = 6\Omega$; $z = 12\Omega$ và $E_o = 105V$.

Nhận xét. Có 42 em gửi bài giải trong đó có 33 em có lời giải đúng, đặc biệt là các em: Nguyễn Thanh Bình, 11A, PTTH Võ Minh Đức, Sông Bé, Đinh Ngọc Bảo, 9L, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, Nguyễn Quỳnh Nam, 10M, PTNK Marie Curie Hà Nội; Lê Hồng Nam, 9L, NK Thái Thụy, Thái Bình; Nguyễn Đức Phương, 9H, PTCS Trưng Vương, Hà Nội; Vũ Thị Bích Hà, 11C, PT Chuyên Thái Bình; Vũ Quang Huy, 9L, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, Ngô Văn Tầu, 12L, PTNK Hải Hưng; Nguyễn Duy Từ, 9L, NK Gia Lương, Hà Bắc.

OK

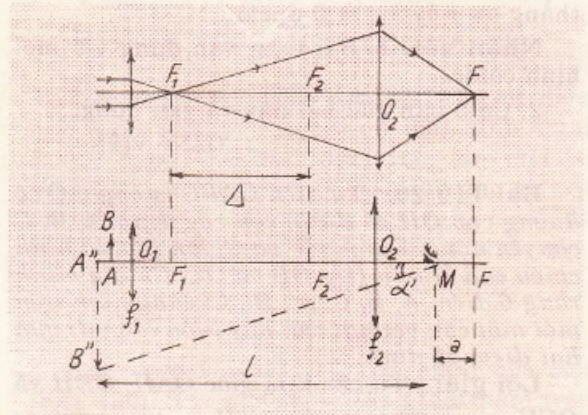
Bài L2/201 Chùm tia tới một kính hiển vi song song với trục chính, sau khi qua kính hiển vi, hội tụ tại F trên trục chính sau kính mắt (F gọi là tiêu điểm sau của hệ "kính vật - kính mắt". Mắt người quan sát đặt tại M

trên trục chính ở trước F một đoạn a để quan sát một vật phẳng cực nhỏ AB đặt trước kính vật sao cho ảnh của AB mà mắt nhìn thấy ở cách mắt một đoạn l (xem hình). Hãy chứng minh là độ bội giác thu được là

$$G = \frac{\Delta D}{f_1 f_2} \left(1 + \frac{a}{l} \right)$$

D là khoảng nhìn rõ ngắn nhất của mắt người quan sát, Δ là độ dài quang học của kính hiển vi (khoảng cách từ tiêu điểm ảnh của kính vật đến tiêu điểm vật của kính mắt), f_1 và f_2 lần lượt là tiêu cự của kính vật và của kính mắt. Từ đó suy ra có mấy trường hợp mà

độ bội giác sẽ bằng $\frac{\Delta D}{f_1 f_2}$?



Hướng dẫn giải. Vẽ 2 tia sáng đi từ B , một tia song song với trục chính và một tia qua O_1 , đi qua kính vật và kính mắt, 2 tia ló khỏi kính mắt có đường kéo dài cắt nhau tại B'' . Dựa vào công thức tính độ bội giác

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \text{ với } \alpha = \frac{AB}{D}, \alpha' = \frac{A''B''}{l}$$

Dựa vào các tam giác đồng dạng suy ra $\alpha' = \frac{l+a}{l} \frac{\Delta}{f_1 f_2} \cdot AB$.

$$\text{Từ đó rút ra } G = \frac{\Delta D}{f_1 f_2} \left(1 + \frac{a}{l} \right)$$

G có giá trị $\frac{\Delta D}{f_1 f_2}$ trong hai trường hợp là

$a = 0$ và $l = 0$.

Nhận xét. Có 7 bài giải đúng, đặc biệt là có 2 em có lời giải tốt: Vũ Thị Bích Hà, 11C, PTTH chuyên Thái Bình; Trần Hồng Quang, 12A, PT dân lập Xuân Hòa, Mê Linh, Vĩnh Phú.

MT

Bạn có biết ?

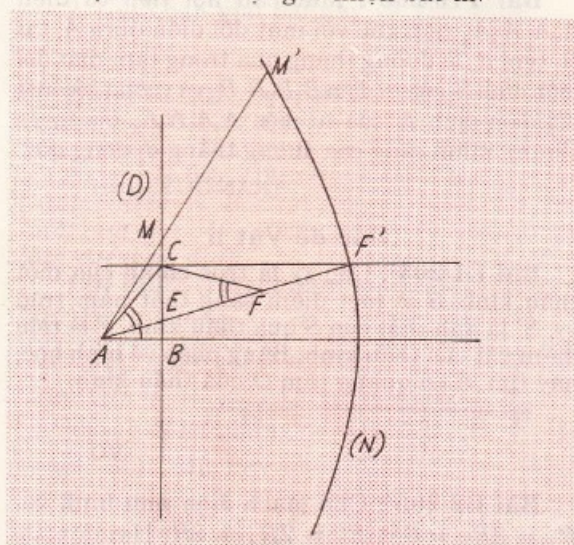
Đường "vỏ sò" NICOMÈDE và ứng dụng của nó vào việc dựng nghiệm thực của phương trình bậc 3

NGUYỄN CANG

A - Đường "vỏ sò" của NICOMÈDE

Nhà toán học Nicomède ở vùng Tiểu Á (thế kỉ thứ hai trước công nguyên) đã đưa ra một đường cong để giải bài toán chia ba một góc bất kì.

Ta đã biết một góc tù nào cũng phân tích được thành một góc vuông và một góc nhọn. Chia ba một góc vuông là việc dễ. Ta chỉ bàn đến việc chia ba một góc nhọn bất kì.



Hình 1

Ở hình vẽ trên, BAC là một góc nhọn và giả sử $AC = 1$. Cho (D) là một đường thẳng vuông góc với AB và đi qua C .

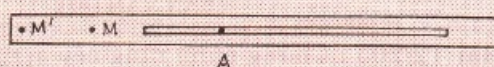
Với mọi điểm M của (D) ta lấy một điểm M' tương ứng sao cho $MM' = 2$. Khi M chạy liên tục trên (D) thì M' vẽ nên một đường cong (N) gọi là đường "vỏ sò" (conchoïde) Nicomède. Có thể nói (N) là đường conchoïde của (D) có cực là A và mô đun 2. Góc nhọn mà ta muốn chia 3 là góc BAC .

Muốn vẽ đường conchoïde (N) ta có thể vẽ theo 2 cách :

- Vẽ từng điểm (ứng với M là M' sao cho $MM' = 2$)

- Vẽ theo cách Nicomède đã dùng :

Ta dùng một cây thước (xem hình 2) ở trên đó có 2 điểm M và M' sao cho $MM' = 2$. Điểm



Hình 2

M sẽ chạy trên đường thẳng vuông góc (D) với AB đi qua C và điểm M' sẽ vạch nên đường conchoïde do trên thước có một cái rãnh và trong rãnh đó có con chạy. Điểm A dĩ nhiên được cố định.

Bây giờ ta chú ý là đường conchoïde (N) giúp ta chia ra ba phần bằng nhau góc BAC . Thực vậy nhìn hình vẽ $CE' \parallel AB$. Điểm E' ở trên conchoïde nên $EE' = 2$. Nếu F là trung điểm của EE' thì $FE = FE' = FC = AC = 1$. Vậy các tam giác AFC và FCE' là cân do đó

$$\widehat{BAE} = \frac{1}{3} \widehat{BAC}$$

B - Dựng các nghiệm thực của một phương trình bậc 3

Ta đã biết một phương trình bậc 3

$$X^3 + aX^2 + bX + c = 0$$

bao giờ cũng đưa về được phương trình bậc 3 có dạng

$$x^3 + px + q = 0, p, q \in R \quad (1)$$

bằng cách đặt $x = X + \frac{a}{3}$

Để cho 3 nghiệm đều thực cả thì điều kiện là

$$4p^3 + 27q^2 \leq 0$$

(Xem tiếp trang bìa 3)



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp PTCS

Bài T1/205 : Tìm năm số khác nhau trong dãy tính sau đây :

$$(\overline{**} + \overline{**} + \overline{**}) : \overline{**} = \overline{**}$$

Biết rằng :

a) Trong ba số hạng trong ngoặc, thì có một số hạng là BSCNN của hai số hạng kia.

b) Số chia là số nguyên tố và là USCLN của hai số nói trên.

PHAN VĂN ĐỨC

Bài T2/205 : Chứng minh rằng nếu $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$ và

$$\frac{\alpha(1+bc) - b - c}{b - c} = \frac{\alpha(1+ca) - c - a}{c - a} = \frac{\alpha(1+ab) - a - b}{a - b} = \beta$$

$$\text{thì } 3\beta^2 - \alpha^2 + 1 = 0$$

TÔ HẢI

Bài T3/205 : Giải phương trình

$$(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = 2x$$

LÊ QUỐC HÂN

Bài T4/205 : Tam giác ABC vuông ở A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$.

Gọi I là giao điểm các đường phân giác, M là trung điểm của BC . Tính số đo góc BIM .

VŨ HỮU BÌNH

Bài T5/205 : Cho đường tròn $(O; R)$ dựng đường tròn $(O'; R')$ sao cho tâm O nằm trên đường tròn $(O'; R')$. Dây AB của đường tròn $(O; R)$ di động và tiếp xúc với đường tròn $(O'; R')$ tại C . Xác định vị trí của dây AB để $AC^2 + BC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Các lớp PTTH

Bài T6/205 : Cho 10 số nguyên dương $a_1, \dots, a_{10}$, chứng minh rằng tồn tại các số $c_i \in \{-1, 0, 1\}$ ($i = 1, \dots, 10$), không đồng thời bằng 0 sao cho số $\sum_{i=1}^{10} c_i a_i$ chia hết cho 1023

TRẦN XUÂN ĐÁNG

Bài T7/205 : Cho đa thức :

$$P(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx$$

nhận giá trị dương $\forall x \in R$

Chứng minh : $a_0 > 0$

ĐÀO TRƯỜNG GIANG

Bài T8/205 : Cho ΔABC có các cạnh a, b, c . Chứng minh rằng, trên đường tròn Ôle của tam giác có tồn tại đúng hai điểm P để $PA^2(b^2 - c^2) + PB^2(c^2 - a^2) + PC^2(a^2 - b^2) = 0$.

DÀM VĂN NHÌ

Bài T9/205 : Cho điểm M bất kì trong ΔABC . Nối AM, BM, CM cắt các cạnh đối diện tương ứng tại A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{AM}{MA_1}} + \sqrt{\frac{BM}{MB_1}} + \sqrt{\frac{CM}{MC_1}} > 4$$

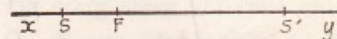
NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

Bài T10/205 : Mặt cầu nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ tiếp xúc với mặt đối diện đỉnh A_i tại B_i (gọi d_i là đường thẳng qua trọng tâm mặt đối diện đỉnh B_i của tứ diện $B_1B_2B_3B_4$ và vuông góc mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ($i = 1, 4$). Chứng minh rằng các đường thẳng d_i đồng quy.

TRẦN DUY HÌNH

Các đề Vật lý

Bài L1/205 : Cho xy là trục chính của một thấu kính, S là một điểm sáng thật nằm trên trục xy, S' là ảnh thật của S qua thấu kính, F là tiêu điểm vật của thấu kính. Bằng phép vẽ hình học, hãy tìm vị trí quang tâm O của thấu kính.



VQ

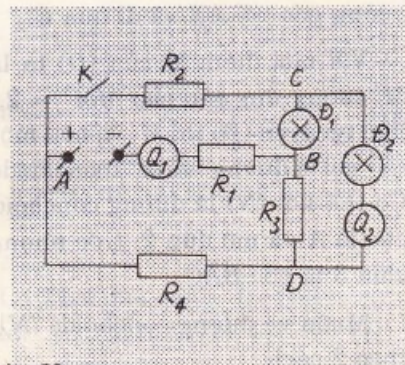
Bài L2/205 : Cho mạch điện như hình vẽ, $R_1 = 2R_3 = 6R$, $R_2 = 2R_4 = 8R$. Hai đèn D_1 và D_2 giống nhau, có hiệu điện thế định mức là $24V$. Bỏ qua giá trị điện trở của dây nối, khóa K và các ampe kế. Khi K đóng a_1 chỉ $1,5A$, a_2 chỉ 0 .

1. Hãy xác định số chỉ của a_1 và a_2 khi K mở.

2. Khi K mở hai đèn D_1 và D_2 sáng bình thường. Hãy tính

a) Hiệu điện thế nguồn U .

b) Công suất tiêu thụ định mức của các bóng đèn.



LẠI THẾ HIỂN

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/205. Find five distinct natural numbers from the following equality

$$(\overline{**} + \overline{**} + \overline{**}) : \overline{**} = \overline{**} \quad (1)$$

Provided that

a) One number in the bracket is the least common multiple of the two others

b) The greatest common divisor of those two numbers is a prime number and is equal to the divisor of the left side of (1).

PHAN VAN DUC

T2/205. Show that if $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ and

$$\frac{\alpha(1+bc) - b - c}{b - c} = \frac{\alpha(1+ca) - c - a}{c - a} = \frac{\alpha(1+ab) - a - b}{a - b} = \beta$$

$$\text{then } 3\beta^2 - \alpha^2 + 1 = 0$$

TO HAI

T3/205. Solve the equation

$$(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = 2x$$

LE QUOC HAN

T4/205. Given $\triangle ABC$ with $\hat{A} = 90^\circ$ and $AB = 6\text{cm}, AC = 8\text{cm}$.

I is the common point of the inbisectors, M is the middle point of BC . Calculate the value of $\widehat{BIM}$.

VU HUU BINH

T5/205. The center O of the circle (O, R) lies on the circle (O', R') . A, B are points on (O, R) such that AB is a tangent of (O', R') at a certain point C . Determine AB such that $AC^2 + BC^2$ is maximal.

NGUYEN DUC TAN

For Upper Secondary Schools

T6/205. Given 10 positive integers $a_1, \dots, a_{10}$. Prove that there are $c_i \in \{-1, 0, 1\}$

$(i = 1, \dots, 10)$, not all 0, such that $\sum_{i=1}^{10} c_i a_i$ is

divisible by 1023.

TRAN XUAN DANG

T7/205. The polynomial $P(x) = a_0 + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx$ takes positive values for all x . Prove that $a_0 > 0$

DAO TRUONG GIANG

T8/205. Let a, b, c be lengths of sides of $\triangle ABC$. Prove that on the Euler circle of ABC there are two and only two points P such that $PA^2(b^2 - a^2) + PB^2(c^2 - a^2) + PC^2(a^2 - b^2) = 0$

DAM VAN NHI

T9/205. M is a point, inside $\triangle ABC$. AM, BM and CM meet the sides opposite to A, B and C respectively at A_1, B_1 and C_1 . Prove that

$$\sqrt{\frac{AM}{MA_1}} + \sqrt{\frac{BM}{MB_1}} + \sqrt{\frac{CM}{MC_1}} > 4$$

NGUYEN KHANH NGUYEN

T10/205. The inscribed sphere of a tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ touches the face opposite to A_i at B_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Let d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) be the straight line passing through the center of gravity of the face opposite to B_i of the tetrahedron $B_1B_2B_3B_4$ and perpendicular to the face opposite to A_i of the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$. Prove that d_1, d_2, d_3, d_4 have a common point

TRAN DUY HINH

Thông báo

Như đã thông báo trên số 3(201) năm 1994 TC Toán học và Tuổi trẻ nhận đăng các ảnh, phản ánh các hình thức học toán và dạy toán cũng như các sinh hoạt khác của các học sinh và thầy giáo các lớp chuyên toán, chuyên tin, các trường chuyên, trường năng khiếu của các địa phương (Tỉnh, huyện, thị xã v.v...). Cho đến nay Tòa soạn chưa nhận được ảnh nói trên của nhiều trường, nhiều địa phương, đặc biệt là các tỉnh, thành phố phía Nam.

Rất mong nhận được ảnh của các bạn để đăng trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ

NGÀY THI THỨ NHẤT 20 - 7 - 1993 (180 phút)

Câu I. Cho đa thức

$$P(x, y) = 4xy(x^2 + y^2) - 6(x^3 + y^3 + x^2 + y + xy^2) + 9(x^2 + y^2)$$

1) Hãy phân tích $P(x, y)$ thành nhân tử.

2) Tìm trên mặt phẳng tọa độ tập hợp những điểm mà tọa độ (x, y) của chúng thỏa mãn điều kiện $P(x, y) = 0$.

Câu II. Cho hình thang $ABCD$, biết $AB \parallel CD$ và $AB = a$, $CD = b$. Đường thẳng qua giao điểm của hai đường chéo và song song với AB cắt các cạnh bên AD và BC ở E và F . Tính độ dài đoạn EF theo a và b , và chứng minh rằng $EF \leq \sqrt{ab}$.

Câu III. Chứng minh rằng với $a > 0$, hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} 4x^2 < y^2 - 1 & (1) \\ 2y^2 < 2x^2 + a & (2) \\ a - xy\sqrt{2} < 1/2 & (3) \end{cases}$$

Câu IV. Cho ba số a, b và c đôi một khác nhau và $c \neq 0$. Biết rằng hai phương trình

$$x^2 + ax + bc = 0 \quad (1)$$

$$\text{và } x^2 + bx + ca = 0 \quad (2)$$

có đúng một nghiệm chung. Chứng minh rằng các nghiệm còn lại của hai phương trình đó đều là nghiệm của phương trình

$$x^2 + cx + ab = 0 \quad (3)$$

Câu V. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm K cố định nằm trong hình tròn đó. Đặt $OK = a$, $0 < a < R$. Hai dây cung AC và BD của đường tròn đã cho vuông góc với nhau tại K .

1. Chứng minh rằng bốn trung điểm của bốn cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$ và bốn hình chiếu của K trên bốn cạnh đó cùng nằm trên một đường tròn.

2. Chứng minh rằng đường tròn đi qua tám điểm nói trên vẫn cố định khi các dây cung AC và BD quay quanh điểm K (mà vẫn vuông góc với nhau). Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

3. Với mỗi vị trí của dây cung AC và BD , vẽ hình chữ nhật $KALB$. Tìm tập hợp các đỉnh L của hình chữ nhật này khi AC và BD quay quanh K

NGÀY THI THỨ HAI 21 - 7 - 1993 (180 phút)

Câu VI. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 3 & (1) \\ y - \frac{y-3x}{x^2+y^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Câu VII. Câu 40 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{19}$ và $b_1, b_2, \dots, b_{21}$ thỏa mãn các điều kiện :

$$\begin{cases} 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{19} \leq 200 \\ 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{21} \leq 200 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại 4 số a_i, a_j, b_k, b_p sao cho

$$\begin{cases} a_i < a_j \\ b_k < b_p \\ a_j - a_i = b_p - b_k \end{cases}$$

Câu VIII. Cho 5 số nguyên phân biệt tùy ý a_1, a_2, a_3, a_4 và a_5 .

Chứng minh rằng tích

$$P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_2 - a_3) \times \\ \times (a_2 - a_4)(a_2 - a_5)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_4 - a_5)$$

luôn chia hết cho 288.

THI TUYỂN VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT HÀ NỘI 1

Câu IX. Trên mặt phẳng tọa độ, một điểm $A(x_0, y_0)$ được gọi là điểm nguyên nếu $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$

Giả sử $A_1 A_2 \dots A_n$ là một n - giác lồi có tất cả các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ đều là các điểm nguyên. Biết rằng miền đa giác đó (bao gồm tất cả các điểm thuộc miền trong và thuộc biên - tức là hình đa giác) không chứa bất cứ một điểm nguyên nào ngoài chính các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$. Chứng minh rằng $n \leq 4$.

Câu X. Cho tia Ax và một điểm E khác điểm $A, E \in Ax$. Từ E , vẽ tia Ey . Hai điểm C và D phân biệt, khác điểm E , cho trước trên tia Ey . Một điểm B chạy trên tia Ax . Các đường thẳng AC và BD cắt nhau ở M , AD và BC cắt nhau ở N .

1. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn cắt tia Ey tại một điểm F cố định.

2. Hãy xác định một vị trí của điểm B trên tia Ax sao cho các tam giác MCD và NCD có diện tích bằng nhau.

LỜI GIẢI CHO CÁC BÀI CỦA NGÀY THI THỨ HAI

Câu VI. Nhân hai vế của (1) với y và của (2) với x rồi cộng theo vế ta được $2xy + 3 = 3y$. Từ đó suy ra $y \neq 0$ và $x = (3/2)(y - 1)/y$. Thế giá trị này vào (1) rồi rút gọn thì được $4y^2 + 5y^2 - 9 = 0$. PT này có hai nghiệm $y = \pm 1$. Hai giá trị tương ứng của x là $x = 0$ và $x = 3$. Bằng thử lại, ta được hai nghiệm của hệ đã cho là $(0, 1)$ và $(1, 3)$.

Câu VII. Xét tất cả $19 \times 21 = 399$ tổng $ai + bj$ với $i = 1, \dots, 19; j = 1, \dots, 21$. 399 tổng này có thể nhận các giá trị từ 2 đến 400 (cũng có 399 giá trị). Ta có nhận xét rằng các tổng đang xét không thể nhận đủ 399 giá trị phân biệt. Bởi vì nếu thế thì phải có $a_1 = b_1 = l$ và $a_{19} = a_{21} = 200$, nghĩa là $a_1 + b_{21} = a_{19} = b_1$, mâu thuẫn với chính giả thiết đặt ra. Vậy phải có hai tổng nào đó bằng nhau. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a_i + b_k = a_j + b_p$, trong đó $a_i < a_j$. Nhưng từ đó để suy ra rằng 4 số a_i, a_j, b_k và b_p thỏa mãn các điều kiện của đầu bài.

Câu VIII. Ta có $288 = 2^5 \cdot 3^2$. Vậy ta cần chứng minh 1) $P : 3^2$ và 2) $P : 2^5$. Muốn vậy, ta sử dụng mệnh đề quen thuộc: Trong $n + 1$ số nguyên tùy ý, luôn tồn tại hai số có hiệu chia hết cho n .

1) Trọng 4 số $a_1, \dots, a_4$, có hai số có hiệu chia hết cho 3, giả sử $a_1 - a_2 : 3$. Khi đó ta

xét 4 số $a_2, \dots, a_5$ để được hai số khác cũng có hiệu chia hết cho 3. Như vậy trong tích P có ít nhất hai hiệu khác nhau cùng chia hết cho 3, suy ra $P : 3^2$

2) Theo nguyên tắc Dirichlet, trong 5 số đã cho có ít nhất ba số có cùng tính chẵn lẻ. Do đó chỉ cần xét hai trường hợp:

Nếu có ít nhất 4 số có cùng tính chẵn lẻ thì từ 4 số này, có thể lập nên 6 hiệu khác nhau cùng chia hết cho 2. Tích của chúng chia hết cho 2^6 , suy ra P chia hết cho 2^5 .

Nếu có đúng ba số, chẳng hạn a_1, a_2, a_3 , có cùng tính chẵn lẻ thì hai số còn lại phải có tính chẵn lẻ giống nhau nhưng khác tính chẵn lẻ với ba số trên. Vậy bốn hiệu sau đây đều chia hết cho 2: $(a_1 - a_2), (a_1 - a_3), (a_2 - a_3)$ và $(a_4 - a_5)$.

Mặt khác, trong 5 số đã cho, có hai số có hiệu chia hết cho 4, suy ra trong 4 hiệu vừa kể trên, có một hiệu chia hết cho 4, nghĩa là tích của chúng chia hết cho 2^5 . Vậy $P : 2^5$

Câu IX. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $n \geq 5$. Vì các đỉnh của đa giác đều nguyên, nên tọa độ (x, y) của mỗi đỉnh chỉ có một trong bốn dạng: (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn) và (lẻ, lẻ).

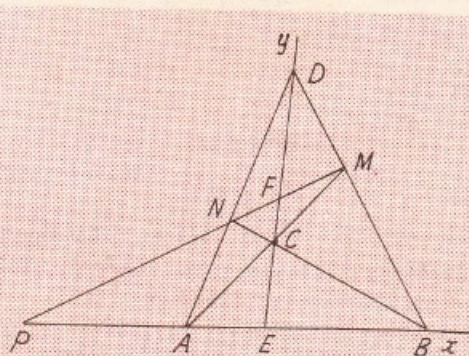
Vì vậy, ắt có hai đỉnh có cùng dạng, giả sử đó là $A(x', y')$ và $B(x'', y'')$, trong đó x' và y' tương ứng có cùng tính chẵn lẻ với x'' và y'' . Khi ấy, do đa giác đã cho là đa giác lồi nên trung điểm M của đoạn AB (nằm trên cạnh hay đường chéo của đa giác) cũng thuộc miền đa giác đó, và có tọa độ (x, y) nguyên:

$$x = (x' + x'')/2 \in \mathbb{Z} \text{ và}$$

$$y = (y' + y'')/2 \in \mathbb{Z}.$$

Điều này trái với giả thiết, từ đó suy ra đpcm.

Câu X. 1) Dùng định lý Mênêlaýt (xem hình)



Hình 3

Cho $\triangle CDA$ có $\frac{FC}{FD} \cdot \frac{ND}{NA} \cdot \frac{MA}{MC} = 1 \Rightarrow$
 $\frac{FC}{FD} = \frac{NA \cdot MC}{ND \cdot MA}$ (1) Cho $\triangle CDA$ có
 $\frac{EC}{ED} \cdot \frac{BD}{BM} \cdot \frac{AM}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{BM \cdot AC}{BD \cdot AM}$ (2)
 Cho $\triangle ADN$ có $\frac{NA}{ND} \cdot \frac{BD}{BM} \cdot \frac{CM}{CA} = 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra
 $(FC/FD) : (EC/ED) = 1 \Rightarrow FC/FD = EC/ED$.

Vậy F cố định.

2) Ta sẽ chứng minh rằng nếu $EA = EB$ thì $MN \parallel AB$. Thật vậy, giả sử rằng $EA = EB$ mà đường thẳng MN cắt đường thẳng AB tại P . Khi đó, ta cũng dùng định lý Mê-nê-la-uyt tương tự trên lần lượt cho các tam giác ABC , ABM , và CBM thì được $PA/PB = EA/EB = 1$, vô lý.

Từ $MN \parallel AB$, suy ra $FM = FN$ và hai tam giác MCD và NCD có diện tích bằng nhau. Vậy một vị trí thích hợp của B trên tia Ex là điểm thỏa mãn đẳng thức $EB = EA$.

Nhận xét :

1) Ngày thi thứ nhất gồm những bài toán chỉ đòi hỏi những kiến thức $PTCS$ đại trà, với đòi hỏi kỹ năng ở mức trung bình hoặc trung bình khá. Tuy vậy vẫn có một số thí sinh bị điểm 0. Nhiều em đã chỉ ra rằng câu III thừa giả thiết $a > 0$.

2) Một số em chứng minh câu V.1) bằng cách chứng minh các tử giác nội tiếp, nhưng không khéo nên đã mắc phải những sai lầm đáng tiếc về logic. Có em đã biết dùng phép vị tự để giải câu V. 3) nên lời giải khá gọn.

3) Các bài toán ở ngày thi thứ hai đòi hỏi kiến thức và trình độ tư duy cao hơn, và mang sắc thái rõ nét của chuyên toán. Do đó, nhiều em đạt kết quả kém mặc dù đã làm bài rất tốt trong ngày thi thứ nhất. Chỉ có duy nhất một em đạt điểm tối đa trong ngày thi này.

4) Có khá nhiều em mắc phải sai lầm logic khi giải các câu VII, VIII, IX. Rất ít em làm được trọn vẹn câu X.

Tóm lại, kỳ thi này cho thấy nhìn chung, các em còn yếu về hình học và các bài toán đòi hỏi tư duy và lập luận logic.

NGUYỄN HUY DOAN

Học sinh tìm tòi

MỘT CON ĐƯỜNG ĐI TỚI BÀI TOÁN MỚI

NGUYỄN THÁI HÀ

Lớp 9M Trường Mari Quyri - Hà Nội

Trong công việc học tập môn toán, tôi thường đặt ra cho mình câu hỏi : từ những kiến thức đã học, có thể sáng tạo ra những bài toán mới như thế nào ? Những bài toán ấy có thể đã được ai đó nghĩ ra trước tôi... nhưng điều này không quan trọng. Điều mà tôi thú vị là : qua những lần như vậy, tôi cảm thấy được hứng thú hơn trong việc học môn toán. Tôi xin dẫn ra ở bài viết này một trong những lần thú vị ấy.

Ai học lượng giác đều biết một kết quả đơn giản : với A là góc bất kỳ thì $(\sin A + \cos A)^2 \leq 2$. Nếu xét A là góc trong một tam giác thì

$$\sin A = \frac{2S}{bc} \text{ và } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Từ đó suy ra :

$$\left(\frac{2S}{bc} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4S + b^2 + c^2 - a^2)^2 \leq 8b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow |4S + b^2 + c^2 - a^2| \leq 2\sqrt{2}bc \text{ (1). Bất đẳng thức}$$

(1) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow \sin A = \cos A \Leftrightarrow \hat{A} = 45^\circ$. Nếu đổi ký hiệu A cho B và đổi vai trò a cho b thì :

$$|4S + a^2 - b^2 + c^2| \leq 2\sqrt{2}ac \text{ (2). Từ (1) và (2) dẫn đến :}$$

$$2\sqrt{2}c(a+b) \geq |4S + b^2 + c^2 - a^2| +$$

$$+ |4S + a^2 + c^2 - b^2| \geq 2(4S + c^2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}c(a+b) \geq 4S + c^2 \Rightarrow S \leq \frac{c(\sqrt{2}a + \sqrt{2}b - c)}{4}. \text{ Đẳng}$$

thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC là tam giác vuông cân đỉnh C .

Bây giờ ta lại xuất phát từ một điều đơn giản khác :

$$\sin(A + 30^\circ) \leq 1 \Rightarrow (\sqrt{3}/2) \cdot \sin A + (1/2) \cos A \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3}S}{bc} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leq 2 \Rightarrow$$

$$4\sqrt{3}S + b^2 + c^2 - a^2 \leq 4bc$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3}S \leq 4bc + a^2 - b^2 - c^2 \text{ (3). Tương tự ta có :}$$

$$4\sqrt{3}S \leq 4ac + b^2 - a^2 - c^2 \text{ (4)}$$

$$\text{và } 4\sqrt{3}S \leq 4ab + c^2 - a^2 - b^2 \text{ (5).}$$

Cộng từng vế của (3), (4), (5) ta có :

$$12\sqrt{3}S \leq 4(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 \text{ (6).}$$

nếu lưu ý rằng : $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ thì từ (6) ta có :

$$4\sqrt{3}S \leq a^2 + b^2 + c^2 \text{ (7). Bất đẳng thức (7) đã xuất}$$

hiện ở các kỳ thi toán trong và ngoài nước. (Chắc các bạn đã quá quen thuộc).

Phải chăng, ngày xưa ai đó đã đi theo con đường này để đi tới bất đẳng thức (7) ?

Bây giờ các bạn thử đoán xem : các kết quả sau đây, tôi đã đi tới theo con đường nào ?

Kết quả I : Nếu A là góc lớn nhất trong các góc của tam giác ABC thì : $4\sqrt{3}S + a^2 - b^2 - c^2 \leq 4bc$.

Kết quả II : Chứng minh rằng : trong tam giác ABC bất kỳ luôn có

$$1,4S \leq 4bc - \sqrt{3}(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$2,2b^2 + c^2 - a^2 + 4\sqrt{3}S \leq 2b(\sqrt{3}c + a)$$

Mong nhận được thư trao đổi của các bạn.

1. Tâm của hệ điểm : Trong hình học Vectơ chúng ta đã gặp các bài toán như : Cho ba điểm A_1, A_2, A_3 thì luôn có một điểm O duy nhất sao cho $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3} = \vec{0}$ (điểm O chính là trọng tâm của tam giác $A_1A_2A_3$). Một câu hỏi rất tự nhiên đặt ra cho chúng ta là cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ có hay chăng một điểm O sao cho $\sum_{i=1}^n \vec{OA_i} = \vec{0}$. Nếu có thì dựng điểm O ra sao ? Và điểm O đó có duy nhất không ? Câu trả lời là có điểm O và O là duy nhất :

Nếu $n = 1$ tức là chỉ có A_1 . Ta chọn luôn $O \equiv A_1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\vec{OA_i} + A_i \vec{O'}) = \sum_{i=1}^n \vec{OO'} = n \vec{OO'} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{OO'} = \vec{0} \Rightarrow O \equiv O'$$

Vậy cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ luôn tồn tại một điểm O duy nhất sao cho $\sum_{i=1}^n \vec{OA_i} = \vec{0}$. Ta gọi

điểm O là trọng tâm hay vắn tắt là tâm của hệ điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$

Với kết quả tổng quát này chúng ta có thể coi các bài tập 10, 11, 12 (trang 9) ; 17 (trang 10) ; 24, 25 (trang 15) ; 31 (trang 19) 11_c (trang 26), 15 (trang 27) ; 16_b (trang 27) của sách giáo khoa Hình học 10 - GD - 1990 như là những trường hợp đặc biệt.

Tìm hiểu sâu thêm "Toán học phổ thông".

Tâm của hệ điểm và khoảng cách giữa tâm của hai hệ điểm

TRẦN QUANG VY.

Giả sử đúng đến n điểm, gọi điểm đó là O , sao cho $\sum_{i=1}^n \vec{OA_i} = \vec{0}$

Có thêm điểm A_{n+1} ta chỉ cần chọn điểm O sao cho $n \vec{OO_1} + \vec{OA_{n+1}} = \vec{0}$. Dễ thấy O là điểm cần tìm vì

$$n \vec{OO_1} = \vec{OA_1} + A_1 \vec{O_1} + \dots + \vec{OA_n} + A_n \vec{O_1}$$

$$= \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} + \sum_{i=1}^n A_i \vec{O_1} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} - \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} = \sum_{i=1}^n \vec{OA_i}$$

$$\text{Từ đó } \sum_{i=1}^{n+1} \vec{OA_i} = \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} + \vec{OA_{n+1}} =$$

$$= n \vec{OO_1} + \vec{OA_{n+1}} = \vec{0}$$

Điểm O đó là duy nhất vì nếu có O sao cho $\sum_{i=1}^n \vec{OA_i} = \vec{0}$ và có O' sao cho $\sum_{i=1}^n \vec{O'A_i} = \vec{0}$

$$\text{thì } \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} - \sum_{i=1}^n \vec{O'A_i} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\vec{OA_i} - \vec{O'A_i}) = \vec{0}$$

2. Khoảng cách giữa tâm của hai hệ điểm : Ta đã biết một công thức : Cho tam giác $A_1B_1B_2$ có đường trung tuyến A_1O (hình 1)

$$\text{thì } A_1O^2 = \frac{2A_1B_1^2 + 2A_1B_2^2 - B_1B_2^2}{4}$$

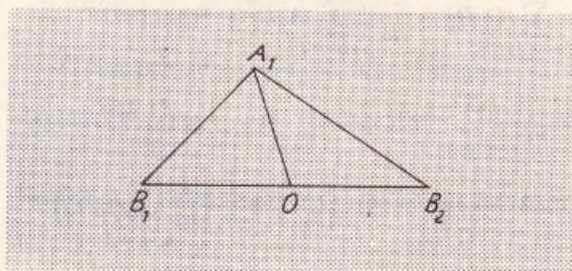
$$\text{hay } A_1O^2 = \frac{1}{2} A_1B_1^2 + \frac{1}{2} A_1B_2^2 - \frac{1}{4} B_1B_2^2 (1)$$

Bây giờ ta coi hệ điểm thứ nhất là A_1 có tâm A_1 , hệ điểm thứ hai B_1, B_2 có tâm O , vậy khoảng cách giữa tâm của hai hệ điểm được tính bằng công thức (1). Chúng ta hãy đi tìm một công thức tổng quát cho hai hệ điểm bất kì. Trước hết ta chứng minh Định lí Giacobi :

Cho hệ điểm $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ có tâm Q (tức $\sum_{i=1}^k \vec{QP_i} = \vec{0}$)

và M bất kì thì

$$MQ^2 = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k MP_i^2 \right) - \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i,j=1}^k P_i P_j^2 \right) (*)$$



Thực vậy :

$$k\vec{MQ} = \sum_{i=1}^k \vec{MP}_i - \sum_{i=1}^k \vec{QP}_i = \sum_{i=1}^k \vec{MP}_i$$

$$\vec{MQ} = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \vec{MP}_i \right)$$

$$\Rightarrow MQ^2 = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^k \vec{MP}_i \right)^2$$

$$= \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^k MP_i^2 + 2 \sum_{i=1}^k \vec{MP}_i \cdot \vec{MP}_j \right) \quad (2)$$

Mặt khác : $2\vec{MP}_i \cdot \vec{MP}_j =$

$$MP_i^2 + MP_j^2 - (\vec{MP}_i - \vec{MP}_j)^2$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{i < j=1}^k \vec{MP}_i \cdot \vec{MP}_j =$$

$$(k-1) \left(\sum_{i=1}^k MP_i^2 \right) - \sum_{i < j=1}^k P_i P_j^2 \quad (3)$$

Từ (2), (3) $\Rightarrow MQ^2 =$

$$= \frac{1}{k^2} \left[\sum_{i=1}^k MP_i^2 + (k-1) \left(\sum_{i=1}^k MP_i^2 \right) - \sum_{i < j=1}^k P_i P_j^2 \right]$$

$$= \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k MP_i^2 \right) - \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i < j=1}^k P_i P_j^2 \right) \quad (\text{đpcm})$$

Bài toán. Cho hệ điểm $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ có tâm là O_1 và hệ điểm $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ có tâm là O_2

Hãy tìm công thức tính khoảng cách $O_1 O_2$

Áp dụng (*) vào hệ điểm $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ có tâm O_2 với điểm bất kì là $O_1 \Rightarrow$

$$O_1 O_2^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n O_1 B_k^2 \right) - \frac{1}{n^2} \sum_{s < t=1}^n B_s B_t^2 \quad (4)$$

Áp dụng (*) vào hệ điểm $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ có tâm O_1 với điểm bất kì là

$$B_k \Rightarrow O_1 B_k^2 = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m B_k A_i^2 \right) - \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i < j=1}^m A_i A_j^2 \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n O_1 B_k^2 = \frac{1}{m} \left(\sum_{p,q=1}^m A_p B_q^2 \right) - \frac{n}{m^2} \left(\sum_{i < j=1}^m A_i A_j^2 \right) \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có : $O_1 O_2^2 = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{m} \left(\sum_{p,q=1}^m A_p B_q^2 \right) - \right.$

$$\left. - \frac{n}{m^2} \left(\sum_{i < j=1}^m A_i A_j^2 \right) \right] - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{s < t=1}^n B_s B_t^2 \right)$$

$$\Rightarrow O_1 O_2^2 = \frac{1}{m.n} \left(\sum_{p,q} A_p B_q^2 \right) -$$

$$- \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i < j=1}^m A_i A_j^2 \right) - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{s < t=1}^n B_s B_t^2 \right)$$

Đặt $A_i A_j = a_{ij}$; $B_s B_t = b_{st}$; $A_p B_q = c_{pq}$; $O_1 O_2 = d$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{1}{mn} \left(\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n c_{pq}^2 \right) -$$

$$\frac{1}{m^2} \left(\sum_{i < j=1}^m a_{ij}^2 \right) - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{s < t=1}^n b_{st}^2 \right) \quad (**)$$

Với kết quả tổng quát (**) chúng ta có thể giải được nhiều bài toán về tính khoảng cách.

3. Một vài bài tập : Sau đây ta hãy giải một số bài tập.

Cho 4 điểm $ABCD$. Gọi I là trung điểm của AB , J là trung điểm của CD . G là trung điểm của IJ .

a) Chứng minh $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{O}$.

b) Tính khoảng cách IJ theo các cạnh và các đường chéo của tứ giác $ABCD$.

c) Chứng minh $AB^2 + BD^2 + DC^2 + CA^2 \geq AD^2 + BC^2$

Và hãy giải bài toán trên trong không gian.

2. Cho đa giác đều $A_1, A_2, \dots, A_n$ nội tiếp trong vòng tròn tâm O bán kính R

a) Chứng minh

$$\sum_{i=1}^n \vec{OA}_i = \vec{O}$$

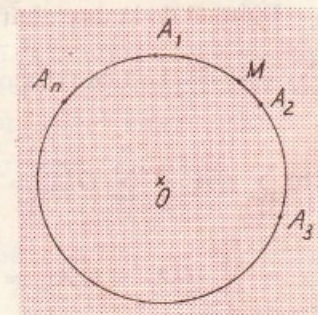
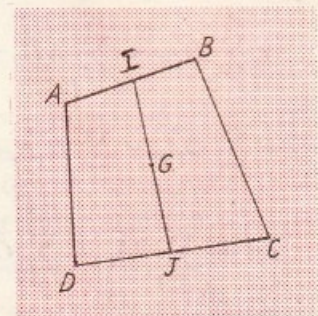
b) Chứng minh

$$\sum_{i < j=1}^n A_i A_j^2 = n^2 R^2$$

c) Cho M là điểm bất kì trên đường tròn. Chứng minh khi M thay đổi thì

$$\sum_{i=1}^n MA_i^2 \text{ không đổi.}$$

và hãy giải bài toán trong không gian.



ĐƯỜNG "VỎ SÒ" NICOMÈDE VÀ ỨNG DỤNG CỦA NÓ VÀO VIỆC DỰNG NGHIỆM THỰC CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3

(Tiếp theo trang 9)

điều này dẫn đến $p \leq 0$. Ta giả sử $p \neq 0$ để loại trừ nghiệm tầm thường.

Francois Viète (nhà toán học Pháp ở thế kỉ 16) đã đưa ra định lí :

Cho phương trình (1) : $x^3 + px + q = 0$ với hệ số thực và các nghiệm đều thực. Có thể dựng được 3 nghiệm của phương trình (1) bằng thước, compas, và công cụ chia 3 một góc (như conchoïde Nicomède)

Người ta đưa phương trình (1) về phương trình

$$\cos 3\theta - h = 0 \quad (2)$$

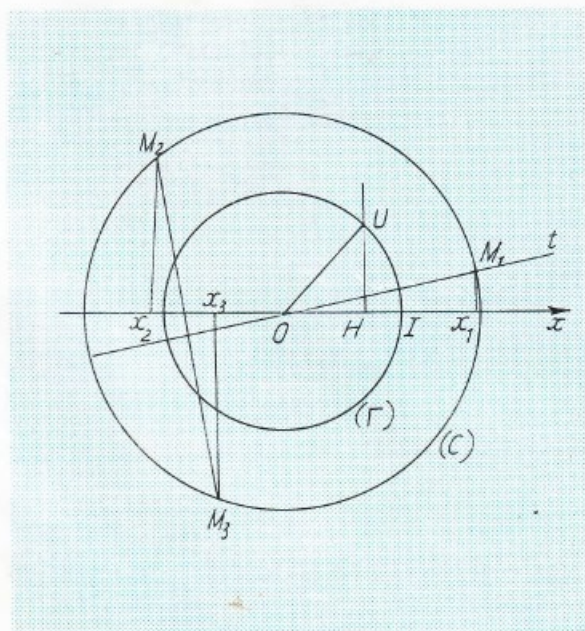
bằng cách đặt $x = \rho \cos \theta$ và xác định ρ bằng cách cho (1) và (2) tương đương. Kết quả ta có phương trình.

$$\cos 3\theta + \frac{q}{2\sqrt{\frac{-p^3}{27}}} = 0 \quad (3)$$

Nếu θ_0 là một nghiệm của (3) thì

$\theta_0 + \frac{2\pi}{3}$ và $\theta_0 - \frac{2\pi}{3}$ cũng là nghiệm của (3).

Cuối cùng phương trình (1) có nghiệm là



$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \theta_0$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\theta_0 - \frac{2\pi}{3} \right)$$

Ta dựng các nghiệm x_1, x_2, x_3 như sau : (xem hình 3)

Dựng một đường tròn (Γ) tâm O đi qua I với quy ước $OI = 1$ Dựng một đường tròn (C)

tâm O có bán kính $2\sqrt{\frac{-p}{3}}$

Dựng điểm H trên Ox sao cho

$$\overline{OH} = \frac{-q}{2\sqrt{\frac{-p^3}{27}}}$$

Những cách dựng này đều làm được bằng thước và com-pa với quy ước $OI = 1$.

Để cho phương trình có 3 nghiệm thực nên

$$4p^3 + 27q^2 \leq 0 \text{ và như vậy}$$

$$\overline{OH} = \frac{-q}{2\sqrt{\frac{-p^3}{27}}} \leq 1$$

Dựng đường thẳng vuông góc với Ox , đi qua H , cắt đường tròn (Γ) tại U , ta có :

$$\cos \widehat{HOU} = \overline{OH}$$

Dùng thước "conchoïde Nicomède" ta có nửa đường thẳng Ot chia góc $\widehat{HOU}$ ra 3 phần bằng nhau, và Ot cắt đường tròn (C) tại M_1

$$\widehat{\theta}_0 = \widehat{HOM}_1 = \frac{1}{3} \widehat{HOU}$$

Tiếp theo dựng M_2, M_3 trên (C) sao cho tam giác $M_1M_2M_3$ là tam giác đều. Các hoành độ x_1, x_2, x_3 của các điểm M_1, M_2, M_3 là nghiệm của phương trình $x^3 + px + q = 0$.

Giải đáp bài

AI HỌ GÌ?

Muốn tìm xem ai họ gì, ta dựa vào hai điều kiện :

- Anh tên Vũ họ không phải là Hoàng (1)
- Anh họ Lý thì có tên trùng với họ của anh có tên trùng với họ của anh có tên Lê (2)

Từ (2) ta suy ra :

- Anh họ Lý không thể có tên Lý, tên Lê.

Vậy anh họ Lý chỉ có thể tên Hoàng hoặc tên Vũ. Giả sử anh họ Lý có tên Hoàng. Từ (2) ta thấy họ của anh Lê không phải là Hoàng hoặc Lê. Vậy anh Lê họ Vũ. Điều này mâu thuẫn với điều kiện (1). Từ đó suy ra anh họ Lý phải có tên Vũ. Anh họ Vũ tên Hoàng, anh Lê họ Hoàng và anh cuối cùng là Lê Lý. Tóm lại ta có : Lý Vũ, Vũ Hoàng, Hoàng Lê và Lê Lý.

(Theo Đào Thị Thiên Hương, 10CT, Đông Hà, Quảng Trị)

BÌNH PHƯƠNG



Ai cao ai thấp ?

Có 200 học sinh xếp hàng 10. Lần thứ nhất, theo mỗi hàng dọc người ta chọn ra một học sinh cao nhất. Sau đó, trong số 10 học sinh được chọn ấy người ta lại chọn ra một học sinh thấp nhất.

Lần thứ hai, theo mỗi hàng ngang người ta chọn ra một học sinh thấp nhất. Sau đó, trong số 20 học sinh được chọn ấy người ta lại chọn ra một học sinh cao nhất.

Ai trong số hai học sinh được chọn theo hai lần cao hơn ? Biết rằng sau lần chọn thứ nhất các học sinh lại trở về vị trí cũ.

XUÂN TRUNG



Sách giáo khoa đại số 9 của Ngô Hữu Dũng NXB Giáo dục 1991 trang 72 § 5 Công thức nghiệm thu gọn thuộc chương III có viết :

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

Khi hệ số b chẵn ta đặt $b = 2b'$

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

$\Delta' < 0$ Phương trình vô nghiệm

$\Delta' = 0$ Phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$$

$\Delta' > 0$

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Công thức trên gọi là công thức nghiệm thu gọn của Phương trình bậc hai khi b chẵn $b = 2b'$.

Ở ví dụ 3, $x^2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}x - 12\sqrt{2} = 0$
 $b = -2\sqrt{3}$, $b' = -\sqrt{3}$ Rõ ràng b không phải số chẵn. Lại có ý kiến cho rằng nên nói b có dạng $b = 2b'$.

Riêng tôi thấy rằng $\forall b \in R$ đều viết được dưới dạng $b = 2b'$ ($b' \in R$). Do vậy bất cứ phương trình nào cũng có thể sử dụng biệt số $\Delta' = b'^2 - ac$. Có điều là nên sử dụng sao cho việc tính toán thuận lợi.

Với ý kiến này thì bài "Công thức nghiệm thu gọn" nên gọi là cách hai của "Công thức nghiệm của phương trình bậc hai".

Các bạn thử suy nghĩ xem có được chăng ?

Đôi điều về bài

"CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN"

NGUYỄN ĐỨC TẤN

ISSN : 0866 - 8035.

Mã số : 8BT07M4

Chỉ số 12884

In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.

In xong và gửi lưu chiếu tháng 7 /1994

Giá : 1200đ

Một nghìn

hai trăm đồng