BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

6(204)
1994

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ VIÉT ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CÁC LỚP CHUYÊN TRƯỜNG ĐHTH HÀ NỘI

Đội tuyển thi học sinh giỏi toán toàn quốc của ĐHSP Vinh

GIAO ĐIỂM GIỮA PARABOL VÀ ĐƯỜNG THẲNG

ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG VÀO VIỆC GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN...

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT: 260786
231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : ĐOÀN HỒNG

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ VIÉT ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN ĐỄ

Định lí Viét là một định lí quen thuộc, nhưng sử dụng định lí trong những bài toán cụ thể lại là việc không đơn giản. Điều quan trọng hơn cả đó là hãy từ giả thiết của bài toán làm thế nào đó để có được biểu diễn của tổng và tích của hai đại lượng, từ đó dẫn đến một phương trình bậc 2. Cuối cùng là tính biệt số Δ của phương trình này và giải bất phương trình $\Delta \geqslant 0$.

Thật khó có thể nêu lên cách giải tổng quát, vì vậy thông qua các ví dụ, bạn đọc tự rút ra những nhận xét quan trọng để vận dụng khi làm toán.

Ví dụ 1.

Cho các số thực x, y, z khác không và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$, $x^2 = yz$. Chứng minh rằng $x^2 \geqslant z$.

Giải :

Dễ thấy $\begin{cases} y + z = x^3 - x \\ yz = x^2 \end{cases}$

Vậy các số y, z là nghiệm của phương trình :

$$u^2 + (x - x^3)u + x^2 = 0 \qquad (1)$$

Ta có $\Delta = x^2[(1 - x^2)^2 - 4] \qquad (2)$

Bởi vì (1) có nghiệm nên $\Delta \geqslant 0$.

Do $x \neq 0$ nên từ (2) suy ra

$(1 - x^2)^2 - 4 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (1 - x^2)^2 \geqslant 4$

$\Rightarrow 1 - x^2 \leqslant -2$ hoặc $1 - x^2 \geqslant 2 \qquad (3)$

Dễ thấy (3) vô nghiệm, do đó ta có

$$1 - x^2 \leqslant -2 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 3 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 2.

Các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 5$ và $yz + xz + xy = 8$.

Chứng minh rằng

$$1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3},\ 1 \leqslant y \leqslant \frac{7}{3},\ 1 \leqslant z \leqslant \frac{7}{3}.$$

Giải :

Từ điều kiện bài toán ta có :

$$\begin{cases} y + z = 5 - x \\ yz = 8 - x(5 - x) \end{cases}$$

Dẫn đến y, z là nghiệm của phương trình

$$u^2 + (x - 5)u + x^2 - 5x + 8 = 0 \qquad (1)$$

Ta có $\Delta = (5 - x)^2 - 4(x^2 - 5x + 8)$.

Bởi vì (1) có nghiệm nên $\Delta \geqslant 0$, nghĩa là $(5 - x)^2 - 4(x^2 - 5x + 8) \geqslant 0$

$\Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$.

Vai trò của x, y, z như nhau, nên ta cũng có

$1 \leqslant y \leqslant \frac{7}{3}$, $1 \leqslant z \leqslant \frac{7}{3}$.

Ví dụ 3.

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + kx + a = 0$ $(a \neq 0)$. Tìm tất cả các giá trị của k để có bất đẳng thức

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 \leqslant 52 \text{ (a, k là các số thực).}$$

Giải :

Ta xét a trong hai trường hợp :

* Nếu $a < 0$ thì $\Delta = k^2 - 4a > 0$ với mọi k. Khi đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm khác nhau và khác dấu. Điều đó dẫn đến bất đẳng thức đã cho đúng với mọi giá trị thực của k.

* Nếu $a > 0$

Ta có $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

Áp dụng công thức trên ta được :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)\left(\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 - 3\right)$$

Nhưng $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$

$= \dfrac{k^2}{a} - 2$ (theo định lí Viét)

Do đó

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{k^2}{a} - 2\right)\left(\left(\frac{k^2}{a} - 2\right)^2 - 3\right) \leqslant 52 \qquad (1)$$

Đặt $\dfrac{k^2}{a} = t$, ta có

$$(t-2)((t-2)^2 - 3) \leqslant 52$$

$$\Leftrightarrow (t-6)(t^2+9) \leqslant 0 \qquad (2)$$

Ta thấy $t^2 + 9 > 0$ với mọi t, do đó (2) chỉ đúng khi $t - 6 \leqslant 0$ hay

$$\frac{k^2}{a} - 6 \leqslant 0$$

Do $a > 0$ nên suy ra $k^2 \leqslant 6a$. Bởi vậy có $-\sqrt{6a} \leqslant k \leqslant \sqrt{6a}$.

Vậy

$$\begin{cases} a < 0 \\ k \text{ là số thực bất kì} \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\sqrt{6a} \leqslant k \leqslant \sqrt{6a}. \end{cases}$$

Ví dụ 4.

Giả sử x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình

$$x^2 + 2kx + 4 = 0.$$

Tìm tất cả giá trị của k sao cho có bất đẳng thức :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \geqslant 3$$

Giải :

Dễ thấy $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$

Ta có :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \geqslant 3 + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 \geqslant 5$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right| \geqslant \sqrt{5} \qquad (1)$$

Mặt khác $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} > 0 \qquad (2)$$

(theo định lí Viét)

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geqslant \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2 \geqslant \sqrt{5}$$

Một lần nữa áp dụng định lí Viét ta có :

$$\frac{(-2k)^2}{4} - 2 \geqslant \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2 \geqslant \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |k| \geqslant \sqrt{\sqrt{5} + 2}$$

Nhận xét :

Hai ví dụ trên thuộc loại bài toán tìm kiếm giá trị của tham số. Cách tìm kiếm này dựa trên các phép biến đổi tương đương và phương trình bậc hai cho trước có chứa tham số được khai thác nhờ sử dụng định lí Viét.

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/200. *Có tồn tại hay không một số nguyên dương là bội của 1993 và có 4 chữ số cuối cùng là 1994.*

Lời giải : • *Cách 1* (*Bùi Ngọc Anh* 9T Trần Đăng Ninh, Nam Hà, *Phan Huy Hải* 6C Amsterdam, Hà Nội, *Mai Thanh Trung* 6T Nghi Lộc, Nghệ An, *Lưu Văn Thịnh*, Thiệu Yên, Thanh Hóa)

Có tồn tại, chẳng hạn số :

$$9681994 = 1993.4858$$

• *Cách 2* (của hầu hết các bạn)

Xét 1994 số sau

$1994,\ 19941994,\ \ldots\ \ \underbrace{1994\,1994\ldots 1994}_{1994\ \text{số}\ 1994}$

Tồn tại hai số khi chia cho 1993 sẽ cho cùng một số dư. Giả sử hai số đó là

$a = \underbrace{1994\ldots1994}_{i\ \text{số}\ 1994}$

$b = \underbrace{1994\ldots1994}_{j\ \text{số}\ 1994}$

với $1 \leqslant i < j \leqslant 1994$

Khi đó

$b - a = \underbrace{1994\ldots1994}_{(j-i)\ \text{số}\ 1994}.10^{4i}$. Chia hết cho 1993.

Vì 10^{4i} và 1993 nguyên tố cùng nhau nên suy ra

$\underbrace{1994\ldots1994}_{(j-i)\ \text{số}\ 1994}$ chia hết cho 1993

• *Cách 3* : (Của bạn Đỗ Mạnh Cường, lớp 9 Toán trường NK Ninh Bình)

Giả sử số : $\overline{A1994}$ là bội của 1993. Suy ra

$100\,00A + 1994 \vdots 1993 \Leftrightarrow 35A + 1 \vdots 1993$

$\Leftrightarrow 35A = 1993B + 1992 \Leftrightarrow 2B + 3 =$

$1995B + 1995 - 35A \Leftrightarrow 2B + 3 \vdots\ 35$

$\Leftrightarrow 2B \equiv 32 \pmod{35} \Leftrightarrow B \equiv 16 \pmod{35}$

Đặt $B = 16 + 35k$ ta tính được

$A = 1993k + 968$ với $k = 0, 1, 2$

Số A nhỏ nhất là $A = 968$ ứng với $k = 0$ và số nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện bài toán là số 968 1994.

• *Cách 4* (bạn Trần Đức Quyền 9 Trần Đăng Ninh, Nam Định)

Ta phải tìm số $\overline{b_n b_{n-1}\ldots b_1}$ sao cho $\overline{b_n b_{n-1}\ldots b_1}\,.\,1993$ có tận cùng là 1994.

Đặt tính nhân và phân tích dễ dàng thấy được

$\overline{b_n b_{n-1}\ldots b_1} = \overline{b_n b_{n-1}\ldots 4858}$

Nhận xét : a) Bài này được rất đông bạn tham gia giải (gần 200 bài). Đặc biệt có nhiều bạn lớp 6 gửi lời giải

b) Cách 1 có ưu điểm là cực ngắn.

Cách 2 có cái hay là từ cách giải đó có thể đề ra và giải bài toán tổng quát (của bạn *Lê Văn An* 9T Phan Bội Châu) :

"Cho trước số tự nhiên n và $m = \overline{a_1\ldots a_k}$ với $(n, 10) = 1$. Luôn luôn tồn tại số tự nhiên là bội của n và có k chữ số tận cùng là $\overline{a_1 a_2\ldots a_k}$". Nhược điểm của cách này là chỉ đơn thuần chứng minh sự tồn tại.

• Cách 3 và cách 4 có ưu điểm là đã *mô tả tất cả các* số là bội của 1993 và có 4 chữ số tận cùng là 1994.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/200. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có tất cả các hệ số nguyên không âm, nhỏ hơn 6 thỏa mãn $P(6) = 1994$.*

Lời giải : của *Lê Quang Nẩm*, 8T, Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi :

Giả sử đa thức cần tìm có dạng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$

Theo đầu bài ta có :

$$P(6) = a_n 6^n + a_{n-1} 6^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_1 6 + a_o = 1994 \qquad (1)$$

Vì các a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ là các số nguyên không âm và nhỏ hơn 6 nên từ (1) ta có thể viết :

$P(6) = a_n 6^n + a_{n-1} 6^{n-1} + \ldots + a_1 6 + a_o =$

$= \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_{o(6)}} = 1994 \qquad (2)$

trong đó $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_{o(6)}}$ là biểu diễn của 1994 trong hệ đếm cơ số 6. Đổi 1994 sang hệ đếm cơ số 6 ta được : $1994 = \overline{13122}_{(6)}$

Vậy $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_{o(6)}} = \overline{13122}$. Từ đó suy ra

$n = 4$ và $a_4 = 1$, $a_3 = 3$, $a_2 = 1$, $a_1 = a_o = 2$

Đa thức $P(x)$ cần tìm là :

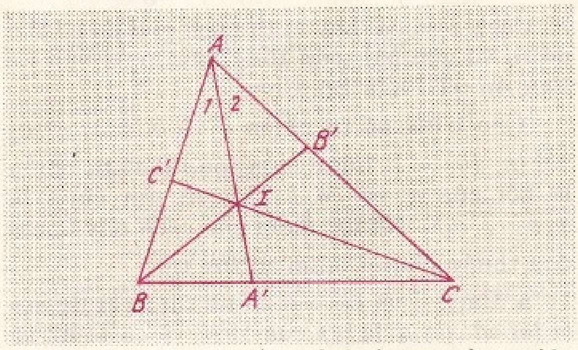
$$P(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2$$

Thử lại ta thấy đa thức $P(x)$ là duy nhất và thỏa mãn đề ra.

Nhận xét : Hầu hết các lời giải gửi đến đều đúng. Các bạn có lời giải tốt là : *Nguyễn Kiên Cường, Nguyễn Ngọc Tân*, 9M Marie Curie ; *Bùi Quang Minh*, $9A_1$, Giảng Võ II ; *Đỗ Hồ Nga*, 9D Đống Đa, Hà Nội, *Võ Thị Lăn, Võ Thị Ly*, 9A, Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên, *Phạm Huy Bắc*, 9 NK, Gia Lương, Hà Bắc ; *Nguyễn Lê Lực*, 8A$_1$, Đầm Dơi, Minh Hải.

TÔ NGUYÊN

Bài T3/200. *Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đặt BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng* $a\,IA^2 + b\,IB^2 + c\,IC^2 = abc$



Lời giải : Theo tính chất đường phân giác ta có :

$$\frac{A'I}{IA} = \frac{BA'}{AB} = \frac{CA'}{AC} = \frac{BC}{AB + CA} = \frac{a}{b + c}$$

Suy ra $\dfrac{AA'}{AI} = \dfrac{a + b + c}{b + c} = \dfrac{2p}{b + c}$

(ở đó $p = \dfrac{a + b + c}{2}$) $\Rightarrow AI = \dfrac{AA'(b + c)}{a + b + c}$

Mặt khác theo công thức tính đường phân giác ta có :

$$AA' = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp\,(p - a)}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{2\sqrt{bc\,(p - a)}}{2\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{bc\,(p - a)}}{\sqrt{p}}$$

$$\Rightarrow a\,.\,AI^2 = \frac{abc\,(p - a)}{p}$$

Tương tự :

$$b\,.\,BI^2 = \frac{abc\,(p - b)}{p}$$

$$c\,.\,CI^2 = \frac{abc\,(p - c)}{p}$$

$$\Rightarrow aAI^2 + bBI^2 + cCI^2 = abc\left(\frac{3p - 2p}{p}\right) = abc$$

(đpcm)

Nhận xét : Các bạn giải tốt bài toán là *Nguyễn Ngọc Tân*, 9M Marie Curie, *Nguyễn Đức Phương, Nguyễn Anh Tú 9H Trưng Vương, Phạm Lê Hùng*, 9A, Trưng Nhị, *Trần Hải Sơn* 9A1 Giảng Võ II, *Đỗ Hồ Nga* 8D Đống Đa, *Phạm Huy Tùng* 8A Bế Văn Đàn, Hà Nội ; *Trần Duy Trung* 8A2 Phong Châu, *Phan Ngọc Lan* 9CT Việt Trì, Nguyễn Thanh Tùng 8T Chuyên Phú Thọ, Vĩnh Phú ; *Phan Mạnh Hà* 9A, Thắng Lợi, Sông Công, Bắc Thái ; *Trần Văn Long*, 9 Thanh Liêm, *Trần Đức Quyền* 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà ; *Lê Vũ Long* 9T Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Nguyễn Thị Chuyên*, 9CT, Nghĩa Đàn, *Cao Minh Đức* 9T Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Cao Thế Anh* 9B Hai Bà Trưng, Thừa Thiên – Huế ; *Nguyễn Lê Lực* 8A1 Đầm Dơi, Minh Hải. Bạn NTN đã sai khi cho rằng đề bài sai.

VŨ KIM THỦY

Bài T4/200. *Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên* $N \geqslant 1$, *ta có :*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)\,.\,2^n} < 1 - ln2$$

Lời giải : Với $k \in N^*$ và $x \in (0,1)$ ta có :

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} < \frac{1}{1 - x}$$

Từ đó suy ra, với $y \in (0,1)$ ta có :

$$\int_0^y (1 + x + x^2 + \ldots + x^k)\,dx < \int_0^y \frac{dx}{1 - x}$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \ldots + \frac{1}{k+1}y^{k+1} < \\ < -ln(1 - y)$$

Do vậy, với $z \in (0, 1)$ ta có :

$$\int_0^z \left(y + \frac{1}{2}y^2 + \ldots + \frac{1}{k+1}y^{k+1}\right) dy <$$

$$< \int_0^z -ln(1 - y)dy$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{3}z^3 + \ldots + \frac{1}{k+1}\,.\,\frac{1}{k+2}z^{k+2} < \\ z + (1 - z)ln(1 - z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1\,.\,2}\,.\,z + \frac{1}{2\,.\,3}z^2 + \ldots + \\ + \frac{1}{(k+1)(k+2)}z^{k+1} < 1 + \frac{1 - z}{z}\,ln(1 - z) \quad (1)$$

Cho $z = \dfrac{1}{2}$ và $k = N - 1$, từ (1) ta được :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)\,.\,2^n} < 1 - ln2 \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét : Có 11 bạn gửi lời giải cho bài toán. Các bạn sau đây có lời giải đúng : *Đinh Thành Trung, Tô Đông Vũ* (PTCT ĐHTH Hà Nội) ; *Nguyễn Thái Hà* (10M Marie Curie Hà Nội) và *Lê Thời Hữu* (11A CT ĐHSP Vinh). Trong số này chỉ có duy nhất bạn Trung không cần sử dụng tới khái niệm chuỗi để giải bài toán.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T5/200. *Tìm tất cả các hàm f(x) có tập xác định và tập giá trị là đoạn [0, 1] thỏa mãn*

1. $f(x_1) \neq f(x_2)$ *với mọi* $x_1 \neq x_2$

2. $2x - f(x) \in [0, 1]$ *với mọi* $x \in [0, 1]$

3. $f(2x - f(x)) = x$

Lời giải : Cách 1 (của bạn *Mai Thanh Bình* 7M Mari Quyri, Hà Nội *Phan Hoàng Việt* 11A Quy Nhơn, Bình Định)

thay x bởi $f(x)$ ta có

$f(2f(x) - f(f(x))) = f(x)$. Vì f là đơn ánh nên ta có

$2f(x) - f(f(x)) = x$

Kí hiệu $f_n(x) = \underbrace{f(f \ldots f(x))}_{n \text{ lần } f}$

ta thay x bởi $f_n(x)$ thì thu được

$2f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) = f_n(x)$

Từ đó

$f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \ldots = f(x) - x$

Từ đó $f_n(x) = n(f(x) - x) + x$

cố định x_o

Nếu $f(x) > x$ thì với n khá lớn $f_n(x) > 1$. Nếu $f(x) < x$ thì với n khá lớn $f_n(x) < 0$ Vậy $f(x) = x$.

Cách 2 : (của bạn *Trịnh Việt Hương* A_o 11 ĐHTH Hà Nội, *Phan Hoàng Việt* 11A, Quy Nhơn)

Ta chứng minh bằng quy nạp khẳng định sau :

Với mọi $x \in [0, 1]$, $\forall n = 1, 2 \ldots$

$(n + 1)x - nf(x) \in [0, 1]$ và

$f((n + 1)x - nf(x)) = nx - (n - 1)f(x)$

Thật vậy với $n = 1$ đúng theo giả thiết. Giả sử đúng với n.

Đặt $y = (n + 1)x - nf(x)$ ta có $2y - f(y) = 2((n + 1)x - nf(x)) - [nx - (n - 1)f(x)] = (n + 2)x - (n + 1)f(x) \in [0, 1]$

do giả thiết

Lại có $f(2y - f(y)) = y = (n + 1)x - nf(x)$.

Vậy khẳng định đúng với $n + 1$.

Nếu tồn tại x_o để $f(x_o) \neq x_o$ thì

$(n + 1)x_o - nf(x_o) = n(x_o - f(x_o)) + x_o \notin [0, 1]$

với n đủ lớn. Do đó $f(x) = x \; \forall x \in [0, 1]$.

Qua cách giải trên ta thấy điều kiện f là đơn ánh là không cần thiết

Nhận xét : Các bạn có lời giải tốt : *Phạm Đình Trường* 10CT Trần Phú, *Đinh Thành Trung* 10CT ĐHTH, *Phạm Đình Trinh* 10CT ĐHTH Hà Nội, *Nguyễn Thái Hà* 10M Mari Quyri, *Phạm Lê Sơn* 10 Lam Sơn, Thanh Hóa, *Lê Thôi Hữu* 11A CTSP Vinh, *Vũ Thành Long* 11CT Hải Hưng ... Cũng có không ít lời giải sai hoặc lập luận không chính xác, không chặt chẽ.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T6/200. *Cho số nguyên dương n. Tìm tất cả các đa thức P(x) bậc 2n + 1 sao cho* $\forall k \in N$ *các đồ thị* $y = P^{(2k)}(x)$ *(*$P^{(2k)}(x)$ *là đạo hàm bậc 2k của P(x)) đều có tâm đối xứng*

Lời giải : (*Nguyễn Xuân Thắng*, 10T Đông Hà, Quảng Trị ; *Vũ Thị Bích Hà*, 11C, chuyên Thái Bình ; *Nguyễn Thái Hà*, 10M, Mari Quyri, Hà Nội)

Đồ thị đa thức $y = P(x)$ có tâm đối xứng tại $M(x_o, y_o)$ khi và chỉ khi

$P(x_o - x) + P(x_o + x) = 2y_o \; \forall x$ (1)

Từ (1) suy ra

$P^{(2k)}(x_o - x) + P^{(2k)}(x_o + x) = 0 \quad \forall x$. Vậy các đồ thị $y = P^{(2k)}(x)$ đều có tâm đối xứng

Đặt $P(x_o + x) - y_o = Q(x)$

thì từ (1) sẽ có

$Q(-x) + Q(x) = 0 \qquad \forall x$

Do vậy

$Q(x) = a_o x^{2n+1} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_n x$

Suy ra

$P(x) = a_o(x - x_o)^{2n+1} + a_1(x - x_o)^{2n-1} + \ldots + a_n(x - x_o) + y_o$

($a_o \neq 0, a_1, a_2, .., a_n, x_i, y_o$ - tùy ý)

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/200. *Cho các số nguyên dương k và n thỏa mãn* $k \leq n$. *Xét phép toán sau : mỗi lần, lấy k số, nằm ở k vị trí liên tiếp của bộ số có thứ tự* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *rồi thay mỗi số bởi số đối của nó. Gọi T là tập gồm tất cả các bộ số có thứ tự* $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :*

1) Nếu $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T$ *thì* $t_i \in \{-1 ; +1\}$ $\forall i = \overline{1, n}$

2) Nếu $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T$ *thì tồn tại một phương án thực hiện liên tiếp phép toán nói trên đối với* $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *sao cho sau hữu hạn lần ta sẽ nhận được bộ số (1, 1, ..., 1) .*

Tìm số phần tử của tập T.

Lời giải : (Dựa theo *Nguyễn Thái Hà*, 10M Mari Quyri – Hà Nội) : Gọi phép toán đã cho là phép toán f. Ta có :

Nhận xét 1 : Sau một số chẵn lần thực hiện f cho cùng một nhóm k số liên tiếp của bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$, giá trị của k số đó không thay đổi.

Nhận xét 2 : Với mỗi bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ đều chỉ có $n - k + 1$ nhóm khác nhau, mà mỗi nhóm gồm đúng k số nằm liên tiếp trong bộ.

Từ các nhận xét trên suy ra, mỗi phương án thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần f đối với bộ số $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sẽ cho ta một bộ có thứ tự các số $(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1})$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) $a_i \in \{0 ; 1\}$ $\forall i = \overline{1, n-k+1}$

2) a_i bằng số lần đã thực hiện f cho nhóm k số : $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}$.

Hơn nữa, sau khi thực hiện phương án $(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1})$ đối với bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ta sẽ được bộ :

$$\Big(x_1 . (-1)^{a_1}, x_2 . (-1)^{a_1 + a_2}, ..., x_k . (-1)^{a_1+a_2+...+a_k}, x_{k+1} . (-1)^{a_2+a_3+...+a_{k+1}}, ..., x_{n-k+1} . (-1)^{a_{n-x+2}+...+a_{n-k+1}}, ..., x_{n-1} . (-1)^{a_{n-k}+a_{n-k+1}}, x_n . (-1)^{a_{n-k+1}} \Big).$$

Từ các lập luận trên dễ thấy : nếu đặt tương ứng mỗi bộ $(t_1, t_2, ..., t_n) \in T$ với bộ có thứ tự $(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1})$ thỏa 1), 2) và sao cho sau khi thực hiện phương án $(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1})$ đối với $(t_1, t_2, ..., t_n)$ ta sẽ được bộ $(1, 1, ..., 1)$, thì tương ứng đó sẽ xác lập một song ánh từ tập T đến tập A gồm tất cả các bộ có thứ tự $(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1})$ thỏa mãn $a_i \in \{0 ; 1\}$ $\forall i = \overline{1, n-k+1}$.

Do vậy : Card$T$ = Card$A$ = 2^{n-k+1}. ■

Nhận xét : Tòa soạn đã nhận được lời giải của các bạn : *Nguyễn Thái Hà*, *Nguyễn Tuấn Hải* (Mari Quyri, Hà Nội), *Phạm Lê Hùng* (9A PTCS Trưng Nhị Hà Nội) và *Nguyễn Xuân Thắng* (10T PTTH Đông Hà, Quảng Trị). Lời giải của các bạn đều đúng, tuy hoặc quá rườm rà, thiếu sáng sủa hoặc quá vắn tắt, thiếu chính xác.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/200. *Cho 3 vectơ tùy ý, mỗi vectơ có độ dài không vượt quá 1. Chứng minh rằng có thể tìm được trong chúng 2 vectơ sao cho vectơ tổng hoặc vectơ hiệu của hai vectơ này có độ dài không vượt quá 1.*

Lời giải : (dựa theo *Nguyễn Thái Hà* – 10M Mari Quyri, Hà Nội). Dễ dàng thấy với ba vectơ đôi một vuông góc thì bài toán là sai, do đó cần sửa lại thành : "Cho 3 vectơ trên mặt phẳng sao cho mỗi vectơ có độ dài... " : Ta xét 6 vectơ gồm 3 vectơ đã cho và 3 vectơ đối của chúng. Lấy điểm O trên mặt phẳng làm gốc để dựng 6 vectơ bằng 6 vectơ đó. Xét hai vectơ (gọi là $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) trong 6 vectơ này sao cho $\widehat{AOB}$ là bé nhất. Nếu $\widehat{AOB} = 0^o$ thì hoặc $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$ hoặc $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ bằng $|OA - OB|$ (< 1) và ta có đpcm.

Nếu $\widehat{AOB} > 0^o$, ta có $\widehat{AOB} \leq \dfrac{360^o}{6} = 60^o$

Từ quan hệ giữa cạnh với góc trong ΔOAB, ta có $AB \leq \max\{OA, OB\} \leq 1$ hay $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| \leq 1$. Mà $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ hoặc $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ chính là hiệu hoặc tổng của 2 trong 3 vectơ đã cho, và ta có đpcm.

Nhận xét : 1) Có khoảng 10 bạn cũng nêu nhận xét như trên rồi mới giải bài toán sau khi đã sửa lại. Riêng bạn Trần Xuân Vinh (11A, PTTH Hà Nam, Nam Hà thì chứng minh rằng bài toán là sai mà không sửa lại để chứng minh như trên)

2) Các bạn đều giải đúng nhưng diễn đạt còn chưa ngắn gọn.

Các bài giải tốt gồm có : *Nguyễn Hoành* (9T Phan Bội Châu, Nghệ An, *Đỗ Hồ Nga* (9D, PTCS Đống Đa, Hà Nội), *Nguyễn Vũ Hưng* (10C PTTH chuyên NN, ĐHSPNN Hà Nội), *Vũ Thị Bích Hà* (11C PTTH chuyên Thái Bình), *Nguyễn Sinh Chương* (PTTH Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Nam – Đà Nẵng).

ĐẶNG VIỄN

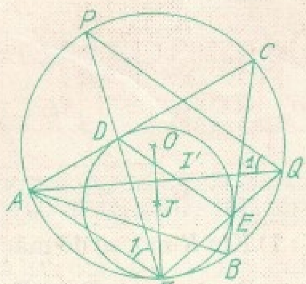
Bài T9/200. *Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp K tâm O, bán kính R, đường tròn nội tiếp tâm I, bán kính r. Một đường tròn k_o khác, tiếp xúc với hai cạnh CA, CB lần lượt tại D, E và tiếp xúc trong với đường tròn k. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp I là trung điểm của DE.*

Lời giải : Gọi J, R_o lần lượt là tâm và bán kính đường tròn k_o và F là tiếp điểm của k_o với K, P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của các tia FD, FE với đường tròn (O). Ta có F, J, O thẳng hàng và phép vị tự :

$$H_F^{\frac{R}{R_o}} : J \to O, D \to P, E \to Q ;$$

$$JE \to OQ, JD \to OP, DE \to PQ$$

Do đó : $OP \parallel JD$, $OQ \parallel JE$; $PQ \parallel DE$.



Mà $JD \perp AC$, $JE \perp BC$ nên $OP \perp AC$; $OQ \perp BC$ hay P, Q lần lượt là điểm chính giữa của các cung $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$, hay BP, AQ là phân giác của các góc tương ứng CBA, CAB (1). Gọi I' là giao điểm của AQ với DE, ta có $\widehat{DI'A} = Q_1$ (đồng vị) : $Q_1 = F_1$ (cùng bằng $\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AP}$) suy ra $\widehat{DI'A} = \widehat{F_1}$ và tứ giác $ADI'E$ nội tiếp. Hơn nữa, tứ giác $ACBF$ cũng nội tiếp, nên ta có $\widehat{EI'F} = 180° - \widehat{DI'F} = \widehat{DAF} = 180° - \widehat{FBE}$ (2). Gọi I'' là giao điểm của BP với DE, một cách tương tự, ta cũng có $\widehat{EI''F} = 180° - \widehat{FBE}$ (3). Kết hợp (3) với (2), ta có $\widehat{EI'F} = \widehat{EI''F}$. Như vậy I', I'' cùng nằm trên đoạn DE ($\neq E$) và cùng nhìn FE dưới một góc như nhau nên $I'' = I'$ hay AQ, BP cắt nhau tại 1 điểm trên DE. Kết hợp với (1), ta có tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nằm trên DE. Hơn nữa nó nằm trên phân giác góc C, và ta lại có $CE = CD$ nên phân giác đó cũng là đường trung tuyến và qua trung điểm I của DE. Và, ta có đpcm.

Nhận xét : Có 57 bài giải, tất cả đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : Phạm Huy Tùng (8A, Bế Văn Đàn, Đống Đa, Hà Nội) Hồ Sỹ Hiển (10T Phan Bội Châu, Vinh) *Tô Đông Vũ* (11CT ĐHTH, Hà Nội), *Nguyễn Thái Hà* (10M Mari Quyri, Hà Nội).

ĐẶNG VIỄN

Bài T10/200. *Cho tứ diện ABCD có các cạnh đối diện bằng nhau : BC = DA, CA = DB, AB = DC. M là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng bình phương khoảng cách từ M đến một trong các đỉnh của tứ diện không lớn hơn tổng bình phương khoảng cách từ M đến ba đỉnh còn lại.*

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh rằng : Trong một tứ diện gần đều (tứ diện có tất cả các mặt bằng nhau và do đó, các cạnh đối diện bằng nhau) trọng tâm G của tứ diện trùng với tâm O của mặt cầu ngoại tiếp.

Thật vậy, dễ thấy rằng mỗi đường trung tuyến kép (đoạn thẳng nối trung điểm của một cặp cạnh đối diện) của tứ diện gần đều là đường trung trực chung của cặp cạnh đối diện tương ứng. Bởi vậy, các mặt phẳng trung trực của 6 cạnh của tứ diện đồng quy tại trọng tâm G của tứ diện. Điều đó có nghĩa là, ở tứ diện này, trọng tâm G của tứ diện trùng với tâm O mặt cầu ngoại tiếp tứ diện :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}, \quad (1)$$

– Sau nữa, ta chứng minh bất đẳng thức : (1)

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - MD^2 = 0\ (\forall M) \quad (2)$$

và ba bất đẳng thức tương tự

Thật vậy, ta có : $OA = OB = OC = OD = R$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - MD^2 =$$
$$= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 =$$
$$= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})^2 + $$
$$+ (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM})^2 - (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM})^2 =$$
$$= 2R^2 + 2OM^2 - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} +$$
$$+ \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})\overrightarrow{OM} = 2(OM^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{OM}\,.\,\overrightarrow{OD})$$
$$= 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD})^2 > 0 \quad (\forall M)$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - MD^2 =$$
$$= 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD})^2 \geqslant 0 \quad (\forall M)$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - MD^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow M = D' = X_o\ (D)$$

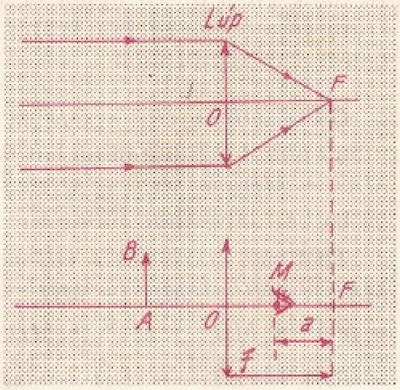
trong đó $D' = X_o\ (D)$ là điểm xuyên tâm đối của D trên mặt cầu $\mathcal{C}\ (ABCD)$

Nhận xét : Có 40 bạn tham gia giải bài này. Những bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả : *Tô Đông Vũ*, 11 chuyên Toán ĐHTH Hà Nội ; *Trịnh Đăng Giang* ; *Nguyễn Tuấn Hải*, 11M Mari–Quyri Hà Nội ; *Nguyễn Vũ Hưng*, 10C chuyên ngữ ĐHSP NN Hà Nội ; *Kiều Văn Ty* 10A ĐHSP Vinh, *Lê Văn Thông*, 11A Quốc học Qui Nhơn, Bình Định ; *Nguyễn Quang Hải* 10C CT PTTH chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú. Tuy nhiên, nhiều bạn chứng minh chưa đầy đủ do vận dụng các phép toán về vectơ chưa tốt. Nhiều bạn chưa chỉ ra được cụ thể khi nào thì (2) trở thành đẳng thức. Có tới 9 bạn chứng minh chưa đạt. Một vài bạn biết sử dụng hình hộp ngoại tiếp tứ diện gần đều là một hình hộp chữ nhật để chứng minh (1) và (2) cũng tương đối đơn giản như *Tô Đông Vũ*.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/200. *Chùm tia tới kính lúp song song với trục chính sẽ hội tụ tại F trên trục chính (F là tiêu điểm ảnh của kính). Mắt người quan sát đặt tại M trên trục chính ở trước F một đoạn a và điều chỉnh sao cho ảnh của vật phẳng nhỏ AB mà mắt nhìn thấy ở cách mắt một khoảng l. Hãy chứng minh là độ bội giác thu được là :*

$$G = \frac{Đ}{f}\left(1 + \frac{a}{l}\right)$$



$Đ$ là khoảng nhìn rõ ngắn nhất của mắt người quan sát và f là tiêu cự của kính lúp. Suy ra có mấy trường hợp mà độ bội giác bằng $\frac{Đ}{f}$?

Lời giải : Góc trong vật khi không dùng kính : $\alpha = \frac{AB}{Đ}$ góc trông ảnh của vật do kính tạo ra : $\alpha' = \frac{A'B'}{l}$

$A'B' = OI$ vì ta vẽ tia BI // trục chính

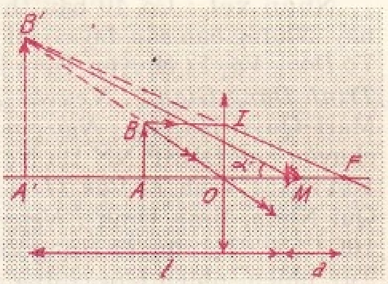
$\Delta FAB \backsim FA'B'$ cho

$\frac{A'B'}{OI} = \frac{FA'}{FO}$ hay $\frac{A'B'}{AB} = \frac{l + a}{f}$

Từ đó ta được $\alpha' = \frac{l + a}{lf}.AB$

Độ bội giác thu được sẽ là :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{Đ}{f}\left(1 + \frac{a}{l}\right)$$



Có hai trường hợp mà độ bội giác bằng $\frac{Đ}{f}$ là khi $a = 0$ và khi $l = \infty$ (ngắm chừng ở vô cực)

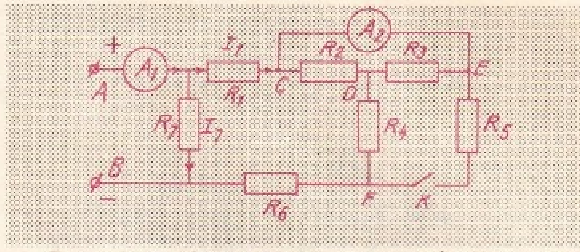
Nhận xét : Có 16 em gửi bài giải, trong đó có 5 em có lời giải tốt : *Bùi Đức Thắng*, 227/15 Trần Hưng Đạo, Cần Thơ ; *Nguyễn Thanh Hải* 12 CT Đào Duy Từ Quảng Bình, *Trần Hồng Quang* 12A PT Dân lập cấp II – III, Xuân Hòa, Vĩnh Phú, *Nguyễn Đức Kế*, Trần Phú, Hà Tĩnh ; *Vũ Thị Bích Hà*, 11C, PTTH chuyên Thái Bình.

OK

Bài L2/200. *Cho mạch điện như hình vẽ $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R; R_5 = R_6 = 3R; R_7 = 5R$. Bỏ qua điện trở của dây nối, khóa K và ampe kế. Khi K mở, ampe kế A_1 chỉ 2A. Hãy tính :*

1. Số chỉ của các ampe kế A_1 và A_2 khi k đóng

2. Với $R = 21\Omega$. Hãy tính U_{AB}



Lời giải : 1) Khi K mở, sơ đồ mắc điện trở :

$[(R_2 // R_3) + R_1 + R_4 + R_6] // R_7$

Suy ra $R_{AB} = \frac{55}{21}R$. Số chỉ của ampe kế A_1 là $I = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{21U_{AB}}{55R}$. Theo đề bài $I = 2A$, suy ra $\frac{U_{AB}}{R} = \frac{110}{21}$

Khi k đóng, $V_C = V_E$, do đó sơ đồ mắc điện trở :

$$\left[\left\{[(R_2 // R_3) + R_4] // R_5\right\} + R_6 + R_1\right] // R_7$$

Suy ra $R_{AB} = \frac{5}{2}R$ và từ đó

$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{44}{21}A.$

Số chỉ của ampe kế A_1 là $I_{AB} = \frac{44}{21}A$

Từ hình vẽ : $I_7 = \frac{U_{AB}}{R_7} = \frac{22}{21}A. \Rightarrow$

$I_1 = I_c - I_7 = \frac{22}{21}A$; $I_4 = I_1\frac{R_{2345}}{R_{234}} = \frac{44}{63}A.$

$\Rightarrow I_2 = I_3 = \frac{I_4}{2} = \frac{22}{63}A \Rightarrow$

$I_{A_2} = I_1 - I_2 = \frac{44}{63}A$

Ampe kế A_2 chỉ $\frac{44}{63}A$

2) Khi $R = 21\Omega$, ta có : $\frac{U_{AB}}{R} = \frac{110}{21} \Rightarrow U_{AB} = 110V.$

Nhận xét : Có 91 em đã gửi bài giải, trong đó có 55 em có lời giải đúng, đặc biệt là các em : *Lê Thanh Minh*, 9_1 Nguyễn Tri Phương TT Huế ; *Nguyễn Quang Tường* 9L, PT Năng khiếu Vinh, Nghệ An ; *Lê Hồng Nam*, 9L, PT năng khiếu Thái Bình, *Nguyễn Văn Lâm*, lớp 9 PTNK Đông Hà, Quảng Trị ; *Lê Việt Hùng*, 9, PNTK Việt Yên, Hà Bắc ; *Nguyễn Đức Phương* 9H, PTCS Trưng Vương, Hà Nội ; *Nguyễn Tiến Vượng*, 9A PTCS Nam Hồng, Nam Ninh, Nam Hà ; *Phạm Anh Dũng*, 9L, PTNK Hải Hưng ; *Nguyễn Quỳnh Nam* 10M Mari Quyri, Hà Nội.

MT

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

GIAO ĐIỂM GIỮA PARABOL VÀ ĐƯỜNG THẲNG

NGUYỄN ĐỨC HẢO

Xét về sự tương quan giữa parabol (P) và đường thẳng (D) ai cũng biết giữa chúng có 3 vị trí tương đối.

Bây giờ ta hãy tìm hiểu sâu hơn qua vấn đề cụ thể sau :

1) Với (P) : $y = x^2/2$ và (D) quay xung quanh điểm I (0, 2) nhưng không trùng với trục tung, (D) sẽ luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

2) Ta thử xét xem ΔOAB có gì đặc biệt không ?

3) Và hãy nhìn xa hơn nữa, với H và K là hình chiếu của A và B trên trục hoành thì ta lại được ΔIHK cũng khá lí thú.

Với học sinh trung bình thì câu 1) có thể cảm nhận khá dễ dàng. Còn đối với các câu 2 và 3 thì học sinh khá giỏi lớp 9 phải tìm tòi đường lối chứng minh cũng khá vất vả.

Nhưng vấn đề lí thú ở bài toán trên là khi (D) quay xung quanh I(0 ; 2) thì hai tam giác OAB và IHK mới có tính chất đặc biệt đó. Còn nếu điểm I có tọa độ khác thì chúng có được như thế không ? Ta được bài toán tổng quát hơn. Với (P) : $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ thì I ở đâu ?

Bài toán tổng quát :

Trên cùng mặt phẳng tọa độ xoy, cho parabol (P) : $y = ax^2$ và đường thẳng (D) đi qua hai điểm $I(0 ; 1/a)$ và $M(m ; 0)$ ($a \neq 0$ và tham số $m \neq 0$).

1) Chứng tỏ rằng (P) cắt (D) tại hai điểm A và B.

2) Chứng minh ΔOAB vuông.

3) Gọi H và K là các hình chiếu của A và B trên trục x'Ox. Chứng minh ΔIHK vuông.

Người viết xin trình bày lời giải theo cách giải của học sinh lớp 9.

1) a) Phương trình của (D) có dạng : $y = \alpha x + \beta$

(D) qua $I(0 ; 1/a) \Leftrightarrow 1/a = \alpha(0) + \beta$

(D) qua $M(m ; 0) \Leftrightarrow 0 = \alpha . m + \beta$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{a} \\ \alpha m + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{a} \\ \alpha = -\dfrac{1}{am} \end{cases}$$

Vậy phương trình của (D) là : $y = -\dfrac{1}{am}x + \dfrac{1}{a}$

b) Tọa độ giao điểm của (P) và (D) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = -\dfrac{1}{am}x + \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Vậy hoành độ x của giao điểm của (P) và (D) là nghiệm của phương trình : $ax^2 = -\dfrac{1}{am}x + \dfrac{1}{a}$

$a^2mx^2 + x - m = 0 \quad (*)$

Ta được : $\Delta = 1 + 4a^2m^2$

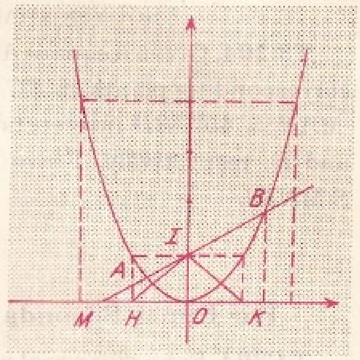
Nhận thấy : $1 + 4a^2m^2 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$

Vậy (D) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

2) Tích các hệ số góc của hai đường thẳng OA và OB là :

$$\frac{y_A}{x_A} \cdot \frac{y_B}{x_B} = \frac{ax_A^2 \cdot ax_B^2}{x_A \cdot x_B} = a^2x_Ax_B.$$

$$= a^2\left(-\frac{m}{a^2m}\right) = -1$$



Vậy OA ⊥ OB hay ΔOAB vuông tại O.

3) Hệ số góc của đường thẳng IH :

$$\frac{y_I - y_H}{x_I - x_H} = \frac{\frac{1}{a}}{-x_A} = -\frac{1}{ax_A}$$

(vì $x_I = 0 ; x_H = x_A$)

Tương tự, hệ số góc của đường thẳng IK : $\dfrac{1}{-ax_B}$

Tích hệ số góc của hai đường thẳng này là : $\dfrac{1}{a^2x_Ax_B} = \dfrac{1}{-1} = -1$

Vậy IH ⊥ IK hay ΔIHK vuông tại I.

Chú thích

1) Ta không giải phương trình (*) để tìm riêng rẽ từng nghiệm (hoành độ của A và B) sẽ rắc rối vô ích mà áp dụng ngay định lí Viète vào phương trình (*) để có được

$$x_Ax_B = \frac{-m}{a^2m} = -\frac{1}{a^2}$$

Thiển nghĩ đây cũng là một bài tập khá lí thú để rèn luyện óc tổng hợp đối với phương trình bậc hai.

2) Sau khi đã chứng minh được câu 1) các bạn có thể tự tập dượt để chứng minh tương tự cho câu 3).

Kết luận ;

Qua bài toán tổng quát trên chắc các bạn đã thấy vai trò của điểm I rồi. Tọa độ của I (0 ; 1/a) tùy thuộc vào hệ số a của (P).

Xin các bạn tự đặt cho điểm này một tên riêng vậy (tiêu điểm của (P) được chăng ?) Và đến đây chắc các bạn cũng đã thấy được cái đặc trưng khá lí thú của đường thẳng qua tiêu điểm của (P) rồi.

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/204. Show that there are positive integers x, y, z, t such that

$$19x^2 + 5y^9 + 1890z^{1945} = t^{1993}$$

PHUONG THAO

T2/204. Solve the following system

$$x^4 - 2y = y^4 - 2z = z^4 - 2x = -\frac{1}{2}$$

NGUYEN KHANH NGUYEN

T3/204. Given a square $ABCD$. M and N are corresponding points on BC and CD such that $\widehat{MAN} = 45^\circ$. BD intersects AM and AN at I and K, respectively. Prove that $S(\Delta\ CIK) = S(MNKI)$

NGUYEN DE

For Upper Secondary Schools

T4/204. For a given real number a, consider the following sequence $\{x_n\} : x_o = a ; x_{n+1} = | x_n - 2^{-n} |$, $n = 0, 1, 2...$

Show that it has a finite limit when $n \to +\infty$, Determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

TRAN XUAN DANG

T5/204. Let $x_1, x_2, ..., x_n \geqslant 0$ $(n \geqslant 2, n \in N)$ such that $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$

Consider

$Q_n = x_1x_2 ... x_{n-1} + x_2x_3 ... x_n + ... + x_nx_1 ... x_{n-2}$

Prove that $Q_n \leqslant 1/n^{n-2}$

Determine when equality occurs ?

TRINH BANG GIANG

T6/204. Find all positive integers n such that the equation

$$x^n + (x+2)^n + (2-x)^n = 0$$

has rational roots

DANG HUNG THANG

T7/204. Show that the equation

$$x^5 + x + 1 = 0$$

admits

$$\frac{1}{3}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{25+\sqrt{621}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{25-\sqrt{621}}{2}}\right)$$

as its unique real root.

TRAN VAN VUONG

T8/204. Prove the equality

$$\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{6\pi}{7}} = 8$$

TRAN TUAN DIEP

T9/204. Given a triangle ABC. Construct in the out side of ABC isosceles triangles AC_1B, BA_1C, CB_1A with bases AB, BA and CA and with the same basic angles α. Show that AA_1, BB_1 and CC_1 pass through a common point.

DAO HONG ANH

T10/204. Let be given tetrahedron $ABCD$

Find the locus of all points M inside the tetrahedron such that the sum of distances from M to 3 arbitrary faces of the tetrahedron is greater than the distance from this point to the remaining face.

NGUYEN DANG PHAT

CÁC ĐƯỜNG VÀ ĐIỂM...

(Tiếp theo trang 16)

$d^2(M, BC) + d^2(M, CA) + d^2(M, AB) <$
$d^2(N, BC) + d^2(N, CA) + d^2(N, AB)$.

c) Đường thẳng Ole : Gọi H, G, O là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó H, G, O nằm trên một đường thẳng, đường thẳng này gọi là *đường thẳng Ole*.

Giả sử I là trung điểm của HO. Khi đó ba chân đường cao, ba trung điểm của 3 cạnh ΔABC, ba trung điểm của HA, HB, HC đều nằm trên một đường tròn nhận I làm tâm. Đường này gọi là *đường tròn chín điểm Ole*.

d) Đường thẳng Simsơn : Giả sử M là một điểm tùy ý trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta\ ABC$; H, I, K là chân đường vuông góc hạ từ M xuống các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó : H, G, I thẳng hàng. Đường thẳng qua H, G, I gọi là *đường thẳng Simsơn*.

Đề nghị các bạn chứng minh các kết quả trên và tìm thêm các kết quả mới. (Thường dùng định lí Xêva hoặc định lí Mênêlauýt để chứng minh). Sau đây là vài gợi ý :

Bài toán 1 : Vòng tròn bàng tiếp $\hat{A}$ của ΔABC tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại một điểm.

Bài toán 2 : Cho ΔABC không cân. AD là phân giác ngoài, BE và CF là các phân giác trong của tam giác ấy. Khi đó D, E, F nằm trên một đường thẳng.

Bài toán 3 : Các điểm D, E, F trong tam giác ABC có tính chất : AD, AE chia $\widehat{BAC}$ thành 3 phần bằng nhau ; BD, BF chia $\widehat{ABC}$ thành 3 phần bằng nhau và CE, CF cũng chia $\widehat{ACB}$ thành 3 phần bằng nhau. Khi đó tam giác DEF đều.

ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp PTCS

Bài T1/204. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn đẳng thức

$$19x^2 + 5y^9 + 1890z^{1945} = t^{1993}$$

PHƯƠNG THẢO

Bài T2/204. Giải hệ phương trình :

$$x^4 - 2y = y^4 - 2z = z^4 - 2x = -\frac{1}{2}$$

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

Bài T3/204. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC và CD lấy hai điểm tương ứng M và N sao cho $\widehat{MAN} = 45^o$. BD cắt AM và AN lần lượt tại I và K. Chứng minh rằng $S(\Delta CIK) = S(MNKI)$

NGUYỄN ĐỄ

Các lớp PTTH

Bài T4/204. Cho số thực a. Xét dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi :

$x_0 = a$, $x_{n+1} = |x_n - 2^{-n}|$ với mọi $n = 0, 1, 2...$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và hãy tìm giới hạn ấy.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

Bài T5/204. Cho $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ ($n \geq 2$, $n \in N$) ; $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Đặt $Q_n = x_1x_2 ... x_{n-1} + x_2x_3 ... x_n + ... + x_nx_1 ... x_{n-2}$

Chứng minh rằng : $Q_n \leq 1/n^{n-2}$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

TRỊNH BẰNG GIANG

Bài T6/204. Tìm tất cả các số nguyên dương n để phương trình

$$x^n + (x+2)^n + (2-x)^n = 0$$

có nghiệm hữu tỷ.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/204. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x + 1 = 0$ có nghiệm số thực duy nhất là

$$\frac{1}{3}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{25+\sqrt{621}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{25-\sqrt{621}}{2}}\right)$$

TRẦN VĂN VUÔNG

Bài T8/204. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\sin^2\frac{6\pi}{7}} = 8$$

TRẦN TUẤN ĐIỆP

Bài T9/204. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài của tam giác đó ba tam giác cân AC_1B, BA_1C, CB_1A có các cạnh đáy AB, BC, CA và góc ở đáy là α. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

ĐÀO HỒNG ANH

Bài T10/204. Cho hình tứ diện $ABCD$. Tìm tập hợp (quỹ tích) những điểm M nằm trong tứ diện mà tổng các khoảng cách từ M đến ba mặt bất kì của tứ diện đã cho lớn hơn khoảng cách từ đó đến mặt còn lại

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Các đề Vật lí

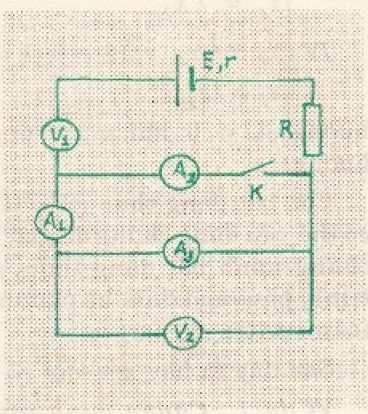
Bài L1/204 : Một thanh AB đồng chất, tiết diện đều, đầu A được dựa trên mặt phẳng nằm ngang, đầu B được giữ bằng một lực hợp với phương thẳng đứng 1 góc β. Ở vị trí cân bằng thanh AB hợp với phương thẳng đứng 1 góc α. Hệ số ma sát nhỏ nhất giữa thanh AB và mặt phẳng ngang để nó có thể nằm cân bằng với mọi $30^o \leq \alpha \leq 45^o$ là $k_m = \frac{1}{3}$. Hãy xác định góc β.

BÙI VĂN PHÚC

Bài L2/204 : Cho mạch điện như hình vẽ. Nguồn (E, r) có $E = 220V$, $r = 10{,}1\Omega$

$R = 80\Omega$; $R_{A_1} = R_{A_2} = R_{A_3} = 10\Omega$

$R_{V_1} = R_{V_2}$.



Bỏ qua điện trở của khóa K và dây nối.

Khi K mở, vôn kế V_1 chỉ giá trị gấp 100 lần vôn kế V_2

Hãy tính số chỉ của các vôn kế và Ampe kế lúc K mở và K đóng.

LẠI THẾ HIỂN

Chú ý : – Mỗi bài giải viết riêng trên một mảnh giấy, có đề số của bài, họ tên, lớp, trường, huyện và tỉnh.

– Bài giải chỉ gửi về một địa chỉ : 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

Ứng dụng tích vô hướng vào việc giải một số bài toán đại số

PHẠM BẢO

Ta đã biết với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, tích vô hướng được định nghĩa như sau :

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v}) \qquad \text{(I)}$$

Từ đó có thể vận dụng để chứng minh hai đường thẳng hoặc là song song hoặc là vuông góc hoặc tính góc làm bởi hai đường thẳng. Tuy nhiên, nếu dừng ở đó thì chưa thấy hết được ứng dụng của nó. Chỉ cần chú ý rằng $\cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq 1$ thì từ (I) có thể suy ra các bất đẳng thức : $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$ (II)

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}| \qquad \text{(III)}$$

trong hệ tọa độ Đề các vuông góc với $u(x_1, y_1, z_1)$ và $v(x_2, y_2, z_2)$ thì biểu thức giải tích của (II) và (III) là

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \leq$$
$$\leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \quad \text{(II')}$$

$$|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2| \leq$$
$$\leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \quad \text{(III')}$$

(II) trở thành đẳng thức khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, còn (III) trở thành đẳng thức khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương, tức là $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ hay :

$$IV \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases}$$

với $\lambda \neq 0$ ($\lambda > 0$ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng, $\lambda < 0$ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương khác hướng).

Các bất đẳng thức (II'), (III') gợi ý cho ta có thể vận dụng chúng để giải một số bài toán : chứng minh bất đẳng thức, giải bất phương trình, phương trình, hệ phương trình hoặc bài toán cực trị.

Sau đây ta hãy xét một số ví dụ.

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng với mọi số a, b, c ta có $abc(a + b + c) \leq a^4 + b^4 + c^4$

Giải : Khai triển vế trái thành $a^2bc + ab^2c + abc^2$ và xét các vectơ $\vec{u}(ab, bc, ca)$ và $\vec{v}(ca, ab, bc)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{c^2a^2 + a^2b^2 + b^2c^2}$$

rồi áp dụng (II) ta được :

$$abc(a + b + c) \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Lại xét các vectơ $\vec{x}(a^2, b^2, c^2)$ và $\vec{y}(b^2, c^2, a^2)$ và áp dụng (II) một lần nữa ta được

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$$

Theo (IV), dễ thấy bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi $a = b = c$.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng nếu $a > c$, $b > c$ và $c > 0$ thì :

$$\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}.$$

Giải : Xét các vectơ $\vec{u}(\sqrt{c}, \sqrt{b - c})$ và $\vec{v}(\sqrt{a - c}, \sqrt{c})$, ta có : $|\vec{u}| = \sqrt{b}$, $|\vec{v}| = \sqrt{a}$. Áp dụng (II') ta được điều cần chứng minh, và theo (IV) bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi

$$\begin{cases} \sqrt{c} = \lambda\sqrt{a - c} \\ \sqrt{b - c} = \lambda\sqrt{c} \end{cases} \Rightarrow c = \frac{ab}{a + b}$$

Ví dụ 3 : Gọi α, β, γ là ba góc tạo bởi đường chéo của một hình hộp chữ nhật với 3 cạnh phát xuất từ cùng một đỉnh.

Chứng minh :

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

2) $\sqrt{4\cos^2\alpha + 1} + \sqrt{4\cos^2\beta + 1} + \sqrt{4\cos^2\gamma + 1} \leq \sqrt{21}$

(Đề 54 câu I Bộ đề thi tuyển sinh vào Đại học)

Giải : 1) Lấy đường chéo của hình hộp chữ nhật làm vectơ đơn vị $\vec{e}$, ba cạnh phát xuất từ cùng một đỉnh của hộp làm ba trục tọa độ thì $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các tọa độ của $\vec{e}$ do đó :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = |\vec{e}|^2 = 1.$$

2) Xét các vectơ $\vec{u}(\sqrt{4\cos^2\alpha + 1}, \sqrt{4\cos^2\beta + 1}, \sqrt{4\cos^2\gamma + 1})$ và $\vec{v}(1, 1, 1)$ ta có :

$$|\vec{u}| = \sqrt{4\cos^2\alpha + 1 + 4\cos^2\beta + 1 + 4\cos^2\gamma + 1} = \sqrt{7}$$

và $|\vec{v}| = \sqrt{3}$. Theo (II') ta có điều cần chứng minh ; và từ (IV), bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi

$\sqrt{4cos^2+1} = \sqrt{4cos^2\beta+1} = \sqrt{4cos^2\gamma+1} \Rightarrow$
$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 4 : Giải bất phương trình :
$\sqrt{x-1} + x - 3 \geqslant \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$ (1)

(Đề 109 câu II_1. Bộ đề thi tuyển sinh vào đại học).

Giải : Với $x \geqslant 1$ xét các vectơ $\vec{u}(\sqrt{x-1}, x-3)$ và $\vec{e}(1, 1)$ ta có $|\vec{u}| = \sqrt{x-1+(x-3)^2}$ và $\vec{e} = \sqrt{2}$. Theo (II') bất phương trình (1) chỉ có thể lấy dấu "=" và nhờ (IV) ta được :
$\sqrt{x-1} = x-3 \Rightarrow x = 5$

Ví dụ 5 : Giải bất phương trình :
$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leqslant 12$ (2)

Giải : Tập xác định của vế trái là $\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{50}{3}$

Xét các vectơ $\vec{u}(\sqrt{x+1}, \sqrt{2x-3}, \sqrt{50-3x})$ và $\vec{v}(1, 1, 1)$, ta có $|\vec{u}| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ và $|\vec{v}| = \sqrt{3}$. Theo (II') bất phương trình (2) luôn thành đẳng thức. Vậy nghiệm của (2) là $\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{50}{3}$

Ví dụ 6. Cho α, β, γ là ba góc dương có $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của
$g = \sqrt{1+tg\alpha tg\beta} + \sqrt{1+tg\beta \cdot tg\gamma} + \sqrt{1+tg\gamma tg\alpha}$

(Đề 144 câu II_2 Bộ đề thi tuyển sinh vào đại học)

Giải : Từ $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2} - \gamma$ ta có

$tg(\alpha+\beta) = tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)$, hay $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \dfrac{1}{tg\gamma}$

$\Rightarrow tg\alpha\, tg\beta + tg\beta tg\gamma + tg\gamma tg\alpha = 1$

và xét các vectơ
$\vec{u}(\sqrt{1+tg\alpha tg\beta}, \sqrt{1+tg\beta tg\gamma}; \sqrt{1+tg\gamma tg\alpha})$
$\vec{v}(1, 1, 1)$, ta có $|\vec{u}| = 2$ và $|\vec{v}| = \sqrt{3}$

Theo (II') ta được
$g = \sqrt{1+tg\alpha tg\beta} + \sqrt{1+tg\beta tg\gamma} + \sqrt{1+tg\gamma tg\alpha} \leqslant 2\sqrt{3}$
từ đó $\max(g) = 2\sqrt{3}$ khi $tg\alpha = tg\beta = tg\gamma$

$\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{6}$

Ví dụ 7 : Giải phương trình
$\sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{2-\sin^2 x} = 3$ (3)

(Đề 146 câu III_1 – Bộ đề thi tuyển sinh vào Đại học)

Giải : Xét vectơ $\vec{u}(\sin x, 1, \sqrt{2-\sin^2 x})$ và $\vec{v}(1, \sqrt{2-\sin^2 x}, \sin x)$

Ta có $|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{3}$

Theo (III') ta có $|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}| . |\vec{v}| = 3$ và từ (IV) ta có hệ :

$$\begin{cases} \sin x = \lambda \\ 1 = \lambda\sqrt{2-\sin^2 x} \\ \sqrt{2-\sin^2 x} = \lambda \sin x \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ và $\sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in Z)$

Ví dụ 8 : Chứng minh rằng hệ sau đây vô nghiệm

$$\begin{cases} x^4+y^4+z^4 = 1 \\ x^2+y^2+2z^2 = \sqrt{7} \end{cases}$$

Giải : Xét các vectơ
$\vec{u}(x^2, y^2, z^2)$ và $\vec{v}(1, 1, 2)$, ta có $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = \sqrt{6}$. Theo hệ trên, ta có $\vec{u}.\vec{v} = x^2+y^2+2z^2 = \sqrt{7}$ và $|\vec{u}| . |\vec{v}| = \sqrt{6}$; do đó $\vec{u}.\vec{v} > |\vec{u}| . |\vec{v}|$, điều này mâu thuẫn với (II). Vậy hệ trên vô nghiệm.

Qua các ví dụ trên rõ ràng ta thấy sự phong phú, tính hiệu quả, ngắn gọn của việc sử dụng tích vô hướng để giải một số bài toán thường gặp. Sau đây là một số đề toán để luyện tập :

1. Chứng minh bất đẳng thức :

$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leqslant 1$

2. Cho a, b, c là 3 số không âm và $a+b+c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :
$F = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$. Đáp số : $\sqrt{6}$

3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x}$. Đáp số : $\sqrt{10}$

4. Giải phương trình

$x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$.

Đáp số : 1 ; $1+\sqrt{2}$

5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+z = 3 \\ x^2+y^2+z^2 = 3 \\ x^5+y^5+z^5 = 3. \end{cases}$$

Đáp số $(1 ; 1 ; 1)$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CÁC LỚP CHUYÊN TRƯỜNG ĐHTH HÀ NỘI - MÔN TOÁN (chung)

(Thời gian 180 phút)

Câu I : a) Giải phương trình

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = 2$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$$

Câu II : Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của biểu thức

$$A = x^2y(4 - x - y)$$

khi x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện :

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 6$$

Câu III : Cho hình thoi $ABCD$. Gọi R, r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC và a là độ dài cạnh hình thoi. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{4}{a^2}$$

Câu IV. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Quay tam giác đó quanh tâm O, một góc 90^0 (theo chiều nào cũng được) ta nhận được tam giác $A_1B_1C_1$. Tính diện tích phần chung của hai tam giác ấy theo R.

Câu V. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c đôi một khác nhau sao cho biểu thức

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$$

nhận giá trị nguyên dương.

Bài giải

Câu I. a) Điều kiện : $x \geqslant -\frac{1}{4}$

Đặt $\sqrt{x + \frac{1}{4}} = y$; $y \geqslant 0 \Rightarrow$

$$x = y^2 - \frac{1}{4}$$

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$y^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} + y} = 2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

$\Leftrightarrow y^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right) = 2$ (do $y \geqslant 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y + 2 > 0$)

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{2} \\ y = \dfrac{-2\sqrt{2} - 1}{2} < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $\sqrt{x + \frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2} \Leftrightarrow$ $x = 2 - \sqrt{2}$.

b) Với $y = 0$ thì hệ có dạng $\begin{cases} x^3 = 0 \\ x^2 = 12. \end{cases}$

Hệ vô nghiệm

Xét $y \neq 0$. Thay $12 = 8y^2 + x^2$ vào (1) ta được $x^3 + 2xy^2 + (8y^2 + x^2)y = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + 2\right)\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) + 4\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{y} = -2 \Leftrightarrow x = -2y.$$

Thế vào phương trình thứ hai, ta được

$$8y^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

$y = 1 \Rightarrow x = -2$.

$y = -1 \Rightarrow x = 2$. Vậy hệ có hai nghiệm $(x, y) = (-2, 1)$ và $(x, y) = (2, -1)$

Câu II. a) Giá trị lớn nhất :

Khi $x + y \geqslant 4$ thì $A \leqslant 0$.

Xét $x + y < 4$ thì

$$A = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y \cdot (4 - x - y) \leqslant$$

$$4 \cdot \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y + 4 - x - y}{4}\right)^2 = 4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{x}{2} = y = 4 - x - y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy $\max A = 4$ khi $x = 2$, $y = 1$ (thỏa mãn điều kiện bài ra).

b) Giá trị nhỏ nhất :

$$-\frac{A}{4} = \frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot y(x+y-4)$$

Nếu $x+y \leqslant 4$ thì $A \geqslant 0$

Nếu $x+y > 4$ thì

$$-\frac{A}{4} \leqslant \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y+x+y-4}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{A}{4} \leqslant \left(\frac{2(x+y)-4}{4}\right)^4$$

Mà $x+y \leqslant 6$ nên $-\frac{A}{4} \leqslant 16 \Rightarrow A \geqslant -64$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}\frac{x}{2} = y = x+y-4\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$$

Vậy $\min A = -64$ khi $x = 4$, $y = 2$ (thỏa mãn điều kiện bài ra).

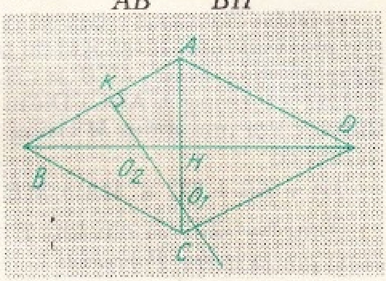
Câu III. Gọi H là giao điểm của các đường chéo, K là trung điểm của AB. Đường vuông góc với AB tại K cắt AC tại O_1, BD tại O_2. Khi đó : $O_1A = R$; $O_2B = r$.

$\Delta O_1AK \sim \Delta HAB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{O_1A}{AB} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{a}{2AH} \quad (1)$$

$$\Delta O_2BK \sim \Delta HAB \Rightarrow \frac{O_2B}{AB} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow$$

$$\frac{r}{a} = \frac{a}{2BH} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra

$$4AH^2 = \frac{a^4}{R^2};$$

$$4BH^2 = \frac{a^4}{r^2}$$

và

$$4(AH^2 + BH^2) = a^4\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}\right)$$

hay $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{4}{a^2}$.

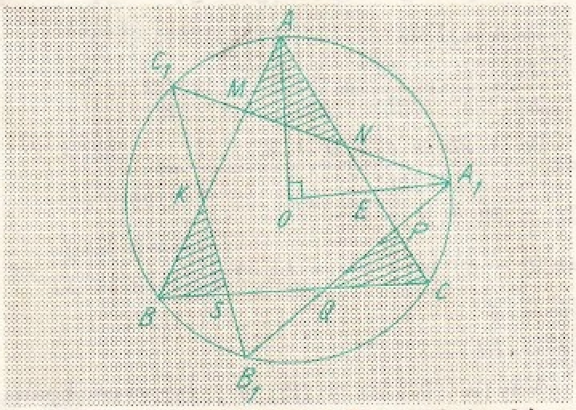
Câu IV. Khi quay một góc 90^o thì $OA \perp OA_1$. Mặt khác $OA \perp BC$ nên $OA_1 // BC$. Tương tự cũng có $OB_1 // AB$; $OC_1 // AC$.

Vì A_1, B_1 nằm trên hai cung khác nhau nên A_1B_1 phải cắt AC, BC tại các điểm trong P, Q của các cạnh AC và BC. Tương tự, ta cũng nhận được các giao điểm M, N và K, S.

Vậy phần chung của hai tam giác là lục giác $MNPQSK$. Gọi diện tích của lục giác này là S thì

$$S = S_{ABC} - (S_{AMN} + S_{BKS} + S_{CPQ})$$

$$S_{ABC} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$



Tam giác A_1EN cân tại E (góc ở đáy bằng 30^o) nên $\Delta\, AMN$ vuông tại M và $AN = 2AM$.

Tính AN : $AN = AE - EN$;

$$AE = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{\sqrt{3}}R$$

$$EN = EA_1 =$$

$$= R - OE = R - \frac{1}{3}BC = R - \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AN = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)R = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)R$$

$$\Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AM\,.\,AN\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$$

Vậy $S = \frac{R^2}{4}(9 - 3\sqrt{3})$.

Câu V. Quy đồng mẫu số, ta có :

$A.abc = ab + bc + ca + a + b + c$ (1)

Ta chứng minh 3 số a, b, c cùng có tính chẵn, lẻ.

Nếu abc lẻ thì a, b, c là các số lẻ.

Nếu abc chẵn thì có ít nhất 1 số chẵn, giả sử a chẵn.

Từ (1) suy ra $bc + b + c$ chẵn.

Mà $bc + b + c = (b+1)(c+1) - 1$ nên $(b+1)(c+1)$ lẻ. Do vậy $b+1$ và $c+1$ lẻ, hay b, c chẵn.

Không mất tính tổng quát, trước hết có thể giả thiết $a < b < c$.

Nếu $a \geqslant 3$ thì do a, b, c cùng tính chẵn lẻ nên $b \geqslant 5$, $c \geqslant 7$ và

$$A \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{35} < 1$$

Vậy $a = 2$ hoặc $a = 1$

Với $a = 2$ thì $b \geqslant 4$; $c \geqslant 6$.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{bc} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{28}{24} < 2$$

$\Rightarrow A = 1$ và

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2c + 2b + c + b + 2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$3c + 3b + 2 = bc$$

$$\Leftrightarrow (b-3)(c-3) = 11 \Rightarrow \begin{cases} b - 3 = 1 \\ c - 3 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = 4 \\ c = 14 \end{cases}$$

Vậy $(a, b, c) = (2, 4, 14)$ và các hoán vị của nó : $(4, 2, 14)$; $(14, 2, 4)$,... là nghiệm

Với $a = 1$ thì $b \geq 3, c \geq 5$

$$A \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{32}{15} < 3$$

Vậy $A = 1$ hoặc $A = 2$.

$A = 1$ không xảy ra vì

$$1 < 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc}$$

$A = 2$ thì

$$2 = 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{bc}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{bc} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(b + c) + 1 = bc \quad (2)$$

Vì $a = 1$ nên $b = 2n + 1$; $c = 2m + 1$ $(0 < n < m)$ Khi đó (2) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(2n + 1 + 2m + 1) + 1 = (2n + 1)(2m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(n + m + 1) + 1 = 4nm + 2n + 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow (n + m) + 2 = 2nm \quad (3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2nm < 2m + 2$$

$$\Leftrightarrow nm < m + 1 \Rightarrow n = 1$$

Khi đó, thế vào (3) ta được :

$$1 + m + 2 = 2m \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy $b = 3$; $c = 7$.

Suy ra $(a, b, c) = (1, 3, 7)$ và các hoán vị của nó là nghiệm.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG
NGUYỄN VĂN MẬU

Bạn có biết ?

Các đường và điểm đặc biệt trong tam giác

LÊ QUỐC HÁN

Các bạn đã biết một số điểm đặc biệt (Trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp...) và các đường đặc biệt (đường cao, trung tuyến, phân giác, trung trực...) của một tam giác. Trong bài báo nhỏ này, tôi muốn giúp bạn làm giàu thêm các kết quả đẹp liên quan đến kho tàng ấy.

1) Điểm đặc biệt :

a) Điểm Giécgôn : Giả sử A_1, B_1, C_1 là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC trên các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại một điểm. Điểm này gọi là *điểm Giécgôn*.

Để chứng minh điều đó, ta chỉ cần áp dụng định lí Mênêlauýt cho tam giác ABC.

b) Điểm Brô-oa : Trong tam giác ABC, tồn tại hai điểm M_1 và M_2 thỏa mãn tính chất $\widehat{M_1AB} = \widehat{M_1BC} = \widehat{M_1CA}$. Điểm này gọi là *điểm Brô-oa*.

Để chứng minh, các bạn có thể dùng phương pháp dựng hình. Nếu biết chút ít về lượng giác, bạn có thể chứng minh dễ dàng : Nếu $\widehat{M_1AB} = \alpha$ thì $\cot g\alpha = \cot gA + \cot gB + \cot gC$.

c) Điểm Torisenli : Giả sử ΔABC không có góc nào vượt quá 120^o. Khi đó tồn tại duy nhất điểm T thỏa mãn $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA} = 120^o$ (T trong Δ ABC) Điểm T có tính chất thú vị : Với mọi điểm M trong tam giác ABC, ta đều có

$$TA + TB + TC \leq MA + MB + MC.$$

(Dấu "=" khi và chỉ khi $T \equiv M$). Điểm T được gọi là *điểm Torisenli*.

2) Đường đặc biệt :

a) Đường đối trung : Giả sử AM và AD là đường trung tuyến và phân giác trong của tam giác. Khi đó đường thẳng AM_1, đối xứng với AM qua AD, gọi là *đường đối trung*.

Mỗi tam giác có ba đường đối trung. Bạn hãy nghiên cứu tính chất của chúng.

b) Đường đẳng giác : Giả sử G là trọng tâm ΔABC. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M thỏa mãn tính chất : AM, BM, CM theo thứ tự đối xứng với AG, BG, CG qua phân giác A, B, C tương ứng. Khi đó AM, BM, CM gọi là *đường đẳng giác*.

Điểm M có tính chất thú vị : với mọi điểm $N \neq M$, N trong tam giác ABC, ta có

(Xem tiếp trang 10)

Kết quả kì thi quốc gia chọn học sinh giỏi toán lớp 9 năm học 1993 - 1994

Kì thi quốc gia chọn học sinh giỏi toán lớp 9 năm học 1993 – 1994 đã tiến hành vào ngày 3 – 3 – 1994. Mỗi thí sinh phải làm 4 bài toán trong thời gian 180 phút. Có 450 học sinh trong cả nước dự thi. Bảng A có 273 em, bảng B có 177 em. Sau khi chấm thi, xét đề nghị của các tổ chấm thi và căn cứ vào tình hình cụ thể của học sinh thi ở từng bảng, hội đồng chấm thi của Bộ đã quyết định danh sách các em trúng giải như sau :

I – BẢNG A

• **Giải nhất** (từ 18 đến 20 điểm) : *Bùi Thị Lan Hương*, Hải Hưng (19,5 điểm)

Phan Nguyên Hải, Vĩnh Phú (19,0 điểm)

Nguyễn Thị Minh Tâm, Hà Bắc (19,0 điểm)

• **Giải nhì** (từ 16 đến dưới 18 điểm)

Nguyễn Hữu Quỳnh, Nguyễn Hoàng Dương (Hà Nội) ; *Trần Thị Bích Diệp* (Hà Bắc) ; *Hà Anh Tuấn, Nguyễn Đăng Trúc, Phan Thị Lan, Đặng Trọng Trinh* (Vĩnh Phú) ; *Nguyễn Tiến Đạt, Đào Xuân Dương, Hà Thu Thảo* (Hải Hưng) ; *Nguyễn Phương Anh, Bùi Đức Chính, Vũ Trung Dũng* (Nam Hà) ; *Trương Thị Hồng Thanh* (Ninh Bình) ; *Nguyễn Thanh Tùng, Nguyễn Ngọc Hưng* (Thanh Hóa) ; *Nguyễn Trí Dũng* (Hà Tĩnh) ; *Nguyễn Thiên Ân* (Khánh Hòa).

• **Giải Ba** (từ 13 đến dưới 16 điểm)

Nguyễn Bá Hùng, Đỗ Quốc Anh, Bùi Quang Minh, Phạm Lê Hùng (Hà Nội) ; *Phạm Văn Tiến* (Hà Bắc) ; *Phạm Hồng Hạnh* (Vĩnh Phú) ; *Phạm Viết Thắng, Trần Nguyên Ngọc, Tạ Thị Bích Hạnh* (Hà Tây) ; *Tô Trần Hùng, Phạm Hồng Hiến, Lưu Văn Thành* (Hải Phòng) ; *Phạm Thái Hà, Trần Công Cường, Trịnh Hồng Mai, Vũ Tiến Hào* (Thái Bình) ; *Vũ Duy Anh* (Nam Hà) ; *Vũ Việt Dũng, Trần Thị Thảo* (Ninh Bình) ; *Đỗ Quang Thế, Đặng Anh Tú* (Thanh Hóa) ; *Nguyễn Xuân Sơn, Nguyễn Hồng Chung* (Nghệ An) ; *Phan Tiến Dũng, Trịnh Thị Kim Chi, Dương Hải Đường, Nguyễn Thị Thúy* (Hà Tĩnh) ; *Đào Xuân Vinh* (Thừa Thiên – Huế) ; *Võ Hải Linh* (Bình Định) ; *Đàm Khánh Hòa* (Phú Yên).

• **Giải khuyến khích** (từ 10 đến dưới 13 điểm)

Nguyễn Anh Tú, Nguyễn Quang Nghĩa (Hà Nội)

Ngô Duy Hòa, Nguyễn Khắc Quyết, Nguyễn Tiến Thành, Nguyễn Quang Minh, Đồng Thị Thanh Tâm, Nguyễn Tiến Đặng (Hà Bắc) ;

Trần Đình Chi (Vĩnh Phú) ;

Trương Thanh Chương, Trần Trung Thành, Đặng Quang Minh, Nguyễn Minh Đạt, Đặng Thanh Bình (Hà Tây) ;

Vũ Thị Thu Hương (Hải Hưng).

Trần Huy Phương, Hoàng Lê Quang, Hoàng Thị Thúy Hà (Hải Phòng) ;

Hoàng Đức Trung (Quảng Ninh) ;

Bùi Quang Minh, Nguyễn Thu Minh, Trần Quang Phát (Thái Bình) ;

Lâm Văn Lý, Trần Duy Mạnh (Nam Hà) ;

Nguyễn Trần Minh Khôi, Nguyễn Thu Hoài, Nguyễn Quang Huy (Ninh Bình) ;

Hoàng Khắc Công, Lê Vũ Long, Trịnh Hữu Trung (Thanh Hóa) ;

Lê Văn An, Vũ Văn Hoan, Nguyễn Cảnh Hào (Nghệ An) ;

Nguyễn Ngọc Tú, Bùi Tiến Sĩ (Hà Tĩnh)

Võ Hoàng Hải, Trần Thanh Quang, Nguyễn Huy Trung, Võ Đăng Khoa, Trương Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Hồng Nhật, Võ Thanh Tùng (Thừa Thiên – Huế)

Lê Hoài Thanh, Võ Tâm Vân, Nguyễn Thế Trí (Bình Định) ;

Trần Minh Đông (Phú Yên) ; *Nguyễn Minh Trí* (Tiền Giang).

II – BẢNG B

• **Giải nhất** (từ 18 đến 20 điểm) : *Lê Tuấn Anh*, Hòa Bình (19 điểm)

• **Giải nhì** (từ 15 đến dưới 18 điểm) *Võ Hoàng Minh*, Vĩnh Long (17 điểm)

• **Giải ba** (từ 12 đến dưới 15 điểm)

– *Nguyễn Khả Việt Sơn* (Gia Lai) ; *Hồ Tấn Thuận* (Kon Tum) ; *Mai Đức Thanh, Vũ Hải Đông, Lê Anh Dũng, Trần Minh Hậu* (Đắc Lắc) ; *Đoàn Thanh Bình* (Sông Bé) ; *Bùi Đăng Hoàn* (Đồng Tháp) ; *Lê Chí Nguyễn, Trần Thị Huyền Thảo, Phạm Minh Nhật* (Minh Hải)

• **Giải khuyến khích** (từ 9 đến dưới 12 điểm)

Phan Khánh Toàn, Nguyễn Anh Tuyết, Nguyễn Quốc Hưng, Trần Anh Tuấn (Hòa Bình) ; *Đào Duy Chung* (Gia Lai) ; *Hoàng Tùng, Hoàng Sử* (Đắc Lắc) ; *Lương Xuân Thủy* (Bến Tre) ; *Chu Thị Nguyệt Thu, Nguyễn Phi Hùng* (Sông Bé) ; *Lâm Vĩnh Thế* (Trà Vinh) ; *Nguyễn Tấn Anh Khoa* (Vĩnh Long) ; *Giang Trần Phương Linh, Mã Tú Thanh* (Minh Hải)

Như vậy ở bảng A có 98 em đạt giải, chiếm tỉ lệ 35,9 % và ở bảng B có 27 em đạt giải, chiếm tỉ lệ 15,3%. Nếu kể cả hai bảng thì tỉ lệ đạt giải là 27,8%.

NGUYỄN HỮU THẢO

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài

Đếm đèn

Gọi x là số đèn treo đêm TRUNG THU. Theo đầu bài ta có $x \vdots 5$, x chia 7 dư 2, x chia 9 dư 4. Như vậy $x + 5 \vdots 5$, $x + 5 \vdots 7$ và $x + 5 \vdots 9$. Nhưng 5, 7 và 9 là các số nguyên tố cùng nhau nên $x + 5 \vdots 5 \times 7 \times 9$, hay $x + 5 = k\,315$, k là số nguyên dương lớn hơn không. Cũng theo đầu bài thì $300 < x < 400$. Vậy $x + 5 = 315$ $(k = 1)$. Từ đó suy ra : $x = 310$.

Theo *Lê Bích Thảo*, 6A, Trường Quang Trung, Tây Sơn, Bình Định và một số bạn khác.

BÌNH PHƯƠNG

Trao đổi về bài toán phương trình kiểu FERMAT

Bài toán tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n} \; (x_1 \neq 0,\; n \geq 2) \qquad (1)$$

được giới thiệu hai lần trên báo Toán học Tuổi trẻ (số 193/1993 và 201/1994) đã gây nhiều hứng thú cho học sinh chuyên Tin trường PTTH Công nghiệp Hà Đông chúng tôi.

Đây là một bài toán hay về mặt Tin học : chúng tôi đã phải vận dụng nhiều suy nghĩ mang tính chất "Tin học" (xử lí vấn đề tràn ô nhớ hiệu suất về mặt thời gian có thể chấp nhận được : Không lâu quá)

Với số báo 201/1994 chúng tôi háo hức giải bài toán với lời thúc dục của tác giả Tạ Hồng Quảng "Ai sẽ là người tìm được nghiệm tiếp theo lớn hơn số 912.985.153"

Kết quả bước đầu chúng tôi đã tìm thấy các nghiệm lớn hơn số này là những số sau đây :

4.679.307.774, 32.164.049.650, 40.028.394.225, 42.678.290.603, 49.388.550.606, 32.164.049.651, 94.204.591.914, 44.708.635.679, 82.693.916.578

Thuật toán chính của chúng tôi là

– Tạo mảng dữ liệu chứa sẵn các kết quả tính toán nhiều lần

– Quay lui không đệ qui để tạo các hoán vị của các chữ số

– Đặt một số mắt lọc thích hợp (kiến thức Toán)

Với máy Vi tính Fujikama 286 chương trình chạy trong thời gian 97s

Với máy Vi tính AcerMate 486 chương trình chạy trong thời gian 40s

Rất tiếc, đến đây chương trình của chúng tôi còn bị phụ thuộc vào chữ số Tin cậy thứ 12 (kiểu dữ liệu Real của máy tính) nên chúng tôi không thể đưa ra những kết quả khác nữa ; nhưng chúng tôi nghĩ có thể thay đổi lại kiểu cấu trúc dữ liệu (chọn kiểu String) và hy vọng có thể khắc phục được tình trạng này.

Phải chăng sẽ có sự may mắn đến với những người chịu khó tìm kết quả với những con số có số chữ số là 13.

Chúng tôi mong được trao đổi với các bạn trong thời gian tới.

Các nghiệm của phương trình kiểu FERMAT

$n = 3$: 370 , 407, 153 , 371

$n = 4$: 8.208 1.634, 9.474

$n = 5$: 93.084 , 92.727, 54.748

$n = 6$: 548.834

$n = 7$: 1.741.725 , 4.210.818 , 9.800.817, 9.926.315

$n = 8$: 24.678.050 , 24.678.051, 88.593.477

$n = 9$: 146.511.208 , 472.335.975, 534.494.836 , 912.985.153

$n = 10$: 4.679.307.774

$n = 11$: 32.164.049.650 , 40.028.394.225 , 42.678.290.603 , 49.388.550.606 32.164.049.651, 44.708.635.679 , 82.693.916.578 94.204.591.914

Ai sẽ là người tìm được nghiệm tiếp theo lớn hơn 94.204.591.914 ?

TRẦN ĐỖ HÙNG – LÊ SỸ QUANG

THAY CHỮ BẰNG SỐ

Thay dấu * và các chữ bằng các chữ số thích hợp để phép tính sau là đúng

```
  TOANHOC
- HOCTOAN
  8 * 23 * 81
```

NGUYỄN ĐỨC TẤN

ISSN : 0866 – 8035.
Mã số : 8BT06M4
Chỉ số 12884
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 6 /1994
Giá : 1200đ
Một nghìn hai trăm đồng