BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

5(203)
1994

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

- SỬ DỤNG DIỆN TÍCH TRONG CHỨNG MINH

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN HỌC 1993-1994

- **BÀI TOÁN VỀ ĐIỀN SỐ**

- **CÁC SỐ JOSÈPHE**

Ứng dụng tích phân để chứng minh bất đẳng thức

Trong giờ học máy vi tính ở trường Hà Nội - Amsterdam

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT: 260786
231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : ĐOÀN HỒNG

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

SỬ DỤNG DIỆN TÍCH TRONG CHỨNG MINH

THÁI VIẾT THẢO

Những bài toán xét dưới đây có thể giải được bằng nhiều cách khác. Ở đây chúng ta bàn đến cách sử dụng các công thức diện tích. Vận dụng nó như một công cụ khác, nhằm làm phong phú cách nhìn, suy luận, và do đó làm cho quá trình giải toán hứng thú, không gò bó.

Ta dựa vào các khẳng định đã biết :

1) Một đa giác chia thành các đa giác không giao nhau thì diện tích đa giác ban đầu bằng tổng diện tích các đa giác được chia ra.

2) Hai tam giác đồng dạng thì tỷ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

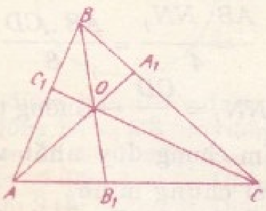
3) Hai tam giác có chung đáy, thì tỉ số diện tích bằng tỉ số 2 đường cao.

4) Hai tam giác có chung đường cao (đường cao bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy.

Dưới đây sẽ trình bày một số ứng dụng công thức diện tích vào các vấn đề :

a) Tỉ số độ dài các đoạn thẳng có thể tính theo tỉ số các diện tích

Bài toán 1. Trên các cạnh AC và AB của ΔABC lấy các điểm B_1, C_1 tương ứng. Gọi O là giao điểm của BB_1 và CC_1. Hãy tính $\dfrac{OB}{OB_1}$ nếu $\dfrac{BC_1}{AC_1}=\alpha$ và $\dfrac{CB_1}{AB_1}=\beta$



Giải : Ta có $\dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta B_1OC}}$

Xét hai tỷ số : $\dfrac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta B_1OC}}$ và $\dfrac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOC}}$

Rõ ràng rằng $\dfrac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta B_1OC}}=\dfrac{AC}{B_1C}=$

$$=\frac{AB_1+B_1C}{B_1C}=1+\frac{AB_1}{B_1C}=1+\frac{1}{\beta}$$

Vì ΔBOC và ΔAOC có OC chung nên tỉ số diện tích bằng tỉ số đường cao hạ tới OC, tỉ số đó bằng $\dfrac{BC_1}{AC_1}$ vì vậy $\dfrac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOC}}=\dfrac{BC_1}{AC_1}\rightarrow\dfrac{BO}{B_1O}=$

$$=\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta B_1OC}}=\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOC}}\cdot\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{B_1OC}}=\alpha\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$$

Bài toán 2 (Đ.lí Xêva) Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC lấy các điểm C_1, A_1, B_1 tương ứng. Chứng tỏ rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi $\dfrac{AB_1}{B_1C}\cdot\dfrac{CA_1}{A_1B}\cdot\dfrac{BC_1}{C_1A}=1$

Giải : Giả sử các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại O. Áp dụng các tỉ số diện tích ta nhận được :

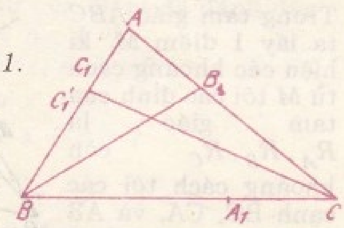
$\dfrac{CA_1}{A_1B}=\dfrac{S_{\Delta ACO}}{S_{\Delta ABO}}$; $\dfrac{BC_1}{C_1A}=\dfrac{S_{\Delta BCO}}{S_{\Delta ACO}}$ và $\dfrac{AB_1}{CB_1}=\dfrac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta BCO}}$

Nhân 3 đẳng thức lại với nhau ta có :

$\dfrac{AB_1}{B_1C}\cdot\dfrac{CA_1}{A_1B}\cdot\dfrac{BC_1}{C_1A}=1.$ Ta chứng minh điều kiện đủ :

Nếu $\dfrac{AB_1}{B_1C}\cdot\dfrac{CA_1}{A_1B}\cdot\dfrac{BC_1}{C_1A}=1.$

Giả sử O là giao của AA_1 và BB_1.



Ta kí hiệu C'_1 là giao của OC và AB thế thì từ điều kiện cần ta có : $\dfrac{AB_1}{B_1C}\cdot\dfrac{CA_1}{A_1B}\cdot\dfrac{BC'_1}{C'_1A}=1=\dfrac{AB_1}{B_1C}\cdot\dfrac{CA_1}{A_1B}\cdot\dfrac{BC_1}{C_1A}$ do đó $\dfrac{BC'_1}{C'_1A}=\dfrac{BC_1}{C_1A}$. C và C' là 2 điểm chia trong AB theo cùng 1 tỷ số vì vậy C_1 và C'_1 trùng nhau. Tức là AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Định lí Xêva vẫn đúng khi A_1, B_1, C_1 nằm ngoài các cạnh của ΔABC.

Bài toán 3. Cho ΔABC, BD là phân giác trong của góc B, hãy chứng minh

$$BD=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$$

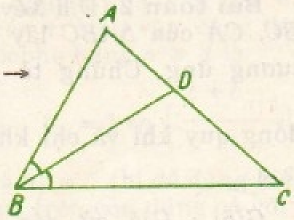
Giải : Ta có :

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{\frac{1}{2}AB\,.\,BD\,.\,\sin\frac{B}{2}}{\frac{1}{2}AB\,.\,BC\sin B}=\frac{BD}{2BC\,.\,\cos\frac{B}{2}}$$

Mặt khác :

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD}{AC} = \frac{c}{a+c} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{BD}{2a \,.\, \cos\frac{B}{2}} = \frac{c}{a+c}$$



$$\rightarrow BD = \frac{2ac}{a+c} \,.\, \cos\frac{B}{2} (đpcm)$$

b) Sử dụng tốt mối liên hệ giữa tỉ số diện tích với tỉ số các đường cao, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp ... của tam giác, đa giác.

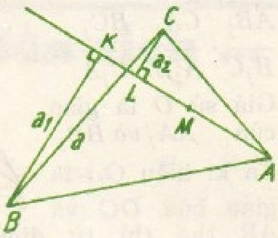
Bài toán 4. Cho 1 đa giác lồi ngoại tiếp 1 đường tròn bán kính r. Ta chia đa giác đó thành các tam giác không giao nhau. Chứng minh rằng tổng các bán kính đường tròn nội tiếp trong các tam giác đó lớn hơn r.

Giải : Kí hiệu các bán kính đường tròn nội tiếp trong các tam giác đó là $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Chu vi của chúng là $p_1, p_2, \ldots, p_n$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n$ là diện tích của chúng. Gọi chu vi đa giác đầu là P và diện tích là S. Ta luôn có $P_i < P \ \forall i = \overline{1, n} \rightarrow r_1 + r_2 + \ldots + r_n = \frac{2S_1}{p_1} + \frac{2S_2}{p_2} + \ldots + \frac{2S_n}{p_n} >$

$$> \frac{2S_1}{p} + \frac{2S_2}{p} + \ldots + \frac{2S_n}{p} = \frac{2S}{p} = r \text{ (đpcm)}.$$

Bài toán 5.

Trong tam giác ABC ta lấy 1 điểm M, kí hiệu các khoảng cách từ M tới các đỉnh của tam giác là R_A, R_B, R_C còn khoảng cách tới các cạnh BC, CA, và AB là $d_a; d_b, d_c$.



a) Chứng minh rằng : $a \,.\, R_a \geq c \,.\, d_c + b \,.\, d_b$

b) $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$

(Bất đẳng thức Ec dô sơ)

Giải : Hạ từ B và C các đường vuông góc BK và CL trên đường thẳng MA' (hình trên)

Kí hiệu $a_1 = BK$; $a_2 = CL$. Rõ ràng

$$a_1 + a_2 \leq a \rightarrow \frac{1}{2} a \,.\, R_a \geq \frac{1}{2} a_1 \,.\, R_a + \frac{1}{2} a_2 \,.\, R_a$$

$$= S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2} b \,.\, d_b + \frac{1}{2} c \,.\, d_c$$

Bất đẳng thức đúng nếu M thuộc miền *trong* góc BAC, không đúng khi M ở ngoài.

b) Biến đổi bất đẳng thức a, và bằng việc lấy đối xứng của M qua phân giác góc A ta có :

$$R_a \geq \frac{c}{a} \,.\, d_b + \frac{b}{a} \,.\, d_c \text{ tương tự :}$$

$$R_b \geq \frac{c}{b} \,.\, d_a + \frac{a}{b} \,.\, d_c \ ; \ R_c \geq \frac{1}{c} \,.\, d_b + \frac{b}{c} \,.\, d_a.$$

Từ đó suy ra : $R_a + R_b + R_c \geq$

$$\geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \,.\, d_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) d_b + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \,.\, d_c$$

$\geq 2(d_a + d_b + d_c)$ (Sử dụng b.đ.t $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \ \forall x, y > 0$)

Bài toán 6. Giả sử $ABCD$ là 1 tứ giác lồi sao cho đường thẳng CD tiếp xúc với đường tròn đường kính AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD là các đường thẳng BC và AD song song với nhau.

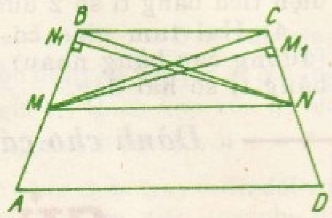
(Vô địch toán quốc tế lần thứ 25 (1984))

Giải : Gọi M là trung điểm của AB.

Gọi N là trung điểm của CD

M_1 là hình chiếu của M trên CD

N_1 là hình chiếu của N trên AB



Từ gt ta có $MM_1 = \frac{AB}{2}$

Ta lại có :

$$S_{\Delta NAM} = S_{\Delta NBM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \,.\, NN_1 = \frac{AB \,.\, NN_1}{4}$$

$$S_{\Delta MCN} = S_{\Delta MND} = \frac{1}{2} MM_1 \frac{CD}{2} = \frac{AB \,.\, CD}{8}$$

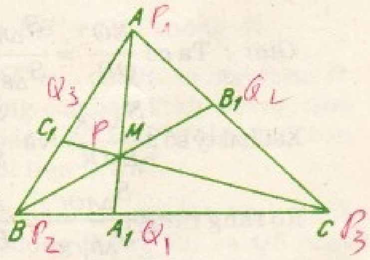
Như vậy $AD \parallel BC \leftrightarrow BC \parallel MN$ và $AD \parallel MN$ $\leftrightarrow S_{\Delta BMN} = S_{\Delta CMN}$ và $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta DMN}$

$$\leftrightarrow \frac{AB \,.\, NN_1}{4} = \frac{AB \,.\, CD}{8}$$

$\leftrightarrow NN_1 = \frac{CD}{2} \leftrightarrow$ Đường tròn đường kính CD có điểm chung duy nhất với AB tại N_1. Điều phải chứng minh.

Bài toán 7.

Cho điểm M trong ΔABC. Qua M vẽ các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh tam giác tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1



Chứng minh rằng :

a) $\frac{AM}{A_1M} + \frac{BM}{B_1M} + \frac{CM}{C_1M} \geq 6$; b) $\frac{AM}{A_1M} \cdot \frac{BM}{B_1M} \cdot \frac{CM}{C_1M} \geq 8$

Giải :

Kí hiệu $S_1 = S_{\Delta MBC}$, $S_2 = S_{\Delta MAC}$

$S_3 = S_{\Delta MAB}$.

Ta có : $\frac{AA_1}{A_1M} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1}$

(Xem tiếp trang 16)

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/199. *Tìm các chữ số a, b, c, d sao cho với mọi số tự nhiên n ta có :*

$$\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n \text{ số } a}\,\underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{n \text{ số } b}\,\underbrace{\overline{cc\ldots c}}_{n \text{ số } c} + 1 = (\underbrace{\overline{dd\ldots d}}_{n \text{ số } d} + 1)^3$$

Lời giải : *Cách 1 :*

Kí hiệu $P_n = \underbrace{11\ldots 1}_{n \text{ số } 1} = \dfrac{10^n - 1}{9}$

thì $10^n = 9P_n + 1$.

Ta có : $\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n \text{ số } a}\,\underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{n \text{ số } b}\,\underbrace{\overline{cc\ldots c}}_{n \text{ số } c} + 1 =$

$= aP_n \,.\, 10^{2n} + bP_n \,.\, 10^n + cP_n + 1$

$= 81aP_n^3 + (18a+9b)P_n^2 + (a+b+c)P_n + 1$ (1)

Mặt khác :

$(\underbrace{\overline{dd\ldots d}}_{n \text{ số } d} + 1)^3 = (dP_n + 1)^3$

$= d^3P_n^3 + 3d^2P_n^2 + 3dP_n + 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$81aP_n^3 + (18a + 9b)P_n^2 + (a + b + c)P_n =$

$= d^3P_n^3 + 3d^2P_n^2 + 3dP_n$

thỏa mãn với vô số giá trị của P_n

$$\begin{cases} d^3 = 81a \\ 3d^2 = 18a + 9b \\ a + b + c = 3d \end{cases}$$

Từ đó $d^3 \vdots 81 \Leftrightarrow d \vdots 9 \Rightarrow d = 9$

Thay vào hệ trên ta có $a = 9$; $b = 9$; $c = 9$

Tóm lại $a = b = c = d = 9$

Cách 2 : (*Nguyễn Phú Bình*, 9A, PTCS Bế Văn Đàn, Hà Nội)

Vì đẳng thức đúng với mọi $n \in N$ nên đúng với $n = 2$, tức là :

$\overline{aa\,bb\,cc} + 1 = (\overline{dd} + 1)^3$ (*)

Nếu $d \leqslant 4$ thì

$(\overline{dd} + 1)^3 \leqslant 45^3 = 91125 < \overline{aa\,bb\,cc} + 1$.

Do đó $d > 4$. Dùng phép thử $d = 5$; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ta thấy chỉ có $d = 9$ thỏa mãn (*) (khi đó $a = b = c = 9$).

Ta dễ dàng chứng minh với $a = b = c = d = 9$ bài toán được thỏa mãn vì :

$\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n \text{ số } a}\underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{n \text{ số } b}\underbrace{\overline{cc\ldots c}}_{n \text{ số } c} + 1 = \underbrace{99\ldots 9}_{3n \text{ số } 9} + 1$

$= \underbrace{10\ldots 0}_{3n \text{ số } 0} = 10^{3n} = (\underbrace{9\ldots 9}_{n \text{ số } 9} + 1)^3 = (\underbrace{\overline{dd\ldots d}}_{n \text{ số } d} + 1)^3$

Nhận xét : Nhiều bạn do không nhận xét tốt nên thử quá nhiều trường hợp. Các bạn có lời giải tốt là *Trần Phạm Nguyên* (9T, NK Hải Hưng), *Vương Vũ Thắng* (9A$_1$, Giảng Võ II, Hà Nội) ; *Đào Lê Dung* (9, NK Vũ Thư, Thái Bình) ; *Trần Thanh Quang* (9CT, Quốc học Huế) ; *Lê Thanh An* (7A, Chuyên Phúc Yên, Mê Linh, Vĩnh Phú), ...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T2/199. *Cho các đa thức P(x) và Q(x) thỏa mãn*

$$P(x) = Q(x) + Q(1 - x) \;\forall x \in R.$$

Biết rằng các hệ số của P(x) là những số nguyên không âm và P(0) = 0. Tính P(P(3)).

Lời giải : Của đa số các bạn. Từ giả thiết ta có :

$P(0) = Q(0) + Q(1) = 0$ với $x = 0$ (1)

$P(1) = Q(1) + Q(0)$ với $x = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P(1) = 0$

Giả sử :

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$,

trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là những số nguyên không âm ta có :

$P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$

Suy ra $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$.

Nghĩa là $P(x) = 0$ với mọi $x \in R$. Vậy $P(3) = 0$. Suy ra $P(P(3)) = 0$.

Nhận xét : Tất cả các bạn đều có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Kiên Cường*, 9M, Mari Quyri, Hà Nội ; *Lê Hải Long*, 9T, Lam Sơn ; *Lê Thế Tân*, 9CT, NK Thiệu Yên ; *Trần Thanh Sơn*, 9E, Bỉm Sơn, Thanh Hóa ; *Vương Mai Phương*, 8 toán, NK, Hải Hưng ; *Đỗ Đăng Tạo*, 9B, Chuyên V–T, Ứng Hòa, Hà Tây ; *Lê Tôn Phát*, 8T chuyên Lê Khiết ; *Lê Quang Nẫm*, 8T chuyên, Đức Phổ, Quảng Ngãi ; *Phạm Thái Hà*, 9T, Đông Hưng, Thái Bình ; *Phan Minh Nguyệt*, 9I, Đồng Mỹ, Đồng Hới, Quảng Bình ; *Nguyễn Lê Lực*, 8A, Đầm Dơi, Minh Hải ; *Đàm Khánh Hòa*, 9A, Lương Văn Chánh, Phú Yên.

TÔ NGUYÊN

Bài T3/199. *Cho ΔABC. Xét điểm M nằm trong tam giác. Nối AM, BM, CM cắt các cạnh đối diện tại A_1, B_1, C_1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \sqrt{\frac{AM}{MA_1}} + \sqrt{\frac{BM}{MB_1}} + \sqrt{\frac{CM}{MC_1}}$$

Lời giải : Vì diện tích các tam giác là không âm nên ta đặt :

$$S_{\Delta BMC}=x^2,\ S_{\Delta CMA}=y^2,\ S_{\Delta AMB}=z^2$$

Ta có :

$$\frac{AA_1}{MA_1}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{AM}{MA_1}=\frac{AA_1-MA_1}{MA_1}=\frac{y^2+z^2}{x^2}$$

Tương tự $\frac{BM}{MB_1}=\frac{z^2+x^2}{y^2}$;

$$\frac{CM}{MC_1}=\frac{x^2+y^2}{z^2}$$

Do đó :

$$P=\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}+\frac{\sqrt{z^2+x^2}}{y}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt2}$

($\Leftrightarrow(a-b)^2\geqslant 0$) ta được

$$P\geqslant\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right)\geqslant$$

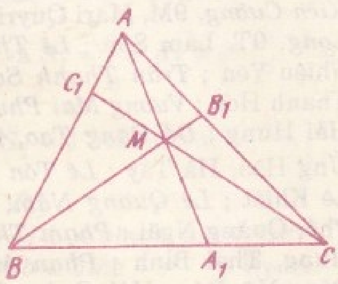
$$\geqslant\frac{1}{\sqrt2}\cdot 6=3\sqrt2$$

Khi $x=y=z$ ta có P đạt giá trị nhỏ nhất và $P_{min}=3\sqrt2$. Lúc đó M là trọng tâm của ΔABC.

Nhận xét :

Đa số các bạn giải như trên.

Nhiều bạn ghi kết quả là $3\sqrt[4]{8}$.



Các bạn giải tốt bài này : *Nguyễn Lê Lực*, cấp II Đầm Dơi, Minh Hải ; *Nguyễn Đức Tưởng* PT chuyên Gia Lai ; *Lê Trần Thế Duy, Lương Lê Tú*, chuyên Lê Khiết, *Lê Quang Nẫm*, Chuyên Đức Phổ, Quảng Ngãi ; *Đàm Khánh Hòa, Võ Thị Lý*, Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên ; *Trần Thị Hiền Thanh*, CII Đồng Mỹ, Đồng Hới, Quảng Bình ; *Viên Ngọc Quang*, PTCS Ba Đình, Thanh Hóa ; *Trần Đức Quyền*, PTCS Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà ; *Đoàn Định Trung, Nguyễn Bá Hùng, Nguyễn Anh Tú, Nguyễn Hoàng Dương, Trần Bằng, Nguyễn Anh Hoàng, Nguyễn Long, Nguyễn Hồng Hà A, Trần Việt Bình, Nguyễn Cảnh Nam*, PTCS Đống Đa, *Mai Thanh Bình, Nguyễn Ngọc Tân*, Mari Quyri, Hà Nội ; *Đỗ Minh Cảnh* CII thị trấn Nam Sách ; *Lương Lê Quang* PTNK Hải Hưng ; *Phạm Thái Hà*, Đông Hưng, Thái Bình ; *Đỗ Đăng Tạo*, Chuyên Ứng Hòa, Hà Tây ; *Phạm Huy Giáp*, Năng khiếu Gia Lương, Hà Bắc : *Đinh Mai Hương, Lê Thanh An*, Chuyên Phúc Yên, Vĩnh Phú ; *Nguyễn Thị Thanh*, PTCS Hồng Bàng, Hải Phòng.

VŨ KIM THỦY

Bài T4/199. *Ta nói số tự nhiên n là số có tính chất P nếu khi n là ước của a^n-1 với số nguyên dương a nào đó thì n^2 cũng là ước của a^n-1*

a) *Chứng minh rằng mọi số nguyên tố đều có tính chất P*

b) *Chỉ ra rằng tồn tại vô hạn hợp số n có tính chất P.*

Lời giải *(của nhiều bạn)* : a) Xét số nguyên tố p tùy ý. Giả sử a là số nguyên dương nào đó mà $a^p-1\ \vdots\ p$ (1). Ta cần chứng minh $a^p-1\ \vdots\ p^2$.

Thật vậy, từ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^p-a+a-1\ \vdots\ p\Rightarrow a-1\ \vdots\ p$

(do $a^p-a\ \vdots\ p$ theo định lí nhỏ Phécma), hay $a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,p)\Rightarrow$

$a^k\equiv 1\ (\mathrm{mod}p)\ \forall\ k\in N\Rightarrow$

$\Rightarrow a^{p-1}+a^{p-2}+\ldots+a+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}p)\Rightarrow$

$(a-1)(a^{p-1}+a^{p-2}+\ldots+a+1)\equiv 0$ $(\mathrm{mod}p^2)$ hay $a^p-1\ \vdots\ p^2$. (Đpcm).

b) Xét hợp số $n=p_1\cdot p_2$ (*), với p_1, p_2 là hai số nguyên tố khác nhau tùy ý. Giả sử a là số nguyên dương nào đó mà $a^n-1\ \vdots\ n$, hay $a^{p_1p_2}-1\ \vdots\ p_1p_2$. Khi đó : $(a^{p_2})^{p_1}-1\ \vdots\ p_1$ (2) và $(a^{p_1})^{p_2}-1\ \vdots\ p_2$ (3). Theo kết quả của phần a), từ (2) và (3) $\Rightarrow$ $(a^{p_2})^{p_1}-1\ \vdots\ p_1^2$ (4) và $(a^{p_1})^{p_2}-1\ \vdots\ p_2^2$ (5). Mà p_1^2 và p_2^2 nguyên tố cùng nhau nên từ (4) và (5) ta được $a^{p_1p_2}-1\ \vdots\ p_1^2\cdot p_2^2$, hay $a^n-1\ \vdots\ n^2$. Điều này chứng tỏ n có tính chất P. Dễ thấy có vô hạn hợp số dạng (*). Vậy có vô hạn hợp số có tính chất P. (Đpcm).

Nhận xét. 1. Có rất nhiều bạn gửi lời giải cho bài toán. Một số bạn do không biết vận dụng kết quả của phần a) nên giải phần b) không ngắn gọn. Nhiều bạn khác, do không hiểu đúng định nghĩa "*số có tính chất P*" nên giải sai phần b).

2. Các bạn có lời giải tốt : *Nguyễn Bá Hùng, Trần Minh Anh, Trần Thanh Hải, Nguyễn Anh*

Tú, Nguyễn Hoàng Dương, PTCS Trưng Vương), *Nguyễn Phú Quảng, Phạm Lê Hùng*, PTCS Trưng Nhị, *Nguyễn Phú Bình* PTCS Bế Văn Đàn), *Đỗ Hồ Nga*, PTCS Đống Đa) ; *Mai Thanh Bình* – 7M, PTDL Marie Curie, Hà Nội) ; *Trần Nguyên Ngọc* (9K, Lê Lợi, Hà Tây) ; *Trịnh Hồng Mai* (PTCS Chuyên, Thái Bình) ; *Võ Song Hà* (9 NKTN Đông Hà, Quảng Trị) ; *Nguyễn Huy Hoàng* (Trường chuyên Vĩnh Lạc, Vĩnh Phú) ; *Nguyễn Trọng Hậu, Phạm Đình Chính, Tô Đông Vũ* (CT ĐHTH Hà Nội) ; *Đinh Trung Hằng, Nguyễn Tuấn Hải, Nguyễn Thái Hà* (PTDL Marie Curie, Hà Nội) ; *Trịnh Thế Huynh, Trương Thượng Hoàng* – (PTTH Lê Hồng Phong, Nam Hà) ; *Lê Minh Hiếu, Lê Trọng Giang, Nguyễn Duy Hùng, Hoàng Ngọc Tâm* (PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Phùng Sơn Lâm* (PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Nguyễn Thanh Hải* (PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình) ; *Đào thị Thiên Hương, Hồ Văn Thảo, Hồ Sĩ Thái* (PTTH Đông Hà, Quảng Trị) ; *Võ Việt Hùng* (PTTH Hoàng Hoa Thám, Đà Nẵng) ; *Lê Anh Vũ* (Quốc học Huế) và *Nguyễn Công Tuấn* (PTTH Trưng Vương, Quy Nhơn).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T5/199. *Với các số thực dương x_o, y_o, α, β ta xét hai dãy số $\{x_n\}_{n \geq 0}$ và $\{y_n\}_{n \geq 0}$ được xác định như sau*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha y_n + \beta / x_n \\ y_{n+1} = \alpha x_n + \beta / y_n \end{cases}, \forall n = 0, 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Tìm điều kiện cần và đủ đối với α, β để ta có $x_n \to +\infty$ và $y_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$ với mọi $x_o, y_o > 0$.

Lời giải (của đa số các bạn) :

Giả sử $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$.

Xét $0 < \alpha < 1$. Đặt $x_o / y_o = c$. Từ giả thiết (1) ta suy ra :

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{y_n}{x_n} \quad (*)$$

và $$\frac{x_{2n}}{y_{2n}} = c \; ; \; \frac{x_{2n+1}}{y_{2n+1}} = \frac{1}{c}$$

Do vậy

$$x_{2n+1} = \alpha y_{2n} + \frac{\beta}{x_{2n}} = \frac{\alpha}{c} x_{2n} + \frac{\beta}{x_{2n}}$$

$$= \frac{\alpha}{c}(\alpha c x_{2n-1} + \beta / x_{2n-1}) + \frac{\beta}{\alpha c x_{2n-1} + \beta / x_{2n-1}}$$

$$= \alpha^2 x_{2n-1} + A_{2n-1} \quad (2)$$

trong đó $A_{2n-1} \to 0$ khi $n \to \infty$ (do $x_n \to \infty$)

Từ (2), với n đủ lớn thì $x_{2n+1} < x_{2n-1}$ (do $0 < \alpha < 1$), điều này mâu thuẫn với giả thiết dãy $x_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$.

Vậy $\alpha \geq 1$. Từ (1) ta có :

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 > \alpha^2 (x_n^2 + y_n^2) + 2\alpha\beta \quad (**)$$

(*) và (**) suy ra $x_\to +\infty$, $y_n \to +\infty$ với mọi điều kiện ban đầu $x_o, y_o > 0$.

Kết luận : $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ tùy ý.

Nhận xét : Các bạn gửi lời giải về tòa soạn đều có lời giải đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T6/199. *Cho số nguyên dương lẻ k và số nguyên dương n thỏa mãn $k < n$. Giả sử có bộ số có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với $x_i \in \{-1; +1\}$ $\forall i = \overline{1, n}$. Cho phép thực hiện phép toán sau : lấy k số, nằm ở k vị trí khác nhau, của bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rồi thay mỗi số bởi số đối của nó.*

Cho hai bộ số có thứ tự :

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với $a_i \in \{-1; +1\}$ $\forall i = \overline{1, n}$

$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ với $b_i \in \{-1; +1\}$ $\forall i = \overline{1, n}$

Chứng minh rằng nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép thay số nói trên đối với bộ số A ta có thể nhận được bộ số B.

Lời giải (của *Phùng Sơn Lâm*, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An, *Võ Quốc Hùng* và *Phạm Công Thiệu*, trường Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi). Trước hết, ta chứng minh :

Nhận xét : Nhờ việc thực hiện liên tiếp phép toán của đề bài ta có thể đổi một số a_i bất kì của A thành số đối của nó, còn $(n-1)$ số còn lại của A vẫn giữ nguyên giá trị của mình.

Thật vậy, xét a_i bất kì thuộc A. Lấy k số nào đó trong số $(n-1)$ số còn lại của A, giả sử là $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$.

Thực hiện phép toán đã cho lần lượt cho k nhóm k số :

$(a_i, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$; $(a_i, a_{i_1}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_{k-1}}, a_{i_k})$; ... ; $(a_i, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k-1}})$

(ở nhóm thứ t không có mặt số a_{i_t}, $t = 1, 2, \ldots, k$). Sau lần thực hiện thứ k thì số a_i bị đổi dấu k lần, còn mỗi số a_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, k$, bị đổi dấu $k-1$ lần. Vì k lẻ nên sau lần thực hiện thứ k thì a_i bị đổi thành $-a_i$, còn k số $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ vẫn giữ nguyên giá trị của mình. Hiển nhiên

$n-k-1$ số còn lại (ngoài $a_i, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$) của A cũng giữ nguyên giá trị của mình (do không bị phép toán tác động tới). *Nhận xét* được chứng minh. Vì $a_i, b_i \in \{-1; +1\}$ $\forall i = \overline{1,n}$ nên với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$ các số a_i, b_i hoặc như nhau hoặc chỉ khác nhau về dấu. Do đó, từ *Nhận xét* trên dễ dàng có được điều đề bài yêu cầu chứng minh.

Nhận xét : Trong số các bạn gửi lời giải cho bài toán, chỉ có một bạn cho lời giải sai. Nhiều bạn cho lời giải không ngắn gọn. Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau cũng có lời giải tốt : *Đỗ Hồ Nga* (PTCS Đống Đa, Hà Nội), *Nguyễn Phú Bình* (PTCS Bế Văn Đàn, Hà Nội) ; *Nguyễn Thái Hà* (PTDL Marie Curie, Hà Nội) ; *Nhữ Quí Thơ, Nguyễn Duy Hùng, Phạm Minh Tuấn* (PTTH Lam Sơn – Thanh Hóa) ; *Đoàn Trần Trung* (PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Nguyễn Thanh Hải* (PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình) và *Lê Anh Vũ* (Quốc học Huế).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/199. *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Xét các số x, y, z thỏa mãn* $x+y+z = \frac{\pi}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$F(x,y,z) = \frac{sinx}{a} + \frac{siny}{b} + \frac{sinz}{c}$$

Lời giải (của đa số các bạn)

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $y = \frac{\pi}{2} - \beta$, $z = \frac{\pi}{2} - \gamma$ thì $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ và $sinx = cos\alpha$, $siny = cos\beta$, $sinz = cos\gamma$

Sử dụng đồng nhất thức.

$$2(bccos\alpha + cacos\beta + abcos\gamma) =$$
$$= a^2+b^2+c^2 - (asin\beta - bsin\alpha)^2 - (bcos\alpha + acos\beta - c)^2$$

sẽ có :

$$F(x,y,z) = \frac{1}{abc}(bccos\alpha + cacos\beta + abcos\gamma)$$
$$= \frac{1}{2abc}[(a^2+b^2+c^2) - (asin\beta - bsin\alpha)^2 - (bcos\alpha + acos\beta - c)^2] \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} asin\beta - bsin\alpha = 0 \\ bcos\alpha + acos\beta - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos\alpha = cosA \\ cos\beta = cosB \\ cos\gamma = cosC \end{cases}$$

Vậy $\max F(x,y,z) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$, đạt được, chẳng hạn, khi $x = \frac{\pi}{2} - A$, $y = \frac{\pi}{2} - B$, $z = \frac{\pi}{2} - C$.

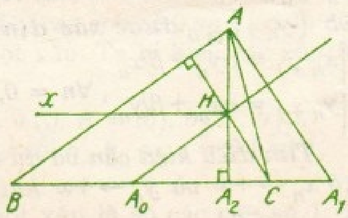
Nhận xét : Hầu hết các lời giải gửi đến đều đúng chỉ có một số ít ước lượng bất đẳng thức không chặt, vì vậy cho kết quả sai. Ngoài cách giải trên, một số bạn còn cho cách giải hình học dựa trên biến đổi véctơ.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/199. *Giả sử H, A_o, B_o, C_o lần lượt là trực tâm, trung điểm của các đoạn BC, CA, AB của tam giác không cân ABc. Các đường thẳng lần lượt qua A, B, C và vuông góc với HA_o, HB_o, HC_o cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.*

Lời giải :

(dựa theo *Nguyễn Thái Hà*, 10M, PTDL Marie Curie, Hà Nội). Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Do ΔABC không cân nên $A_2 \neq A_o$. Qua H kẻ tia Hx song song với BC, ta có chùm $H(xA_oBC)$ là chùm điều hòa. Ảnh của chùm $H(xA_oBC)$ trong phép quay $(H; 90^o)$ là một chùm với các tia tương ứng song song với các tia của chùm $A(A_2A_1CB)$. Suy ra chùm này cũng điều hòa và ta có $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = -\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$



Một cách tương tự ta cũng có

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}}; \quad \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -\frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}}.$$

Hơn nữa AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại H nên ta có :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} \cdot \frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}} \cdot \frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}} = 1.$$

Áp dụng định lí Menelauyt ta có đpcm.

Nhận xét : Có 42 bạn giải bài này. Trừ một số bạn không xét hướng mà đã kết luận A_1, B_1, C_1 thẳng hàng, còn lại các bạn đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Thái Hà* (10M PTNK Marie Curie Hà Nội), *Nguyễn Tuấn Hải* (11M Marie Curie Hà Nội), *Phạm Công Thiện* (10T Trường chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi), *Phạm Lê Hùng* (9A, Trưng Nhị Hà Nội), *Phạm Quốc Thái* (10A, PTTH Lê Hồng Phong, Nam Hà).

ĐẶNG VIỄN

Bài T9/199. *Cho tam giác ABC có số đo các cạnh là a_1, a_2, a_3 và diện tích là S. Chứng minh rằng :*

$$\frac{p_1}{p_2+p_3}a_1^2+\frac{p_2}{p_1+p_3}a_2^2+\frac{p_3}{p_1+p_2}a_3^2 \geq 2S\sqrt{3}$$

với p_1, p_2, p_3 là 3 số dương bất kì.

Lời giải : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có :

$$\left[\frac{a_1^2}{p_2+p_3}+\frac{a_2^2}{p_1+p_3}+\frac{a_3^2}{p_1+p_2}\right]\times$$
$$\times\ [(p_2+p_3)+(p_1+p_3)+(p_1+p_2)] \geq$$
$$\geq (a_1+a_2+a_3)^2$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a_1^2}{p_2+p_3}+\frac{a_2^2}{p_1+p_3}+\frac{a_3^2}{p_1+p_2}\right)(p_1+p_2+p_3) \geq$$
$$\geq (a_1+a_2+a_3)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{p_1}{p_1+p_3}a_1^2+\frac{p_2}{p_1+p_3}a_2^2+\frac{p_3}{p_1+p_2}a_3^2 \geq$$
$$\geq\ \frac{1}{2}[(a_1+a_2+a_3)^2-2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)]$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{2}[(a_1+a_2+a_3)^2-2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)] \geq 2S\sqrt{3}$$

hay $(a_1+a_2+a_3)^2-2(a_1^2+a_2^2+a_3^2) \geq 4S\sqrt{3}$ (*)

Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_1^2-(a_2-a_3)^2+a_2^2-(a_1-a_3)^2+a_3^2-(a_1-a_2)^2 \geq 4S\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow\quad (a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)+$$
$$+(a_1+a_2-a_3)(a_2-a_1+a_3)+$$
$$+(a_3+a_1-a_2)(a_3-a_1+a_2) \geq 4\sqrt{3}\ S\ (**)$$

Đặt $p=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{2}$; $p-a_1=x$;

$p-a_2=y$; $p-a_3=z$ thì

$$(**)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(xy+yz+zx) \geq 4\sqrt{3}\ \sqrt{(x+y+z)xyz}$$
$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2(xy^2z+x^2yz+xyz^2) \geq$$
$$\geq\ 3(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$$
$$\Leftrightarrow\quad (xy-yz)^2+(yz-xz)^2+(xy-xz)^2 \geq 0$$

hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3$ và $p_1=p_2=p_3$

Nhận xét : Nhiều bạn giải theo cách trên và có lời giải tốt : *Nguyễn Huy Toàn* (10A, ĐHTH Hà Nội), *Nhữ Quý Thơ* (10T, Lam Sơn, Thanh Hóa), *Phạm Minh Phương* (10A, ĐHSP Hà Nội I), *Nguyễn Thái Hà* (10M Mari Quyri, Hà Nội), *Đinh Thị Thu Thủy* (11T, Lương Văn Tụy, Ninh Bình), *Phan Hoàng Việt* (11A, Quốc học Quy Nhơn, Bình Định) ; *Phạm Hồng Vân* (10T, Trần Phú, Hải Phòng)...

Để chứng minh (*), các bạn *Phùng Sơn Lâm* (12T, Phan Bội Châu, Nghệ An), *Võ Việt Hùng* (12/10, Hoàng Hoa Thám, Đà Nẵng), Nguyễn Hồng Tâm (11CT, Hùng Vương, Vĩnh Phú), *Nguyễn Thanh Hải* (12T, Đào Duy Từ, Quảng Bình) ... đã sử dụng lượng giác đưa về chứng minh bất đẳng thức trong tam giác ABC là :

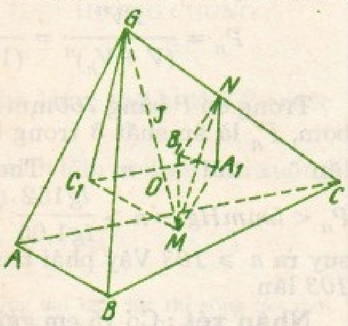
$$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}\ .$$

Một số bạn để áp dụng bất đẳng thức Trêbưsep đã coi a_1, a_2, a_3 là bình đẳng và p_1, p_2, p_3 là bình đẳng để giả sử $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ và $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Các bạn nhớ cho khi $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ thì p_1, p_2, p_3 đâu còn bình đẳng nữa !

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T10/199 *Gọi G là trọng tâm tứ diện S.ABC. M là một điểm thuộc ΔABC. Các đường thẳng qua M song song với GA, GB, GC theo thứ tự cắt các mặt (GBC), (GCA), (GAB) tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng GM đi qua trọng tâm $\Delta A_1B_1C_1$.*

Lời giải : Trước hết, ΔABC là tập hợp điểm thuộc ít nhất một trong ba đoạn thẳng AB, BC, CA nên đề bài cần được sửa lại là : M thuộc miền tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát trong đó G là một điểm bất kì không thuộc mf (ABC)



Gọi N là giao điểm của mf (MA_1B_1) với GC. Do $MA_1//GA$ và $MB_1//GB$ (1) nên $NB_1//MA_1$ và $NA_1//MB_1$ hay MA_1NB_1 là hình bình hành. Suy ra MN, A_1B_1 có trung điểm chung, gọi là điểm I (2). Mặt khác, do MC_1 // GC nên $C_1 \in$ mp(MGC), suy ra GC_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng (MGC) và (GAB). Từ trên, ta lại có

MN là giao tuyến của hai mặt phẳng (MGC) và (MA_1B_1). Hơn nữa, do (1) nên mf (GAB) // mf (MA_1B_1) suy ra MN // GC_1. Mà MC_1 // GN (gt) nên tứ giác MC_1GN là hình bình hành, do đó MG đi qua trung điểm J của C_1N. Kết hợp điều này với (2), ta có giao điểm O của C_1I với MJ là trọng tâm ΔMNC_1 hay $\frac{\overline{OI}}{\overline{OC_1}} = \frac{1}{2}$, và O là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$, đpcm.

Nhận xét : Có 34 bạn tham gia giải bài này, trong số đó có 4 bạn đề xuất và giải bài toán tổng quát như trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Tuấn Hải* (11M – Marie Curie, Hà Nội), *Đinh Thành Trung* (10A ĐHTH Hà Nội) ; *Vũ Thành Long* (lớp 11CT trường PTNK Hải Hưng) ; *Lê Quốc Trinh* (10T – Lam Sơn, Thanh Hóa).

ĐẶNG VIỄN

Bài L1/199. *Một bình có thể tích V được nối với một bơm hút khí (bơm tay). Dung tích tối đa mỗi lần bơm là $V_h = \frac{1}{20}V$. Hỏi phải bơm hút tối thiểu bao nhiêu lần để áp suất ở trong bình thấp hơn 5mm Hg. Cho rằng áp suất ban đầu của bình là 760mm Hg và nhiệt độ không thay đổi trong quá trình bơm.*

Lời giải : Giả sử sau mỗi lần bơm thể tích khí trong bình được giãn nở từ V đến $V + V_h$. Vì nhiệt độ trong quá trình bơm không thay đổi nên đây là quá trình đẳng nhiệt PV = const. Với lần bơm thứ nhất $P_1(V + V_h) = PV \to$ $\to P_1 = \frac{PV}{V + V_h}$. Với lần bơm thứ hai $P_2(V + h) = P_1V \to P_2 = \frac{PV_2}{(V + V_h)^2}$. Tương tự, với lần bơm thứ n :

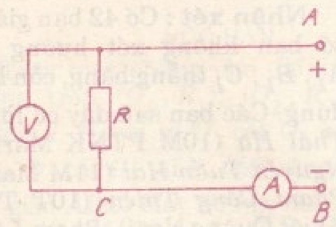
$$P_n = \frac{PV^n}{(V + V_h)^n} = \frac{P}{(1 + 0{,}05)^n}$$

Trong đó P bằng *760*mm Hg, n bằng số lần bơm, P_n là áp suất ở trong bình sau khi bơm lần thứ n. Theo đề bài $P_n < 5mmHg \to n > \frac{lg152}{lg1{,}05}$. Với n là số nguyên, suy ra $n \geqslant 103$ Vậy phải bơm hút tối thiểu là *103* lần.

Nhận xét : Có 15 em gửi bài giải, trong đó có 7 em có lời giải đúng. Các em có bài giải tốt : *Vũ Thị Bích Hà*, 11C, PTTH Chuyên Thái Bình ; *Phạm Thanh Giang* 9TL PTNK Hải Hưng ; *Nguyễn Thu Thanh*, 12L Lê Quý Đôn, Nha Trang ; *Trần Văn Quang*, 11L Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa ; *Trần Văn Ánh*, 10I PTTH Đông Hà Quảng Trị.

MAI OANH

Bài L2/199. *Cho mạch điện như hình vẽ. Trong đó ampe kế (A) chỉ 0,1A, vôn kế (V) chỉ 12V. Nếu đổi chỗ vôn kế và ampe kế thì khi đó ampe kế chỉ 0,02A. Tính giá trị của điện trở R, biết U_{AB} không đổi.*



Lời giải : Gọi R_V và R_A là điện trở của vôn kế và ampe kế. Lúc đầu ta có :

$$\frac{R_{AC}}{R_{CB}} = \frac{U_{AC}}{U_{CB}} = \frac{RR_{V/(R+R_V)}}{R_A}$$

$$\to \frac{U_{AC}}{R_V} = \frac{RU_{AB}}{R_AR_V + R(R_A + R_V)} \quad (1)$$

Khi đổi chỗ (A) và (V) cho nhau ta lại có

$U'_{AC} = \frac{RR_AU_{AB}}{R_AR_V + R(R_A + R_V)}$ với cường độ dòng điện qua ampe kế là

$$I'_A = \frac{U'_{AC}}{R_A} = \frac{RU_{AB}}{R_AR_V + R(R_A + R_V)} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có

$$I'_A = \frac{U_{AC}}{R_V} \to R_V = \frac{U_{AC}}{I'_A} = \frac{12}{0{,}02} = 600\Omega$$

$$\text{và } R = \frac{U_{AC}}{I_A - \frac{U_{AC}}{R_V}} = \frac{12}{0{,}1 - \frac{12}{600}} = 150\ \Omega$$

Nhận xét : Có 65 em đã gửi bài giải, trong đó có 60 em đã có kết quả đúng ; trong số đó đặc biệt hoan nghênh 23 em lớp 9 đã có đáp số đúng (có em đã gửi tới cả 2 cách giải của mình). Các em sau đây đã có bài giải gọn và tốt : *Lê Anh Minh*, 9_1 trường Nguyễn Tri Phương, Huế ; *Phạm Anh Dũng*, 9LT, PTNK Hải Hưng ; *Lê Quang Thành*, 9 năng khiếu Đông Hà, Quảng Trị ; *Nguyễn Quang Trường*, 9CL Năng khiếu Vinh, Nghệ An ; *Lê Hồng Nam*, 9L Năng khiếu Thái Thụy, Thái Bình ; *Trương Mạnh Cường*, 9CT, Việt Trì, Vĩnh Phú ; *Cao Tiến Bộ*, 9L Năng khiếu Kim Sơn, Ninh Bình ; *Trịnh Thu Huyền*, 9T, PTTH Lam Sơn Thanh Hóa ; *Nguyễn Quỳnh Nam* 10M, Marie Curie, Hà Nội ; *Phạm Đức Đại, Nguyễn Đắc Đại*, 9T, Năng khiếu Gia Lương, Hà Bắc ; *La Quốc Khánh*, 35B Phú An, Vĩnh Lợi, Thừa Thiên – Huế.

MT

Giải đáp bài

BÀI TOÁN VỀ ĐIỀN SỐ

Giả sử bảng số đã điền như sau :

A	B	C
D	E	F
G	H	I

và theo giả thiết thì

$$\begin{array}{r} ADG \\ +CFI \\ \hline BEH \end{array} \quad \text{và} \quad \begin{array}{r} ABC \\ +GHI \\ \hline DEF \end{array}$$

và $D + E + F = B + E + H = 18$

Điều này chỉ có thể xảy ra nếu $D + F = E = 9$ hoặc $D + F = 14$ và $E = 4$. Qua một vài mò mẫm thay chữ bằng số ta thấy chỉ có khả năng thứ hai có thể xảy ra. Nghĩa là ta có $D + F = B + H = 14$ và E = 4.

Vậy có hai cặp số có tổng bằng 14 là (8, 6) và (9, 5). Từ đó có thể tìm ra lời giải sau một số thăm dò :

3	5	1
6	4	8
2	9	7

Thử lại ta có
$648 = 351 + 297$
$549 = 362 + 187$

BÌNH PHƯƠNG

Ai họ gì ?

Tôi có 4 người bạn tên là Lê, Vũ, Lý, Hoàng và họ cũng là Lê, Vũ, Lý, Hoàng. Biết rằng :

– Anh tên Vũ họ không phải là Hoàng

– Anh họ Lý thì có tên trùng với họ của anh có tên trùng với họ của anh có tên Lê.

Các bạn tìm giúp xem Ai họ gì ?

NGUYỄN NGÔ

ĐÔNG PHƯƠNG SÓC CÓ ĐÁNG ĐƯỢC THA TỘI KHÔNG ?

Trong sách Cổ học tinh hoa (NXB Trẻ, 1992) có mẩu chuyện sau đây :

Nhân trung dài sống lâu

Một hôm vua Vũ Đế nhà Hán nói với các quan rằng :

"Ta xem trong sách tướng có nói : Người ta nhân trung dài một tấc thì sống lâu một trăm tuổi."

Đông Phương Sóc đứng bên, phì cười. Các quan bắt lỗi là vô phép.

Đông Phương Sóc cất mũ, tạ rằng :

"Muôn tâu Bệ hạ, kẻ hạ thần không dám cười Bệ hạ, chỉ cười ông Bành Tổ mặt dài mà thôi."

Vua hỏi : "Sao lại cười ông Bành Tổ ?"

Đông Phương Sóc nói : "Tục truyền ông Bành Tổ sống tám trăm tuổi, nếu quả thực như câu trong sách tướng Bệ hạ vừa nói, thì nhân trung ông dài tám tấc, mà nhân trung dài tám tấc thì cái mặt ông ta dễ phải dài đến một trượng".

Vua Vũ Đế nghe nói, bật cười, tha tội cho.

Bạn nghĩ xem Đông Phương Sóc cười ông Bành Tổ như vậy có đúng không và có đáng được vua tha tội cho không ?

HOÀNG CHÚNG

Chú thích :

Vũ Đế : vua nhà Hán, thế kỉ thứ 2 trước Công nguyên.

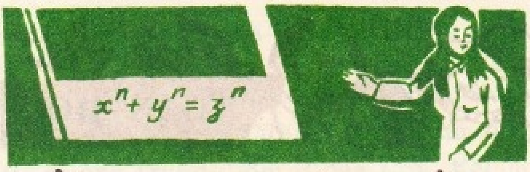
Nhân trung : phần lõm từ dưới mũi xuống đến giữa môi trên.

Giải đáp

Người ta nhân trung dài một tấc thì sống lâu một trăm tuổi. Từ mệnh đề đó, không thể suy ra mệnh đề đảo : Người sống lâu một trăm tuổi thì có nhân trung dài một tấc.

Và từ mệnh đề đảo này, cũng không thể suy ra rằng tuổi thọ tỉ lệ thuận với chiều dài của nhân trung !

Đông Phương Sóc *suy luận không hợp logic*, và đáng phải phạt vì tội cười ông Bành Tổ !



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp PTCS

Bài T1/203 : Cho n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thuộc đoạn $[-1, 1]$ sao cho $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 0$. Chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{n}{3}$$

NGUYỄN ĐỄ

Bài T2/203 : Phân tích đa thức $x^8 + 98x^4 + 1$ thành nhân tử

VŨ HỮU BÌNH

Bài T3/203 : Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa A, B và tia Cx vuông góc với AB. Trên tia Cx lấy 2 điểm D, E sao cho $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$. Đường tròn ngoại tiếp ΔADC cắt đường tròn ngoại tiếp ΔBEC tại H $(H \neq C)$.

Chứng minh rằng HC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi C chuyển động trên đoạn thẳng AB. Bài toán còn đúng không khi thay $\sqrt{3}$ bởi m cho trước $(m > 0)$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Các lớp PTTH

Bài T4/203 : Giải bất phương trình $x^2 + 6x + 7 < \sqrt{x+5}$

NGUYỄN HẢI THANH

Bài T5/203 : Các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ nhận các giá trị nguyên tại cùng các điểm (nghĩa là $P(x) \in Z \Leftrightarrow Q(x) \in Z$).

Chứng minh rằng hoặc $P(x) - Q(x) = \text{const}$ hoặc $P(x) + Q(x) = \text{const}$

TRẦN XUÂN ĐÁNG

Bài T6/203 : Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x,y) = |7x^2 + 13xy - 7y^2|$$

trong đó x, y nhận giá trị nguyên và không đồng thời bằng 0.

TRẦN DUY HINH

Bài T7/203 : Xác định tất cả các hàm số $f : R \setminus \{-1\} \to R$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{4x-2}{x+1}\right) = 2f(x)\, x \ \forall x \neq -1$$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/203 : Cho một bảng hình vuông gồm có 1994×1994 ô vuông bằng nhau. Trong mỗi ô vuông ta viết một số nguyên không âm tùy ý thỏa mãn điều kiện : Nếu một ô nào đó được viết số 0 thì tổng của tất cả các số viết ở dòng và cột chứa ô đó không nhỏ hơn 1994.

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các số được viết trong bảng.

NGÔ HÂN

Bài T9/203 : Trên mặt phẳng cho điểm I cố định. Ba đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3) cùng đi qua I. Ngoài ra O_1 cắt O_2 tại C, O_2 cắt O_3 tại A, O_3 cắt O_1 tại B. Biết rằng I nằm ở trong tam giác ABC. Một đường thẳng MN tiếp xúc với (O_1), (O_2) lần lượt ở M, N, không cắt (O_3) ; tương tự, đường thẳng PQ tiếp xúc với (O_2), (O_3) và đường thẳng EF tiếp xúc với (O_3), (O_1). Giả sử các đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) thay đổi sao cho $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \leq 3$.

a) Hãy tính bán kính của các đường tròn và khoảng cách tâm các đường tròn đó, sao cho tổng $\sum S = dt\Delta IMN + dt\Delta IPQ + dt\Delta IEF$ lớn nhất.

b) Chứng minh rằng khi $\sum S$ đạt được giá trị lớn nhất thì diện tích lục giác lồi $MNPQEF$ cũng đạt được giá trị lớn nhất của nó.

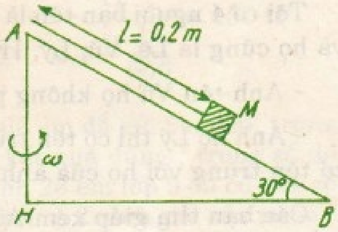
TRỊNH BẰNG GIANG

Bài T10/203 : Giả sử tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh tiếp xúc với một mặt cầu nào đó. Giả sử tiếp điểm của mặt cầu với các cạnh AB, AC, AD, CD, DB, BC theo thứ tự là M, N, P, Q, R, S. Chứng minh rằng MQ, NR, PS đồng quy.

NGUYỄN MINH HÀ

Các đề Vật lí

Bài L1/203 : Vật M khối lượng 1kg được giữ trên mặt AB bằng một sợi dây, mặt AB nghiêng 30^0 so với phương nằm ngang. Mặt AB quay xung quanh trục thẳng đứng AH với vận tốc góc không đổi $\omega = 10\frac{Rad}{s}$. Dây bị dãn ra và có chiều dài 0,2m. Lúc này M vẫn nằm trên AB. Ma sát giữa M và AB không đáng kể.



Tìm :

a) Lực căng của dây treo

b) Lực ép của M lên AB

PHẠM HÙNG QUYẾT

Bài L2/203 : Mắc hai vôn kế V_1, V_2 nối tiếp nhau vào hai cực của nguồn điện một chiều thì kim của vôn kế V_1 chỉ $6V$, kim của vôn kế V_2 chỉ $4V$. Khi chỉ mắc vôn kế V_1 vào hai cực của nguồn điện trên thì kim của nó chỉ $9V$.

a) Tìm suất điện động của nguồn điện.

b) Khi chỉ mắc vôn kế V_2 vào hai cực của nguồn điện trên thì kim của nó chỉ mấy vôn ? Qua kết quả tính toán, hãy nêu ý nghĩa thực tế (ứng dụng) của bài toán trên.

TRƯƠNG MINH TUỆ

Chú ý : Bài giải chỉ gửi về một địa chỉ : Tòa soạn TC Toán học và tuổi trẻ, 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/203. Given n real numbers $a_1, a_2, ..., a_n$ from segment $[-1, 1]$ and $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = 0$. Prove that

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq \frac{n}{3}.$$

NGUYEN DE

T2/203. Find a factorization of polynomial $x^8 + 98x^4 + 1$.

VU HUU BINH

T3/203. Given a segment AB. C is a point in the interior of AB and Cx is the axis perpendicular to AB. $D, E \in Cx$ such that $\frac{CE}{CB} = \frac{CA}{CD} = \sqrt{3}$. The circumcircle of $\Delta\ ADC$ intersects the circumcircle of $\Delta\ BEC$ at H and C ($H \neq C$).

Show that HC passes through a fixed point whenever C moves along AB. Is the conclusion true if $\sqrt{3}$ is changed by a certain value $m > 0$?

NGUYEN DUC TAN

For Upper Secondary Schools

T4/203. Solve the following inequality

$$x^2 + 6x + 7 < \sqrt{x+5}.$$

NGUYEN HAI THANH

T5/203. Polynomials $P(x)$ and $Q(x)$ have integer values at the same points (i.e. $P(x) \in Z \Leftrightarrow Q(x) \in Z$). Show that either $P(x) - Q(x) =$ const or $P(x) + Q(x) =$ const.

TRAN XUAN DANG

T6/203. Find the minimal value of the function

$$f(x, y) = | 7x^2 + 13xy - 7y^2 |.$$

where x, y are integers and are not simultaneously equal to 0.

TRAN DUY HINH

T7/203. Find all functions : $f : R \setminus \{-1\} \to R$ satisfying the condition

$$f\left(\frac{4x - 2}{x + 1}\right) = 2 f(x)\ \forall x \neq -1$$

NGUYEN VAN MAU

T8/203. A given square board consists of 1994×1994 equal squares. Each square is labelled by a non-negative integer satisfying the following condition : If a certain square is labelled by 0 then the sums of all numbers of the corresponding column and row containing this square are not less than 1994.

Find the minimal value of the sum of all numbers of the board.

NGO HAN

T9/203. Let I be a fixed point on a given plane. Three variable circles (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3) pass through I. Let, $(O_1) \cap (O_2) = \{\ C, I\ \}, (O_2) \cap (O_3) = \{\ A, I\ \}$, $(O_3) \cap (O_1) = \{\ B, I\ \}$ and I is in the interior of $\Delta\ ABC$.

Let MN be a common tangent of (O_1) at M and of (O_2) at N such that MN does not intersect (O_3). In a similar way, let PQ be a common tangent of (O_2) (O_3) (which does not intersect (O_1)), EF be a common tangent of (O_3), (O_1) (which does not intersect (O_2)). Suppose that $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \leq 3$.

a) Calculate the radii of the circles and the distances between the centers of these circles in the case where $\sum S = area\ \Delta IMN + area \Delta IPQ + area \Delta IEF$ is maximum.

b) Show that if $\sum S$ is maximum then the area of $MNPQEF$ is also maximum.

TRINH BANG GIANG

T10/203. Let all sides AB, AC, AD, CD, DB and BC of a tetrahedron $ABCD$ be tangent to a certain sphere at M, N, P, Q, R, S, respectively.

Prove that MQ, NR and PQ meet at a point.

NGUYEN MINH HA

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN HỌC 1993-1994
Trường Đại học Tổng hợp T.P Hồ Chí Minh

I - VÒNG 1 NGÀY 21/8/1993, THỜI GIAN LÀM BÀI 180 PHÚT.

Câu 1 : Ta nói số tự nhiên A là một số "Pitago", nếu A là tổng bình phương của hai số tự nhiên nào đó.

a) Cho P và Q là hai số "Pitago", chứng minh $P.Q$ và 2^nP cũng là các số "Pitago".

b) Tìm các số "Pitago" M và N sao cho tổng và hiệu của chúng không phải là các số "Pitago".

Câu 2 : a) Giải phương trình căn thức :

$$\sqrt{3}-x=\sqrt[4]{49-4\sqrt{3}\,x^3-12\sqrt{3}x}$$

b) Chứng minh đẳng thức

$$\frac{\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}}{2}=\sqrt{3}$$

Câu 3 : Tám đội bóng tham gia giải vô địch trong đó hai đội bất kì phải gặp nhau đúng một lần. Biết rằng đến cuối giải không có trận đấu nào kết thúc với tỉ số hòa.

Chứng minh rằng trong tám đội nói trên, luôn tìm được bốn đội A, B, C và D sao cho kết quả các trận đấu giữa họ là A thắng B, C, D, B thắng C, D và C thắng D.

Câu 4 : Bốn học sinh gái Mỹ, Mận, Mai và Mơ đang ở trong một căn phòng của kí túc xá. Một cô đang sửa áo, một cô đang chải đầu, một cô đang viết thư và một cô đang đọc sách. Biết thêm rằng :

1. Mỹ không sửa áo và không đọc sách.
2. Mận không viết thư và không sửa áo.
3. Nếu Mỹ không viết thư thì Mơ không sửa áo.
4. Mai không đọc sách và không sửa áo.
5. Mơ không đọc sách và không viết thư.

Hãy nói chính xác mỗi cô đang làm gì.

Câu 5 : Giả sử O là một điểm nằm bên trong tam giác đều ABC. Các đường thẳng AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện của tam giác tại các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng. Biết rằng $S_{\Delta AB_1O}+S_{\Delta CA_1O}+S_{\Delta BC_1O}=$ $=S_{\Delta CB_1O}+S_{\Delta BA_1O}+S_{\Delta AC_1O}$. Chứng minh rằng O nằm trên một đường trung tuyến của tam giác ABC.

II - VÒNG 2 NGÀY 22/8/1993, HỆ SỐ 2. THỜI GIAN LÀM BÀI 180 PHÚT.

Câu 1 : Chia tập hợp những số tự nhiên $\{1, 2, ..., 2n\}$ thành hai tập con rời nhau A và B, mỗi tập có n phần tử.

Kí hiệu các phần tử của hai tập này theo thứ tự tăng

$A=\{a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}<a_n\}$ và $B=\{b_n<b_{n-1}<\ldots<b_2<b_1\}$

Hãy chứng minh đẳng thức

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=n^2$$

Câu 2 : Cho một bảng kích thước $2n\times 2n$ ô vuông. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng hoặc n cột này.

Câu 3 : Cho hình thang vuông $ABCD$ có AB là cạnh đáy nhỏ, CD là cạnh đáy lớn, M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết rằng hình thang $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn bán kính R. Hãy tính diện tích tam giác ADM.

Câu 4 : Một hộp đựng 52 viên bi, trong đó có 13 viên màu xanh, 13 viên màu đỏ, 13 viên màu vàng và 13 viên màu trắng. Cần phải lấy ra ít nhất bao nhiêu viên bi (mà không nhìn trước) để chắc chắn trong số đó có không ít hơn 7 viên bi cùng màu. Hãy phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát hơn.

Câu 5 : Một dãy các con số 0 và 1 có độ dài 32 được gọi là một xâu. Ta kí hiệu các xâu A, B, C,... như sau

$A=(a_1, a_2,\ldots, a_{32})$, $B=(b_1, b_2,\ldots, b_{32})$, $C=(c_1, c_2,\ldots, c_{32})$ với a_i, b_i, c_i,... $=0$ hay 1, $i=1, 2, \ldots, 32$.

Giá trị của một xâu là số các con số 1 có trong xâu ấy.

Một máy tính có thể xử lí các xâu bằng hai phép biến đổi sau :

- Phép dịch chuyển các phần tử của A đi k vị trí, $1\leqslant k\leqslant 32$ theo quy tắc

$(a_1, a_2,\ldots, a_{32})\Rightarrow(a_k, a_{k+1},\ldots, a_{31}, a_{32}, a_1, a_2,\ldots a_{k-1})$.

- Phép so sánh hai xâu A và B để được một xâu mới C theo quy tắc $A\&B\Rightarrow C$, với

$$c_i=\begin{cases}1 \text{ nếu } (a_i=b_i=0) \text{ hay } (a_i=b_i=1)\\ 0 \text{ nếu } (a_i=1, b_i=0) \text{ hay} (a_i=0, b_i=1)\end{cases}$$

Cho xâu A có giá trị bằng 16 và B là một xâu tùy ý. Chứng minh rằng bằng cách dịch chuyển A đi k vị trí (thích hợp) và so sánh kết quả với B, ta sẽ được xâu C có giá trị không nhỏ hơn 16.

ĐÁP ÁN VÒNG 2 (22/8/1993)

Câu 1 : Trước tiên nhận xét rằng nếu ta chia tập đã cho thành hai tập con sắp thứ tự tự nhiên

$A = \{a_1 = 1, a_2 = 2, \dots a_n = n\}$ và $B = \{b_n = n+1, b_{n-1} = n+2, \dots b_1 = 2n\}$ thì ta có các giá trị tuyệt đối của hiệu $|a_i - b_i|$ là

$|a_1 - b_1| = 2n - 1$

$|a_2 - b_2 = 2n - 3$

. . . .

$|a_{n-1} - b_{n-1}| = 3$

$|a_n - b_n| = 1$

Do đó tổng các giá trị này sẽ là :

$(2n - 1) + (2n - 3) + \dots + 3 + 1 = n^2$

Bây giờ bằng cách tăng các giá trị của a_i và giảm các giá trị của b_j (mỗi bước thay đổi sẽ được gọi là "đổi chỗ" các phần tử của A và B), chúng ta có thể dễ dàng truy cập mọi khả năng phân bố xen kẽ các giá trị của a_i và b_j trong khoảng từ 1 đến $2n$ mà vẫn giữ nguyên thứ tự của chúng trong từng tập con. Chú ý là quá trình này sẽ chấm dứt khi mà

$A = \{a_1 = n + 1, a_2 = n + 2, \dots, a_n = 2n\}$

và

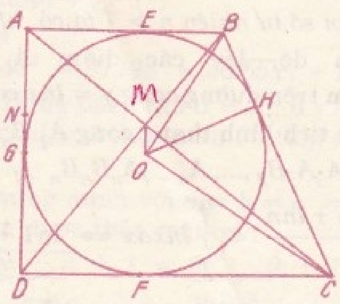
$B = \{b_n = 1, b_{n-1} = 2 \dots, b_2 = n - 1, b_1 = n\}$

Bây giờ ta xem các giá trị tuyệt đối của hiệu thay đổi như thế nào mỗi khi a_i "đổi chỗ" cho b_j. Nếu trước khi đổi chỗ, $a_i = k_i$, $b_j = k + 1$ thì sau khi đổi chỗ ta có $a_i = k + 1$, $b_j = k$. Vì các giá trị của a_j và b_i không thay đổi sau lần đổi chỗ này, nên tổng $|a_i - b_i| + |a_j - b_j|$ cũng không thay đổi và do đó toàn bộ tổng các giá trị tuyệt đối của các hiệu cũng sẽ không đổi và bằng giá trị ban đầu của nó là n^2.

Câu 2 : Ta chọn ra n hàng có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất. Ta chứng minh số ô được đánh dấu còn lại $\leq n$. Giả sử ngược lại, khi đó sẽ có một hàng (trong số n hàng còn lại) chứa ít nhất 2 ô đã đánh dấu (nguyên lí Dirichle). Và trên n hàng đã chọn có không ít hơn 2 × n ô đã được đánh dấu, suy ra số ô được đánh dấu lớn hơn 3n trái với giả thuyết ban đầu.

Vậy sau khi đã chọn ra n hàng, còn lại không quá n ô được đánh dấu và ta có thể chọn $\leq n$ cột chứa chúng thì sẽ thấy không còn ô được đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột được chọn.

Câu 3 : Gọi O là tâm của đường tròn nội tiếp hình thang vuông (xem hình vẽ). Giả sử các góc tại đỉnh A và D vuông. Dễ thấy tam giác BOC vuông tại O. Gọi E, F, G, H lần lượt là các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB,



CD, AD, BC, ta có hệ thức $OH^2 = BH \cdot CH$

Suy ra $\dfrac{EB}{DF} = \dfrac{AE}{FC}$

Do đó điểm M phải nằm trên đoạn EF. Đường cao ứng với đỉnh M của tam giác ADM có độ dài là R, và cạnh đáy là $2R$, suy ra diện tích tam giác này là R^2. Do diện tích các tam giác ADM và BCM bằng nhau, nên trong trường hợp các góc B và C vuông, chúng ta cũng có kết quả tương tự.

Câu 4 : Bằng suy luận đơn giản, dễ thấy nếu ta lấy ra 25 viên bi thì sẽ phải có ít nhất 7 viên bi cùng màu (nguyên lí Dirichle, $6 \times 4 = 24 < 25$)

Tổng quát hơn, cho n hộp chứa các viên bi được tô bốn màu, mỗi hộp có không ít hơn k viên bi được tô cùng một màu. Trộn lẫn các viên bi của n hộp này. Hỏi cần phải lấy ít nhất bao nhiêu viên để chắc chắn có k viên bi cùng màu. Câu trả lời là phải lấy ra $n(k - 1) + 1$ viên bi.

Câu 5 : Phép so sánh hai xâu A và B để được xâu C có thể viết như sau : $A \ \& B \Rightarrow C = (a_1 \& b_1, a_2 \& b_2, \dots, a_n \& b_n)$

với phép toán trên các số 0 và 1 được thực hiện theo quy tắc

$0 \& 0 = 1 \quad 1 \& 1 = 1 \quad 1 \& 0 = 0 \quad 0 \& 1 = 0$

Ta viết kết quả của tất cả các dịch chuyển A và so sánh với B (tức là xâu C lần lượt từ trên xuống thành một bảng vuông kích thước 32 × 32.

$(a_1 \& b_1)$	$(a_2 \& b_2)$	...	$(a_{31} \& b_{31})$	$(a_{32} \& b_{32})$
$(a_2 \& b_1)$	$(a_3 \& b_2)$	...	$(a_{32} \& b_{31})$	$(a_1 \& b_{32})$
$(a_{31} \& b_1)$	$(a_{32} \& b_2)$	...	$(a_{29} \& b_{31})$	$(a_{30} \& b_{32})$
$(a_{32} \& b_1)$	$(a_1 \& b_2)$	...	$(a_{30} \& b_{31})$	$(a_{31} \& b_{32})$

Ta sẽ chứng minh là trong bảng trên có đúng (16 × 32) số 1, từ đó theo nguyên lí Dirichle, sẽ phải tồn tại một hàng chứa không ít hơn 16 số 1, ứng với một cách dịch chuyển xâu A rồi so sánh với B để được xâu C có giá trị không nhỏ hơn 16.

Thật vậy, nếu xét theo từng cột của bảng thì với mỗi giá trị cố định của b_j, sẽ có đúng 16 số trong các số $a_1, a_2, \dots, a_{32}$ có cùng giá trị (0 hay 1) với b_i, do đó mỗi cột có đúng 16 số 1.

Vì bảng có 32 cột nên số các số 1 trong bảng đúng bằng (16 × 32). Đây chính là điều ta cần có để áp dụng được nguyên lí Dirichle.

HOÀNG LÊ MINH

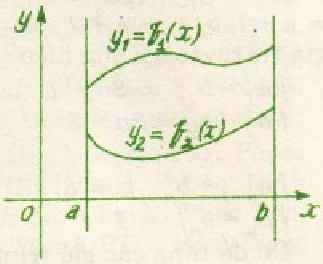
Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN SINH NGUYÊN

Trong chương trình PT ta có một ứng dụng của phép tính tích phân :

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và đồ thị của hai hàm $y_1 = f_1(x)$ và $y_2 = f_2(x)$ liên tục trên $[a, b]$ sao cho $f_1(x) \geq f_2(x)$, với mọi $x \in [a, b]$ được cho bởi công thức $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$ (xem Giải tích 12 Ngô Thúc Lanh trang 128, Phan Đức Chính trang 159, Trần Văn Hạo trang 137). Trong các kì thi tốt nghiệp PTTH của miền Nam trước đây hầu như năm nào cũng có dạng toán này. Ở đây, bài báo này đề cập đến một ứng dụng bài toán tính diện tích bằng tích phân này để chứng minh một số bất đẳng thức. Phương pháp này có hiệu lực đối với các bất đẳng thức có chứa hàm mũ hay loga.



Hình 1

Ví dụ 1. *Cho các số $p > 1$, $q > 1$ liên hệ với nhau bởi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

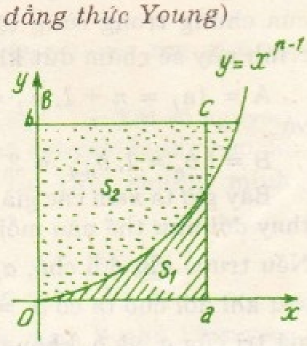
Thế thì với mọi a, b dương ta có $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (Bất đẳng thức Young)

Giải. Xét đường cong $y = x^{p-1}$ với $x > 0$, $p > 1$. Ta cũng có $x = y^{q-1}$. Ta thấy (hình 2) tổng diện tích S_1, S_2 lớn hơn diện tích hình chữ nhật $ACBO$. Ta tính S_1, S_2 :

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{x^p}{p}\Big|_0^a = \frac{a^p}{p}$$

$$S_2 = \int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{y^q}{q}\Big|_0^b = \frac{b^q}{q}$$

Vậy $S_{AOBC} = ab \leq S_1 + S_2 \Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$: đpcm



Hình 2

Ví dụ 2. *Cho a, b các số lớn hơn hay bằng 1. Chứng minh rằng $ab \leq e^{a-1} + b\ln b$.*

Giải : Xét đường cong $y = \ln x$ $(x \geq 1)$ và các điểm A, B, C (hình 3). Diện tích hình chữ nhật $ACBO$ không lớn hơn tổng diện tích S_1, S_2. Mà

$$S_{ACBO} = b(a-1)$$

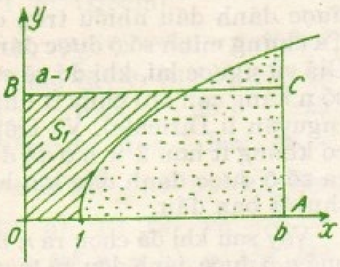
$$\text{và } S_1 = \int_0^{a-1} e^y\,dy = e^y\Big|_0^{a-1} = e^{a-1} - 1$$

$$S_2 = \int_1^b \ln x\,dx = x\ln x - x\Big|_1^b = b\ln b - b + 1$$

Vậy

$(a-1)b \leq b\ln b - b + 1 + e^{a-1} - 1 = b\ln b - b + e^{a-1}$

$\Leftrightarrow ab \leq b\ln b + e^{a-1}$. Đpcm.



Hình 3

Ví dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ ta có $n! < n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}$*

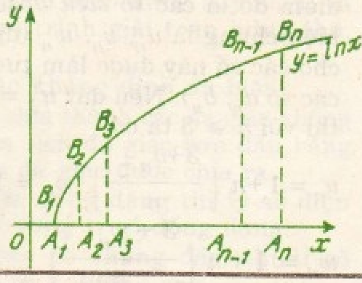
Giải : Trong mặt phẳng tọa độ, lấy các điểm A_i có hoành độ $X_{A_i} = i (i = 1, ..., n)$. Gọi B_i là các điểm trên đường cong $y = \ln x$ có hình chiếu trên trục hoành là $A_i (i = 1, 2, ..., n)$. Diện tích hình thang cong $A_1 B_n A_n$ lớn hơn tổng diện tích các hình thang $A_1A_2B_2$, $B_2A_2A_3B_3$, ..., $A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$.

$$\frac{\ln 1 + \ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + ... + \frac{\ln(1-1) + \ln n}{2} < \int_1^n \ln x\,dx \Leftrightarrow \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + ... +$$

$$\ln(n-1) + \frac{\ln n}{2} < n\ln n - n + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln n! < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1 = \ln(n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n})$$

$$\Leftrightarrow n! < n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}$$



Hình 4

Các bạn thử vận dụng phương pháp này để chứng minh các bất đẳng thức :

1. $b(a+1) \le e^a + b\ln b$ với $a, b > 0$

2. $(n+1)ab \le a^{n+1} + nb^{\frac{n+1}{n}}$ $(a, b > 0$, n nguyên dương)

3. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương

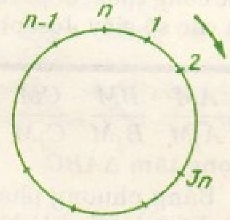
$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

CÁC SỐ JOSÈPHE

TRẦN VĂN VUÔNG

Trong giai thoại toán học "*Josèphe* và hai người muốn sống" ở số 193 (1993) của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ có một quy tắc để xác định số thứ tự của hai người muốn sống trong một cuộc tự sát của 41 người.

Nội dung toán học của *quy tắc Josèphe* đó như sau :



Vẽ một đường tròn rồi đánh dấu n điểm trên đường tròn đó. Ghi số thứ tự của n điểm này theo chiều kim đồng hồ liên tiếp từ 1 đến n bên cạnh điểm tương ứng. Xuất phát từ điểm 1, ta đi dọc đường tròn đó theo chiều kim đồng hồ và lần lượt đếm và xóa dần dần các điểm đã đánh dấu. Trong khi đếm, ta chỉ dùng các số đếm 1, 2, 3. Điểm nào tương ứng với số đếm 3 thì bị xóa đi. Điểm tiếp sau của điểm bị xóa được đếm 1. Cứ tiếp tục đếm và xóa dần dần các điểm đã đánh dấu (nhưng trước đó chưa bị xóa) như vậy cho đến khi chỉ còn lại 2 điểm.

Số thứ tự của hai điểm không bị xóa đó chính là số thứ tự của hai người muốn sống trong số n người tham gia cuộc tự sát.

Nếu có n người tham gia cuộc tự sát theo quy tắc Josèphe thì ta gọi số thứ tự của hai người muốn sống là *các số Josèphe* hạng n và gọi đường trong tương ứng là J_n (*đường tròn Josèphe*).

Rõ ràng các số Josèphe hạng 2 và hạng 3 đều là 1 và 2. Ta đặt $a_2 = a_3 = 1, b_2 = b_3 = 2$.

Giả sử $n \ge 4$ mà các số Josèphe hạng $n-1$ đã được xác định là a_{n-1} và b_{n-1}. Ta vẽ J_{n-1} rồi vẽ J_n đồng tâm với J_{n-1}. Nối tâm chung của hai đường tròn đó lần lượt với các điểm mang số thứ tự $1, 2, \ldots n-3, n-2, n-1$ đã đánh dấu trên J_{n-1} bằng các tia tương ứng xuất phát từ tâm chung.

– Giao điểm của các tia này với J_n được ghi số thứ tự tương ứng là $4 \ldots, n, 1, 2$. Điểm số 3 trên J_n (sẽ bị xóa theo quy tắc Josèphe) không được đặt tương ứng với điểm đã đánh dấu trên J_{n-1}. Có thể coi phép đặt tương ứng đó là một ánh xạ.

$f_n : (1, 2, \ldots, n-3, n-2, n-1) \to (4, \ldots, n, 1, 2)$ bảo toàn thứ tự từ bộ $n-1$ số $(1, 2, \ldots n-3, n-2, n-1)$ lên bộ $n-1$ số $(4, \ldots, n, 1, 2)$. Đó là một song ánh.

Khi áp dụng quy tắc Josèphe để xóa dần các điểm đã đánh dấu trên J_{n-1} và J_n thì rõ ràng rằng điểm x trên J_{n-1} bị xóa khi và chỉ khi điểm $f_n(x)$ trên J_n bị xóa. Do đó $f_n(a_{n-1})$ và $f_n(b_{n-1})$ là các số Josèphe hạng n và ta đặt

$$a_n = f_n(a_{n-1}), b_n = f_n(b_{n-1}).$$

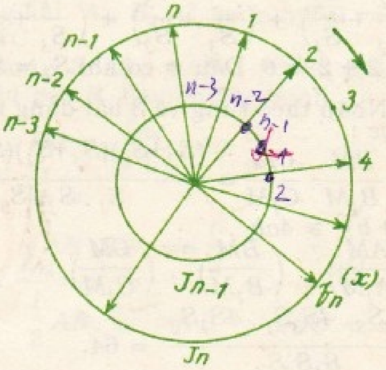
Nếu x là số thứ tự của điểm đã đánh dấu trên J_{n-1} thì $1 \le x \le n-1$ và

$$f_n(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{nếu } x \le n-3 \\ 1 & \text{nếu } x = n-2 \\ 2 & \text{nếu } x = n-1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + (2+x) & \text{nếu } 2 + x \le n-1 < n \\ 1 + (2+x) - n & \text{nếu } 2 + x \ge n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1+(2+x)-n.0 & \text{nếu } 0 < \frac{2+x}{n} < 1 \\ 1+(2+x)-n.1 & \text{nếu } 1 \le \frac{2+x}{n} \le \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$= 1 + n.\frac{2+x}{n} - n\left[\frac{2+x}{n}\right] = 1 + n\left\{\frac{2+x}{n}\right\}$$



trong đó $[a]$ là phần nguyên của a và $\{a\} = a - [a]$ là phần phân của a. Như vậy, công thức truy toán đối với Josèphe hạng $n \geqslant 4$ là

$$a_n = 1+n\left\{\frac{2+a_{n-1}}{n}\right\},\ b_n = 1+n\left\{\frac{2+b_{n-1}}{n}\right\}$$

Nếu đặt $a_1 = 0$ và $b_1 = 1$ thì dễ dàng kiểm tra lại rằng công thức trên còn đúng cả với $n = 2$ và $n = 3$.

Sử dụng các công thức này, ta lập được bảng các số Josèphe từ hạng thấp lên hạng cao tương đối nhanh chóng mà không cần vẽ các đường tròn Josèphe. Trong bảng đó, ta có $a_{41} = 16$ và $b_{41} = 31$ là số thứ tự của hai người muốn sống trong cuộc tự sát của 41 người theo quy tắc Josèphe.

Với mọi $n \geqslant 2$, a_n và b_n là hai số nguyên dương khác nhau, không vượt quá n và không chia hết cho 3.

Nếu ta thay đổi chút ít trong quy tắc Josèphe để cho các số đếm chỉ là 1 và 2 mà điểm số đếm 2 bị xóa, cuối cùng chỉ giữ lại một điểm không bị xóa thì số thứ tự của điểm không bị xóa đó luôn luôn là số lẻ. Nếu gọi nó là *số tựa Josèphe hạng n* và kí hiệu nó là α_n thì $\alpha_1 = 1$ và

$$\alpha_1 = 1+n\left\{\frac{1+\alpha_{n-1}}{n}\right\} \text{ với } n \geqslant 2.$$

Có thể chứng minh dễ dàng rằng

$$\alpha_n = 1+2\,(n-2^{[\log_2 n]}) \text{ với } n \geqslant 1.$$

Nếu ta lại thay đổi một phần quy tắc Josèphe để cho các số đếm là 1, 2, 3, 4 mà điểm có số đếm 4 mới bị xóa, cuối cùng giữ lại 3 điểm không bị xóa thì có thể gọi số thứ tự của các điểm đó là các *số siêu Josèphe hạng n* và kí hiệu chúng là u_n, v_n, w_n (định nghĩa quy nạp cho các số này được làm tương tự như đối với các số a_n, b_n). Nếu đặt $u_2 = 0$, $v_2 = 1$, $w_2 = 2$ thì với $n \geqslant 3$ ta có

$$u_n = 1+n\left\{\frac{3+u_{n-1}}{n}\right\},\ v_n = 1+n\left\{\frac{3+v_{n-1}}{n}\right\},$$

$$w_n = 1+n\left\{\frac{3+w_{n-1}}{n}\right\}$$

Có thể chọn $v_1 = -1$ và $w_1 = 0$ để các công thức của v_n và w_n còn đúng cả với $n = 2$. Nhưng không chọn được giá trị thích hợp của $u1$ để các công thức của u_n còn đúng cả với $n = 2$.

Nếu so sánh các công thức truy toán đối với các số Josèphe, tựa Josèphe, siêu Josèphe đã nêu trên thì ta thấy chúng có dạng thống nhất. Tuy vậy, ta mới chỉ tìm được công thức "đẹp" cho số tựa Josèphe hạng n là

$$\alpha_1 = 1+2\,(n-2^{[\log_2 n]})$$

Hi vọng rằng sau này ta có thể tìm được các công thức "đẹp" tương tự cho các số Josèphe và các số siêu Josèphe.

Sử dụng diện tích ...

(Tiếp theo trang 2)

$$\frac{AA_1 - MA_1}{MA_1} = \frac{S_2+S_3}{S_1} \rightarrow \frac{MA}{MA_1} = \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1}$$

Tương tự ta có : $\dfrac{MB}{MB_1} = \dfrac{S_3+S_1}{S_2} = \dfrac{S_3}{S_2} + \dfrac{S_1}{S_2}$

$$\frac{MC}{MC_1} = \frac{S_1}{S_3} + \frac{S_2}{S_3} \rightarrow$$

a) $\dfrac{MA}{MA_1} + \dfrac{MB}{MB_1} + \dfrac{MC}{MC_1} =$

$$= \left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right) + \left(\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_3}{S_1}\right) \geqslant$$

$\geqslant 2+2+2 = 6$. Dấu = có khi $S_1 = S_2 = S_3$.

b) Nhân theo từng vế 3 bất đẳng thức trên ta được :

$$\frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M} = \frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S_1\,.\,S_2\,.\,S_3},$$

vì $(a+b)^2 \geqslant 4ab$

$$\rightarrow \left(\frac{AM}{A_1M}\right)^2\cdot\left(\frac{BM}{B_1M}\right)^2\cdot\left(\frac{CM}{C_1M}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4S_2S_3\,.\,4S_3S_1\,.\,4S_1S_2}{S_1S_2S_3} = 64.$$

$$\rightarrow \frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M} \geqslant 8.$$ Dấu "=" có khi M là trọng tâm ΔABC

Bằng phương pháp trình bày trên, các bạn có thể giải các bài tập sau :

1) Cho tam giác đều ABC, điểm O ở trong tam giác. Gọi A', B', C' là các hình chiếu của O trên các đường cao AA_1, BB_1 và CC_1. Chứng minh rằng : $AA' + BB' + CC'$ không đổi.

2) Trên cạnh AC của ΔABC ta lấy điểm D. Chứng tỏ rằng tổng các bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và BCD lớn hơn bán kính vòng tròn nội tiếp ΔABC.

3) Qua điểm M nằm trong hình bình hành $ABCD$ ta vẽ các đường thẳng PR và QS song song với các cạnh BC và AB. (Các điểm P, Q, R, S nằm trên AB, BC, CD, DA). Chứng tỏ rằng các đường thẳng BS, PD và MC đồng quy.

4) Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Gọi A_1, B_1, C_1 là chân các đường phân giác tương ứng đỉnh A, B, C. Kí hiệu $S_1 = S_{\Delta A_1B_1C_1}$, $S = S_{\Delta ABC}$, $k = \dfrac{BC'}{AC}$ hãy chứng minh :

$$\frac{S}{S_1} = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2.$$

KẾT QUẢ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN PTTH TOÀN QUỐC NĂM HỌC 1993-1994

Cuộc thi học sinh giỏi toán PTTH toàn quốc năm học 1993 – 1994 diễn ra trong hai ngày 2 và 3 tháng 3 năm 1994. Có 31 đội gồm 232 thí sinh dự thi ở bảng A (ở thành phố và các tỉnh vùng đồng bằng), còn lại ở bảng B có 21 đội gồm 95 thí sinh. Mỗi thí sinh phải giải 6 bài toán trong hai buổi, mỗi buổi 3 giờ. Số điểm tối đa của cả 6 bài toán là 40 điểm. Kết quả cuộc thi như sau :

Tổng số bài được giải (đạt từ 20 điểm trở lên) của cả hai bảng A, B là 60, chiếm tỉ lệ $60/327 \approx 18,3\%$.

Bảng A :

Tổng số bài được giải là 48, chiếm tỉ lệ $48/232 \approx 20,6\%$

Giải nhất : có 1 giải (39,5 điểm) : Trần Ngọc Nam (Trường ĐHTH HN)

Giải nhì : có 6 giải (từ 29 điểm đến 34 điểm) :

Tô Đông Vũ, Nguyễn Quí Tuấn, Đào Hải Long (trường ĐHTH HN) Nguyễn Duy Lân, Phạm Hồng Kiên (trường ĐHSPHN 1), Nguyễn Huy Quân (Hà Nội).

Giải ba : Có 15 giải (từ 23 điểm đến 27,5 điểm) :

Hoàng Văn Long (Trường ĐHSP Vinh), Trương Bá Tú, Phùng Sơn Lâm (Nghệ An), Nguyễn Trọng Phúc (Hải Phòng), Nguyễn Thu Hồng, Trần Bảo Khánh (Hà Tây), Nguyễn Hoài Nam, Phan Vĩnh Long (Trường ĐHTHHN), Phạm Chung Thủy, Võ Việt Hùng (Trường ĐHSPHN 1), Nguyễn Quang Hưng (Hà Nội), Nguyễn Thanh Hải (Quảng Bình), Trịnh Thanh Tùng (Thanh Hóa), Vũ Quang Thuyết (Nam Hà), Phan Minh Chí (tp Hồ Chí Minh).

Giải khuyến khích : có 26 giải (từ 20 điểm đến 22 điểm) : Nguyễn Viết Toàn, Bùi Anh Văn, Nguyễn Văn Hạnh, Nguyễn Lê Minh, Lê Anh Cường (Thanh Hóa), Nguyễn Quang Huy, Phan Tiến Dũng, Lê Huy Khánh (Nghệ An), Tô Huy Quỳnh (Thái Bình), Dương Đình Hiếu, Đào Trọng Khanh, Nguyễn Minh Phương, Nguyễn Quang Vinh (Hà Tây), Phạm Tiến Sỹ, Dương Chí Dũng (Hà Bắc) Nguyễn Hoàng Long, Hoàng Anh Tuấn, Đinh Văn Vũ (Hà Nội), Phan Thu Hiền (Hải Phòng) Nguyễn Như Đương, Nguyễn Hữu Hiếu (Nam Hà), Vũ Quang Hiếu (Ninh Bình), Trần Thanh Hà, Nguyễn Chu Gia Vượng (Trường ĐHTHHN) Nguyễn Thế Phương, Nguyễn Duy Hải (Trường ĐHSPHN 1)

Bảng B :

Tổng số bài được giải là 12, chiếm tỉ lệ $12/95 \approx 12,6\%$

Giải nhất : Không có

Giải nhì : có 2 giải (từ 29,5 điểm đến 30 điểm) : Hoàng Việt (Yên Bái), Nguyễn Xuân Hùng (Đắc Lắc)

Giải ba : có 6 giải (từ 23 điểm đến 25 điểm) :

Trần Tương Quốc, Lê Bảo Long, Nguyễn Minh Thành (Tây Ninh) Lê Phong (ĐắcLắc), Bùi Giang Nam (Lâm Đồng), Võ Hoàng Trung (Trà Vinh)

Giải khuyến khích : có 4 giải (từ 20 điểm đến 21 điểm) :

Phan Văn Tín (Lâm Đồng), Đỗ Quang Minh (Tuyên Quang), Lê Văn Hào (Gia Lai), Nguyễn Như Mỹ Ngọc (Đồng Tháp).

NGUYỄN VIỆT HẢI

Phép đối xứng...

(Tiếp theo trang 18)

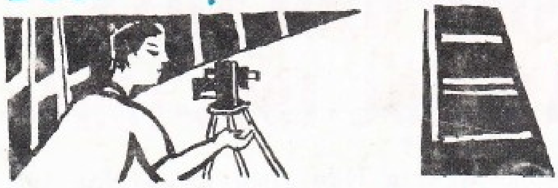
Trong đời sống của mình, con người đã bắt chước thiên nhiên trong việc tạo dựng các điều kiện sống. Từ ngàn xưa, người nguyên thủy đã biết làm các lưỡi mác hình chiếc lá, làm cung nỏ theo hình vành trăng khuyết, nặn bình đựng nước theo dạng quả bầu v.v.. Không phải chỉ có loài người mà cả loài vật, dù không tự giác, cũng học tập được rất nhiều ở thiên nhiên. Con kiến đào hang, con ong xây tổ đều theo những hình dạng hình học và theo những quy tắc toán học chặt chẽ. Những con nhện đã dệt những tấm lưới của chúng với một độ chính xác toán học cao đến mức mà một trong những loài nhện châu Phi được mệnh danh là "nhện hình học"

Ngày nay, con người không những chỉ học tập thiên nhiên về các hình dạng hình học, mà đã nghiên cứu, bắt chước thiên nhiên một cách toàn diện. Môn *Phỏng sinh học* đã giúp cho loài người khám phá ra nhiều điều kì thú của thiên nhiên, vận dụng chúng để hoàn thiện và đẩy nhanh các quá trình xây dựng khoa học kĩ thuật và đã đem lại nhiều kết quả rực rỡ.

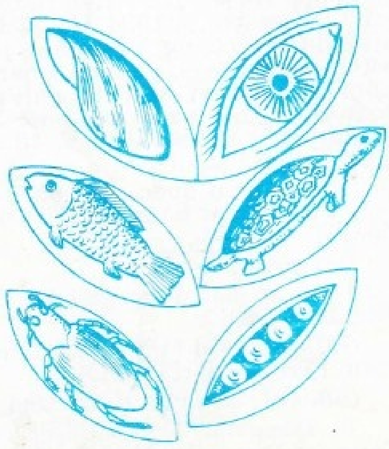
Thiên nhiên còn lưu giữ nhiều bí ẩn kì diệu và con người cần không ngừng nỗ lực học tập, nghiên cứu, khám phá ra các bí ẩn đó để ngày càng tạo ra cho mình một cuộc sống phong phú hơn, thuận lợi hơn và cũng hấp dẫn hơn.

NGUYỄN VĨNH CẬN
(Viết theo ANTHONY RAVIELLI)

Toán học và đời sống



PHÉP ĐỐI XỨNG TRONG THIÊN NHIÊN



Có thể nói rất nhiều những gì mà ta thấy xung quanh những vẻ đẹp kì thú mà ta nhìn ngắm hàng ngày, là những kết quả của "Nghệ thuật hình học" của thiên nhiên. Không phải ngẫu nhiên mà một cái lá cây, một quả thông, một con cá, một con rùa chẳng hạn lại có một hình dạng chung ; và một cái vỏ ốc xinh xắn cùng với một chuỗi thiên hà khổng lồ xa lắc xa lơ lại được cấu tạo theo cùng một khuôn mẫu hình học ; chúng có hình dạng của những đường xoắn ốc. Mỗi một sinh vật - một cái cây một bông hoa, một chú côn trùng v. v.. - tự nó đã là một bài học hình học dưới dạng hoàn chỉnh nhất.

Thiên nhiên đã sáng tạo ra vũ trụ theo một chương trình toán học xác định và người ta nhận ra rằng các phương pháp mà thiên nhiên đã sử dụng thường là đơn giản và trực tiếp. Bắt đầu từ một số lượng nhỏ các phần tử, thiên nhiên xây dựng nên các cấu trúc của thế thới vật lí, rồi cùng với cách thức tiết kiệm các phương tiện như vậy, chỉ bằng một vài hình hình học cơ bản, thiên nhiên đã tạo cho những cấu trúc ấy các hình dáng biến hóa vô cùng. Người ta đã phát hiện ra rằng ngay cả những hình dạng có vẻ phức tạp nhất cũng chỉ là những

tổ hợp của những hình hình học cơ bản, đơn giản, quen thuộc nhất. Đó là hình tròn, hình tam giác, hình vuông. Các hình này có thể so sánh với các chữ cái a, b, c..., mà người ta dùng để kết hợp theo nhiều cách khác nhau, tạo nên các từ, rồi các từ lại kết hợp với nhau để thành các câu, và đến lượt nhiều câu kết hợp với nhau để tạo thành các trang sách, các chương mục v.v.. Các hình hình học cơ bản đã có mặt trên thế giới này từ khi khai thiên lập địa. Chắc hẳn chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng không phải chỉ có con người mà tất cả các con vật, kể cả những con khủng long to lớn thời tiền sử, ngày nay đã biến mất khỏi hành tinh chúng ta, cũng đều nhìn thế giới xung quanh qua cặp mắt hình tròn. Thiên nhiên cũng đã sử dụng hình tam giác theo hàng vạn phương thức khác nhau. Những chiếc lá của nhiều loài cây, đôi cánh của nhiều loại côn trùng, các loại vây của nhiều thú cá và nhiều cấu trúc xương trong cơ thể động vật đều có hình tam giác.

Như chúng ta đã nói ở trên, thiên nhiên đã xây dựng thế giới theo nhờ quy tắc và phương pháp toán học chặt chẽ và một trong những phương pháp được thiên nhiên sử dụng phổ biến nhất là phép đối xứng. Bạn hãy nhìn kĩ mà xem, một cành cây, một chiếc lá, một con bướm, một con ếch v.v.. và vô vàn các hình dạng tự nhiên khác từ các tinh thể kim cương đến cơ thể con người đều mang tính chất đối xứng chặt chẽ.

Ta biết rằng các tinh thể kim cương mang tính chất đối xứng vì nó còn phụ thuộc vào các định luật của vật lí và hóa học. Cơ thể con người và động vật có tính chất đối xứng bởi vì chính nhờ vậy mà nó có thể hoạt động một cách dễ dàng và có hiệu quả hơn.

Trong thiên nhiên, ngoài những vật có hình dạng mang tính chất đối xứng hình học, còn có những vật khác, các bộ phận của nó tuy không tuân theo một sự đối xứng chặt chẽ nhưng lại được sắp xếp một cách hài hòa, theo một tỉ lệ thích hợp và cân đối theo một biến dạng của phép đối xứng mà ngày nay ta gọi là "*phép đối xứng động*".

(Xem tiếp trang 17)

ISSN : 0866 – 8035
Mã số : 8BT05M4

Chỉ số 12884
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục
In xong và gửi lưu chiểu tháng 5 /1994

Giá : 1200đ
Một nghìn
hai trăm đồng