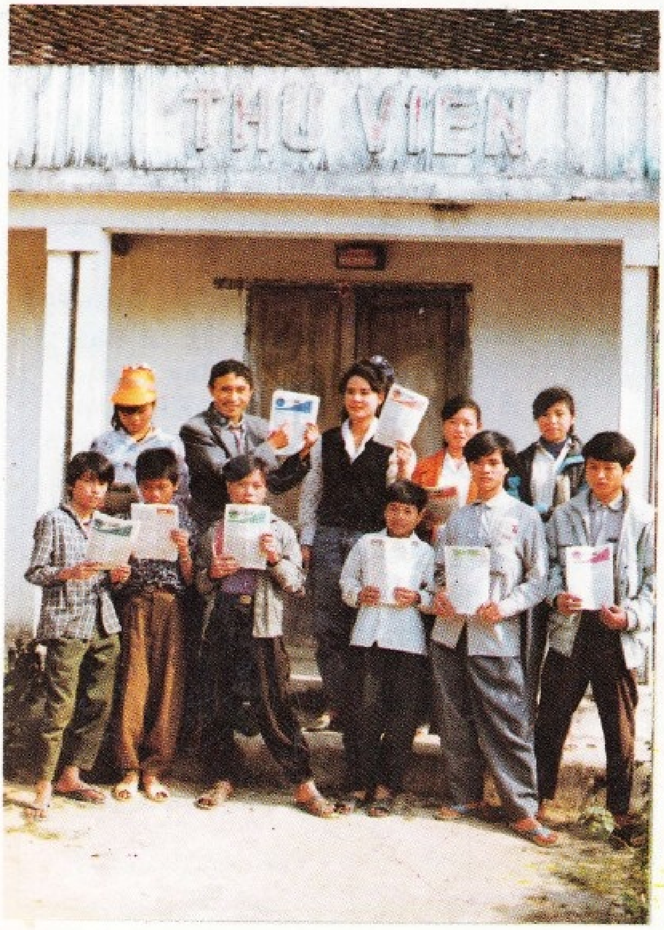
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

4(202)
1994

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

- **MỘT MẸO NHỎ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH Ở LỚP 8**



Thày và trò trường PTTH Quỳnh Lưu 3, Nghệ An với Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

- **Định lí lớn Fermat và việc tìm tòi chứng minh sơ cấp của nó**
- **HÌNH HỌC HÓA NỘI DUNG VÀ CÁCH GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ**
- **Hai con số kì lạ**
- **Đếm đèn**

CHƯƠNG TRÌNH RÚT GỌN TÍNH SỐ LIỆT FIBONACCI

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT: 260786
231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : ĐOÀN HỒNG

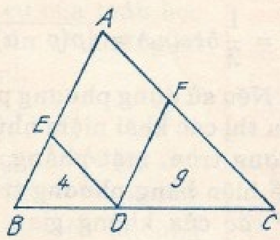
Dành cho các bạn Trung học cơ sở

MỘT MẸO NHỎ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH Ở LỚP 8

VŨ HỮU BÌNH

Ta xét bài toán diện tích sau thuộc chương trình lớp 8 :

Cho tam giác ABC. Qua điểm D thuộc cạnh BC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác tạo thành hai tam giác nhỏ có diện tích $4cm^2$ và $9cm^2$. Tính diện tích tam giác ABC.



Với học sinh lớp 9, giải bài toán trên không khó khăn lắm :

Ta có : $\dfrac{BD}{BC} + \dfrac{DC}{BC} = 1$ (1)

Đặt dt $(ABC) = S$. Các tam giác EBD và FDC đồng dạng với ΔABC nên :

$$\left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = \frac{4}{S}, \left(\frac{DC}{BC}\right)^2 = \frac{9}{S} \quad (2)$$

Suy ra $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{2}{\sqrt{S}}, \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{3}{\sqrt{S}}$ (3)

Từ (1) và (3) : $\dfrac{2}{\sqrt{S}} + \dfrac{3}{\sqrt{S}} = 1$. Do đó $\sqrt{S} = 5$.

Vậy $S = 25$ (cm^2)

Học sinh lớp 8 chưa học căn bậc hai nên để giải bài toán trên thường phải biến đổi như sau :

Bình phương hai vế của (1) :

$$\left(\frac{BD}{BC}\right)^2 + \left(\frac{DC}{BC}\right)^2 + 2 \cdot \frac{BD.DC}{BC^2} = 1$$

$$\frac{4}{S} + \frac{9}{S} + 2 \cdot \frac{BD.DC}{BC^2} = 1 \quad (4)$$

Từ (2) : $\left(\dfrac{BD}{BC} \cdot \dfrac{DC}{BC}\right)^2 = \dfrac{36}{S^2} \Rightarrow \dfrac{BD.DC}{BC^2} = \dfrac{6}{S}$ (5)

Từ (4), (5) : $\dfrac{13}{S} + 2 \cdot \dfrac{6}{S} = 1$. Do đó $S = 25$ (cm^2)

Sở dĩ phải "đi đường vòng" như trên vì ở lớp 8 chưa có khái niệm về $\sqrt{S}$. Để tháo gỡ vướng mắc này chỉ cần một mẹo nhỏ : đặt $S = d^2$. Như vậy lời giải đối với lớp 8 cũng rất ngắn gọn :

Ta có $\left(\dfrac{BD}{BC}\right)^2 = \dfrac{4}{d^2}, \left(\dfrac{DC}{BC}\right)^2 = \dfrac{9}{d^2}$ nên $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{2}{d}, \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{3}{d}$

Ta lại có : $\dfrac{BD}{BC} + \dfrac{DC}{BC} = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{d} + \dfrac{3}{d} = 1 \Rightarrow d = 5$. Vậy $S = d^2 = 25$ (cm^2).

Tổng quát của bài toán trên : nếu diện tích các tam giác nhỏ là a^2 và b^2 thì diện tích tam giác ABC bằng $(a+b)^2$.

Bạn hãy dùng phương pháp trên để giải bài toán sau với kiến thức lớp 8 :

Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác. Qua O vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác, chia nó ra ba tam giác nhỏ và ba hình bình hành. Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích ba tam giác nhỏ bằng :

a) $4cm^2$, $9cm^2$, $16cm^2$;

b) a^2 ; b^2, c^2.

Đáp số : a) $81cm^2$

b) $(a+b+c)^2$.

HÌNH HỌC HÓA NỘI DUNG VÀ CÁCH GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

PHẠM BẢO

Trong hình học các tính chất định lượng của một hình thường được thể hiện bằng các hệ thức. Chẳng hạn, như các công thức để tính cạnh và diện tích của một tam giác :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ v.v...}$$

Nếu sử dụng phương pháp tọa độ để nghiên cứu thì các khái niệm như điểm, đường thẳng, đường tròn, mặt phẳng, mặt cầu... đều được thể hiện bằng phương trình. Trong hệ tọa độ *Đề các* của không gian hai chiều một điểm được biểu diễn bằng một cặp số sắp thứ tự (x, y), đường thẳng là một tập hợp điểm biểu diễn bởi một phương trình dạng $ax + by + c = 0$, đường tròn là một tập hợp điểm biểu diễn bởi một phương trình dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$... Trong không gian 3 chiều, một điểm được biểu diễn bằng một bộ 3 số sắp thứ tự (x, y, z). Đường thẳng là $\{(x, y, z)\}$ mà

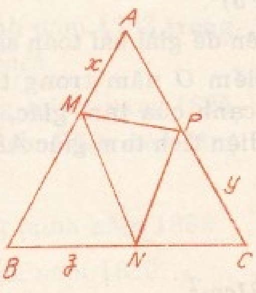
$$\frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b} = \frac{z-z_o}{c}$$

mặt phẳng là $\{(x, y, z)\}$ mà $Ax + By + Cz + D = 0$ hoặc mặt cầu là $\{(x, y, z)\}$ mà $(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = R^2$.

Do đó, với một số bài toán đại số, tùy theo các dữ kiện nếu ta "liên tưởng" để nhận ra các đặc điểm hình học của nó, có thể ta sẽ tìm được những cách giải ngắn gọn, độc đáo. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 1 : *Cho $0 < x, y, z < 1$. Chứng minh bất đẳng thức $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1$* (2)

Giải : Mỗi tích ở vế trái của (2) có thể xem là tích hai cạnh của một tam giác và vì sự như nhau nên ta hãy lấy một tam giác đều *ABC* có cạnh bằng *1*. Trên các cạnh *AB*, *BC* và *CA* lần lượt lấy các điểm *M*, *N* và *P* sao cho $AM = x$, $BN = z$, $CP = y$. Ta có bất đẳng thức diện tích :



Hình 1

$$S_{\Delta AMP} + S_{\Delta MBN} + S_{\Delta NCP} < S_{\Delta ABC} \text{ hay}$$

$$\frac{1}{2}x(1-y)\sin 60^o + \frac{1}{2}z(1-x)\sin 60^o + \frac{1}{2}y(1-z)\sin 60^o < \frac{1}{2}1^2\sin 60^o$$

Vậy $x(1-y) + z(1-x) + y(1-z) < 1$

Ví dụ 2 : *Chứng minh rằng với mọi giá trị của x, y ta đều có :*

$$\sqrt{4\cos^2x\cos^2y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2x\sin^2y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

(Đề thi tuyển sinh vào đại học, số 45)

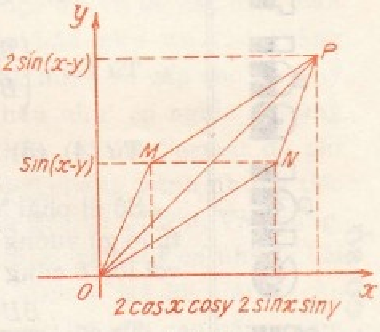
Giải : Các căn thức trên gợi cho ta nghĩ ngay đến công thức độ dài của một đoạn thẳng. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* lấy các điểm $M(2\cos x\cos y, \sin(x-y))$ và $N(2\sin x\sin y, \sin(x-y))$; ta có :

$$OM = \sqrt{4\cos^2x\cos^2y + \sin^2(x-y)}$$
$$ON = \sqrt{4\sin^2x\sin^2y + \sin^2(x-y)}.$$

Dựng hình bình hành *ONPM* (xem hình 2)

Ta có $OM + ON = OM + PM \geq OP$

Cũng dễ thấy *P* có tọa độ là $\{2(\cos x\cos y + \sin x\sin y) ; 2\sin(x-y)\}$; do đó :



Hình 2

$$\sqrt{4\cos^2x\cos^2y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2x\sin^2y + \sin^2(x-y)} \geq$$
$$\geq \sqrt{4\cos^2(x-y) + 4\sin^2(x-y)} \geq 2$$

Ví dụ 3 : *Cho 3 số $x, y, z > 0$ thỏa mãn hệ thức :*

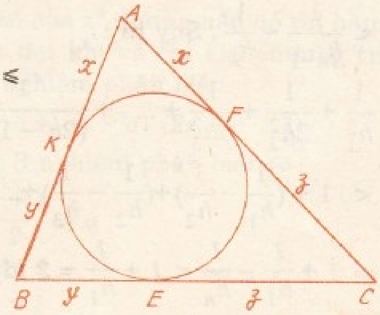
$$xyz(x+y+z) = 1 \qquad (3)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $(x+y)(x+z)$.

Giải : Hệ thức (3) là tích của 4 số gợi cho ta "liên tưởng" đến công thức Hê-rông $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Nếu đặt $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$ thì $x + y + z = p$ và $S^2 = xyz(x+y+z) = 1$

Trên hình 3 các số x, y, z là độ dài các tiếp tuyến kẻ từ đỉnh của tam giác đến đường tròn nội tiếp. Cạnh $AB = x + y$, $AC = x + z$.

$S_{\Delta ABC} =$
$= \frac{1}{2}AB.AC\sin A \leqslant$
$\frac{1}{2}AB.AC$
nên $AB.AC =$
$= (x+y)\times$
$\times (x+z) \geqslant$
$\geqslant 2S_{\Delta ABC} = 2$



Hình 3

Vậy min $[(x+y)(x+z)] = 2$

Ví dụ 4. *Tìm giá trị nhỏ nhất của*

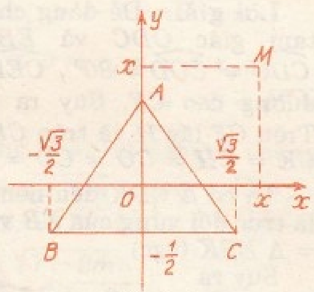
$$F = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3}+1)x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3}-1)x + 1}$$

Giải : Tương tự như ví dụ 2, ta viết lại

$$F = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + (x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy lấy các điểm $M(x,\ y = x)$, $A(0,\ 1)$, $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $C(+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$; ta có : $F = MA + MB + MC$

Cũng dễ thấy tam giác ABC đều và F nhỏ nhất khi M trùng với gốc O và min $F = 3$ khi $x = 0$ (xem hình 4).



Hình 4

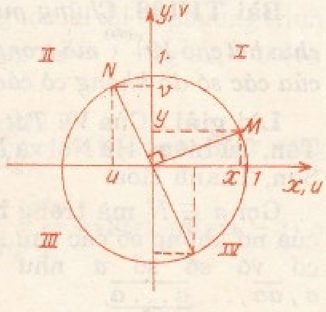
Ví dụ 5. *Chứng minh rằng nếu* $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ (5_1) *và* $xu + yv = 0$ (5_2) *thì* $x^2 + u^2 = y^2 + v^2 = 1$ *và* $xy + uv = 0$.

Giải : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy phương trình $x^2 + y^2 = 1$ là phương trình đường tròn có tâm $O(0, 0)$ bán kính bằng 1. Nhưng đồng nhất mặt phẳng tọa độ Oxy với mặt phẳng tọa độ Ouv thì đường tròn đó cũng là đường tròn có phương trình là $u^2 + v^2 = 1$. Trên đường tròn đó lấy hai điểm $M(x, y)$, $N(u, v)$ và xét hai vectơ $\overrightarrow{OM}(x,y)$, $\overrightarrow{ON}(u,v)$. Từ (5_2) cho ta $xu + yv = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 0$ nên $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$. Thành thử, nếu M thuộc cung vuông I thì N hoặc nằm trong cung vuông II, hoặc nằm trong cung vuông IV. Nhưng dù trong cung vuông nào ta cũng có $|x| = |v|$ và nếu x, v cùng dấu thì u, y trái dấu $|u| = |y|$ hoặc x, y cùng dấu thì y, v trái dấu.

Sau đó bình phương 2 vế các đẳng thức trên ta có :

$$\begin{cases} x^2 = v^2 \\ u^2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + u^2 = v^2 + y^2 = 1 \text{ và từ}$$

$xu + yv = 0$ nếu thay $u = y$ hoặc $x = v$ ta có $xy + uv = 0$.



Hình 5

Từ các ví dụ trên ta nhận thấy các bài toán đó thực chất là những bài toán hình học nhưng được phát biểu bằng "ngôn ngữ đại số", nên khi giải phải cố nhận ra cái "hồn hình học" của nó để từ đó vận dụng các kiến thức hình học mà tìm ra những lời giải ngắn gọn "tường minh".

Sau đây là một số đề toán để các bạn luyện tập :

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$$

Đáp số $y = 2$

2. Cho $a + b + c = 2$ và $ax + by + cz = 6$ tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{16a^2 + a^2x^2} + \sqrt{16b^2 + b^2y^2} + \sqrt{16c^2 + c^2z^2}$$

Đáp số : $P = 10$

3. Cho 3 số x, y, z thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ y^2 + yz + z^2 = b^2 \\ z^2 + zx + x^2 = c^2 \end{cases}$$

Tính $xy + yz + zx$

Đáp số : $\frac{4}{\sqrt{3}}\ S_{\Delta ABC}$

4. Giả sử $\rho(x, y) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}}$

Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta có

$\rho(a,c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c)$.

5. Chứng minh rằng với mọi a, b, c, x, y, z ta có :

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant -\frac{2}{3}(a+b+c).x(x+y+z)$$

Hướng dẫn : Dùng tích vô hướng.

Bài T1/198. *Chứng minh rằng có vô số số chia hết cho $19^{5^{1993}}$ mà trong biểu diễn thập phân của các số đó không có các chữ số 0, 1, 2, 3*

Lời giải : Của *Vũ Tất Thắng* (9CT, Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội và *Lê Vũ Long*, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa.

Gọi $a \in N$ mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số *0, 1, 2, 3*. Rõ ràng có vô số số a như vậy. Xét dãy số $a, \overline{aa}, \ldots, \underbrace{\overline{a\ldots a}}_{19^{5^{1993}}+1 \text{ số } a}$

Đem chia $19^{5^{1993}}+1$ số khác nhau này cho $19^{5^{1993}}$.

Theo nguyên tắc Đirichlê sẽ có ít nhất 2 số khi chia cho $19^{5^{1993}}$ cho cùng số dư. Giả sử đó là $\underbrace{\overline{a\ldots a}}_{m}$ và $\underbrace{\overline{a\ldots a}}_{n}$ $(m > n)$. Như vậy

$$\underbrace{\overline{a\ldots a}}_{m} - \underbrace{\overline{a\ldots a}}_{n} \ \vdots\ 19^{5^{1993}}$$

hay $\overline{\underbrace{a\ldots a}_{m-n}\underbrace{0\ldots 0}_{n}} \ \vdots\ 19^{5^{1993}}$

tức là $\underbrace{\overline{a\ldots a}}_{m-n} \times 10^n \ \vdots\ 19^{5^{1993}}$

Nhưng $(10, 19) = 1$ suy ra $(10^n, 19^{5^{1993}}) = 1$

Suy ra $\underbrace{\overline{a\ldots a}}_{m-n} \ \vdots\ 19^{5^{1993}}$. Vậy tồn tại vô số số chia hết cho $19^{5^{1993}}$ mà trong biểu diễn thập phân của chúng không có các chữ số *0, 1, 2, 3*. (đpcm)

Nhận xét : Các bạn *Trịnh Hữu Cung*, 9T, Lam Sơn, Thanh Hóa và *Doãn Trung Tùng*, 9CT, Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội đã giải bài toán thay số $19^{5^{1993}}$ bằng số tự nhiên bất kì M mà $(M, 10) = 1$. Các bạn *Phạm Lê Hùng*, 9A, Trưng Nhị, Hà Nội ; *Nguyễn Thị Thanh* 9A1, Hồng Bàng, hải Phòng cũng có lời giải tốt.

TÔ NGUYÊN

Bài T2/198. *Đặt* $h_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$.

Chứng minh rằng : với $\forall n \in Z^+$ *ta có :*

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{3h_2^2} + \frac{1}{5h_3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot h_n^2} < 2$$

Lời giải : (của *Nguyễn Anh Tú* 9H PTCS Trưng Vương, Hà Nội). Với $k \in Z^+$ và $k \geq 2$ ta có :

$$\frac{1}{(2k-1)h_k^2} = \frac{1}{(2k-1)(h_{k-1} + \frac{1}{2k-1})\cdot h_k} < \frac{1}{h_{k-1}} - \frac{1}{h_k}. \text{ Suy ra :}$$

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{2h_2^2} + \frac{1}{5h_3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)h_n^2}$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{h_{n-1}} - \frac{1}{h_n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_n} < 1 + \frac{1}{h_1} = 2 \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét : Chỉ có 2 bạn giải sai thật đáng tiếc.

Các bạn có lời giải tốt là : *Đỗ Hồ Nga* (9D, Đống Đa, Hà Nội), *Doãn Trung Tùng* (9, Nghĩa Tân, Hà Nội), *Vũ Thu Hường* (9, PTNK Hải Hưng), *Mai Thanh Bình* (7M, Mari Quyri, Hà Nội), *Nguyễn Quang Hà* (7A, Ấm Thượng, Thanh Hòa, Vĩnh Phú). *Trịnh Hoài Nam* (9T Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long), *Trần Nguyên Ngọc* (9K, Lê Lợi, Hà Đông, Hà Tây), *Ngô Đức Thành, Phạm Huy Tùng* (9A–8A, Bế Văn Đàn, Hà Nội)...

Không hiểu sao rất ít bạn gửi lời giải bài này ?

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/198 : *Cho* $\Delta\ ABC$ *có* $\hat{A} = 50^o$, $\hat{B} = 70^o$, $\hat{C} = 60^o$ *nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Các tia BO, CO cắt AC và AB lần lượt tại D và E. Gọi H là trực tâm* Δ *ABC. Chứng minh* Δ *DEH là tam giác đều.*

Lời giải : Dễ dàng chứng minh được các tam giác ODC và EBC cân tại C (vì $\widehat{CDO} = \widehat{COD} = 80^o$, $\widehat{CEB} = \widehat{CBE} = 70^0$). Vẽ đường cao CF. Suy ra $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{C}_3 = 20^o$. Trên CF lấy H và trên CB lấy K thỏa mãn $CK = CH = CO = CD = R$.

Ta có $\Delta\ CDK$ đều nên $DK = R$ (1) Do CF là trục đối xứng của EB và OK nên $\Delta\ BEO = \Delta\ EBK$ (cgc)

Suy ra

$EK = BO = R$ (2) và $\widehat{EKB} = \widehat{EOB} = 80^o$.

Từ (1) và (2) suy ra ΔEKD cân tại K và có $\widehat{EKD} = 180^0 - 80^o - 60^o = 40^o$.

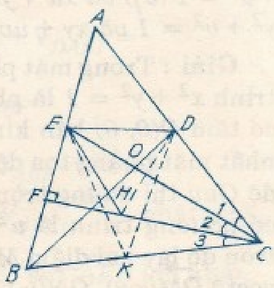
Suy ra

$\widehat{KED} = 70^o$. Mà $\widehat{KEC} = \widehat{KCE} = 40^o$.

Suy ra $\widehat{DEC} = 30^o$

Mặt khác do H và D đối xứng nhau qua CO nên $ED = EH$ và $\widehat{HEC} - \widehat{DEC} = 30^o$.

Suy ra ΔEDH đều. (3)



Ta lại có $\widehat{HBC} = \widehat{HEC}$ (đối xứng). Suy ra $\widehat{HBC} = 30^o$. Mà $\hat{C} = 60^o$ nên $BH \perp AC$. Vậy H là trực tâm của $\Delta\ ABC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra đpcm.

Nhận xét : Các bạn có lời giải tốt : *Nguyễn Đức Dũng, Trần Đình Trị*, Phong Châu, Vĩnh Phú ; *Bùi Ngọc Anh* Nam

Định, *Phạm Đứng Hoàn*, Thanh Liêm, Nam Hà ; *Hoàng Thanh Hải*, PT năng khiếu, *Trịnh Thị thủy*, Hải Dương, Hải Hưng ; *Đặng Thục Trinh, Nguyễn Bá Hùng, Nguyễn Anh Cường, Nguyễn Đức Phương, Nguyễn Anh Tú* PTCS Trưng Vương, *Phạm Nguyễn Thu Trang, Trần Hương Quỳnh* Từ Liêm, Hà Nội ; *Lê Viết Hải*, Lam Sơn Thanh Hóa, *Lê Thị Ngọc Hoa*, DHSP Vinh ; *Phan Thị Thanh Thủy*, PT năng khiếu Hà Tĩnh ; *Trần Thanh Quang*, Quốc học Huế ; *Phạm Diệu Hằng*, Quốc học Quy Nhơn ; *Hoàng Viết Ngữ, Hoàng Xuân Anh Đào*, Biên Hòa, Đồng Nai.

VŨ KIM THỦY

Bài T4/198 : *Cho p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng tổng các lũy thừa bậc p của p số nguyên liên tiếp chia hết cho p^2.*

Lời giải : Ta chỉ cần giả thiết p là số tự nhiên lẻ. Xét p số nguyên liên tiếp $m, m+1, \ldots, m+p-1$ khi chia cho p được p số dư khác nhau nên tập các số dư là

$X = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; p-1\}$.

Giả sử $m+i$ chia cho p dư j với $i, j \in X$ thì $m+i = p.k+j$ với $k \in N$

Do đó : $(m+i)^p - j^p = (pk+j)^p - j^p$

$$= \sum_{t=0}^{p-2} C_p^t (pk)^{p-t} j^t + p \cdot (pk) \cdot j^{p-1} + j^p - j^p$$

$$= p^2 \cdot \sum_{t=0}^{p-2} C_p^t \, p^{p-(t+2)} k^{p-t} \cdot j^t + p^2 k \cdot j^{p-1} \equiv 0$$

$(\bmod p^2)$

Suy ra :

$A = m^p + (m+1)^p + \ldots + (m+p-1)^p \equiv B$
$= 1^p + 2^p \ldots + (p-1)^p \pmod{p^2}$.

Vì p tự nhiên lẻ nên :

$B = [1^p + (p-1)^p] + [2^p + (p-2)^p] + \ldots$
$\ldots + \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)^p + \left(\frac{p+1}{2}\right)^p\right]$

Nhưng với $j \in \left\{1 ; 2 ; \ldots ; \frac{p-1}{2}\right\}$ thì

$j^p + (p-j)^p =$

$$= p^2 \cdot \sum_{t=1}^{p-2} C_p^t \, p^{p-(t+2)} \cdot j^t \cdot (-1)^t + p^2 \cdot j^{p-1} \equiv 0$$

$(\bmod p^2)$

Do đó :

$B \equiv 0 \pmod{p^2} \Rightarrow A \equiv 0 \pmod{p^2}$

Nhận xét : Có 118 bạn gửi lời giải về và đều giải đúng. Một số bạn chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Nếu các bạn có sử dụng định lí Phec-ma nhỏ hoặc không để ý tới $(pk)^{p-t}$ với $0 \le t \le p-2$ chia hết cho p^2 mà xoay quanh C_p^t để suy ra C_p^t chia hết cho p thì các bạn đành sử dụng giả thiết p nguyên tố.

Các bạn có nhận xét và lời giải tốt là : *Phạm Lê Minh* (9T, Lam Sơn, Thanh Hóa), *Chu Nguyên Bình* (12A, DHSP Vinh) *Trần Quang Thành* (10T, Amsterdam, Hà Nội), *Thái Minh Hoàng* (10T1) Nguyễn Bỉnh Khiêm , Vĩnh Long), *Vũ Đức Sơn* (10CT, Lương Văn Tụy, Ninh Bình), *Phạm Hoàng Việt* (11A, Quốc học Quy nhơn, Bình Dịnh), *Ngô Đức Thành* (9A, Bế Văn Đàn, Hà Nội), *Lê ngọc Giáp* (7A, Dông Sơn, Thanh Hóa), *Nguyễn Thái Hà* (10M, Mari Quyri, Hà Nội), *Trịnh Hồng Mai* (9 Toán, Chuyên Thái Bình)

Rất nhiều bạn đề nghị đổi chữ "tố" ở đề ra thành chữ "dương" ! Hoan nghênh phát hiện của các bạn.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T5.148. *Cho 13 số thực $a_1, \ldots, a_{13}$ khác nhau đôi một. Chứng minh rằng tồn tại a_j và a_k, $1 \le j, k \le 13$ sao cho*

$$0 < \frac{a_j - a_k}{1 + a_j a_k} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

Lời giải (của đa số các bạn).

Đặt $a_i = tgx_i$; $x_i \in (-\pi/2, \pi/2) : i = 1, \ldots, 13$.

Không mất tổng quát, giả sử $a_1 < a_2 < \ldots < a_{13}$

Khi đó $-\pi/2 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{13} < \pi/2 < x_1 + \pi$. Đoạn $[x_1, x_1 + \pi]$ được chia thành 13 đoạn bởi các điểm $x_2, x_3, \ldots, x_{13}$. Vậy tồn tại đoạn có độ dài $\le \pi/13$

Nếu $0 < x_i - x_{i-1} \le$

$\le \frac{\pi}{13} < \frac{\pi}{12}$ $(i \in \{2, \ldots 13\})$ thì

$0 < tg\,(x_i - x_{i-1}) < tg\,\pi/12$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{tgx_i - tgx_{i-1}}{1 + tgx_i \cdot tgx_{i-1}} < tg\pi/12$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{a_i - a_{i-1}}{1 + a_i a_{i-1}} < tg\,\pi/12 \qquad (1)$$

Nếu chỉ có $0 < (x_1 + \pi) - x_{13} \le \frac{\pi}{13} < \frac{\pi}{12}$

thì $0 < tg\,(x_1 + \pi - x_{13}) < tg\pi/12$

$\Leftrightarrow 0 < tg(x_1 - x_{13}) < tg\pi/12$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{a_1 - a_{13}}{1 + a_1 a_{13}} \, tg\pi/12 \qquad (2)$$

Mặt khác $tg\frac{\pi}{12} = tg(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$ (3)

(1) ; (2) và (3) cho đpcm.

Nhận xét. 1) Kết luận của bài toán mạnh hơn (theo cách chứng minh trên).

$$0 < \frac{a_j - a_k}{1 + a_j a_k} \le tg\frac{\pi}{13}$$

2) Một số bạn ở chuyên toán Trần Phú (Hải Phòng) còn cho cách giải khác : chia đường tròn đơn vị thành 13 cặp (26 góc), sau đó cũng sử dụng nguyên lí Diricle.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T6/198 : *Giải phương trình :*

$$12(\sqrt{(x+1)^2+1} + \sqrt{x^2 + (31/12)^2}) = \sqrt{1993}$$

Lời giải : Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Decac vuông góc lấy các điểm $A(-1, -1)$; $B(0, \frac{31}{12})$ và xét điểm $X(x, 0)$ nằm trên trục hoành. Hiển nhiên có :

$XA + XB \geq AB$ $\forall X \in$ trục hoành (1)

Vì tung độ của A, B trái dấu nên A, B nằm khác phía đối với trục hoành ; và do đó đoạn thẳng AB cắt trục hoành tại điểm C. Từ đó suy ra :

Dấu "=" ở (1) xẩy ra $\Leftrightarrow X \equiv C$ (2)

Dễ thấy đường thẳng AB có phương trình $43x - 12y + 31 = 0$ Suy ra điểm C có tọa độ $(-\frac{31}{43}, 0)$ và do vậy $X \equiv C \Leftrightarrow x = -\frac{31}{43}$ (3)

Viết lại (1) dưới dạng :

$$\sqrt{(x+1)^2+1} + \sqrt{x^2 + (\frac{31}{12})^2} \geq \frac{\sqrt{1993}}{12} \quad \forall x \in R \qquad (4)$$

Khi đó, theo (2) và (3), dấu "=" ở (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{31}{43}$

Điều này chứng tỏ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = -\frac{31}{43}$.

Nhận xét : 1. Tòa soạn đã nhận được 163 lời giải của các bạn học sinh ở khắp mọi miền đất nước gửi về. Chủ yếu, các bạn đã giải bài toán theo một trong ba cách sau :

a) Sử dụng phép bình phương hai vế của phương trình để biến đổi phương trình đã cho về một phương trình bậc 2 đối với x. (Cách giải này tuy không phức tạp, nhưng gặp phải các tính toán cồng kềnh !)

b) Sử dụng phương pháp hình học.

c) Sử dụng bất đẳng thức Mincôpxki :

$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ $\forall a, b, c, d \in R$.

2. Rất nhiều bạn, trong lời giải của mình, đã sử dụng một trong các khẳng định sai sau :

i) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)^2 = g(x)^2$. *(Chú ý : Nói chung, phép bình phương hai vế của phương trình là phép biến đổi hệ quả)*

ii) Với $a, b, c, d \in R$ thì

$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \Leftrightarrow ad = bc$.

(Chú ý : Với $a, b, c, d \in R$ thì $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \Leftrightarrow$ có đồng thời $ad = bc$ và $ac + bd \geq 0$).

iii) $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| \Leftrightarrow a$ và b cùng phương (cộng tuyến).

(Chú ý : $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| \Leftrightarrow a$ và b cùng hướng (nghĩa là cùng phương và cùng chiều)).

3. Các bạn có lời giải tốt : *Nguyễn Thị Thanh* (cấp II Hồng Bàng, Hải Phòng) ; *Đỗ Hồ Nga* (PTCS Đống Đa, Hà Nội) ; *Nguyễn Quang Nghĩa, Phạm Lê Hùng* (PTCS Trưng Nhị, Hà Nội) ; *Trần Minh Anh, Nguyễn Anh Tú* (PTCS Trưng Vương Hà Nội) ; *Ngô Đức Thành, Nguyễn Phú Bình* (PTCS Bế Văn Đàn, Hà Nội ; *Trần Văn Long* (9 PTNK Thanh Liêm, Nam Hà) ; *Phạm Tuấn Anh* (9T Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Nguyễn Hồng Tâm, Khổng Đức Thiên* (PTTH Hùng Vương, Vĩnh Phú) ; *Nguyễn Minh Hải* (PTNK Hải Hưng) ; *Lê Công Sơn* (PTTH Việt Đức, Hà Nội) ; *Trịnh Đăng Giang* (PTDL Marie Curie, Hà Nội) ; *Nguyễn Trọng Hậu, Ngô Thái Hương, Đinh Thành Trung* (PTCT ĐHTH Hà Nội) ; *Lê Tuấn Anh* (PTTH Lê Lợi, Hà Tây) ; *Lê Tô Yên Phú* (PTTH Sơn Tây, Hà Tây) ; *Đinh Huy Bình* (PTTH Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình) ; *Phạm Thy Hùng* (PTTH Chuyên, Thái Bình) ; *Trịnh Thế Huynh* (PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định) ; *Đinh Thu Thủy, Bùi Hoàng Cường, Vũ Đức Sơn* (PTTH Lương Văn Tụy, Ninh Bình) ; *Lê Bá Nguyên, Hoàng Thị Tuyết* (PTTH Lê Lợi, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Phan Thị Thục Anh* (PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Phùng Quốc Định, Trần Văn Chương* (Trường Lê Khiết, Quảng Ngãi) ; *Nguyễn Minh Thọ* (Quốc học Quy Nhơn) ; *Phạm Hùng Kim Khánh* (PTTH Lê Quí Đôn, Long An) ; *Võ Hoàng Trung* (PTTH Chuyên Trà Vinh) và *Nguyễn Xuân Hùng* (PTTH Buôn Ma Thuột, Daklak)

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/198. *Hỏi có tồn tại hay không một hàm số liên tục $f : R \to R$ sao cho :*

$$4f(x)\, f(x+\frac{\pi}{3})\, f(x+\frac{2\pi}{3}) - [f(x)]^3 - [f(x+\frac{\pi}{3})]^3 - [f(x+\frac{2\pi}{3})]^3 = \cos^2 x + \cos^2(x+\frac{\pi}{3}) + \cos^2(x+\frac{2\pi}{3})$$

$\forall x \in R$

Lời giải (tất cả các bạn)

Xét $g(x) = \cos^2 x + \cos^2(x+\frac{\pi}{3}) + \cos^2(x+\frac{2\pi}{3})$

$$g(x) = \cos^2 x + (\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2 + (-\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$= \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x + \frac{3}{2}$$

Vậy $g(x) = \frac{3}{2}$ $\forall x$.

Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kì $\frac{\pi}{3}$ thì vế trái bằng $[(f(x)]^3$.

Vậy nếu chọn $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ thì $f(x)$ là hàm liên tục và thỏa mãn điều kiện đặt ra.

Nhận xét. Các bạn gửi lời giải đến đều cho lời giải đúng. Nếu hạn chế trong lớp hàm tuần hoàn chu kì π thì có thể dựng được lớp tất cả các hàm số thỏa mãn phương trình đã cho. Nếu chỉ hạn chế trong lớp hàm tuần hoàn chu kì $\pi/3$ thì nghiệm trên là duy nhất.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/198 : *Cho số nguyên dương $n > 1$. Giả sử có n số nguyên $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Thay tất cả các số này tương ứng bởi các số $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}, \ldots, \frac{x_{n-1}+x_n}{2}, \frac{x_n+x_1}{2}$. Với các số mới nhận được lại làm như thế, v.v... Hãy tìm điều kiện cần và đủ đối với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ để trong toàn bộ quá trình thực hiện việc thay số trên ta luôn chỉ nhận được các số nguyên.*

Lời giải : Với mỗi $k \in N^*$ kí hiệu $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots x_n^{(k)}$ là các số nhận được sau lần thay số thứ k. Đặt :

$$m_k = \min\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\},\ k \in N^*$$

$$M_k = \max\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\},\ k \in N^*$$

Với mỗi $k \in N^*$ gọi s_k là số tất cả các số có giá trị bằng M_k của dãy $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$. Từ tính chất của trung bình cộng dễ dàng suy ra :

$$m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_k \leq m_{k+1} \leq \ldots$$
$$M_1 \geq M_2 \geq \ldots \geq M_k \geq M_{k+1} \geq \ldots$$

Hơn nữa, dễ thấy, nếu $M_k = M_{k+1}$ và $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ không đồng thời bằng nhau thì $s_k > s_{k+1}$. Suy ra, nếu $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ không đồng thời bằng nhau thì tồn tại $s \in N^*$, $1 \leq s \leq s_k$, sao cho $M_k > M_{k+s}$. Do đó : nếu với mỗi $k \in N^*$ đều có $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ không đồng thời bằng nhau thì sẽ tồn tại dãy $\{M_{k_i}\}^{\infty} i = 1$ là dãy giảm ngặt và bị chặn dưới bởi m_1. (1)

1) Giả sử với mỗi $k \in N^*$ các số $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ đều nguyên. Khi đó, hiển nhiên, M_k nguyên $\forall\, k \in N^*$. Mà trong đoạn $[m_1, M_1]$ chỉ có hữu hạn các số nguyên nên từ (1) suy ra phải tồn tại $t \in N^*$ sao cho $x_1^{(t)} = x_2^{(t)} = \ldots = x_n^{(t)}$. Gọi t_o là số bé nhất trong các số t như vậy. Hiển nhiên $t_o \geq 1$. Giả sử $t_o > 1$. Khi đó :

$$\frac{x_1^{(t_o-1)} + x_2^{(t_o-1)}}{2} = \frac{x_2^{(t_o-1)} + x_3^{(t_o-1)}}{2} = \ldots = \frac{x_n^{(t_o-1)} + x_1^{(t_o-1)}}{2}$$

Suy ra :

● Nếu n lẻ thì $x_1^{(t_o-1)} = x_2^{(t_o-1)} = \ldots = x_n^{(t_o-1)}$, mâu thuẫn với cách chọn t_o.

● Nếu n chẵn thì :

$x_1^{(t_o-1)} = x_3^{(t_o-1)} = \ldots = x_{n-1}^{(t_o-1)}$ (2) và :

$x_2^{(t_o-1)} = x_4^{(t_o-1)} = \ldots = x_n^{(t_o-1)}$ (3)

Giả sử $x_1^{(t_o-1)} + x_2^{(t_o-1)}$ (*). Khi đó, với quy ước $x_i^{(o)} = x_i$, $\forall i = \overline{1, n}$, từ (2) có

$$\frac{x_1^{(t_o-2)} + x_2^{(t_o-2)}}{2} = \frac{x_3^{(t_o-2)} + x_4^{(t_o-2)}}{2} = \ldots = \frac{x_{n-1}^{(t_o-2)} + x_n^{(t_o-2)}}{2} = x_1^{(t_o-2)}.$$ Suy ra

$x_1^{(t_o-2)} + x_2^{(t_o-2)} + \ldots + x_n^{(t_o-2)} = 2x_1^{(t_o-1)}$ (4)

Mặt khác, từ (3) có

$$\frac{x_2^{(t_o-2)} + x_3^{(t_o-2)}}{2} = \frac{x_4^{(t_o-2)} + x_5^{(t_o-2)}}{2} = \ldots = \frac{x_n^{(t_o-2)} + x_1^{(t_o-2)}}{2} = x_2^{(t_o-2)}.$$ Suy ra

$x_1^{(t_o-2)} + \ldots + x_n^{(t_o-2)} = 2x_2^{(t_o-1)}$, mâu thuẫn với (4) (do (*)). Mâu thuẫn này cho ta $x_1^{(t_o-1)} = x_2^{(t_o-1)}$ và do đó $x_1^{(t_o-1)} = x_2^{(t_o-1)} = \ldots = x_n^{(t_o-1)}$, mâu thuẫn với cách chọn t_o.

Tóm lại, phải có $t_o = 1$ và từ đó suy ra :

● $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (5) nếu n lẻ.

● $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_n$ và $x_1 \equiv x_2 \pmod 2$ (6) nếu n chẵn.

2) Ngược lại, dễ thấy, với các số nguyên x_1, x_2, ..., x_n thỏa mãn (5) nếu n lẻ, hoặc thỏa (6) nếu n chẵn, ta sẽ có $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ đều là các số nguyên $\forall\, k \in N^*$.

Vậy : Trong toàn bộ quá trình thực hiện việc thay số ta luôn chỉ nhận được các số nguyên khi và chỉ khi các số nguyên $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hoặc thỏa (5) nếu n lẻ, hoặc thỏa (6) nếu n chẵn.

Nhận xét : Hầu hết các bạn gửi lời giải tới tòa soạn chỉ ra điều kiện cần và đủ là $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$! Một số bạn khác bỏ sót điều kiện $x_1 \equiv x_2$ (mod2) khi n chẵn. Duy nhất bạn *Phùng Sơn Lâm* (12T, Phan Bội Châu, Nghệ An) có lời giải hoàn chỉnh.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/198. *Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng :*

$$3(R + r) < a + b + c$$

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn :

$$(2 + \sqrt{2})(R + r) < a + b + c \quad (1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a + b + C}{2R(1 + \frac{r}{R})} > 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} > 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (dùng định lí hàm số sin và đẳng thức quen thuộc $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$) giả sử A là góc lớn nhất trong ΔABC, ta có $A \geq \frac{\pi}{3}$; hơn nữa ΔABC nhọn, nên $\frac{\pi}{3} \leq A < \frac{\pi}{2}$ (2). Ta sẽ chứng minh

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq \frac{\sin A + 2\cos\frac{A}{2}}{\cos A + 2\sin\frac{A}{2}} \quad (3)$$

Thật vậy, biến đổi ở vế trái $\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2}$ và $\cos B + \cos C = 2\cos\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2}$, sau đó thay $\sin\frac{B + C}{2}$, $\cos\frac{B + C}{2}$ lần lượt bằng $\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{A}{2}$ rồi nhân chéo, rút gọn và biến đổi, được (3) $\Leftrightarrow \cos\frac{3A}{2}\left(\cos\frac{B - C}{2} - 1\right) \geq 0$ (4)

Từ (2), ta lại có $\frac{\pi}{2} \leq \frac{3A}{2} < \frac{3\pi}{4}$ nên $\cos\frac{3A}{2} \leq 0$, còn $\left(\cos\frac{B-C}{2} - 1\right)$ thì hiển nhiên ≤ 0, do đó (4) đúng, hay (3) đúng. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x + 2\cos\frac{x}{2}}{\cos x + 2\sin\frac{x}{2}}$ xác định trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ và

có $f'(x) = \dfrac{-1 + \sin\frac{3}{2}x}{(\cos x + 2\sin\frac{x}{2})^2}$ ($\leqslant 0$) hay $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

Vậy $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\forall$ $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ hay

$$\frac{\sin A + 2\cos\frac{A}{2}}{\cos A + 2\sin\frac{A}{2}} > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ với mọi } A \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Kết hợp điều này với (3), ta có (1) đúng, suy ra đpcm.

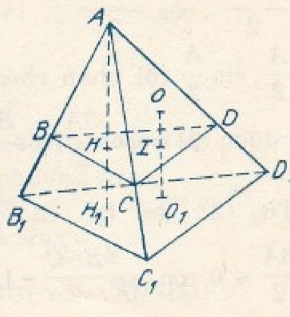
Nhận xét : 1. Có 68 bạn tham gia giải, trong số đó có 63 bạn giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Lê Nguyên Chất* (11T – Lam Sơn, Thanh Hóa), *Chu Nguyên Bình* (12A – ĐHSP Vinh), *Nguyễn Tân Cương* (11A, Lý Tự Trọng – Cần Thơ), *Nguyễn Minh Hải* (12 toán Trần Phú – Hải Hưng).

2. Bạn *Hoàng Thị Tuyết* (12T Lam Sơn, Thanh Hóa) chứng minh "2 $(2R + r)$ $a + b + c$" rồi suy ra đpcm. Bạn *Ngô Đức Duy* (10T – PTNK – Hải Hưng) gọi OI, OJ, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến BC, CA, AB rồi dùng bất đẳng thức *Tsê–bư–sép* để có $OI.a + OU.b + OK.c \leqslant \frac{1}{3}(OI + OJ + OK)$ $(a + b + c)$ (*). Mà vế trái của (*) bằng $2S$ (vì O nằm trong ΔABC do Δ này nhọn) nên bằng $r\ (a + b + c)$, suy ra $3r < OI + OJ + OK$ và dùng điều này để chứng minh bài toán.

ĐẶNG VIỄN

Bài 10/198. *Cho tứ diện ABCD, với điểm O ở bên trong. ứng với mặt BCD, người ta lấy điểm O_1 đối xứng với O đối với mặt phẳng (BCD) rồi kẻ qua O_1 mặt phẳng song song với mặt phẳng (BCD). Mặt phẳng vừa kẻ tạo với mặt BCD và các mặt phẳng chứa các mặt còn lại của tứ diện thành một hình chóp cụt. Đối với các mặt còn lại, người ta cũng làm tương tự và thu được thêm ba hình chóp cụt. Xác định vị trí của điểm O sao cho tổng thể tích của bốn hình chóp cụt tạo thành là nhỏ nhất.*

Lời giải. Gọi B_1, C_1, D_1 lần lượt là giao điểm của các tia AB, AC, AD với mặt phẳng qua O và song song với (BCD) ; I là giao điểm của OO_1 với (BCD). Hạ $AH \perp (BCD)$ cắt (BCD), $(B_1C_1D_1)$ tương ứng tại các điểm H, H_1. Kí hiệu V, V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích các hình tứ diện $ABCD$,



$OBCD$, $OCDA$, $ODAB$, $OABC$ và V'_1, V'_2, V'_3, V'_4 lần lượt là thể tích các hình chóp cụt có một đáy là BCD, CDA, DAB, ABC. Do các tứ diện $ABCD$, A, B_1, C_1, D_1 đồng dạng nên :

$$\frac{V + V'_1}{V} = \left(\frac{AH_1}{AH}\right)^3 = \left(\frac{AH + HH_1}{AH}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{AH + IO_1}{AH}\right)^3 = \left(1 + \frac{OI}{AH}\right)^3 = \left(1 + \frac{V_1}{V}\right)^3$$

hay $V + V'_1 = V\left(1 + \frac{V_1}{V}\right)^3 =$

$V + 3V_1 + 3\frac{V_1^2}{V^2} + \frac{V_1^3}{V^2}$. Do đó $V'_1 = 3V_1 + \frac{V_1^2}{V} + \frac{V_1^3}{V^2}$. Một cách tương tự, ta có công thức mở rộng : $V'_i = 3V_i + 3\frac{V_i^2}{V} + \frac{V_i^3}{V^2}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Suy ra $\sum\limits_{i=1}^{4} W'_i = 3\sum\limits_{i=1}^{4} V_i + \frac{3}{V}\sum\limits_{i=1}^{4} V_i^2 + \frac{1}{V^2}\sum\limits_{i=1}^{4} V_i^3 \geqslant$

$$\geqslant 3V + \frac{3}{V}\cdot\frac{V^2}{4} + \frac{1}{V^2}\cdot\frac{V^3}{16} =$$

$$= 3V + \frac{3V}{4} + \frac{V}{16} = \frac{61}{16}V$$

sở dĩ $V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 \geqslant \frac{V^2}{4}$ là vì theo Bunhiacôpxki–Côsi, ta có

$(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2) \times (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \geqslant$

$\geqslant (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)^2 = V^2$;

còn $V_1^3 + V_2^3 + V_3^3 + V_4^3 \geqslant \frac{V^3}{16}$ là vì áp dụng Bunhiacốpxki–Côsi sau đó áp dụng tiếp bất đẳng thức Tsêbưsép, ta có :

$V^3 = (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)^3 <$

$< 4\,.\,(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2)(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) <$

$< 4\,.\,4(V_1^3 + V_2^3 + V_3^3 + V_4^3))$.

Suy ra tổng đang xét nhỏ nhất khi và chỉ khi $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$ hay O là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Nhận xét : Có 70 bạn giải bài này và tất cả đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Hà Thanh Hải* (12T Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Bùi Tuấn* (10A chuyên Thái Bình), *Kiều Hữu Dũng* (12A – chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, Vĩnh Phú), *Đinh Trung Hằng* (10M Marie Curie, Hà Nội)

ĐẶNG VIỄN

Bài L1/198. *Ta cùng một điểm cách mặt đất một khoảng h người ta đồng thời ném đi* *hai hạt theo phương nằm ngang về hai chiều ngược nhau với vận tốc tương ứng là v_1 và v_2. Chứng minh rằng khi khoảng cách hai hạt là $X = (v_1 + v_2)\sqrt{v_1v_2/g}$ thì vécto vận tốc của hai hạt ở thời điểm ấy sẽ vuông góc với nhau với g là gia tốc trọng trường. Bỏ qua sức cản của không khí.*

Hướng dẫn giải. Sau khi phân tích chuyển động của từng hạt (được ném đi theo phương nằm ngang), đi đến nhận xét : ở mọi thời điểm hai hạt đều cùng nằm trên một đường thẳng nằm ngang và khoảng cách giữa chúng ở một thời điểm t bất kì sau khi ném sẽ bằng $X = v_1t + v_2t = (v_1 + v_2)t$, từ đó suy ra thời điểm t khi khoảng cách $x = (v_1 + v_2)\sqrt{v_1v_2/g}$

$t = \dfrac{X}{v_1 + v_2} = \dfrac{\sqrt{v_1v_2}}{g}$ (1). Sau đó tính tg của góc α và góc β mà hai vectơ vận tốc của hai hạt hợp với phương nằm ngang ; dựa vào (1) suy ra $tg\alpha = \dfrac{1}{tg\beta}$, do đó $\alpha + \beta = 90^o$. Từ đó rút ra điều cần phải chứng minh.

Nhận xét. Có 58 em đã gửi bài giải, trong số đó có 53 em có lời giải đúng, đặc biệt là các em : *Trương Đăng Nghĩa*, 11B Quốc học Quy Nhơn, Bình Định ; *Nguyễn Đức Việt* 12CA, PTTH Bùi Thị Xuân, tp Hồ Chí Minh ; *Vũ Thị Bích Hà* 11 PTTH chuyên Thái Bình ; *Hoàng Đức Phương* B_0 10b ĐHTH Hà Nội ; *Phan Hoàng Việt* 11A Quốc học Quy Nhơn, Bình Định.

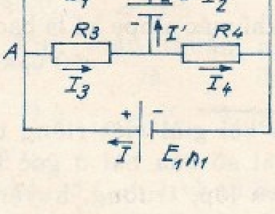
MAI OANH

Bài L2/198. Cho mạch điện như hình vẽ, trong đó $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$

a) Chứng minh rằng cường độ dòng điện chạy qua nguồn (E_1, r_1) không phụ thuộc vào suất điện động và điện trở trong của nguồn (E_2, r_2).

b) Viết biểu thức tính công suất tiêu thụ tổng cộng trên bốn điện trở R_1, R_2, R_3 và R_4.

Lời giải : a) Dòng điện trong các đoạn mạch được kí hiệu và tính theo chiều vẽ trên hình. Ta có $I_2 = I_1 + I'$;



$$U_{AB} = U_{AM} + U_{MB} = R_1I_1 + R_2I_2 = R_1I_1 + R_2(I_1 + I') \quad (1) ;$$

và $I_4 = I_3 - I'$;

$$U_{AB} = U_{AN} + U_{NB} = R_3I_3 + R_4I_4 = R_3I_3 + R_4(I_3 - I') \quad (2)$$

Nhân (1) với $R_3 + R_4$ và nhân (2) với $R_1 + R_2$, sau đó cộng lại ta được :

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)U_{AB} = (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)(I_1 + I_3) + (R_2R_3 - R_1R_4)I'$$

Theo giả thiết $R_2R_3 - R_1R_4 = 0$, do đó

$$U_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I \text{ (vì } I_1 + I_3 = I)$$

Mặt khác $U_{AB} = E_1 - r_1I$. Do đó suy ra

$$I = \frac{E_1}{\dfrac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} + r_1}$$

Như vậy dòng điện qua nguồn (E_1, r_1) không phụ thuộc vào E_2 và r_2.

b) Từ giả thiết $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$ suy ra $\dfrac{R_1}{R_3} = \dfrac{R_2}{R_4}$, do đó ta lại có :

$$I' = \frac{E_2}{\dfrac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_2 + R_4} + r_2}$$

Như vậy công suất tổng cộng tỏa ra trên bốn điện trở $R_1R_2R_3R_4$ là :

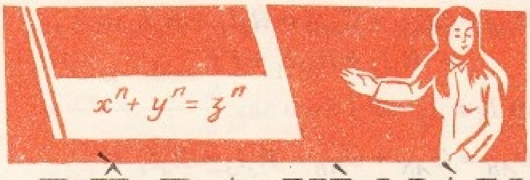
$$P = E_1I + E_2I' + r_1I_1^2 - r_2I'^2$$

Thay các biểu thức đã tìm của I và I' ta được

$$P = \frac{E_1^2}{\left[\dfrac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} + r_1^2\right]^2} \times \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} + \frac{E_2^2}{\left[\dfrac{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}{R_1+R_3+R_2+R_4} + r_2\right]^2} \cdot \frac{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}{R_1+R_3+R_2+R_4}$$

Nhận xét. Có 11 em đã gửi bài giải, trong đó có 2 em có lời giải đúng : *Trương Hàm Yêng*, PTTH Lí Tự Trọng, Cần Thơ, *Vũ Thị Bích Hà*, 11C, PTTH chuyên, Thái Bình.

MAI TÙNG



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp PTCS

Bài T1/202 : Tìm các số nguyên tố dạng $2^{1994^n} + 17$ $(n \in N)$ biểu diễn được dưới dạng hiệu các lập phương của hai số tự nhiên.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Bài T2/202 : Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để các số a, b, c cùng dấu là :

$$ab + ac + bc > 0 \text{ và } \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} > 0$$

NGUYỄN ĐỀ

Bài T3/202 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của góc A cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Một đường tròn thay đổi luôn luôn đi qua A, D cắt các đường thẳng AB, AC tại các điểm tương ứng M, N. Tìm tập hợp trung điểm I của MN.

ĐẶNG VIỄN

Các lớp PTTH

Bài T4/202 : Cho ba số nguyên a, b, c, $a > 0, ac - b^2 = P = p_1 . p_2 \ldots p_m$, trong đó $p_1, \ldots, p_m$ là các số nguyên tố khác nhau. Gọi $M(n)$ là số các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n$$

Chứng minh rằng $M(n)$ là hữu hạn và $M(n) = M(P^k . n)$ với mọi $k \geq 0$

Đề dự tuyển thi toán quốc tế năm 1993

Bài T5/202 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_2 \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_3 \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_4 \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_1 \end{cases}$$

TÔ XUÂN HẢI

Bài T6/202 : Giải phương trình

$$\arcsin \cos x + \arccos \sin x = \frac{1}{8} x$$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/202 : Cho tam thức bậc hai : $f(x) = ax^2 + bx + c$ với các hệ số dương và $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k thì :

$$f(x) \geq [f(\sqrt[2^k]{x})]^{2^k}$$

TRẦN VĂN HẠNH

Bài T8/202 : Kí hiệu N^* là tập các số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm $f : N^* \longrightarrow N^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) $f(n + 1) > f(n)$ $\forall n \in N^*$

2) $f(f(n)) = n + 1994$ $\forall n \in N^*$

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/202 : Quay hình vuông $ABCD$ quanh tâm O của nó một góc φ^o, $0^o < \varphi < 90^o$ được hình vuông $A'B'C'D'$. Ta gọi giao điểm của AB và $A'B'$ là M, BC và $B'C'$ là N, CD và $C'D'$ là P, DA và $D'A'$ là Q.

a) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo $a = AB$ và φ.

b) Với góc φ nào thì chu vi phần chung hai hình vuông bé nhất.

ĐÀO TRƯỜNG GIANG

Bài T10/202 : Cho tứ diện đều $ABCD$. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các mặt của tứ diện bằng k^2 cho trước.

NGUYỄN MINH HÀ

Các đề Vật lí

Bài L1/202 : Ánh sáng mặt trời chiếu song song với một bức tường thẳng đứng và tạo với phương thẳng đứng góc nhọn α. Đứng trước tường, dùng một gương phẳng, một em bé chiếu ánh sáng vuông góc với mặt tường. Khi đó mặt phẳng của gương tạo với mặt đất một góc bằng bao nhiêu ?

NGUYỄN DŨNG

Bài L2/202 : Có một ampe kế có nhiều thang đo, có độ chính xác cao, có những sơn riêng biệt cho từng thang đo. Dùng ampe kế này để đo cường độ dòng điện trong một đoạn mạch. Nếu sử dụng thang đo $10mA$ thì ampe kế chỉ $I_1 = 2,95\ mA$. Sau khi chuyển sang thang đo $3\ mA$, nó chỉ $I_2 = 2,90\ mA$. Hỏi cường độ dòng điện lúc trước khi mắc ampe kế là bao nhiêu ?

TÔ GIANG

Chú ý : – Mỗi bài giải viết riêng trên một mảnh giấy. Ghi số của bài ở góc trên bên trái ; họ tên và lớp, trường, huyện, tỉnh ở góc trên bên phải.

PROBLEMS OF THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/202. Find all prime numbers of the form $2^{1994^n} + 17$ $(n \in N)$ which can be written as a difference of cubes of two natural numbers

NGUYEN DUC TAN

T2/202. Show that 3 numbers a, b, c are of the same sign if and only if $ab + bc + ca > 0$ and

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} > 0$$

NGUYEN DE

T3/202. Let be given a triangle ABC and its circumscribed circle (O). The inbisector of A meets (O) again at a point D. A variable circle passing through A, D intersects AB and AC at M and N, respectively.

Find the locus of the midpoints I of MN.

DANG VIEN

For Upper Secondary Schools

T4/202. Let a, b, c be given integers with $a > 0, ac - b^2 = P = p_1 \ldots p_m$, where $p_1, \ldots, p_n$ are distinct prime numbers. Let $M(n)$ denote the number of pairs of integers (x, y) for which $ax^2 + 2bxy + cy^2 = n$.

Prove that $M(n)$ is finite and $M(n) = M(P^k n)$ for every integer $k \geq 0$

IMO34, GEO 3.

T5/202. Solve the system

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_2 \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_3 \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_4 \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos \pi x_1 \end{cases}$$

TO XUAN HAI

T6/202. Solve the equation

$$\arcsin \cos x + \arccos \sin x = \frac{1}{8} x$$

NGUYEN VAN MAU

T7/202. Let $f(x) = ax^2 + bx + c$ with $a, b, c > 0$ and $a + b + c = 1$. Prove that $f(x) \geq [f(\sqrt[2^k]{x})]^{2^k}$ for every positive integer k.

TRAN VAN HANH

T8/202. Denote by N^* the set of all positive integers. Find all functions $f: N^* \longrightarrow N^*$ such that

1) $f(n+1) > f(n)\ \forall\, n \in N^*$

2) $f(f(n)) = n + 1994\ \forall\, n \in N^*$

NGUYEN MINH DUC

T9/202. Let $A'B'C'D'$ be the image of the square $ABCD$ by the rotation of angle φ $(0 < \varphi < 90^o)$ about its center O. AB, BC, CD and DA intersect $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ and $D'A'$ at M, N, P and Q, respectively.

a) Calculate the area of $MNPQ$ in $a = AB$, φ.

b) Determine the value of φ such that the perimeter of the common part of two squares is minimum.

DAO TRUONG GIANG

T10/202. Let be given a regular tetrahedron $ABCD$. Find the locus of points M such that the sum of squares of distances from M to each face of the tetrahedron $ABCD$ is equal to a given value k^2.

NGUYEN MINH HA

ỐNG KÍNH

CẢI CÁCH DẠY VÀ HỌC TOÁN

VỀ MỘT TIẾT DẠY TOÁN 6 lớp chọn, lớp chuyên

Việc dạy – học toán có khi bắt đầu từ cái cụ thể để đi đến cái tổng quát nhưng cũng có khi giải quyết cái tổng quát ta sẽ được cái cụ thể mà có thể rút ngắn được thời gian. Xin nêu ví dụ :

Dấu hiệu chia hết cho 2^k và 5^k $(k \in N)$ là sự tổng quát của các dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5, cho 4, cho 25, cho 8, cho 125 đã được đưa vào một số tiết trong chương trình toán 6 ở các lớp chuyên, lớp chọn. Thực ra, toàn bộ các dấu hiệu chia hết nói trên có thể thực hiện trọn vẹn trong một tiết dạy : Dấu hiệu chia hết cho 2^k và 5^k $(k \in N)$

Số $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_{k+1} a_k \ldots a_1}$ viết được dưới dạng $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_{k+1}} \cdot 10^k + \overline{a_k \ldots a_1}$ mà $10^k = 2^k \cdot 5^k$ chia hết cho 2^k và 5^k do vậy $N \vdots\ 2^k$ (hay 5^k) nếu và chỉ nếu $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1} \vdots\ 2^k$ (hay 5^k) và chỉ những số đó mới chia hết cho 2^k (hay 5^k). Xét các trường hợp cụ thể

$k = 1$ ta có dấu hiệu chia hết cho 2, cho 5

$k = 2$ ta có dấu hiệu chia hết cho 4, cho 25

$k = 3$ ta có dấu hiệu chia hết cho 8, cho 125 là các dấu hiệu chia hết thường sử dụng.

Hy vọng rằng thực hiện tiết dạy này sẽ đem đến cho các em học sinh nhiều điều bổ ích.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ NỘI NĂM 1993 (KHỐI A)

A - Phần bắt buộc :

Câu I. Xét hàm số : $y = (x-1)^2(x-a)^2$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) ứng với $a = 0$.

2) Xác định a để đồ thị của hàm số (1) có điểm cực đại.

3) Chứng minh rằng với mọi a, đồ thị hàm số (1) luôn luôn có trục đối xứng song song với trục tung.

Câu II. 1) Xác định m để các bất phương trình sau có nghiệm chung :

$$\begin{cases} x^2 - 2x + m - 1 \leqslant 0 \\ x^2 + 4x + 2m - 3 \leqslant 0 \end{cases}$$

2) Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4 \end{cases}$$

Câu III. 1. Giải phương trình :

$$3tg\,2x - 4tg\,3x = tg^2 3x tg 2x$$

2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

$$\frac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}} < 2$$

B - Phần tự chọn : Thí sinh chọn một (và chỉ một) trong hai câu IV (a) và IV (b).

Câu IV (a) : 1) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y = |\lg x| \; ; y = 0 \; ; x = 1/10 \; ; x = 10.$$

2) Cho hình lập phương $ABCDA'B'C'D'$ có các cạnh bằng 1. Trên các cạnh BB', CD, $A'D'$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho : $B'M = CN = D'P = a$ $(0 < a < 1)$

a) Chứng minh
$$\overrightarrow{MN} = -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (a-1)\overrightarrow{AA'}$$

b) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AC'}$

Từ đó có thể nói gì về vị trí của AC' đối với mặt phẳng $[MNP]$?

Câu IV (b) : Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, $CD = b$, các cạnh còn lại bằng nhau và bằng a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1) Chứng minh rằng $AB \perp CD$ và EF là đường vuông góc chung của AB và CD. Tính EF theo x, a, b.

2) Tìm x để hai mặt phẳng $[ACD]$ và $[BCD]$ vuông góc với nhau. Chứng minh rằng khi đó tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

Bài giải

Câu I : 1) Khi $a = 0$ thì $y = (x^2 - x)^2$

$$y' = 2(x^2 - x)(2x - 1) \; ; \quad y' = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{16} \\ x_3 = 1, y_3 = 0 \end{cases}$$

$$y'' = 12(x^2 - x + \frac{1}{6}) \; ; y'' = 0 \Rightarrow x_{4,5} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

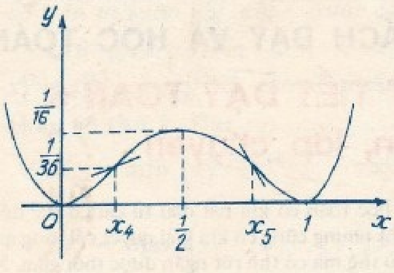
$$y_{4,5} = \frac{1}{36}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		x_4		$\frac{1}{2}$		x_5		1		$+\infty$
y''			|	+	0	−	|	−	0	+	|		
y'		−	0	+	|	+	0	−	|	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{36}$	↗	$\frac{1}{16}$	↘	$\frac{1}{36}$	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị : $x = 0, y = 0$

$y = 0, x = 0,1$



2) Vì hệ số của x^4 dương nên đồ thị hàm số có điểm cực đại khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$y' = 2(x-1)(x-a)(2x-a-1)$

$y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{2} \neq a \\ a \neq 1 \\ \dfrac{a+1}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq 1$$

3) Đặt $x = X + \dfrac{a+1}{2}$

$y = Y$ thì $Y = \left[X^2 - \left(\dfrac{1-a}{2}\right)^2\right]^2$

Đây là hàm số chẵn nên $X = 0$ là trục đối xứng hay $x = \dfrac{a+1}{2}$ là trục đối xứng.

Câu II : 1) Điều kiện để các bất phương trình có nghiệm là :

$$\begin{cases} \Delta'_1 = 2 - m \geq 0 \\ \Delta'_2 = 7 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2$$

Khi đó $x^2 - 2x + m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$x_1 \leq x \leq x_2$; $x_{1,2} = -1 \mp \sqrt{2-m}$

$x^2 + 4x + 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq x \leq x_4$;

$x_{3,4} = -2 \mp \sqrt{7-2m}$

Các bất phương trình có nghiệm chung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_4 \\ x_3 \leq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2-m} \leq -2 + \sqrt{7-2m} \\ -2 - \sqrt{7-2m} \leq 1 + \sqrt{2-m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq \sqrt{2-m} + \sqrt{7-2m} & (1) \\ -3 \leq \sqrt{2-m} + \sqrt{7-2m} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện (2) luôn luôn thỏa mãn $\forall m \leq 2$. Vậy các bất phương trình có nghiệm chung khi $3 \leq \sqrt{2-m} + \sqrt{7-2m}$

$\Leftrightarrow 9 \leq 9 - 3m + 2\sqrt{(2-m)(7-2m)}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ m^2 + 44m - 56 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq -22 + \sqrt{540}$$

(thỏa mãn điều kiện $m \leq 2$)

2) Điều kiện : $\dfrac{7}{4} \leq x \leq 5$

Bình phương các vế của từng bất phương trình, ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{7}{4} \leq x \leq 5 \\ x^2 - 4x + 7 > 0 \\ \sqrt{25 - x^2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{4} \leq x \leq 5 \\ x^2 < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{4} \leq x < 4.$$

Câu III. 1) Điều kiện : $\cos 2x \neq 0, \cos 3x \neq 0$ (*)

Ta có :

$3tg2x - 4tg3x = tg^2 3x \,.\, tg2x$

$\Leftrightarrow 3(tg2x - tg3x) = tg3x(1 + tg3x \,.\, tg2x)$ (1)

Nhận xét rằng mọi nghiệm của phương trình luôn luôn thỏa mãn hệ thức $1 + tg3x\,tg2x \neq 0$ ($\Leftrightarrow \cos x \neq 0$) vì nếu ngược lại thì từ phương trình (1) ta suy ra $tg\,2x = tg\,3x \Rightarrow 1 + tg^2 3x = 0$ (vô lí).

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 3 \,.\, \frac{tg2x - tg3x}{1 + tg3x\,tg2x} = tg3x \Leftrightarrow -3tgx = tg3x$$

$$\Leftrightarrow -3tgx = \frac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x} \Leftrightarrow 2tgx(5tg^2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \ (k \in Z) \\ x = \pm\, arctg\sqrt{\dfrac{3}{5}} + k\pi \ (k \in Z) \end{array}\right.$$

cả hai hệ nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện (*)

2) Vì $\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} > 0$ nên

$$\frac{\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} < 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right) +$$

$$+ \left(\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) +$$

$$+ \left(\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B}{2}\right) > 0.$$

Điều này đúng vì mỗi biểu thức trong ngoặc đều dương

$$\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A+B}{2} =$$

$$= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} <$$

$$< \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}.$$

Tương tự :

$$\cos\frac{A}{2} < \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \,;$$

$$\cos\frac{B}{2} < \sin\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}$$

Câu IV (a) : $S = \int_{0,1}^{10} |lgx|\,dx =$

$= -\int_{0,1}^{1} |lgx|\,dx = -\int_{0,1}^{1} lgx\,dx + \int_{1}^{10} lgx\,dx$

Vì $lgx = lge\,.\,lnx$, ta chỉ cần tính nguyên hàm của hàm số $f(x) = lnx$. Ta có :

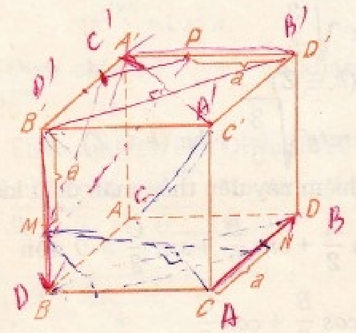
$(x\ ln\ x)' = lnx + 1$ vậy $lnx = (x\ ln\ x - x)'$

Suy ra :

$S = lge\left[-(x\ lnx - x)\Big|_{0,1}^{1} + (xlnx - x)\Big|_{1}^{10}\right] =$

$= 9,9 - 8,1\,.\,lg\ e.$

2) a) Đặt $\vec{AB} = \vec{e_1}\,;\ \vec{AD} = \vec{e_2}\,;\ \vec{AA'} = \vec{e_3}$



Ta có : $= \vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CN}$

$\vec{MB} = (1 - a)\,\vec{B'B} = (a - 1)\vec{e_3}$

$\vec{BC} = \vec{AD} = \vec{e_2}$

$\vec{CN} = a\vec{CD} = -a\vec{e_1}$

$\Rightarrow \vec{MN} = -a\vec{e_1} + \vec{e_2} + (a - 1)\,\vec{e_3}$

hay $\vec{MN} = -a\vec{AB} + \vec{AD} + (a - 1)\vec{AA'}$

b) Theo a) thì $\vec{MN} = -a\,\vec{e_1} + \vec{e_2} + (a - 1)\vec{e_3}$

mà $\vec{AC'} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$

$\Rightarrow \vec{MN}\,.\,\vec{AC'} = (-a\vec{e_1} + \vec{e_2} + (a-1)\vec{e_3})(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}) =$

$-a + 1 + a - 1 = 0 \Rightarrow \vec{AC'} \perp \vec{MN}$

$\vec{MP} = \vec{MB'} + \vec{B'A'} + \vec{A'P}$

mà $\vec{MB'} = a\vec{BB'} = a\vec{e_3}$

$\vec{B'A'} = \vec{BA} = -\vec{e_1}$

$\vec{A'P} = (1 - a)\vec{A'D'} = (1 - a)\vec{e_2}$

$\Rightarrow \vec{MP} = a\vec{e_3} - \vec{e_1} + (1 - a)\vec{e_2}$

$\Rightarrow \vec{MP}\,.\,\vec{AC'} = (-\vec{e_1} + (1 - a)\vec{e_2} + a\vec{e_3})\times$

$\times\,(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}) = -1 + (1 - a) + a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{AC'} \perp \vec{MP}$

Từ đó suy ra $AC' \perp (MNP)$.

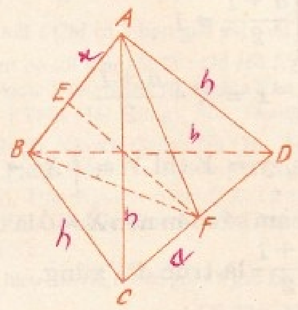
Câu IV (b) : 1) Do $AC = AD$ nên $AF \perp CD$

$BC = BD$ nên $BF \perp CD$

Vậy $CD \perp (ABF) \Rightarrow CD \perp AB$ và $CD \perp EF$

Do $BC = AC \Rightarrow CE \perp AB$ mà $AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (CDE) \Rightarrow AB \perp EF.$

Vậy EF là đường vuông góc chung của AB và CD.



+ Tính EF : $EF^2 = AF^2 - AE^2$ mà

$AF^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}\,;$

$AE^2 = \frac{x^2}{4} \quad \Rightarrow EF^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{x^2}{4}$

$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2 - x^2}$

$(0 < x < \sqrt{4a^2 - b}\ )$

2) Theo 1), do $CD \perp (ABF)$ nên $\widehat{AFB}$ là góc phẳng nhị diện cạnh CD. Góc nhị diện đó vuông khi $EF = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2 - x^2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$x = \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{2}}$

Khi đó $V_{ABCD} = V_{CABF} + V_{DABF} =$

$= \frac{1}{3}CF\,.\,S_{ABF} + \frac{1}{3}DF\,.\,S_{ABF} =$

$= \frac{1}{3}S_{ABF}\,(CF + DF) = \frac{1}{3}S_{ABF}\,.\,CD$ mà

$CD = b$ không đổi nên V_{ABCD} lớn nhất khi S_{ABF} lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{2}FA\,.\,FB\,.\sin\widehat{AFB}$ lớn nhất.

Do $FA = FB = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$ không đổi nên V_{ABCD} lớn nhất

$\Leftrightarrow \sin\widehat{AFB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AFB} = 90^0.$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bạn có biết

Định lí lớn Fermat và việc tìm tòi chứng minh sơ cấp của nó

Tạp chí TH&TT số 9, 1993 thông báo rằng "định lí lớn *Fermat* đã được chứng minh". Tiếp đó, trong số 1, 1994, lại thông báo tiếp về việc đã phát hiện ra một chỗ hổng lớn trong chứng minh đó nên định lí này vẫn tiếp tục là một thách thức đối với toán học. Ở số 9, 1993, tác giả thông báo viết : "... Sau chừng một thế kỉ thất bại trong việc tìm lại chứng minh bỏ quên đó, các nhà toán học đã tin rằng trong thực tế không tồn tại chứng minh sơ cấp với những công cụ của toán học thời kì *Fermat*." Bài báo này muốn bổ sung thêm một ít thông tin về những cố gắng tìm tòi chứng minh sơ cấp của nhiều nhà toán học lừng danh.

Trước hết, xin nhắc lại rằng khi $n = 2$ thì phương trình $x^n + y^n = z^n$ (1) có vô số nghiệm. Tập hợp các nghiệm đó được chia thành các tập con, mỗi tập con gồm những nghiệm cùng dạng (Kx_o, Ky_o, Kz_o) chỉ khác nhau ở hệ số K nguyên dương và khi $K = 1$ thì ta có nghiệm (x_o, y_o, z_o) với x_o, y_o, z_o nguyên tố cùng nhau. Có thể coi (x_o, y_o, z_o) như đại diện cho cả tập con. Sau đây, khi nói đến một nghiệm (x_o, y_o, z_o) của (1) thì ta đều ngầm hiểu rằng x_o, y_o, z_o nguyên tố cùng nhau, nghĩa là (x_o, y_o, z_o) đại diện cho cả một tập con vô số nghiệm.

Khi $n = 2$, ta có định lí quen biết sau đây :

Định lí I. *Khi $n = 2$ thì điều kiện cần và đủ để (x_o, y_o, z_o) trở thành một nghiệm của (1) là z_o lấy giá trị $u^2 + v^2$ còn x_o và y_o chia nhau hai giá trị $u^2 - v^2$ và $2uv$, u và v là hai số nguyên dương lấy tùy ý miễn là chúng nguyên tố cùng nhau và chẵn lẻ khác nhau.*

Nhận xét : z_o bao giờ cũng lẻ và lớn hơn x_o, y_o còn trong hai số x_o, y_o thì một chẵn, một lẻ. Để cho tiện, ta sẽ gọi số chẵn là x_o. Thế thì :

$$x_o = 2uv, y_o = u^2 - v^2, z_o = u^2 + v^2 \qquad (2)$$

Bây giờ ta xét đến các trường hợp $n > 2$ và chứng minh rằng (1) không có nghiệm.

Trường hợp đơn giản nhất là trường hợp $n = 4$. Khi đó, đặt $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$ thì (1) trở thành :

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \qquad (3)$$

Nếu (1) có một nghiệm (x_o, y_o, z_o) thì (3) sẽ có nghiệm (X_o, Y_o, Z_o) với $X_o = x_o^2$, $Y_o = y_o^2$, $Z_o = z_o^2$. Theo định lí I thì ắt là :

$$X_o = 2pq,\ Y_o = p^2 - q^2,\ Z_o = p^2 + q^2$$

trong đó p, q là hai số nguyên dương nào đó nguyên tố cùng nhau và chẵn, lẻ khác nhau. Thay Y_o bằng y_o^2, ta có :

$$y_o^2 + q^2 = p^2 ;$$

y_o, p, q nguyên tố cùng nhau vì mọi ước số chung của chúng phải là ước số chung của p, q mà p, q nguyên tố cùng nhau. Vậy (y_o, p, q) là một nghiệm của (1) (với $n = 2$). Vì y_o lẻ (do Y_o lẻ) nên q phải chẵn. Vậy, theo định lí I, ta có : $q = 2ab$, $y_o = a^2 - b^2$, $p = a^2 + b^2$, trong đó a, b là hai số nguyên dương nào đó nguyên tố cùng nhau và chẵn, lẻ khác nhau.

$$\text{Vậy : } X_o = x_o^2 = 2pq = 4ab(a^2 + b^2).$$

Điều đó buộc $ab(a^2 + b^2)$ phải là một chính phương. Nhưng ab và $a^2 + b^2$ nguyên tố cùng nhau vì rằng nếu d là một ước số chung của chúng thì d sẽ chia hết $a^2 + b^2 \pm 2ab$, tức là chia hết a ± b và do đó chia hết (a + b) ± (a − b) tức là chia hết $2a, 2b$; d không thể là 2 vì nó chia hết số lẻ $a^2 + b^2$ (do a, b chẵn, lẻ khác nhau), vậy d là ước số chung của a, b nên $d = 1$. Vì ab và $a^2 + b^2$ nguyên tố cùng nhau nên muốn cho $ab(a^2+b^2)$ là một chính phương thì ab và a^2+b^2 đều phải là chính phương. Nhưng a, b cũng nguyên tố cùng nhau nên a, b đều phải là chính phương ; vậy ắt phải có những số nguyên dương r, s, t sao cho :

$$a = r^2, b = s^2, a^2+b^2 = t^2$$

Do đó : $r^4 + s^4 = t^2$

Đến đây, ta chú ý rằng vì a, b nguyên tố cùng nhau và chẵn, lẻ khác nhau nên r, s cũng vậy. Mặt khác, trong lập luận ở trên, ta chưa sử dụng giả thiết rằng z_o^4 là lũy thừa bậc 4 mà chỉ mới sử dụng giả thiết z_o^4 là lũy thừa bậc 2. Vì vậy toàn bộ lập luận ở trên đối với x_o^4, y_o^4 và $(z_o^2)^2$ có thể lặp lại hoàn toàn đối với r^4, s^4 và t^2. Nhưng $r^4+s^4 < x_o^4+y_o^4$ vì vế thứ nhất bằng a^2+b^2 tức là bằng p mà

$$p < p^2+q^2 = Z_o < Z_o^2 = X_o^2 + Y_o^2 = x_o^4 + y_o^4.$$

Rốt cuộc, từ chỗ giả thiết rằng (1) có nghiệm (x_o, y_o, z_o) khi $n = 4$, ta suy ra được sự tồn tại của r, s, t cũng thỏa mãn (1) (miễn là nhìn vế thứ hai chỉ như một chính phương chứ không phải là lũy thừa bậc 4), chỉ khác là

$r^4+s^4 < x_o^4+y_o^4$. Lại tiếp tục lập luận đó, ta sẽ đi đến $r^4+s^4 < r^4+s^4$ v.v... và cứ thế mãi. Điều đó là vô lý trong phạm vi các số nguyên dương khi ta xuất phát từ các số x_o, y_o hữu hạn. Vậy ta có :

Định lí II : *Phương trình (1) không có nghiệm khi $n = 4$*

Hệ quả : phương trình (1) không có nghiệm khi n là một bội số của 4. Với các trường hợp $n \neq 4$, chứng minh sơ cấp phức tạp hơn nhiều. Dưới đây, chỉ xin nêu vài nét lịch sử :

$n = 3$. *Euler* chứng minh năm 1753 trong một bức thư gửi cho *Goldbach*.

$n = 5$. *Dirichlet* chứng minh năm 1825 trong một công trình gửi cho Viện hàn lâm Paris.

$n = 14$. *Dirichlet* chứng minh năm 1832

$n = 7$. *Lamé* chứng minh năm 1839.

Với $n = 5$, chứng minh đã dựa vào định lý sau đây : Nếu $x^5 + y^5 = z^5$ thì một trong các số x, y, z phải chia hết cho 5. Định lý này được mở rộng như sau : nếu n là một số nguyên tố và $2n + 1$ cũng nguyên tố thì từ $x^n + y^n = z^n$ sẽ suy ra hoặc x, hoặc y, hoặc z chia hết cho n. *Sophie Germain* còn mở rộng hơn nữa định lý trên và dùng định lý của mình để chứng minh rằng nếu n là một số nguyên tố nhỏ hơn *100* thì phương trình (1) không có nghiệm dạng (x_o, y_o, z_o) trong đó x_o, y_o, z_o đều không chia hết cho n.

Những nhà toán học lừng danh đã đổ công sức ra mà trong khoảng một thế kỷ, cũng chỉ đạt đến những kết quả khiêm tốn như vậy. Nói "Khiêm tốn" vì từ những kết quả đó cho đến chỗ chứng minh trọn vẹn (với mọi n) còn là xa vời. Hai chữ "thất bại" nêu ra ở số 9, 1993 của TH&TT nên hiểu như thế. Trong thập kỷ 40 của thế kỉ XIX ý kiến sử dụng số phức để phân tích được $x^n + y^n$ ra thành tích của n thừa số tuyến tính được đề xuất và thảo luận. Trên cơ sở đó, *Kummer* xây dựng nên lý thuyết của mình. Đây là cái mốc mà từ đó các nhà toán học chuyên nghiệp hầu như tin chắc rằng không thể có chứng minh sơ cấp cho định lý lớn *Fermat*. Nói "hầu như" có nghĩa là cũng chưa khẳng định hẳn. Bởi lẽ Fermat đã ghi rằng ông ta tìm được chứng minh nhưng tiếc rằng lề sách không đủ chỗ để ghi. Và chăng, trong lịch sử toán học, đã từng có những bài toán như bài toán *Varing* mà lời giải sơ cấp lại đến muộn hơn các lời giải cao cấp : năm 1770, *Varing* xướng lên mà không chứng minh định lý sau đây : *mọi số nguyên $N \geq 1$ có thể biểu diễn thành một tổng k số hạng, mỗi số hạng là một lũy thừa bậc n của một số nguyên dương, số k này phụ thuộc vào n : $N = a_1^n + \ldots + a_k^n$.*

Từ 1909 đến 1934, nhiều nhà toán học lừng danh (như *Hilbert, Vinôgradôv*) đã tham gia giải quyết bài toán với những lời giải cao cấp. Năm 1942, *Linnhic* mới tìm ra lời giải sơ cấp.

Để kết thúc, xin nói thêm rằng : chân lí thường đơn giản nhưng con đường tìm đến chân lí thường quanh co, phức tạp.

NGUYỄN CẢNH TOÀN

HAI CON SỐ KỲ LẠ

QUẢN NGỌC SƠN

LTS : Kĩ sư QUẢN NGỌC SƠN năm nay 61 tuổi, không may bị bệnh, hỏng cả hai mắt, đã nghỉ hưu từ năm 1982. Tuy đã "nhiều năm sống trong bóng tối hoàn toàn", nhưng ông "vẫn giành nhiều thời gian suy nghĩ, tìm tòi, phát hiện nhiều quy luật lí thú của các con số" (theo thư ông gửi Tòa soạn ngày 29/9/1993).

Cảm động trước tấm gương lao động, lòng yêu khoa học, và có thể nói là yêu đời, yêu tuổi trẻ của kĩ sư, tòa soạn xin giới thiệu bài báo thứ hai của kĩ sư với bạn đọc.

Trong một số báo trước, số 1/1992 tôi đã có dịp giới thiệu con số kì lạ 123456789. Kì này xin được giới thiệu hai con số kì lạ khác cũng có thuộc tính tương tự.

1. *Số 12345679*. Chắc nhiều bạn đọc đã biết tới con số này vì một đặc tính cũng khá kì lạ của nó.

Khi nhân con số trên với các số nhân bằng 9 và bội số của 9 nhỏ hơn 82, thì kết quả sẽ là một số có chín chữ số giống nhau.

Thí dụ : 12345679 × 9 = 111 111 111

12345679 × 63 = 777 777 777

Tuy nhiên con số trên còn có một đặc tính thực kì lạ khác nữa mà ít ai ngờ tới. Đặc tính kì lạ này được phát biểu như sau :

Khi nhân số 12345679 với các số nhân nhỏ hơn 82 đồng thời không phải là số 3 và bội số của 3, thì kết quả sẽ là một số có 8 hoặc 9 chữ số mà không một chữ số nào trùng nhau".

Ở đây cũng xin mở ngoặc nói thêm, sở dĩ có con số giới hạn 82 là vì khi nhân con số kì lạ trên với các số nhân lớn hơn 82 thì kết quả sẽ là một số có từ 10 chữ số trở lên, khi đó đặc tính kì lạ nói trên sẽ không còn nữa.

Ví dụ : 12345679 × 7 = 86419753 ;

12345679 × 25 = 308641975 ;

12345679 × 74 = 913580246

vv...

Ta thấy trong tổng số 81 số nguyên đầu tiên đã có tới 54 số nhân cho kết quả đặc biệt như vậy tức là đạt tỉ lệ 2/3. Tỉ lệ rất cao này chứng tỏ đây không phải là một sự ngẫu nhiên mà thực sự là một quy luật đầy bí ẩn.

2. *Số 987654321*

Đây là "số lộn ngược" của số 123456789 đã được giới thiệu ở số báo 1/1992. Cũng giống như số này, số 987654321 có đặc tính tương tự nhưng phức tạp hơn. Đặc tính này được diễn đạt như sau :

Khi nhân số 987654321 với các số nhân nhỏ hơn 100 đồng thời thỏa mãn 2 điều kiện sau :

a. Số đó không phải là 3 và bội số của 3.

b. Tổng các chữ số của số đó nhỏ hơn 9. Thì kết quả sẽ là một số có mười hoặc mười một chữ số.

Nếu là mười chữ số thì đó sẽ là các chữ số từ 0 đến 9, không một chữ số nào trùng nhau.

Nếu là mười một chữ số thì tất yếu phải có tối thiểu hai chữ số trùng nhau. Ta gọi đây là *kết quả thực*. Ta thực hiện thuật toán đơn giản như sau : đem số đầu của kết quả thực cộng với số cuối của chính nó ta được mười chữ số mà ta gọi là *kết quả đã điều chỉnh*. Và khi đó mười chữ số này lại trở thành mười chữ số khác nhau từ 0 đến 9.

Ví dụ : 987654321 × 8 = 7901234568

987654321 × 13 = 12839506173 (kết quả thực)

2839506173 + 1 = 2839506174 (kết quả điều chỉnh)

987654321 × 61 = 60246913581 (kết quả thực)

0246913581 + 6 = 0246913587 (kết quả điều chỉnh)

Ta thấy trong tổng số 99 số nguyên nhỏ hơn 100 đã có 33 số nhân cho kết quả đặc biệt, tức chiếm tỉ lệ 1/3.

Đây là một tỉ lệ không nhỏ. Và như vậy một lần nữa, lần thứ ba, ta thấy rõ ràng đây không phải là một sự ngẫu nhiên.

Đến đây, chắc các bạn cũng như tôi đều sẽ rất thích thú nếu được đọc cũng trên tạp chí này lời giải thích về những quy luật đầy bí ẩn đó.

Giải đáp bài

Con số 73 kỳ lạ

Giả sử a và b là hai phần của một số N nào đó mà là bội số của số n phải tìm. $N = \overline{ab}$. Giả sử $N = 100a + b$ (1). Ta bình phương (1) lên được $10.000a^2 + 200ab + b^2$ (2).
(2) cũng là bội số của n. Nhân (1) với 200a được :

$20.000a^2 + 200ab$ (3) ; (3) cũng là bội số của n. Lấy (3) trừ cho (2) ta có :
$10.000a^2 - b^2$ (4) ; (4) cũng là bội số của n.

Biết rằng ta phải tìm a và b sao cho $a^2 + b^2$ (5) là bội số của n. Mà (4) + (5) = $10.001a^2$ rõ ràng là bội số của n. Vậy n là một ước số của $10,001$. Ba ước số của 10.001 là : $n = 1$ (lời giải tầm thường) ; $n = 73$ (lời giải đã biết) và $n = 137$ (lời giải cần tìm).

Ta thử nghiệm : Lấy $N = 325 \times 137 = 44.525$. Tách $a = 445$, $b = 25$ có $a^2 + b^2 = 198.025 + 625 = 198650 = 1.450 \times 137$.

BÌNH PHƯƠNG

ĐẾM ĐÈN

Đêm thu trăng sáng, gió reo
Phố phường nhộn nhịp, đèn treo sáng ngời
Vui chân dạo đếm đèn chơi
Hơn ba trăm ngọn, hỏi người có hay ?
Kết năm tròn số đèn này
Bẩy đèn kết một, thì hai ngọn thừa
Kết chín còn bốn ngọn dư
Ngẩn ngơ em đếm tít mù đèn sao
Hỡi người trí sáng, tài cao
Dừng chân tính giúp có bao nhiêu đèn ?

NGUYỄN ĐÌNH TÙNG

CHƯƠNG TRÌNH RÚT GỌN TÍNH SỐ LIỆT FIBONACCI

Trong báo THTT số 6 – 93, mục Tin học, tác giả đã nêu chương trình sau đây để tính các số hạng của số liệt Fibonacci.

	1	
	M⁺	
+	MRC	M⁻
–	MRC	M⁺
	Lặp lại hai dòng cuối	

Mỗi dòng của chương trình lần lượt cho các số hạng của số liệt Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8,....

Kết thúc mỗi dòng ta có một số hạng trên khung số. Số hạng lớn nhất thu được trên máy tính bỏ túi thô sơ là $u_{39} = 63245986$.

Bạn Ngô Kim Anh, lớp 12 A_2, PTTH Việt Trì đã gợi ý chương trình này có thể rút gọn và đưa ra một chương trình khác ngắn hơn.

	1	
	M⁺	
+	MRC	–
	Lặp lại 2 dòng cuối	

Nhưng tiếc rằng chương trình này không phù hợp với một số máy thô sơ. Ví dụ máy SANYO OX 110. Tuy vậy ý kiến của bạn *Ngô Kim Anh* đã giúp tác giả cải tiến chương trình trên thành chương trình sau đây :

1	M⁺
+	MRC
	M⁺
Lặp lại hai dòng cuối	

Chương trình đã được rút gọn rõ rệt, kết thúc mỗi dòng ta vẫn được một số hạng của số liệt. Một chi tiết nhỏ là : số hạng lớn nhất thu được bây giờ không phải là u_{39} mà là

$$u_{38} = 39088169$$

Tác giả hoan nghênh và chân thành cám ơn bạn *Ngô Kim Anh* đã góp ý.

NGUYỄN DŨNG

ISSN : 0866 – 8035.
Mã số : 8BT04M4

Chỉ số 12884
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 4 /1994

Giá : 1200đ
Một nghìn hai trăm đồng