BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

3(201)
1994

Hưng sở giáo dục

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

HỆ THỐNG BỒI DƯỠNG HỌC SINH NĂNG KHIẾU TOÁN Ở LIÊN XÔ TRƯỚC ĐÂY

Thi học sinh giỏi toán qua thư ở VOLGOGRAD 1991

Đội tuyển toán và đội tuyển tin học
Trường Đại học Sư phạm Hà Nội I dự thi quốc gia

MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Đề ra của cuộc thi đặc biệt chào mừng

30 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT: 260786
231 Nguyễn Văn Cừ. TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : ĐOÀN HỒNG

Danh cho các bạn Trung học cơ sở

MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Qua bài viết này tôi muốn trao đổi cùng bạn đọc một phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên. Tôi nghĩ rằng phương pháp này cũng là một công cụ tốt để giải một lớp những bài toán về phương trình nghiệm nguyên. Tạm đặt cho nó cái tên là Phương pháp "khử ẩn".

Ta sử dụng tính chất lũy thừa cùng bậc của các số nguyên liên tiếp hoặc tích các số nguyên liên tiếp... để đưa phương trình nghiệm nguyên cần giải về dạng phương trình khác ít ẩn hơn và quen thuộc hơn. Từ đó, dễ dàng tìm được nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

Thường vận dụng hai nhận xét sau :

a) $X^n < Y^n < (X+a)^n$ $(a \in Z^+) \rightarrow Y^n = (X+a+i)^n$ với $i = 1 ; 2 ; ... ; a-1$.

b) $X(X+1) ... (X+n) < Y(Y+1) ... (Y+n) <$ $< (X+a)(X+a+1) ... (X+a+n)$ $(a \in Z)$ $\rightarrow Y(Y+1) ... (Y+n) = (X+i)(X+i+1) ... (X+i+n)$

với $i = 1 ; 2 ; ... ; a-1$.

Sau đây là một số bài toán minh họa.

Bài 1 : Giải phương trình nghiệm nguyên

$$1 + x + x^2 + x^3 = y^3 \quad (1)$$

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp II toàn quốc bảng A năm 1992)

Giải : Ta có

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 ;$$

$$5x^2 + 11x + 7 = 5\left(x + \frac{11}{10}\right) + \frac{19}{20} > 0$$

nên :

$(1+x+x^2+x^3) - (x^2+x+1) < 1+x+x^2+x^3 <$ $< (1+x+x^2+x^3) + (5x^2+11x+7)$

Do đó $x^3 < y^3 < (x+2)^3 \rightarrow y^3 = (x+1)^3$

Kết hợp (1) ta có :

$$(x+1)^3 = 1 + x + x^2 + x^3 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Nghiệm nguyên của phương trình đã cho là : (0 ; 1) và (-1 ; 0)

Bài 2 : Giải phương trình nghiệm nguyên :

$$x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0 \quad (2)$$

Giải : $(2) \Leftrightarrow x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1$ (*)

Ta có $y^2 \geq 0$; $5y^2 + 2 > 0$ nên

$(y^3+2y^2+3y+1) - (5y^2+2) < y^3+2y^2+3y+1 \leq$ $\leq (y^3+2y^2+3y+1) + y^2$ Do đó $(y-1)^3 < x^3 \leq (y+1)^3 \rightarrow x^3 = y^3$ hoặc $x^3 = (y+1)^3$

* $x^3 = y^3$. Kết hợp với (*) ta có : $2y^2 + 3y + 1 = 0 \rightarrow y = -1$; $y = \frac{-1}{2}$ (loại) Với $y = -1 \rightarrow x = -1$.

* $x^3 = (y+1)^3$. Phối hợp với (*) $\rightarrow y^2 = 0 \rightarrow$ $y = 0$ lúc đó $x = 1$.

Nghiệm nguyên của phương trình đã cho là (-1 ; -1) và (1 ; 0)

Bài 3 : Giải phương trình nghiệm nguyên :

$$x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

Giải :

$(3) \leftrightarrow y^4 = x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1$ (**)

Ta có $3x^2 + 4z^2 + 1 > 0$; $x^2 + 3 > 0$ nên

$(x^4+z^4+2x^2z^2+3x^2+4z^2+1) - (3x^2+4z^2+1) <$ $(x^4+z^4+2x^2z^2+3x^2+4z^2+1) + (x^2+3)$

Do đó $(x^2+z^2)^2 < (y^2)^2 < (x^2+z^2+2)^2 \rightarrow$ $(y^2)^2 = (x^2+z^2+1)^2$. Phối hợp với (**) ta có : $x^2 + 2x^2 = 0 \rightarrow x = z = 0$. Từ đó có $y = \pm 1$.

Nghiệm nguyên của phương trình trên là (0 ; 1 ; 0) và (0 ; -1 ; 0)

Bài 4 : Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0 \quad (4)$$

Giải : $(4) \leftrightarrow y(y-1) = x^4 + x^2 + 10$ (***)

Ta có

$$x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 10 < (x^4 + x^2 + 10) + (6x^2 + 2)$$

Do đó :

$$x^2(x^2+1) < y(y-1) < (x^2+3)(x^2+4)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} y(y-1)=(x^2+1)(x^2+2) \\ y(y-1)=(x^2+2)(x^2+3) \end{array}\right.$$

Kết hợp với $(***) \rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=1 \end{array}\right.$

$x=2$; $x=-2$; $x=1$; $x=-1$.

Từ đó tìm được nghiệm nguyên của phương trình (4).

Để làm quen với phương pháp giải trên, các bạn hãy giải các phương trình nghiệm nguyên sau :

1) $y^3 - x^3 = 3x$
2) $(x-2)^4 - x^4 = y^3$
3) $y^3 = x^3 + 2x + 1$
4) $x^6 - 4y^3 - 4y^4 = 2 + 3y + 6y^2$.

Tin chắc rằng sẽ có nhiều thú vị đến với bạn về Phương trình nghiệm nguyên.

HỆ THỐNG BỒI DƯỠNG HỌC SINH NĂNG KHIẾU TOÁN Ở LIÊN XÔ TRƯỚC ĐÂY

NGÔ VIỆT TRUNG

Cuộc thi học sinh giỏi toán (HSGT) đầu tiên được tổ chức ở Lêningrad năm 1986 bởi B.N. Delone. Ông cũng là người tổ chức cuộc thi HSGT đầu tiên ở Maxkva ngay năm sau đó. Hình thức cuộc thi do ông nghĩ ra hiện nay được dùng ở nhiều nước và cả ở nước ta. Sau đại chiến thế giới lần thứ 2, thi HSGT được nhân rộng ra toàn Liên Xô. Cuộc thi vô địch toàn nước cộng hòa Nga đầu tiên được tổ chức năm 1961 và cuộc thi vô địch toàn liên bang đầu tiên được tổ chức năm 1967. Cho đến những năm 70 các cuộc thi toàn liên bang không mang tính chính thức và chỉ nhận được một phần trợ cấp tiền từ trường Đại học tổng hợp quốc gia Maxkva. Các cuộc thi HSGT bao gồm nhiều bậc, bắt đầu từ trường, sau đến tỉnh hoặc thành phố và sau đó đến nước cộng hòa, cuối cùng mới đến toàn liên bang.

Ở các thành phố lớn dần dần hình thành các câu lạc bộ toán học thường được hướng dẫn bởi các nhà toán học trẻ. Các câu lạc bộ này sinh hoạt vào cuối tuần và hoạt động chủ yếu là tập giải các bài toán khó. Hầu như tất cả các nhà toán học Xô viết nổi tiếng hiện nay trên 50 tuổi đều đã tham dự các câu lạc bộ toán học và đoạt giải thi HSGT thời kì đó.

Tuy nhiên các hoạt động trên chỉ thu hút được các học sinh năng khiếu ở các thành phố lớn. Để bồi dưỡng học sinh năng khiếu ở các địa phương, một số nhà toán học đã tổ chức các trường chuyên toán và lí nội trú. Trường chuyên toán và lí nội trú đầu tiên được thành lập ở thành phố hàn lâm gần Nôvôxibiếc, bởi nhà toán học M.J.Lavrenchiev, ông tổ của thành phố, năm 1961. Năm sau đó thì các nhà toán học A.N.Kôlmôgôrôv và nhà vật lí I.K. Kikôin cũng tổ chức một trường tương tự ở Maxkva. Các trường khác lần lần xuất hiện ở Lêningrad, Kiev và Erevan. Những nhà toán học trẻ ở các thành phố trên đã đi khắp Liên Xô để tổ chức các cuộc thi HSGT và tuyển chọn học sinh cho các trường chuyên nội trú. Cũng trong những năm 60, các trường và lớp chuyên toán (không nội trú) cũng được một số nhà toán học nổi tiếng tổ chức ở các thành phố lớn. Đây cũng là thời kì mà lớp nhà toán học đầu tiên trưởng thành trong chế độ Xô viết có con bước vào học cấp ba.

Bổ sung cho các trường và lớp chuyên còn có Trường toán thông tấn toàn liên bang được thành lập bởi nhà toán học I.M.Gelfan năm 1964. Ở các địa phương hẻo lánh, các tập thể học sinh dưới sự hướng dẫn của giáo viên dạy toán từng tháng sẽ giải hay bàn về các bài toán được gửi đến từ Trường toán thông tấn. Trường này hoạt động dựa chủ yếu vào sự giúp đỡ của sinh viên toán những năm cuối cùng ở trường Đại học tổng hợp quốc gia Maxkva, thông thường cũng đã từng là học sinh của Trường toán thông tấn.

Để phục vụ cho việc phổ cập các kiến thức toán học, các nhà toán học Xô viết còn chú trọng viết sách toán cho học sinh phổ thông. Nhiều sách đó đã trở nên nổi tiếng như cuốn "Ba hòn ngọc của số học" của Khinchin và cuốn "Giới hạn" của Kirilov. Giá những cuốn sách này chỉ bằng giá một que kem cho nên học sinh nào cũng có thể mua được. Năm 1969, Kôlmôgôrov và Kikôin xuất bản tạp chí toán lí phổ thông "Kvant" với sự bảo trợ của Viện hàn lâm khoa học. Hầu hết các nhà toán học nổi tiếng của Liên Xô đều viết bài cho tạp chí này. Nó được các học sinh năng khiếu toán yêu thích và xuất bản trung bình 200.000 tờ mỗi tháng. Hiện nay Mĩ cũng xuất bản tạp chí Quantum (dịch từ Kvant) dựa trên các bài báo cũ của Kvant.

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/197 : *Chứng minh rằng : Nếu ba số a, a + k và a + 2k đều là các số nguyên tố lớn hơn 3, thì k chia hết cho 6.*

Lời giải : của *Phạm Hải Hòa*, 7 toán, Năng khiếu, Hải Hưng

Do a, $a + k$, $a + 2k$ đều là nguyên tố lớn hơn 3 nên đều là số lẻ và không chia hết cho 3.

★ Vì a và $a + k$ cùng lẻ nên

$$a + k - a = k \vdots 2 \qquad (1)$$

★ Vì a, $a + k$, $a + 2k$ đều không chia hết cho 3 nên khi chia cho 3 ít nhất hai số có cùng số dư :

– Nếu a và $a + k$ có cùng số dư, thì suy ra $(a + k) - a = k \vdots 3$

– Nếu $a + k$ và $a + 2k$ có cùng số dư, thì suy ra : $(a + 2k) - (a + k) = k \vdots 3$

– Nếu a và $a + 2k$ có cùng số dư, thì suy ra : $(a + 2k) - a = 2k \vdots 3$ nhưng $(2,3) = 1$ nên $k \vdots 3$

Vậy $k \vdots 3$ (2)

Từ (1), (2) và do $(2, 3) = 1$ ta suy ra $k \vdots 6$ (đpcm)

Nhận xét : 1. Có rất nhiều bạn có lời giải tốt và bằng nhiều cách khác nhau.

2. Có một vài bạn tổng quát hóa không đúng cho bài toán gồm n số nguyên tố lập thành một cấp số cộng.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/197 : *Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn* $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{abc}$. *Chứng minh rằng :*

$$a + b + c \geqslant 2\sqrt{abc}$$

Lời giải : *Cách 1* (*Trần Anh Sơn* 7M Marie–Curie Hà Nội)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số a^2, b^2, c^2

ta có : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$$\Rightarrow 4\sqrt{abc} \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số a, b, c ta có :

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$4\sqrt{abc}\,(a + b + c) \geqslant 9abc > 8abc$$

$$\Rightarrow a + b + c > 2\sqrt{abc}$$

Cách 2 : (*Trần Thị Ngọc Hải* 8T Trường Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi). Ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2c\sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 2c\sqrt{2ab}$$

$\Rightarrow 4\sqrt{abc} \geqslant 2c\sqrt{2ab} \Rightarrow 2 \geqslant c$. Tương tự :

$$2 \geqslant b \,;\, 2 \geqslant a$$

Nhận xét a, b, c không đồng thời bằng 2 vì trái với giả thiết

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{abc}$$

Do đó : $a(a - 2) + b(b - 2) + c(c - 2) < 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(a + b + c)$

$\Rightarrow 4\sqrt{abc} < 2(a + b + c)$

$\Rightarrow 2\sqrt{abc} < a + b + c$

Cách 3 : (*Vũ Văn Hoan* 9T – Phan Bội Châu – Nghệ An)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 6 số dương

a^2, b^2, c^2, a, b, c ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geqslant 6\sqrt[6]{a^3b^3c^3} = 6\sqrt{abc}$$

Mà $a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{abc} \Rightarrow a + b + c \geqslant 2\sqrt{abc}$.

Đẳng thức xẩy ra $\Leftrightarrow$

$$a^2 = b^2 = c^2 = a = b = c$$

Vì a, b, $c > 0$ nếu điều trên xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ trái với giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{abc}$. Do đó $a + b + c > 2\sqrt{abc}$.

Nhận xét : Có 60% lời giải gửi về có đánh giá đúng, là bất đẳng thức không thể trở thành đẳng thức. Chủ yếu các bạn dựa vào bất đẳng thức Cô si theo nhiều hướng khá phong phú. Ngoài 3 bạn có lời giải trên, các bạn khác cũng có lời giải tốt : *Phan Thị Lan* 9CT, Việt Trì, Vĩnh Phú ; *Vũ Tất Thắng*, *Phạm Nguyễn Thu Trang* (Nghĩa Tân, Hà Nội) ; *Nguyễn Phương Lan* (9T NK Hà Tĩnh), *Lê Thế Sơn* (9CT Đồng Sơn, Thanh Hóa), *Dương Ngọc Tùng* (9 Toán NK Hoa Lư, Ninh Bình), *Trần Văn Long* (9 NK Thanh Liêm, Nam Hà), *Nguyễn Thị Thanh* (9A$_1$, Hồng Bàng, Hải Phòng), *Lương Lê Quang* (9, NK Hải Hưng), *Hà Khánh Linh* (5A Chu Văn An, Hà Nội), *Võ Thanh Tùng* (9CT, Quốc học Huế) v. v..

Đặc biệt có 2 bạn *Lê Văn An* (9CT, Phan Bội Châu, Nghệ An) và *Phạm Anh Tuấn* (9NK Thuận Thành, Hà Bắc) đã tổng quát đúng bài toán theo 2 hướng khác nhau :

1) Cho n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và

$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m = p\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}$$

với $1 \leqslant m <\ ; 1 \leqslant p < 2n$ thì :

$$a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + \ldots + a_n^{n-m} \geqslant (2n - p)\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}$$

2) Cho n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn

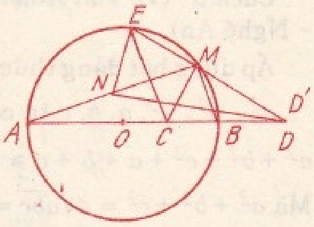
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} = k\sqrt{\prod_{i=1}^{n} a_i} \text{ thì } \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \frac{n^2}{k}\sqrt{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/197 : *Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Gọi C, D là hai điểm theo thứ tự chia trong, chia ngoài đoạn AB theo tỉ số k > 1. Gọi chu vi hai tam giác chung đáy CD, lần lượt có đỉnh M ở trên đường tròn (O), N ở trên dây cung AM, là P_1 và P_2. Chứng minh rằng $P_1 < P_2 < 2.AD$.*

Lời giải :

Lấy điểm D' thuộc tia BD sao cho $\widehat{CMB} = \widehat{BMD'}$. Khi đó MB, MA lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc CMD'. Ta có :



$$\frac{BD'}{BC} = \frac{AD'}{AC} = \frac{MD'}{MC}$$

Từ đó $\frac{CA}{BC} = \frac{AD'}{BD'}$. Suy tiếp ra $\frac{D'A}{D'B} = \frac{DA}{DB}$ $\left(\text{vì } \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}\right)$. Suy ra $\frac{D'A}{AB} = \frac{DA}{AB}$. Vậy $D' \equiv D$.

Tức là *MB, MA* lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{CMD}$.

Lấy *E* đối xứng với *C* qua *AM*. Dễ thấy *E* thuộc tia đối của tia *MD*. Trong ΔEND có

$EN + ND > ED$. Mà $NE = NC$, $ME = MC$

Nên $NC + ND > MC + MD \Rightarrow NC + ND + CD > MC + MD + CD$ Hay $P_2 > P_1$ (*)

Mặt khác từ $\widehat{AMB} = 90^o$ suy ra $\widehat{AND} > 90^o$.

Do đó $AD > ND$. (1)

Vì N nằm trên dây *AM* nên $ON < OA$. Do vậy

$NC < NO + OC < AO + OC = AC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$P_2 = ND + NC + CD < AD + AC + CD = 2 \,.\, AD$

Tức $P_2 < 2 \,.\, AD$ (**)

Từ (*) và (**) ta được : $P_1 < P_2 < 2 \,.\, AD$ (ĐPCM)

Nhận xét : Bài giải trên dựa vào lời giải của các bạn *Nguyễn Anh Tú* 9H Trưng Vương và *Nguyễn Quang Nghĩa* 9A Trưng Nhị, Hà Nội. Các bạn khác có bài giải tốt : *Phan Ngọc Lan*, 9 CT Việt Trì, Vĩnh Phú ; *Phạm Đình Giang*, 9CT Trần Phú II, Hải Phòng ; *Mai Thanh Bình* 7M, *Nguyễn Ngọc Tân*, 9M Mari Quyri, *Phạm Huy Tùng* 8A, Bế Văn Đàn, *Phạm Lê Hùng* 9A Trưng Nhị, *Nguyễn Hoàng Dương*, *Nguyễn Bá Hùng*, 9H Trưng Vương, Hà Nội ; *Vũ Thu Hương* 9T PTNK Hải Hưng, *Trần Thị Khuê* 9B Quang Trung, Thanh Hóa ; *Nguyễn Hoành* 9CT Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Võ Thanh Tùng* 9CT Quốc học Thừa Thiên – Huế ; *Nguyễn Hữu Hội* A, 8T Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Nguyễn Nhật Nam*, Bà Rịa – Vũng Tàu.

VŨ KIM THỦY

Bài T4/197 : *Với mỗi cặp số nguyên dương nguyên tố cùng nhau (p, q) đặt :*

$$S = \left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right]$$

trong đó [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Xác định các giá trị p, q để S là một số nguyên tố.

Lời giải *(của nhiều bạn)* : Với mỗi $a \in R$ đặt $\{a\} = a - [a]$. Khi đó, với $k \in N$ có $\left\{\frac{kq}{p}\right\} = \frac{r_k}{p}$, ở đây r_k là số dư trong phép chia kq cho p. Do vậy :

$$S = \frac{q}{p} + \frac{2q}{p} + \ldots + \frac{(p-1)q}{p} - \left(\frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p} + \ldots + \frac{r_{p-1}}{p}\right)$$

$$= \frac{(p-1)q}{2} - \left(\frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p} + \ldots + \frac{r_{p-1}}{p}\right)$$

Vì $(q, p) = 1$ nên $r_k \neq 0$ $\forall k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Hơn nữa, ta sẽ chứng minh $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ đôi một khác nhau. Thật vậy, giả sử, ngược lại, $\exists i, j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $i < j$ mà $r_i = r_j$. Khi đó $1 \leqslant j - i \leqslant p - 2$ (1) và $(j-i)q \,\vdots\, p$ (2) Từ (2) $\Rightarrow (j-i) \,\vdots\, p$ (do$(q, p) = 1$), mâu thuẫn với (1). Mâu thuẫn nhận được cho ta điều cần chứng minh, và do đó :

$$\frac{r_1}{p} + \frac{r_2}{p} + \ldots + \frac{r_{p-1}}{p} = \frac{1}{p} + \frac{2}{p} + \ldots + \frac{p-1}{p} = \frac{p-1}{2}$$

Suy ra : $$S = \frac{(p-1)(q-1)}{2} \qquad (3)$$

Từ (3) ta thấy để S là nguyên tố cần có $p, q \neq 1$ (*) và ít nhất một trong hai số p, q là số lẻ. Xét :

● *Trường hợp 1 : p, q cùng là số lẻ.* Khi đó $p, q \geqslant 3$ (do (*) và $p \neq q$ (do $(p, q) = 1$). Kết hợp với (3) suy ra S là số chẵn lớn hơn 2, và do đó S không phải là số nguyên tố.

● *Trường hợp 2 : p là số chẵn và q là số lẻ.* Khi đó S là số nguyên tố khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (p, q) = 1 \\ p - 1 = 1 \\ \dfrac{q-1}{2} \in \mathcal{P} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} (p, q) = 1 \\ (p-1) \in \mathcal{P} \\ \dfrac{q-1}{2} = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p = 2 \\ q = 2l+1, \text{ với } l \in \mathcal{P} \end{cases} \\ \\ \begin{cases} p = t+1, \text{ với } t \in \mathcal{P} \text{ và } t \not\equiv 2 \pmod 3 \\ q = 3 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (4)$$

trong đó $\mathcal{P}$ là tập số nguyên tố.

● *Trường hợp 3 : p là số lẻ và q là số chẵn.* Do tính đối xứng đối với p, q của biểu thức xác định S (theo (3)) nên trong trường hợp này, từ kết quả của trường hợp 2, ta được S là số nguyên tố khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p = 2m + 1, \text{ với } m \in \mathcal{P} \\ q = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} p = 3 \\ q = n + 1, \text{ với } n \in \mathcal{P} \text{ và } n \not\equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \end{array}\right. \quad (5)$$

Vậy, tóm lại, tất cả các cặp giá trị p, q cần tìm là các cặp p, q được xác định theo (4), (5).

Nhận xét : 1. Trong số 112 lời giải mà Tòa soạn nhận được có 11 lời giải sai. Rất nhiều lời giải cho kết quả không chính xác : hoặc thừa nghiệm (do không để ý tới điều kiện $(p, q) = 1$) hoặc bỏ sót các nghiệm $p = 3$, $q = 4$ và $p = 4$, $q = 3$ (do xuất phát từ quan niệm sai, rằng nếu $t \in \mathcal{P}$ thì hoặc $t \equiv 1 \pmod 3$ hoặc $t \equiv 2 \pmod 3$).

2. Các bạn có lời giải tốt : *Doãn Trung Tùng* (PTCS Nghĩa Tân, Hà Nội) ; *Nguyễn Phú Bình* (PTCS Bế Văn Đàn, Hà Nội) ; *Phạm Lê Hùng* (PTCS Trưng Nhị, Hà Nội) ; *Nguyễn Ngọc Tân* (9M Mari Quyri, Hà Nội) ; *Trịnh Hữu Trung* (9T Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Lê Hải Yến* (PTTH Hùng Vương, Vĩnh Phú) ; *Lê Văn Dung* (PTTHNK Hà Bắc) ; *Nguyễn Việt Linh* (PTTH Trần Phú, Hải Phòng) ; *Ngô Thái Hương, Nguyễn Đức Toàn, Nguyễn Huy Toàn, Tô Đông Vũ* (PTCT ĐHTH Hà Nội) ; *Nguyễn Tuấn Dũng* (PTCT ĐHSP1 Hà Nội) ; *Nguyễn Thái Hà* (Mari Curie Hà Nội) ; *Nguyễn Thanh Bình* (PTTH chuyên Thái Bình) ; *Vũ Đức Sơn* (PTTH Lương Văn Tụy, Ninh Bình) ; *Lê Minh Hiếu* (Lam Sơn, Thanh Hóa) ; *Nguyễn Lê Na* (PTCT ĐHSP Vinh) ; *Phùng Quốc Định* (PTTH Lê Khiết, Quảng Ngãi) ; *Nguyễn Văn Sơn* (Quốc học Huế) ; *Lê Thị Thanh Ngọc* (PTTH Lê Quí Đôn, Nha Trang) ; *Phan Hoàng Việt* (Quốc học Quy Nhơn).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T5/197 : *Cho số tự nhiên $c \geq 3$. Xây dựng dãy số tự nhiên $\{a_n\}$ như sau :*

$$a_1 = c$$

$$a_n = a_{n-1} - \left[\frac{a_{n-1}}{2}\right] + 1 \; ; n = 2, 3, \ldots \ldots$$

([x] kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 3$

Lời giải : Trước hết, ta chứng minh

$$a_n \geq 3 \quad (1)$$

$\forall n \geq 1$. Thật vậy, với $n = 1$ có $a_1 \geq 3$ (theo giả thiết)

Giả sử đã có (1) với $n = k$ $(k \geq 1)$. Khi đó

$a_{k+1} = a_k - \left[\frac{a_k}{2}\right] + 1 \geq \frac{a_k}{2} + 1 \geq \frac{5}{2}$, và do $a_{k+1} \in N$ nên $a_{k+1} \geq 3$. Do vậy, theo nguyên lí quy nạp, ta có (1) $\forall n \geq 1$.

● Tiếp theo, ta chứng minh : nếu $a_n > 3$ thì $a_{n+1} < a_n$ (2)

Thật vậy, từ $a_n > 3 \Rightarrow a_n \geq 4$

(do $a_n \in N$) $\Rightarrow \frac{a_n}{2} \geq 2 \Rightarrow$

$\left[\frac{a_n}{2}\right] \geq 2 \Rightarrow a_{n+1} = a_n - \left[\frac{a_n}{2}\right] + 1 \leq a_n - 1 < a_n$.

● Từ (1) và (2) suy ra $\exists\, i \in N^*$ sao cho $a_i = 3$ (vì nếu, ngược lại, $a_n > 3 \;\forall n \in N^*$ thì đoạn $[3, c]$ sẽ chứa vô số số nguyên đôi một khác nhau !). Theo cách xác định dãy $\{a_n\}$ dễ có $a_n = 3 \;\forall n \geq i$. Bởi vậy $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 3$ (ĐPCM)

Nhận xét : 1. Bạn *Lê Nguyên Chất* (Thanh Hóa) do không chú ý tới điều kiện $c \in N$ nên đã chứng minh bài ra là bài sai ! Một số bạn khác mắc sai lầm cơ bản : mới chỉ chứng minh được (1) đã vội kết luận $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 3$. Không ít bạn có lời giải thiếu chặt chẽ, do không chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty}\left[\frac{a_n}{2}\right] = \left[\frac{\lim a_n}{2}\right]$

2. Các bạn có lời giải tốt : *Lê Hải Yến, Vũ Mạnh Hà, Nguyễn Thái Bình* (PTTH Hùng Vương, Vĩnh Phú) ; *Phạm Lê Hùng* (9A PTCS Trưng Nhị, Hà Nội) ; *Đinh Thành Trung, Tô Đông Vũ* (PTCT ĐHTH Hà Nội) ; *Trịnh Đăng Giang* (Mari Curie, Hà Nội) ; *Phan Anh Tuấn* (PTTH Nguyễn Huệ, Hà Tây) ; *Phạm Lê Sơn, Hoàng Thị Tuyết* (Lam Sơn, Thanh Hóa).; *Lê Thời Hữu, Chu Nguyên Bình, Hoàng Văn Long* (PTCT ĐHSP Vinh) ; *Nguyễn Thanh Hải* (PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình) ; *Nguyễn Thu Tịnh, Huỳnh Nguyễn Tín* (Trường chuyên Quảng Ngãi) ; *Giang Kiệt Quốc* (PTTH Nguyễn Thượng Hiền, TP Hồ Chí Minh) và *Nguyễn Xuân Hùng* (PTTH Ban Mê Thuật, Daklak).

3. Bạn *Nguyễn Thái Hà* (Mari Quyri, Hà Nội) đã chứng minh đúng (tuy không chặt chẽ) khẳng định sau : "Với $c \in R$ cho trước, lập dãy $\{a_n\}$ được xác định bởi :

$$a_1 = c$$

$$a_n = a_{n-1} - \left[\frac{a_{n-1}}{2}\right] + 1 \; ; n = 2, 3, \ldots$$

Khi đó $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ và :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \begin{cases} 3 + \{c\} & \text{nếu } c \geq 3 \\ 2 + \{c\} & \text{nếu } c < 3 \end{cases}$$

($\{c\}$ kí hiệu phần lẻ của c : $\{c\} = c - [c]$.)

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T6/197. *Giải phương trình*

$$25(3^{x^4-8x^2-14}+25^{\frac{1}{2}x^4-4x^2+8}) =$$
$$= 29 - 18\,.\,3^{x^4-8x^2+12} - 7^{x^4-8x^2+16}$$

Lời giải : Có 36 bạn đề nghị sửa lại đề ra và giải đúng theo đề đã sửa : "Giải phương trình :

$$25(3^{x^4-8x^2+14}+25^{\frac{1}{2}x^4-4x^2+8}) =$$
$$= 29 - 18\times 3^{x^4-8x^2+12} - 7^{x^4-8x^2+16}$$

Dễ dàng đưa phương trình về dạng :

$$3^{t+1}+5^{t+2}+7^t = 29$$

với $t = (x^2-4)^2 \geqslant 0$

Gọi vế trái là $f(t)$ thì $f(t)$ là hàm đồng biến. Vì $t \geqslant 0$ nên $f(t) \geqslant f(0) = 29$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Nhận xét : Do sơ xuất nên đề in nhầm một dấu + thành dấu –. Tuy nhiên, đa số các bạn đều đoán ra nguyên bản và đính chính giúp. Chỉ có 2 bạn vẫn giải và không sửa đề, nhưng đều lí luận nhầm để chứng minh phương trình vô nghiệm. Với đề đã in bạn *Nguyễn Thanh Hải* chứng minh phương trình có 4 nghiệm.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T7/197. *Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

Lời giải : Đặt

$$\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{7}\,;\ \beta = 2\cos\frac{4\pi}{7}\,;\ \gamma = 2\cos\frac{8\pi}{7}$$

$$A = \sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}\ ;\ B = \sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta\gamma}+\sqrt[3]{\gamma\alpha}$$

Xét phương trình $\cos 4x = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1) = 0$$

thì α, β, γ là ba nghiệm của phương trình $t^3 + t - 2t - 1 = 0$

Do đó : $\alpha + \beta + \gamma = -1$;

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2$; $\alpha\beta\gamma = 1$

Sử dụng hằng đẳng thức

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3-3xyz + 2(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

Ta có :

$$B^3 = -2-3+3B\,(\sqrt[3]{\alpha\beta^2\gamma}+\sqrt[3]{\alpha^2\beta\gamma} + \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma^2}) = -5+3AB$$

$$A^3 = -4 + 3AB$$

Suy ra : $A^3B^3 = (3AB-5)(3AB-4)$

hay $(AB-3)^3 + 7 = 0 \Leftrightarrow AB = 3 - \sqrt[3]{7}$

Vậy : $\{\ A^3 = -4 + 3AB = 5 - 3\sqrt[3]{7}$, đpcm.

Nhận xét : Các bạn gửi bài về đều có lời giải đúng và đều sử dụng định lí Viet cho phương trình bậc ba. Một số bạn còn sử dụng các hằng đẳng thức đại số để chứng minh trực tiếp bài toán. Tuy nhiên, cách giải này quá dài dòng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/197. *Xét các số thực a, b, c* $(a \neq 0)$ *sao cho phương trình*

$$a(ax^2+bx+c)^2 + b(ax^2+bx+c) + c = 0 \quad (1)$$

vô nghiệm.

Chứng minh rằng $ac > 0$

Lời giải : *Cách 1* (sử dụng tính chất liên tục của đa thức)

Nếu $f(x) = ax^2+bx+c = 0$ vô nghiệm thì $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow ac > \dfrac{b^2}{4} \geqslant 0$, đpcm.

Nếu $f(x)$ có nghiệm x_o, thì ta xét 2 trường hợp

1) $a > 0$. Khi đó phương trình $f(f(x)) = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(f(x)) > 0 \quad \forall x \in R$. Từ đó, $c = f(f(x_o)) > 0$ và $ac > 0$.

2) $a < 0$ thì $f(f(x)) < 0 \quad \forall x \in R$. Từ đó, $c = f(f(x)) < 0$

Cách 2 (sử dụng tính chất của tam thức bậc hai)

Nếu $ac = 0 \Leftrightarrow c = 0$ (vì $a \neq 0$) nên phương trình (1) có nghiệm $x = 0$, trái với giả thiết.

Nếu $ac < 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$ nên ax_1 và ax_2 trái dấu. Giả sử $ax_1 > 0$. Suy ra $a(c - x_1) = ac - ax_1 < 0$

Do đó phương trình $ax^2+bx+c = x_1 \Leftrightarrow ax^2+bx+c-x_1 = 0$ có nghiệm (vì $\Delta = b^2 - 4a(c-x_1) > 0$)

Gọi x_3 là nghiệm. Khi đó

$$a(x_3^2+bx_3+c)^2 + b(ax_3^2+bx_3+c)+c = ax_1^2+bx_1+c = 0$$

, trái với giả thiết. Vậy $ac > 0$ (đpcm)

Nhận xét. 1) Tòa soạn nhận được số lượng rất lớn các lời giải gửi về. Nhiều bạn nhầm lẫn trong lập luận đối với phương trình $at^2+bt+c = 0$ (với $t = ax^2+bx+c$) coi điều kiện vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4a < 0$.

2) Bạn *Nguyễn Huy Toàn* (10^A ĐHTH HN) còn mở rộng bài toán như sau : Cho hai đa thức $f(x)$, $g(x)$ có bậc chẵn (> 0) và có các hệ số cao nhất và tự do như nhau. Biết $g[f(x)] = 0$ vô nghiệm. Chứng minh rằng hệ số tự do và hệ số cao nhất của hai đa thức đó cùng dấu.

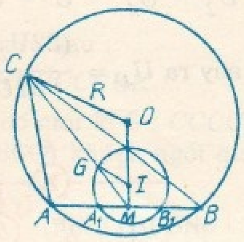
3) Tuy vậy, việc mở rộng trực tiếp bài toán trên được đặt như sau :

Cho đa thức $P(x)$ (bậc > 1) có ít nhất hai nghiệm và phương trình $P(P(x)) = 0$ vô nghiệm. Chứng minh rằng các nghiệm của $P(x)$ cùng dấu. Mong các bạn xem xét lại cách giải của mình xem có thể áp dụng để giải bài toán tổng quát trên được không.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/197. *Cho hai điểm A, B cố định trên đường tròn tâm O và một điểm C chuyển động trên đường tròn đó. Tìm quỹ tích trọng tâm tam giác ABC.*

Lời giải. Đặt R là bán kính đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của AB ; G là trọng tâm tam giác ABC, ta có G nằm giữa C, M sao cho $GC = 2GM$. Lấy điểm I nằm giữa O, M sao cho $IO = 2IM$, ta có $IG \mathbin{//} OC$ (định lí Ta-lét đảo), suy ra $IG : R = \dfrac{IG}{OC} = \dfrac{MI}{MO} = \dfrac{1}{3}$ hay $IG = \dfrac{R}{3}$ và $G \in \left(I\ ;\ \dfrac{R}{3}\right)$



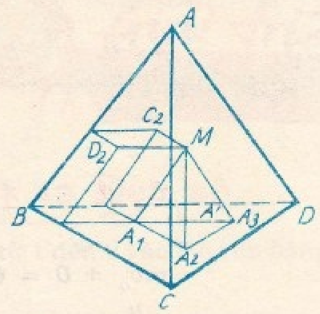
Gọi A_1, B_1 là các giao điểm của AB với $\left(I\ ;\ \dfrac{R}{3}\right)$. Đảo lại, lấy điểm $G' \in \left(I\ ;\ \dfrac{R}{3}\right)$ sao cho G' khác A_1, B_1 ; Gọi C' là giao điểm của tia MG' với (O). Gọi G_1 là trọng tâm $\Delta ABC'$, ta có G_1 nằm trên tia MC' (1). Mặt khác, theo phần thuận ta có $G_1 \in \left(I\ ;\ \dfrac{R}{3}\right)$; kết hợp với (1) ta có $G_1 \equiv G'$, hay G' là một điểm của quỹ tích. Vậy quỹ tích là đường tròn $\left(I\ ;\ \dfrac{R}{3}\right)$ trừ hai điểm A_1, B_1.

Nhận xét : Có 164 bạn giải bài này và giải đúng. Tuy nhiên nhiều bài trình bày quá dài trong khi đó có một số bài lại quá vắn tắt, một vài bài sử dụng kiến thức của các lớp PTTH. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Lưu Chí Dũng* (11 TK4 Năng khiếu Bắc Thái), *Ngô Đình Duy* (10 CT, PTTH NK Trần Phú, Hải Phòng), *Thới Thanh Tuấn* (10 Toán chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi), *Phạm Mạnh Quang* (10 T Lam Sơn - Thanh Hóa).

ĐẶNG VIỄN

Bài 10/197. *Xét điểm M nằm bên trong tứ diện đều ABCD. Gọi A', B', C', D' là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt của tứ diện ; I là trọng tâm của tứ diện A'B'C'D'. Chứng minh rằng MI luôn đi qua một điểm cố định khi M di động.*

Lời giải. Qua M kẻ các đường thẳng tương ứng song song với các cạnh của $ABCD$. Gọi tập hợp các giao điểm của chúng với các mặt của $ABCD$ là E với $E = \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, \dots D_1, D_2, D_3\}$. Xét mặt (BCD), chẳng hạn, ta có các điểm $A_1, A_2, A_3 \in (BCD)$ sao cho $MA_1 \mathbin{//} AB$; $MA_2 \mathbin{//} AC$; $MA_3 \mathbin{//} AD$. Suy ra hình chóp $MA_1A_2A_3$ đều (do đồng dạng phối cảnh với $ABCD$, tâm đồng dạng là giao điểm của đường thẳng MA với (BCD). Kết hợp với $MA' \perp (A_1A_2A_3)$ ta có A' là trọng tâm $\Delta A_1A_2A_3$ hay $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} = 3\overrightarrow{MA'}$



Suy ra $\sum\limits_{x_i \in E} \overrightarrow{Mx_i} = 3(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'}) = 12\overrightarrow{MI}$ (1)

(vì I là trọng tâm của $A'B'C'D'$). Mặt khác, xét đỉnh B chẳng hạn, ta có $BA \mathbin{//} MA_1$ với $A_1 \in (BCD)$; $BC \mathbin{//} MC_2$ với $C_2 \in (ABD)$; $BD \mathbin{//} MD_2$ với $D_2 \in (ABC)$. Như vậy, M, B, A_1, C_2, D_2 là 5 đỉnh của một hình hộp trong đó MB là một đường chéo và MA_1, MC_2, MD_2 là ba cạnh. Ta có : $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MD_2} = \overrightarrow{MB}$.

Suy ra $\sum\limits_{x_i \in E} \overrightarrow{Mx_i} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ (2)

(vì G là trọng tâm của $ABCD$). Từ (1) và (2), ta có $MG = 3MI$ hay M, G, I thẳng hàng. Mà G cố định nên ta có đpcm.

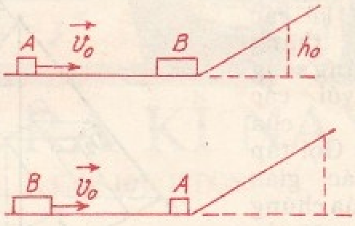
Nhận xét : Các bạn đều giải đúng nhưng nhiều bài trình bày dài và vẽ hình rườm rà. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Vũ Quốc Anh* (12T Đào Duy Từ, Quảng Bình), *Nguyễn Văn Sơn* (11Ct - QH - Huế), *Phùng Quốc Định* (11CT Lê Khiết, Quảng Ngãi) ; *Nguyễn Hồng Tâm* (11 CT Hùng Vương, Vĩnh Phú).

ĐẶNG VIỄN

Bài L1/197. *Vật B có khối lượng $m_B = 3m$ đứng yên ở chân mặt phẳng nghiêng. Vật A có khối lượng $m_A = m$ chuyển động với vận tốc $\overrightarrow{v_o}$ trên mặt phẳng nằm ngang đến va chạm vào vật B (h. 1). Sau va chạm người ta thấy vật A dừng lại, còn vật B chuyển động lên mặt phẳng nghiêng đến độ cao h_o. Sau đó người ta hoán vị A cho B, tức là để A đứng yên ở chân mặt phẳng nghiêng còn vật B chuyển động với vận tốc v_o đến đập vào A (H. 2). Hỏi sau va chạm vật A lên được đến độ cao h bằng bao nhiêu ? Bỏ qua ma sát giữa vật và các mặt phẳng.*

Lời giải :

Trường hợp 1. Xét sự va chạm trong hệ quy chiếu (HQC) gắn với mặt đất. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và chọn trục $x'x$ theo hướng $\overrightarrow{v_o}$ ta được (H. 1) :



$$mv_o + 0 = 0 + 3mU_B$$

suy ra $u_B = \dfrac{v_o}{3}$. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_o^2}{9}\right) = mgh_o$$

Suy ra $h_o = \dfrac{v_o^2}{18g}$ (1)

Trường hợp 2 : Lúc đầu ta xét sự va chạm trong HQC chuyển động với vận tốc $\vec{v_o}$. Trong HQC này vật B đứng yên còn vật A chuyển động với vận tốc v_o đến va chạm vào B, giống như ở trường hợp 1. Do đó sau va chạm vật A đứng yên. Bây giờ ta xác định vận tốc của A trong HQC gắn với mặt đất. Áp dụng công thức cộng vận tốc ta được :

$$\vec{U_A} = 0 + \vec{v_o} \longrightarrow U_A = v_o.$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta được $h = \dfrac{v_o^2}{2g}$ (2). So sánh (1) và (2) ta được $h = 9h_o$

Nhận xét. Có 30 em đã gửi bài giải, trong đó có 10 em có lời giải đúng : *Nguyễn Tất Sơn*, 11A, PTTH Nghĩa Đàn (Nghệ An) ; *Dương Minh Tân*, 2B phố Nguyễn Văn Trỗi, Quy Nhơn (Bình Định) ; *Võ Quốc Ánh*, 12t, Đào Duy Từ (Quảng Bình), *Hồng Linh*, 12F Lam Sơn (Thanh Hóa) ; *Nguyễn Thanh Bình* 12G PTTH chuyên Thái Bình ; *Thu Hiền*, 12A, PTTH chuyên Thái Bình ; *Trần Văn Bình*, T_{11} K4 chuyên toán, PTTH Năng khiếu Bắc Thái ; *Nguyễn Vũ Quang*, 10 Lí PTTH Đào Duy Từ (Quảng Bình) ; *Phùng Minh Hoàng*, 12L1, Hà Nội – Amstecđam (Hà Nội) ; *Trương Hàm Yêng*, 11A1, PTTH Lí Tự Trọng (Cần Thơ).

OK

Bài L2/197. *Có 4 đèn và 1 điện kế được mắc vào 1 nguồn điện có hiệu điện thế $U = 24$ vôn theo mạch vẽ ở hình bên. Cho biết công suất tiêu thụ theo thứ tự là $P_1 = 150$ W ; $P_2 = 160$ W ; $P_3 = 200$ W ; $P_4 = 180$ W ; $P_5 = 10$ W. Tính hiệu điện thế, cường độ dòng điện, điện trở ở mỗi đèn và điện kế.*

Lời giải : Tổng công suất tiêu thụ ở mạch $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 700W$

Cường độ dòng điện chính $I = \dfrac{P}{U} = \dfrac{700}{24} = \dfrac{175}{6}A$

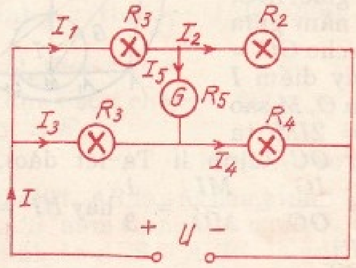
Từ $I = I_2 + I_4 \longrightarrow \dfrac{175}{6} = \dfrac{160}{U_2} + \dfrac{180}{U_4}$

suy ra $U_4 = \dfrac{216U_2}{35U_2 - 192}$ (1)

Từ $I_5 = I_1 - I_2$ ta có

$$\frac{P_5}{U_2 - U_4} = \frac{P_1}{U - U_2} - \frac{P_2}{U_2}$$

suy ra $U_4 = \dfrac{(32U_2 - 408)U_2}{31U_2 - 384}$ (2)



Cân bằng (1) và (2) ta có

$$14U_2^2 - 339U_2 + 2016 = 0$$

Phương trình này có 2 nghiệm :

$$U_2 = \frac{96}{7}V$$

và $U_2 = 10{,}5$V (nghiệm này bị loại vì ứng với $U_4 = 12{,}9$ V $> U_2$ dòng I_5 đi từ dưới lên).

Với $U_2 = \dfrac{96}{7}V$, suy ra $U_4 = \dfrac{72}{7}V$, $U_1 = \dfrac{72}{7}V$, $U_3 = \dfrac{96}{7}V$, $U_5 = \dfrac{35}{12}V$. Áp dụng công thức $I = \dfrac{P}{U}$ và $R = \dfrac{U^2}{P}$, suy ra $I_1 = \dfrac{175}{12}A \simeq 14{,}6A$; $R_1 = 0{,}71\Omega$; $I_2 \simeq 11{,}7A$; $R_2 \simeq 1{,}18\Omega$; $I_3 \simeq 14{,}6A$ $R_3 \simeq 0{,}94\Omega$; $I_4 \simeq 17{,}5A$; $R_4 \simeq 0{,}59\Omega$; $I_5 = 2{,}92A$; $R_5 \simeq 1{,}17\Omega$.

Nhận xét : Có 15 em đã gửi bài giải, trong đó có 9 em có lời giải tốt : *Lê Thúy Nga*, 11A PTTH Nghĩa Đàn, Nghệ An ; *Lưu Mạnh Tường*, 11A PTTH Nghĩa Đàn, Nghệ An ; *Trần Bảo*, 10A, PTTH Yên Hòa, Hà Nội ; *Hoàng Anh Lê*, 11A, PTTH Nghĩa Đàn, Nghệ An ; *Thu Hiền*, 12A PTTH chuyên Thái Bình ; *Nguyễn Trọng Việt*, 11A PTTH Hồng Quang, Hải Dương, Hải Hưng ; *Vũ Duy Nguyên*, *Lê Ngọc Tú*, 11A PTTH Nghĩa Đàn, Nghệ An ; *Lê Hồng Nam*, 9 Lí, Năng khiếu Thái Thụy, Thái Bình.

MT

Giải đáp bài

Lễ sinh nhật MÈO ĐÔRÊMON

Từ nhận xét của Đôrêmon suy ra cách mỗi vị mèo cộc một vị thì có một vị mèo cộc. Vậy có dãy cộc (*C*) và không cộc (*K*) như sau :

... * *C* * *C* * *K* * *C* * *C* * *K* * *C* * *C* * *K* *...

Như vậy giữa 333 vị khách ngồi cách một sẽ có 222 mèo cộc. Bởi vì đa số khách là cộc đuôi cho nên dãy cũng sẽ như thế đối với số mèo còn lại (ghi dấu *). Nghĩa là có cả thảy 444 mèo cộc đuôi.

Dãy được sắp xếp như sau :

... *CCCCKKCCCCKKCCCCKK*....

Ta nhận thấy dãy có chu kì 6 : *CCCCKK*. Vậy có thể sắp xếp 666 vị khách ngồi quanh bàn tròn.

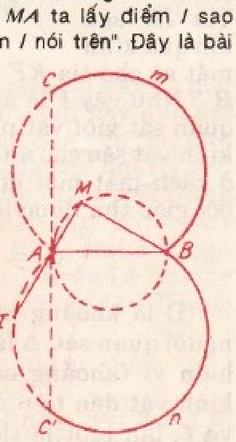
BÌNH PHƯƠNG

ỐNG KÍNH

CẢI CÁCH DẠY VÀ HỌC TOÁN

Một bài toán hai cuốn sách làm sai

Đó là bài "Trong một đường tròn (*O*), *AB* là một đường kính cố định. *M* là một điểm chạy trên đường tròn. Ta nối *MA*, *MB*, và trên tia đối của tia *MA* ta lấy điểm *I* sao cho *MI* = 2*MB*. Tìm tập hợp điểm *I* nói trên". Đây là bài 10 trang 46 sách HH9 của nhà xuất bản Giáo dục (NXBGD).



Trong cuốn sách giải bài tập hình 9 - NXBGD và cuốn ôn luyện toán 9 nhà máy in Nghệ An đã trình bày lời giải và kết luận như sau : "Tập hợp điểm *I* là cung chứa góc không đổi vẽ trên đoạn *AB*". Kết luận như vậy là chưa được. Ta vẽ qua *A* một đường thẳng vuông góc với *AB* cắt cung *AmB* ở *C*, cắt cung *AnB* ở *C'* và tạo điểm *I* như hình vẽ thì *I* không thuộc tập hợp cần tìm. Kết luận tập hợp *I* cần tìm chỉ là 2 cung đối xứng nhau qua *AB* : *CmB* và *C'nB* (cả *C*, *B*, *C'* cũng thuộc tập hợp cần tìm).

Đến đây, tôi có thể ngừng bút được. Song để tăng thêm thuyết phục, tôi đề nghị với bạn đọc rằng : khi đọc lời giải của 2 cuốn trên, ta nên ngẫm nghĩ cho kĩ hơn nữa, và cũng mong lần tái bản sau 2 sách này không phạm sai lầm đó.

NGUYỄN HỮU DỰ

Giải trí TOÁN HỌC

Bài toán về điền số

Điền các chữ số từ 1 đến 9 vào 9 ô của bảng dưới đây, sao cho :

– số có ba chữ số nằm ở hàng ngang giữa bằng tổng của hai số (có ba chữ số) của hai hàng còn lại.

– số có ba chữ số nằm ở cột giữa bằng tổng của hai số (có ba chữ số) của hai cột còn lại.

Biết rằng tổng 3 chữ số của hàng giữa và của cột giữa đều bằng 18.

ĐÀO TRỌNG QUANG
(Sưu tầm)

VỀ BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH KIỂU FERMA

Trên tạp chí "Toán học và tuổi trẻ" số 193 năm 1993 bạn Hoàng Đức Tân đã giới thiệu với đông đảo bạn đọc một bài toán thú vị được nhiều người quan tâm : tìm nghiệm tự nhiên của một phương trình kiểu FERMA

$$x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = \overline{x_1x_2...x_n} \quad (x_1 \neq 0,\ n \geq 2). \quad (1)$$

Trong bài báo của mình bạn Hoàng Đức Tân đã tìm thêm một số nghiệm mới bổ sung các nghiệm mà nhà toán học Liên Xô N.P. Liapkin tìm ra năm 1975. Đây quả thật là một bài toán hấp dẫn. Là người chuyên về toán lí thuyết nhưng tôi cũng thử đề ra một thuật toán chạy trên máy vi tính cá nhân AT386 và nhận được một số điều thú vị : đúng như bạn Hoàng Đức Tân đã viết với $n < 7$ mọi nghiệm của phương trình (1) đã được liệt kê trong bài báo 193 ngoài ra máy còn chỉ ra thêm một số nghiệm mới, đó là các nghiệm sau : 1.741.725, 4.210.818, 9.800.817 cho $n = 7$, 88.593.477 cho $n = 8$ và các nghiệm 146.511.208, 472.335.975, 534.494.836, 912.985.153 cho $n = 9$! hơn thế nữa còn chỉ ra các nghiệm sau đây mà bạn Hoàng Đức Tân tìm ra cho trường hợp $n = 8$ là sai : 63.645.890, 63.645.891, 73.495.876 (bạn đọc cũng dễ dàng kiểm tra được các số trên không thỏa mãn phương trình (1) vì tính chẵn lẻ của hai vế phương trình (1) không trùng nhau ! thí dụ 63.645.890 là số chẵn nhưng nếu thay các chữ số của nó vào vế trái của (1) thì kết quả là một số lẻ !) Như vậy với mọi $n < 10$ các nghiệm của (1) đã được tìm hết. Tôi tin rằng phương trình (1) còn nhiều nghiệm nữa. Ai sẽ là người tìm được nghiệm tiếp theo lớn hơn 912.985.153 ?

TẠ HỒNG QUẢNG

ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp PTCS

Bài T1/201 : Tìm $x \in Z$ để số $25x + 46$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Bài T2/201. Tìm các chữ số x, y, z, t mà

$$\overline{xy} . \overline{yz} = ztz, x \neq y, z \neq 0$$

LÊ HẢI KHOA TRUNG

Bài T3/201. Biết các cạnh của tam giác ABC là ba số nguyên liên tiếp. Tìm độ dài các cạnh của tam giác nếu $3\widehat{A} + 2\widehat{B} = 180^o$

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

Các lớp PTTH

Bài T4/201. Cho p là một số nguyên dương lẻ, khác 5, d là một số nguyên dương, khác 2, $p, p+8$. Chứng minh rằng từ tập hợp $M = \{2, p, p+8, d\}$ có thể tìm được ít nhất là ba cặp số (a, b) khác nhau, trong đó a, b là hai phần tử khác nhau thuộc M sao cho $ab - 1$ không là bình phương của một số nguyên. Quy ước cặp (a, b) và cặp (b, a) là như nhau.

TRẦN DUY HINH

Bài T5/201. Cho $\alpha \geqslant \sqrt{2}$ và $q > 0$. Chứng minh rằng $(q^{\alpha} + p^{-\alpha})^2 = 2(q^2 + q^{-2})$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T6/201. Xét hàm số $P : R \to R$ thỏa mãn : Nếu $Q(x)$ là đa thức với hệ số thực có bậc $\geqslant 2$ thì $P(Q(x))$ cũng là một đa thức. Chứng minh rằng P là một đa thức.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/201. Tìm một hàm số $f(x)$, xác định với mọi giá trị thực của x, sao cho với x bất kì $f[f(x)] = -x$ và $f(x)$ nhận giá trị nguyên khi x nguyên.

NGUYỄN DŨNG

Bài T8/201. Kí hiệu l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong được kẻ tới các cạnh tương ứng a, b, c của tam giác. Chứng minh

a) $\dfrac{a}{l_b + l_c} + \dfrac{b}{l_c + l_a} + \dfrac{c}{l_a + l_b} \geqslant \sqrt{3}$

b) $\dfrac{l_a}{b + c} + \dfrac{l_b}{c + a} + \dfrac{l_c}{a + b} \leqslant \dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

TÔ HẢI

Bài T9/201. Trên parabol : $y = x^2$ lấy 6 điểm $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. A_1A_5 cắt A_2A_4 ở α ; A_2A_6 cắt A_3A_5 ở β, A_3A_4 cắt A_6A_1 ở γ. Chứng minh rằng α, β, γ thẳng hàng.

ĐÀM VĂN NHỈ

Bài T10/201. Tứ diện $OABC$ vuông ở O, có đường cao OH cố định, các đỉnh A, B, C chuyển động. Kẻ $HA' \perp OA$ ở A' ; $HB' \perp OB$ ở B' ; $HC' \perp OC$ ở C'. Chứng minh rằng 6 điểm A, B, C, A', B', C' cùng nằm trên một mặt cầu và mặt cầu này luôn đi qua hai điểm cố định.

LÊ QUỐC HÁN

Các đề Vật lí

Bài L1/201. Một mạch điện gồm một nguồn điện (suất điện động E_o, điện trở trong r) và 3 điện trở x, y, z.

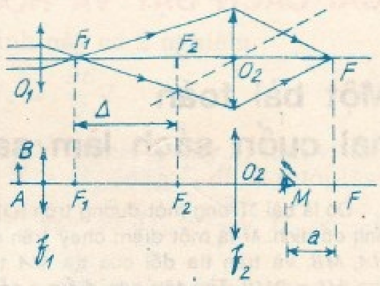
a) Trong 3 cách mắc sau đây : 3 điện trở nối tiếp nhau, 3 điện trở song song nhau, 2 điện trở y và z song song nhau rồi nối tiếp với x, người ta đều thấy công suất tiêu thụ bởi z là không đổi.

Hãy tính y, z, tỉ số $\dfrac{E_o}{I_o}$ (I_o là cường độ dòng điện qua z), theo r và x.

b) Áp dụng số : cho $r = 1\Omega$, $x = 2\Omega$, $I_o = 5A$, tính y, z, E_o.

TRẦN VĂN MINH

Bài L2/201. AB là vật của kính vật O_1 cho ảnh thật $A'B'$ nằm trong tiêu cự F_2O_2 của kính mắt cho ảnh ảo $A''B''$. $A''B''$ là ảnh mà mắt nhìn thấy qua kính hiển vi.



Từ B ta vẽ tia BI song song với trục chính, tia này sau khi qua kính vật cho tia IK đi qua tiêu điểm F_1 của kính vật. Tia IK sau khi qua kính mắt sẽ cho tia KF đi qua F và kéo dài đi qua B''. Như vậy F là ảnh thật của F_1 qua kính để quan sát một vật phẳng cực nhỏ AB đặt trước kính vật sao cho ảnh của AB mà mắt nhìn thấy ở cách mắt một đoạn l. Hãy chứng minh độ bội giác thu được là :

$$G = \frac{\Delta D}{f_1 f_2}\left(1 + \frac{a}{l}\right)$$

(D là khoảng nhìn rõ ngắn nhất của mắt người quan sát, Δ là độ dài quang học của kính hiển vi (khoảng cách từ tiêu điểm ảnh của kính vật đến tiêu điểm vật của kính mắt), f_1 và f_2 lần lượt là tiêu cự của kính vật và của kính mắt. Từ đó suy ra có mấy trường hợp mà độ bội giác sẽ bằng $\dfrac{\Delta D}{f_1 f_2}$?

PHAN TUẤN KHANH

PROBLEMS OF THIS ISSUE

For lower secondary schools

T1/201 : Find all integers x such that $25x + 46$ is a product of two consecutive integers

NGUYEN DUC TAN

T2/201 : Find out digits x, y, z, t such that

$$\overline{xy} \cdot \overline{yz} = \overline{ztz} \ (x \neq y,\ z \neq 0)$$

LE HAI KHOA TRUNG

T3/201 : The lengths of 3 sides of triangle ABC are 3 consecutive integers. Determine AB, BC and CA when $3\hat{A} + 2\hat{B} = 180^o$

NGUYEN KHANH NGUYEN

For upper secondary schools

T4/201. Let p ($p \neq 5$) be an odd positive integer and d be a positive integer different from 2, p, $p+8$. Show that from the set $M := \{2, p, p+8, d\}$ can be chosen at least 3 distinct pairs (a, b) with $a \neq b$ such that $ab - 1$ is not a square (pair (a, b) and pair (b, a) are considered as the same)

TRAN DUY HINH

T5/201. Prove inequality

$$(q^{\alpha} + q^{-\alpha})^2 \geqslant 2(q^2 + q^{-2})$$

for $\alpha \geqslant \sqrt{2}$, $q > 0$

NGUYEN VAN MAU

T6/201. Function $P : R \to R$ possesses property : For every polynomial $Q(x)$ with real coefficients with deg $Q \geqslant 2$, $P(Q(x))$ is a polynomial. Prove that $P(x)$ is a polynomial.

NGUYEN MINH DUC

T7/201. Construct a funtion $f(x)$ such that $f(f(x)) = -x$ for all $x \in R$, and $f(x)$ is an integer for each integer x

NGUYEN DUNG

T8/201. l_a, l_b, l_c are lengths of inbisectors corresponding to sides a, b, c of triangle ABC, respectively. Prove that

a) $$\frac{a}{l_b + l_c} + \frac{b}{l_c + l_a} + \frac{c}{l_a + l_b} \geqslant \sqrt{3}$$

b) $$\frac{l_a}{b+c} + \frac{l_b}{c+a} + \frac{l_c}{a+b} \leqslant \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

TO HAI

T9/201. 6 points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ are lying on the parabol $y = x^2$. A_1A_5 meets A_2A_4 at α ; A_2A_6 meets A_3A_5 at β and A_3A_4 meets A_6A_1 at γ. Show that α, β, γ are colinear.

DAM VAN NHI

T/10/201. Consider the tetrahedron $OABC$, having three right plane angles at vertex O, such that O and its orthogonal projection H on the plane ABC are fixed (the vertices A, B, C can be moving). Draw $HA' \perp OA$ at A', $HB' \perp OB$ at B', $HC' \perp OC$ at C'. Show that the 6 points A, B, C, A', B', C' lie on a sphere passing through two fixed points.

LE QUOC HAN

ĐỐ VUI MÁY TÍNH

Máy tính bỏ túi thô sơ có nút bấm căn bậc hai, cho giá trị gần đúng thiếu của căn bậc hai với 8 chữ số. Nếu bình phương căn thiếu của số N lên, ta không được N.

Thí dụ, bấm

$\boxed{5}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

ta được căn thiếu của 5 là 2,2360679 rồi ấn tiếp X = ta được bình phương thiếu của nó là 4,9999996.

Hãy tìm một số mà *bình phương bằng máy tính* đúng bằng 10.

Đáp : Hãy bấm

$\boxed{10}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$

Số phải tìm là 3,1622777

Xuất hiện sau khi bấm $\boxed{\times}$

và số 10 xuất hiện sau khi bấm $\boxed{=}$

NGUYỄN DŨNG

A – CÁC LỚP PTCS :

Bài 6/PTCS : Cho a, b, c, d, e là 5 số nguyên tùy ý. Chứng minh rằng tích $P = (e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$ chia hết cho 288.

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài 7/PTCS : Tồn tại hay không các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^3 + z^5 = 1993^{10987654321}$?

TẠ HỒNG QUẢNG

Bài 8/PTCS : Tìm tập hợp A lớn nhất gồm hữu hạn các số thực, sao cho nếu $x \in A$ thì $x + 1 - x^2 \in A$ và $x - 1 + x^2 \in A$.

HÀ HUY VUI

Bài 9/ PTCS : Cho đường tròn (O) và một dây cung PQ. Trên dây PQ lấy điểm M, qua M vẽ các dây AC và BD bất kì (B và C ở cùng phía so với PQ). Nối AB, CD cắt dây PQ tại E và F. Hãy xác định vị trí của M trên dây PQ để có $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{ME}{MF}$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

Bài 10/ PTCS : Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P trên các cạnh tương ứng BC, CA, AB sao cho :

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k.$$

Chứng minh rằng AM, BN, CP là độ dài ba cạnh của một tam giác. Gọi $S(k)$ là diện tích của tam giác này. Tìm k sao cho $S(k)$ đạt giá trị nhỏ nhất có thể được.

NGUYỄN MINH HÀ

B – CÁC LỚP PTTH :

Bài 6/PTTH : Tìm chữ số khác không cuối cùng trong biểu diễn thập phân của số : $(5^{1964} + 5^{1994})$!

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài 7/PTTH : Cho $0 < a_1 < a_2 < \ldots$ Chứng minh rằng hai khẳng định sau tương đương :

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\arccos\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)\right)^2 = +\infty.$

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài 8/PTTH : Giải phương trình :

$$x^5 + 10x^3 + 20x - 18 = 0.$$

TRẦN VĂN VUÔNG

Bài 9/PTTH : A, B, C là ba góc của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2tg^2\dfrac{A}{2} + 3tg^2\dfrac{b}{2} + 4tg^2\dfrac{C}{2}$.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài 10/PTTH : Gọi M là tập hợp tất cả các điểm trong không gian có tọa độ nguyên (x, y, z) thỏa mãn điều kiện $1 \leqslant x \leqslant 3k$, $1 \leqslant y \leqslant 3k$, $1 \leqslant z \leqslant 3k$, với k là số nguyên dương chẵn cho trước. Tô tất cả các điểm của M bởi $2k$ màu sao cho mỗi điểm được tô bởi đúng một màu. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm có cùng màu và là 3 đỉnh của một tam giác có hai cạnh song song với các trục của hệ trục tọa độ.

NGUYỄN KHẮC MINH

PHÉP BIẾN HÌNH ĐỒNG DẠNG ĐẶC BIỆT VÀ ỨNG DỤNG VÀO VIỆC GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

NGÔ THẾ PHIỆT

Cho hai cặp điểm A, A' và B, B' với $A'B' = kAB$ trong đó $k > 0$ là một số thực dương. Có hai phép đồng dạng biến A thành A' và B thành B'. Một phép giữ nguyên hướng của mặt phẳng gọi là phép *đồng dạng thuận*. Một phép đổi hướng của mặt phẳng gọi là phép *đồng dạng nghịch*. Sau đây là một phép đồng dạng thuận đặc biệt có tâm, đó là tích của một phép vị tự có tỉ số $k > 0$ và một phép quay cùng tâm với phép vị tự có góc quay $0^o \leqslant \alpha \neq 180^o < 360^o$.

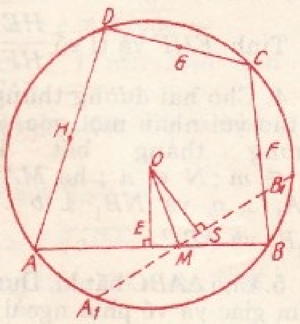
Gọi $H(O, k)$ là phép vị tự tâm O tỉ số $k > 0$ và $R(O, \alpha)$ là phép quay tâm O góc quay α với $0^o \leqslant \alpha \neq 180^o < 360^o$ thì : $\varphi(0, k, \alpha) = H(0, k).\ R(0, \alpha) = R(0, \alpha).H(0, k)$ gọi là phép đồng dạng tâm O tỉ số k góc quay α

Vậy : $\varphi(0, k, \alpha) : M \rightarrow M'$ sao cho

$$\begin{cases} OM' = kOM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$$

Bài toán 1 : *Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O ; quay tứ giác quanh O một góc α với $0^o \leqslant \alpha < 360^o$ thành tứ giác $A_1B_1C_2D_1$. Chứng minh rằng giao điểm của các cặp đường thẳng AB và A_1B_1 ; BC và B_1C_1 ; CD và C_1D_1 ; DA và D_1A_1 là 4 đỉnh của một hình bình hành.*

Giải : Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của AB và A_1B_1, BC và B_1C_1, CD và C_1D_1, DA và D_1A_1.



Gọi S là trung điểm A_1B_1 Ta có :

$$\begin{cases} \widehat{EOM} = \dfrac{\alpha}{2} \\ OM = \dfrac{OE}{\cos\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Vậy phép đồng dạng

$$\varphi\left(0, \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \frac{\alpha}{2}\right) : E \rightarrow M$$

Tương tự : $F \rightarrow N$
$G \rightarrow P$
$H \rightarrow Q$

Vậy $MNPQ \sim EFGH$

$EFGH$ là hình bình hành. Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài toán 2 : *Cho ΔABC bất kì. Vẽ phía ngoài tam giác đó các tam giác BCM và ACN sao cho :*

$$\begin{cases} \widehat{BMC} = \widehat{ANC} = 90^o \\ \dfrac{CM}{BM} = \dfrac{1}{3} \text{ và } \dfrac{CN}{AN} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{2}{3}$.

Tính $\widehat{KMN}$ *và tỉ số* $\dfrac{KM}{KN}$

Giải : Từ K dựng về phía ngoài tam giác $KH \perp AB$ và $KH = \frac{1}{5}AB$. Ta có

$$tg\,\widehat{HBK} = \frac{1}{3} \text{ và } tg\,\widehat{HAK} = \frac{1}{2}$$

Suy ra :

$$\widehat{HBK} = \widehat{CBM} = \alpha_1 \text{ với } tg\alpha_1 = \frac{1}{3}$$

$$\widehat{HAK} = \widehat{CAN} = \alpha_2 \text{ với } tg\alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Ta có : $\dfrac{BH}{BK} = \dfrac{BC}{BM} = \dfrac{1}{\cos\alpha_1}$

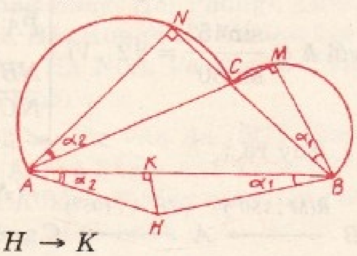
$(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BH}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = \alpha_1$

Suy ra phép đồng dạng

$$\varphi\left(B, \frac{1}{\cos\alpha_1}, \alpha_1\right) ; K \rightarrow H$$
$$M \rightarrow C$$

Vậy :

$$\begin{cases} \dfrac{HC}{KM} = \dfrac{1}{\cos\alpha_1} \\ (KM, HC) = \alpha_1 \end{cases}$$



Tương tự

$\varphi(A, \cos\alpha_2, \alpha_2) : H \rightarrow K$
$C \rightarrow N$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{KN}{HC} = \cos\alpha_2 \\ (HC, KN) = \alpha_2 \end{cases}$

Vậy

$$\begin{cases} (KM, KN) = (KM, HC) + (HC, KN) = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \dfrac{KM}{KN} = \dfrac{KM}{HC}\cdot\dfrac{HC}{KN} = \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \end{cases}$$

$tg\,\widehat{KMN} = tg(\alpha_1 + \alpha_2) = \dfrac{tg\alpha_1 + tg\alpha_2}{1 - tg\alpha_1\, tg\alpha_2} =$

$= \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$

Vậy $\widehat{KMN} = 45^o$

Ta lại có $\cos^2\alpha_1 = \dfrac{1}{tg^2\alpha_1 + 1}$

$\cos^2\alpha_2 = \dfrac{1}{tg^2\alpha_2 + 1}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{KM}{KN}\right)^2 = \dfrac{tg^2 2 + 1}{tg^2 1 + 1} = \dfrac{9}{8}$

$\Rightarrow \dfrac{KM}{KN} = \sqrt{\dfrac{9}{8}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

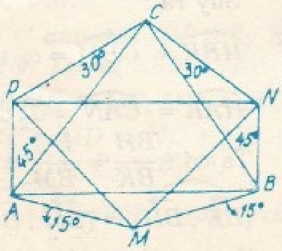
Bài toán 3 : *Trên các cạnh của Δ ABC bất kì dựng về phía ngoài của tam giác đã cho các tam giác ABM, BCN và CAP sao cho :*

$\widehat{CAP} = \widehat{CBN} = 45^o$

$\widehat{ACP} = \widehat{BCN} = 30^o$

$\widehat{ABM} = \widehat{BAM} = 15^o$

Chứng minh ΔPMN vuông cân tại M.



(Đề thi Toán quốc tế lần thứ 17 năm 1975)

Giải : Xét

$F = \varphi\left(N, \frac{1}{k}, 105^o\right) . \varphi(P, k, 105^o) . R(M, 150^o)$

với $k = \dfrac{\sin 45^o}{\sin 30^o} = \sqrt{2}$. Vì $\begin{cases} \dfrac{PC}{PA} = \dfrac{\sin 45^o}{\sin 30^o} = k \\ \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{\sin 30^o}{\sin 45^o} = \dfrac{1}{k} \end{cases}$

Suy ra :

$B \xrightarrow{R(M,\,150^o)} A \xrightarrow{\varphi(P,\,k,\,105^o)} C \xrightarrow{\varphi\left(N,\,\frac{1}{k},\,105^o\right)} B$

Vậy $F(B) = B$.

F là một phép đồng dạng thuận có :

$\begin{cases} \text{tỉ số } k . \dfrac{1}{k} = 1 \\ \text{góc } 150^o + 105^o + 105^o = 360^o \end{cases}$

và giữ nguyên B. Vậy F là phép đồng nhất. Suy ra $F(M) = M$.

Vậy :

$M \xrightarrow{R(M,\,150^o)} M \xrightarrow{\varphi(P,\,k,\,105^o)} M' \xrightarrow{\varphi\left(N,\,\frac{1}{k},\,105^o\right)} M$

Suy ra $\Delta PMM' \backsim \Delta PAC$

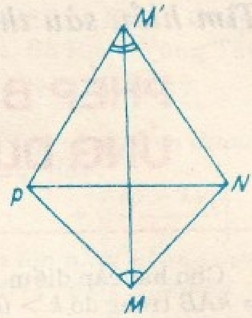
$\Delta NMM' \sim \Delta NBC$

Đã biết

$\Delta PAC \backsim \Delta NBC$

Từ đó

$\Delta PMM' \sim \Delta NMM'$.



Hai tam giác này có MM' chung và có hướng ngược nên bằng nhau (đối xứng qua trục MM'). Vậy

$\widehat{PMM'} = \widehat{NMM'} = \widehat{PAC} = 45^o \Rightarrow \widehat{PMN} = 90^o$

$MP = MN$

Vậy ΔPMN vuông cân tại M.

Sau đây là các bài tập tương tự :

1. Cho ΔABC bất kì. Dựng trên các cạnh của tam giác và phía ngoài của tam giác các tam giác đều ABM, BCN, ACK. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các tam giác BCN và ACK. Chứng minh :

a) $CM \perp PQ$

b) $CM = PQ\sqrt{3}$

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Trên các cạnh và phía ngoài của tứ giác ta dựng các tam giác đều ABM, CDN, BCI và ADJ. Gọi P, Q là tâm của các tam giác BCI và ADJ, chứng minh $MN \perp PQ$ và $MN = PQ\sqrt{3}$

3. Cho ΔABC bất kì. Dựng về phía ngoài của tam giác đã cho các tam giác EBA, FAC sao cho

$\begin{cases} \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^o \\ tg\,\widehat{EBA} = tg\,\widehat{FAC} = 2 \end{cases}$

Trên BC lấy điểm H sao cho $BH = \frac{1}{5}BC$

Tính $\widehat{EHF}$ và tỉ số $\dfrac{HE}{HF}$

4. Cho hai đường thẳng m, n cắt nhau tại S tạo với nhau một góc φ . Qua S dựng hai đường thẳng bất kì a, b. Cho $M \in m$; $N \in n$; hạ $MA \perp a$ và $MB \perp b$; $NA_1 \perp a$ và $NB_1 \perp b$. Tìm góc tạo bởi A_1B_1 và AB ?

5. Cho ΔABC bất kì. Dựng trên các cạnh của tam giác và về phía ngoài các tam giác ABM, BCN, ACP, thỏa mãn các điều kiện sau đây :

a) $\Delta ACP \sim \Delta BCN$ và có hướng ngược nhau.

b) ΔABM cân có đáy AB (hoặc M là trung điểm của AB)

c) Tổng các góc có hướng $\widehat{BMA}$, $\widehat{APC}$ và $\widehat{CNB}$ (hoặc $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$ và $\widehat{CPA}$) bằng 360^o

Chứng minh $\begin{cases} \widehat{PMN} = 2\,\widehat{PAC} \\ PM = MN \end{cases}$

Truyện cu Khoai

ĐI CÀ KHEO

XUÂN TRUNG

Hai lớp 5A và 5B trường tôi có ít học sinh nên thầy hiệu trưởng đề nghị sát nhập thành một lớp gọi là lớp năm. Việc lập lại danh sách tưởng là chuyện đơn giản hóa ra lại gay go. Có bạn đề nghị tập hợp cả lớp lại, mỗi người viết họ tên của mình ra tờ giấy rồi nộp cho lớp trưởng mới. Lớp trưởng theo những tờ giấy đó sắp xếp lại danh sách. Chẳng hạn bạn An đứng trước bạn Bình... Các bạn giải thích rằng đó là kiểu sắp xếp *ABC* giống như trong cuốn từ điển vậy.

Cu Khoai nghe được chuyện bàn tán ầm ĩ bèn bảo tôi :

– Cậu bảo các bạn lấy sổ điểm của hai lớp trộn vào theo kiểu đi cà kheo là được ngay thôi mà.

– Cà kheo là thế nào ? Mày đừng có đùa.

– Là dò từng bước như trong rạp xiếc ấy cậu ạ.

i	Lớp 5A
1	An
2	Ba
3	Bách
	...

k	Lớp 5 mới
1	An
2	Ánh
3	Ba
4	Bách
5	Bình
6	Chi
7	Doãn

j	Lớp 5B
1	Ánh
2	Bình
3	Chi
4	Doãn

Duyệt hai danh sách từ trên xuống dưới, mỗi lần lấy một người ở mỗi bên. Tên ai đứng trước thì đưa vào danh sách mới rồi lấy người tiếp theo ở lớp đó. Sớm muộn sẽ có một lớp hết người. Cuối cùng chỉ cần chép nốt những người còn lại vào danh sách mới là xong.

Thật là một ý kiến độc đáo. Trong chốc lát tôi đã viết xong chương trình Cà kheo bằng ngôn ngữ Pascal và giao cho cu Khoai theo đó mà lập ra danh sách mới.

Cu Khoai rất thích những chương trình viết bằng ngôn ngữ *Pascal*. Chỉ vài giây sau nó đã đưa nộp danh sách lớp 5 mới cho thầy hiệu trưởng.

```
TYPE     st = string [10] ;

VAR      LỚP 5A : Array [1..35] of st ;
         LỚP 5B : Array [1..20] of st ;
         LỚP 5 : Array [1..55] of st ;

PROCEDURE Ghép lớp ;
         var i, j, k : intrger ;

Begin
   i : = 1 ;      {Học sinh đầu tiên của 5A}
   j : = 1 ;      {Học sinh đầu tiên của 5B}
   k := 0 ;       {Lúc đầu lớp ghép chưa có ai}
      While (i < = 35) ADN (j < = 20) do
        Begin
        k : = k + 1 ; {sẽ thêm 1 người cho
                              lớp ghép}
         if Lớp 5A [i] < Lớp 5B [j] then
         begin Lớp 5 {k} : = Lớp 5A [i] ;
                         Đưa vào lớp ghép
                  i : = i + 1 ; Xét người tiếp
                         theo của 5A
         end   else
         begin Lớp 5 [k] : = Lớp 5B[j] ;
                         Đưa vào lớp ghép
                  j : = j + 1 ; Xét người tiếp
                              theo của 5B
      End {While} ;
           {Nếu 5A còn người thì đưa
                         vào lớp ghép}
      While (i < = 35) do
        begin
         k : = k + 1 ;
         Lớp 5[k] : = Lớp 5A [i] ;
         i := i + 1 ;
        end ;
         {Nếu 5B còn người thì dưa
                         vào lớp ghép}
      While (j < = 20) do
        begin
         k : = k + 1 ;
         Lớp 5 [k] : = Lớp 5B [j] ;
         j : = j + 1 ;
        end ;
         {Lớp ghép sẽ có tổng cộng
                         k học sinh}
End {Ghép lớp} ;
```

Thi học sinh giỏi toán qua thư ở VOLGOGRAD 1991

Thi học sinh giỏi toán qua thư ở Volgograd (C.H.L.B Nga) do hội các nhà chế tạo máy phối hợp với các trường đại học quốc gia ở Volgograd : đại học bách khoa, đại học tổng hợp, đại học sư phạm, tổ chức. Cuộc thi được tổ chức hàng năm và qua nhiều vòng. Những người tham gia cuộc thi cần phải gửi bài giải trong thời hạn một tuần sau khi đề thi được công bố trên tờ báo Ephir (Phát thanh) chuyên in các chương trình phát thanh và truyền hình trong tuần ở Volgograd. Người tham gia cuộc thi không bắt buộc phải giải tất cả các bài toán đăng trên báo. Những người được giải trong các vòng thi qua thư, sẽ được mời tham dự vòng thi viết tập trung.

Ngoài giải thưởng, những học sinh được điểm cao sẽ được chọn vào đội dự tuyển để gửi thẳng đi học tập và đào tạo tại các trường đại học hàng đầu trong Cộng hòa liên bang Nga.

Dưới đây là các bài thi của vòng I cuộc thi qua thư năm 1991. Các bài từ 1 đến 5 dành cho các học sinh lớp 7, 8, 9. Các bài từ 6 đến 11 dành cho các học sinh lớp 10 và 11.

1) Có thể đổi một tờ bạc 25 rúp thành các tờ bạc lẻ loại 1 rúp, 3 rúp, 5 rúp sao cho nhận được cả thảy 10 tờ bạc lẻ các loại được không ?

• (vào năm 1991 ở Liên bang Nga có các loại tờ bạc 1 rúp, 2 rúp, 3 rúp, 5 rúp, 10 rúp, 25 rúp, 50 rúp và 100 rúp).

2) Bằng thước và compa hãy chia góc 19° thành hai phần tỷ lệ với 6 và 13.

3) Trên một tờ giấy kẻ ô vuông với cạnh của ô vuông là 1 đơn vị dài, người ta vẽ một đường tròn với bán kính 10 đ.v.d. Chứng minh rằng có không ít hơn 250 đỉnh ô vuông nằm bên trong hình tròn đã cho.

4) Có thể nhân hai số có hai chữ số để tích nhận được là một số có bốn chữ số giống nhau được không ?

5) Cho biết mệnh đề sau đây đúng :

Trong mặt phẳng, hình F biến thành chính F trong phép quay tâm O, góc quay 48°.

Hãy xét xem các mệnh đề sau đây đúng hay sai.

a) Hình F biến thành chính F trong phép quay tâm O, góc quay 90°.

b) Hình F biến thành chính F trong phép quay tâm O, góc quay 72°.

6) Chứng minh rằng trong một tứ giác nếu tổng các bình phương các cạnh đối diện bằng nhau thì các đường chéo của tứ giác vuông góc với nhau.

7) Tìm ba số nguyên tố khác nhau cho biết tích của ba số đó gấp ba lần tổng của chúng.

8) Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng. Có tất cả bao nhiêu hình hộp khác nhau nhận bốn điểm đã cho làm đỉnh ?

9) Một nhóm gồm 5 hoặc 6 khách du dịch cần phải mang theo 90kg hành lý cho một chuyến tham quan. Phải sắp xếp số hành lý đã cho vào các túi xách như thế nào để trong bất kỳ trường hợp nào mỗi người cũng đều mang một số lượng hành lý như nhau và sử dụng một số ít nhất các túi xách ?

10) Một tứ giác được cắt từ một tờ giấy. Có cách nào giải thích được, tứ giác đó có là hình vuông hay không nếu không tiến hành các phép đo, cho biết có thể được phép gấp tờ giấy.

11) Nếu vẽ 5 đường thẳng trong mặt phẳng thì có thể nhận được bao nhiêu giao điểm ? Hãy xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra.

GIỚI THIỆU

ĐÁP ÁN TÓM TẮT

Bài 1 Không thể vì tổng của một số chẵn các số hạng lẻ phải là số chẵn.

Bài 2 Bằng thước và compa đặt liên tiếp góc 19° mười chín lần. Khi đó sẽ nhận được góc 1°. Suy ra được cách dựng.

Bài 3 Với mỗi một điểm nguyên, xét hình vuông cạnh là 1 d.v. dài, còn tâm của hình vuông tại điểm đã cho. Nếu hình vuông này có ít nhất một điểm nằm trong hình tròn bán kính là 9 thì tâm của hình vuông nằm trong hình tròn bán kính là 10. Số lượng các hình vuông như vậy không nhỏ hơn diện tích hình tròn bán kính là 9, tức là không ít hơn 250.

Bài 4 Không thể, vì số $\overline{aaaa}$ chia hết cho 101, mà 101 là số nguyên tố.

Bài 5 Mệnh đề a sai, mệnh đề b đúng. Cần chú ý là phương trình $48.n + 360\,k = N$ có nghiệm nguyên khi $N = 72$ và không có nghiệm nguyên khi $N = 90$.

Bài 6 Có thể dùng một trong hai cách sau :

Cách 1 : Dùng định lý hàm số côsin.

Cách 2 : Bằng phương pháp phản chứng.

Bài 7 Ba số nguyên tố là 2, 3 và 5.

Bài 8 Có tất cả 29 hình hộp khác nhau. Xét hai điểm bất kỳ A, B trong bốn điểm đã cho. Xảy ra các trường hợp sau :

1. AB là cạnh của hình hộp
2. AB là đường chéo của mặt bên hoặc đáy
3. AB là đường chéo của hình hộp.

Khi xét các vị trí của hai điểm khác, ta tìm được số các hình hộp trong mỗi một trường hợp tương ứng là 8, 9, 12.

Bài 9 Dùng 5 túi xách, mỗi túi đựng 15kg và 5 túi xách, mỗi túi đựng 3kg. Dễ thấy số lượng ít nhất phải dùng là 10 túi.

Bài 10 1. Gấp hai đỉnh đối diện

2. Gấp các đỉnh kề nhau từng đôi một.

Bài 11 Tùy thuộc vào vị trí tương đối của 5 đường thẳng, có thể có từ 0 đến 10 giao điểm. Nếu không có hai đường nào trùng nhau thì 2 và 3 giao điểm là không thể có.

NGUYỄN VĂN VĨNH

TRẢ LỜI THƯ BẠN ĐỌC

Bạn đọc thân mến !

Tòa soạn đã nhận được rất nhiều thư của bạn đọc. Nội dung thư của bạn đọc tập trung vào mấy vấn đề sau đây :

– Thời hạn giải bài cho mỗi số tạp chí.

– Số người có lời giải được nêu tên trên tạp chí

– Thời gian ra tạp chí.

– Tìm mua tạp chí ở đâu ?

Tòa soạn xin trả lời chung như sau :

Về thời hạn giải bài cho mỗi số tạp chí

Vì tạp chí ra hàng tháng cho nên các bạn cũng chỉ có thời gian là hơn một tháng để giải bài cho một số thôi (Từ khi tạp chí ra cho đến 30 tháng sau). Khi nhận được số mới các bạn lại phải bắt tay vào giải các bài cho số mới. Vì vậy rất mong các bạn cố gắng giải các bài của một số trong thời gian hơn một tháng ấy để tạo thói quen. Không giải được bài nào thì bỏ để ta lại bắt tay vào giải các bài cho số mới.

Về số người có lời giải được nêu tên trên tạp chí

Hàng ngày tạp chí nhận được rất nhiều lời giải của bạn đọc. Số lượng lời giải cho mỗi bài ra lên tới vài trăm. Hội đồng biên tập tiến hành chấm và chọn ra một vài lời giải hay, gọn và thông minh nhất đăng để bạn đọc theo dõi và tham khảo. Tuy nhiên, mỗi bài ra đều có thể giải bằng nhiều cách cho nên tòa soạn cũng nêu tên một số bạn có lời giải tốt. Chúng tôi nói "một số" là vì tạp chí không có chỗ để nêu tất cả các bạn có lời giải tốt được. Rất mong bạn đọc thông cảm và yên tâm rằng lời giải của các bạn vẫn được đánh giá là tốt.

Về thời gian ra tạp chí thất thường

Chuyển từ hai tháng ra một số sang ra hàng tháng tòa soạn đã có nhiều cố gắng để tạp chí có thể ra tại Hà Nội vào ngày 15 hàng tháng. Tuy vậy 12 số của năm 1993 đã ra tại Hà Nội dao động từ 12 đến 18 hàng tháng. Riêng hai số 1 và 2 năm 1994 do có trở ngại của nhà in và việc nghỉ Tết âm lịch nên mãi tới 22 và 28 mới ra được ở Hà Nội. Tòa soạn xin thành thật xin lỗi bạn đọc về những chậm trễ này. Bắt đầu từ số 4 năm 1994 tòa soạn sẽ phấn đấu để có thể ra đều đặn vào ngày 15 hàng tháng.

Về việc tìm mua tạp chí ở đâu

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ phát hành theo hai con đường : Công ty phát hành báo chí và các Công ty phát hành sách và thiết bị trường học. Vì vậy đề nghị bạn đọc tìm mua tại :

– Các bưu điện thị trấn, thị xã thành phố, huyện, tỉnh.

– Các cửa hàng sách của các Công ty phát hành sách và thiết bị trường học của địa phương.

Qua các thư của mình bạn đọc đã dành cho tạp chí những lời chúc mừng nồng nhiệt. Tòa soạn xin chân thành cám ơn bạn đọc về những lời chúc tốt đẹp đó. Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin chúc bạn đọc dồi dào sức khỏe, vui vẻ và có nhiều thành công trong học tập, công tác.

TẠP CHÍ
TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

YÊU CẦU VÀ NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý KHI VIẾT BÀI, GỬI ẢNH CHO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

I. YÊU CẦU CHUNG

Toán học và tuổi trẻ đã tiến hành đổi mới nội dung, hình thức và mở rộng đối tượng phục vụ. **Các bài viết nên nhằm phục vụ đối tượng rộng rãi bạn đọc ở cả các trường Phổ thông trung học lẫn các trường phổ thông cơ sở.** Bài viết cần chú ý xây dựng cho học sinh phong cách rèn luyện tư duy toán học, nâng cao khả năng phát hiện và giải quyết vấn đề. Cách viết cần nhẹ nhàng, vui, dí dỏm.

II. YÊU CẦU CHO CÁC CHUYÊN MỤC CHÍNH

1/ *Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán :* Chủ yếu nhằm mục đích rèn luyện tư duy toán học. Ở đây kiến thức không phải là mục đích mà là công cụ, sản phẩm nghiễm nhiên thu được sau khi giải quyết vấn đề. Kiến thức chỉ nêu vừa đủ sao cho bài gọn mà đạt được mục tiêu xây dựng phong cách học toán cho học sinh.

2/ *Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông :* Nhằm mục đích đào sâu, mở rộng và hệ thống hóa những kiến thức trong trường phổ thông.

3/ *Bước đầu tìm hiểu toán học hiện đại :* Giúp mở rộng tầm nhìn cho bạn đọc. Làm sao để với vốn kiến thức đã có học sinh có thể nhận thức sơ bộ về những khái niệm, phương pháp luận sơ đẳng của toán học hiện đại, góp phần kích thích và gây hứng thú tìm hiểu toán học.

4/ *Đề ra kì này :* Nhằm hướng dẫn người giải tập dượt vận dụng tổng hợp các kiến thức đã có để giải bài toán bằng phương pháp thông minh và sáng tạo. Đề ra có thể là sưu tầm nếu bài toán có lời giải hay.

5/ *Ống kính cải cách dạy và học toán :* Phản ánh những ý kiến của học sinh, phụ huynh học sinh và các thầy, cô giáo về cách học, cách dạy, về sách giáo khoa và sách tham khảo môn toán.

6/ *Nụ cười toán học :* Những bài viết này cần rất vui và có thể gây tiếng cười sảng khoái thư giãn.

7/ *Dành cho các bạn Trung học cơ sở :* Nội dung bài viết đề cập các vấn đề phục vụ bạn đọc từ lớp 6 đến lớp 9.

8/ *Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học :* Gồm các bài hướng dẫn cách học, cách ôn cho học sinh lớp 12 chuẩn bị thi vào các trường đại học và cao đẳng.

9/ *Tin học :* Nhằm giới thiệu các khái niệm, vấn đề, nội dung, phương pháp của tin học trong các trường phổ thông ; mối quan hệ qua lại giữa tin học và toán học...

10/ *Toán học và đời sống :* Giới thiệu những ứng dụng của toán học vào các lĩnh vực khác nhau của đời sống.

11/ *Học sinh tìm tòi :* Những bài viết của học sinh phổ thông, tìm tòi những lời giải khác hay hơn lời giải các bài toán trong sách giáo khoa, trong báo THVTT và những tài liệu tham khảo khác.

12/ Ngoài ra còn có những chuyên mục như : Lịch sử và những mẩu chuyện về tiểu sử các nhà toán học, Tin tức dạy học toán khắp nơi, Bạn có biết, Giải đáp thắc mắc, v.v...

13/ *Toán học và tuổi trẻ* còn đăng ảnh phản ánh các hoạt động dạy và học toán cùng các hoạt động khác của các trường và địa phương.

III. NHỮNG ĐIỀU CẦN CHÚ Ý

1/ Bài viết trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng, có ghi chỗ đặt hình. Mỗi bài dài không quá hai nghìn chữ (không quá 6 trang đánh máy)

2/ Mỗi đề ra phải có kèm lời giải, viết riêng trên một mảnh giấy. Cuối mỗi bài đều ghi đầy đủ họ tên, địa chỉ của người ra đề. Đề ra cần ghi rõ là *sáng tác* hay *sưu tầm* (Nếu có thể xin gửi kèm bản dịch đề sang tiếng Anh).

3/ Bài dịch hay sưu tầm cần ghi rõ tên, năm và nơi xuất bản của tài liệu đó.

4/ Bài chỉ gửi về một trong 2 địa chỉ :

81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

231 Nguyễn Văn Cừ, T.P Hồ Chí Minh

5/ Riêng bài giải của học sinh chỉ gửi về 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

6/ Ảnh nên là ảnh màu cỡ 9 × 12, ảnh mới, có chú thích nội dung và họ tên, địa chỉ của người chụp.

7/ Bài không đăng không trả lại bản thảo.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ISSN : 0866 - 8035.
Mã số : 8BT03M4

Chỉ số 12884
In tại Xưởng Chế bản in Nhà xuất bản Giáo dục.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 2 /1994

Giá :1200đ