BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

2(200)
1994

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Đề ra của cuộc thi đặc biệt chào mừng

30 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

• ĐƯA QUY NẠP TOÁN HỌC VÀO LỚP NÀO

• Thử nhìn bằng con mắt đồng dạng

• CON SỐ 73 KỲ LẠ

Đội tuyển Khối Chuyên Toán ĐHTH Hà Nội dự thi quốc gia

★ Cách giải phương trình và bất phương trình bậc 2 chứa tham biến và thỏa mãn điều kiện phụ

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

TIN THÊM VỀ BÀI TOÁN FERMAT

Gần đây tiến sĩ Andrew Wiles có gửi đến các trung tâm Toán học trên thế giới một thư ngắn, với tinh thần sau :

Vì có tin đồn về việc ông chứng minh được giả thuyết Taniyama – Shimura (Và từ đó suy ra chứng minh của định lí Fermat), nên để tránh sự hiểu lầm đáng tiếc, ông muốn tự mình nói lên tình trạng hiện nay của vấn đề này.

Trong quá trình hoàn thiện chứng minh, có nhiều bài toán này sinh và ông đã giải quyết được phần lớn các bài toán đó. Tuy nhiên để đi đến giải quyết giả thuyết nói trên một cách trọn vẹn vẫn còn một vấn đề chưa giải quyết xong.

Tiến sĩ Andrew Wiles tin rằng ông có thể giải quyết được vấn đề đó trong một tương lai gần đây, bằng các ý tưởng mà ông đã trình bày trong báo cáo tại hội nghị ở Cambrige.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trụ sở tòa soạn
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội, ĐT : 260786
231 Nguyễn Văn Cừ, TPHCM, ĐT : 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : ĐOÀN HỒNG

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

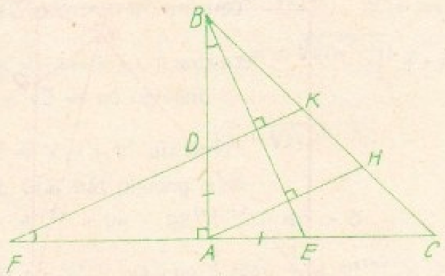
THỬ NHÌN BẰNG CON MẮT ĐỘNG

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

Sáng tạo toán học – đó là một trong những nhiệm vụ hàng đầu của người làm toán. Nhưng sáng tạo toán học là một việc làm không dễ và có nhiều con đường khác nhau để thực hiện điều đó.

Ở đây tôi muốn trao đổi với các bạn trẻ một cách nhìn để bước đầu tập dượt sáng tạo. Tôi xin bắt đầu bằng một bài toán quen thuộc.

Bài toán 1 : Trên 2 cạnh góc vuông AB và AC của tam giác vuông cân ABC lấy các điểm D và E tương ứng sao cho $AD = AE$. Nối BE, từ A và D vẽ các đường vuông góc với BE cắt cạnh BC theo thứ tự tại H và K. Chứng minh rằng $CH = HK$.



H.1

– Một trong những cách giải đơn giản của bài toán là : Kéo dài DK cắt đường thẳng AC tại F, ta chứng minh được (h.1) : $\Delta\ ABE = \Delta\ AFD$ (g.c.g) $\Rightarrow AF = AB = AC$, mà $AH \parallel FK$ nên $CH = HK$ (dpcm).

– Bây giờ ta hãy để ý đến quan hệ của các đoạn thẳng trong bài toán :

$$\begin{cases} AB = AC \\ AD = AE \end{cases} \Rightarrow HC = HK \text{ hay } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = 1 \Rightarrow \frac{HC}{HK} = 1$$

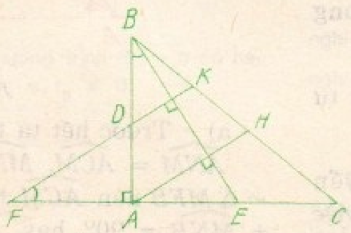
Từ đó ta nảy ra một suy nghĩ :

– Nếu $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE} = k$ thì $\dfrac{HC}{HK}$ bằng bao nhiêu ? a)

hoặc : Nếu $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD} = k$ thì $\dfrac{HC}{HK}$ bằng bao nhiêu ? (b)

Do đó ta có các bài toán sau :

Bài toán 1a : Trên 2 cạnh góc vuông AB và AC của tam giác vuông ABC lấy các điểm D và E tương ứng sao cho $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC} = k$ ($k > 0$). Nối BE, từ A và D vẽ các đường vuông góc với BE cắt cạnh BC lần lượt tại H và K. Tính tỷ số $\dfrac{HK}{HC}$ (theo k).



(H.2)

– Tương tự cách giải bài toán 1, ta cũng kéo dài DK cắt đường thẳng AC tại F. Dễ thấy : (h.2)

$$\Delta AFD \backsim \Delta ABE \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AE} = k \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AF}{AB}\cdot\frac{AB}{AC} = k^2 \text{ hay } \frac{HK}{HC} = k^2.$$

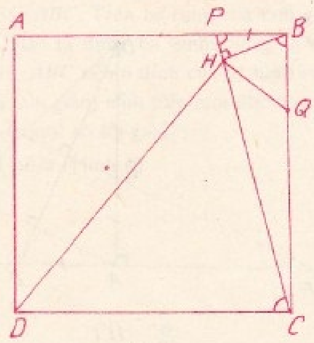
Bài toán 1b : Như bài toán 1a, chỉ thay giả thiết bằng $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AB}{AC} = k$

– Ở bài này (các bạn tự vẽ hình) giải tương tự bài 1a, ta cũng có : Δ $AFD \backsim \Delta\ ABE \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AF = AC$., mà $AH \parallel FK$ nên $HK = HC$ hay $HK\ /\ HC = 1$.

* Như vậy bằng cách thay đổi một chút suy nghĩ : Coi hai đoạn thẳng bằng nhau là 2 đoạn thẳng có tỉ số bằng 1, chúng ta đã tự tìm được 2 bài toán thú vị mà bài toán 1 chỉ là một trường hợp đặc biệt.

Bây giờ ta tiếp tục cách suy nghĩ đó vào bài toán sau :

Bài toán 2 : Trên hai cạnh AB và BC của hình vuông $ABCD$ lấy 2 điểm P và Q tương ứng sao cho $BP = BQ$. Nối CP, hạ $BH \perp CP$. Chứng minh rằng $\widehat{DHQ} = 1v$.



H. 3

– Việc chứng minh bài toán không khó, chỉ cần để ý $\Delta\, DHC \backsim \Delta\, QHB$

$\Rightarrow\ \widehat{DHC} = \widehat{QHB}$, do đó

$\widehat{DHQ} = \widehat{CHB} = 1v$ (h.3)

– Đến đây lập tức các bạn thấy ngay dễ dàng đề xuất bài toán sau :

Bài toán 2a : Trên 2 cạnh AB và BC của hình chữ nhật $ABCD$ tùy ý lấy các điểm P và Q tương ứng sao cho : $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{BC}{BA}$. Nối CP, hạ $BH \perp CP$. Tính góc $\widehat{DHQ}$.

– Tương tự lời giải bài toán 2, các bạn có thể tự vẽ hình và chứng minh được trong trường hợp này ta cũng có $\widehat{DHQ} = 1v$.

– Trường hợp : $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{BA}{BC}$ các bạn thử tự nghĩ xem !

* Ở các bài toán trên chủ yếu ta đã chuyển quan hệ bằng nhau của hai đoạn thẳng về việc xét tỷ số độ dài của chúng. Còn đối với các hình khác (tam giác, tứ giác...) thì thế nào ? Ta hãy vận dụng suy nghĩ trên vào bài toán sau (đã ra trong kỳ thi vô địch toán quốc tế lần thứ nhất – 1959) :

Bài toán 3 : Trên đoạn AB cho trước lấy điểm M bất kỳ. Vẽ một phía của AB vẽ các hình vuông $AMCD$ và $MBEF$. Vẽ các đường tròn ngoại tiếp của hai hình vuông, cắt nhau tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng :

a) Các đường thẳng AF và BC cùng đi qua N.

b) Khi M chuyển động trên cạnh AB thì đường thẳng MN đi qua một điểm cố định S.

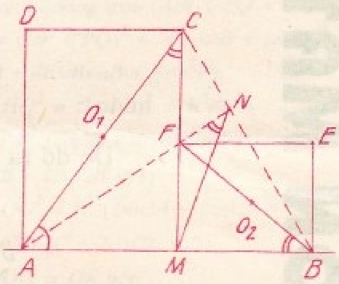
– Vì bài toán rất quen thuộc, nên phần lời giải tôi không trình bày riêng, mà chỉ đi vào trọng tâm của vấn đề : Coi hai hình vuông là hai hình chữ nhật đồng dạng có tỉ lệ 2 kích thước là một hằng số (các tình huống khác các bạn có thể tự nghĩ lấy), ta có bài toán sau :

Bài toán 3a : Trên đoạn AB cho trước lấy điểm M bất kỳ. Vẽ một phía của AB ta vẽ các hình chữ nhật $AMCD$ và $MBEF$ sao cho $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{MF}{MB} = k$ (với k là số dương cho trước). Vẽ các đường tròn ngoại tiếp của hai hình chữ nhật cắt nhau tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng :

a) Các đường thẳng AF và BC cùng đi qua N.

b) Khi M chuyển động trên đoạn AB thì đường thẳng MN đi qua một điểm cố định S.

– Hướng giải quyết của bài toán này (cũng là của bài toán 3) như sau : (H. 4)



H. 4

a) – Trước hết ta thấy $AN \perp BN$ vì : $\widehat{ANM} = \widehat{ACM}$, $\widehat{MNB} = \widehat{MFB}$, mà $\Delta\, AMC \backsim \Delta\, MFB$ nên $\widehat{ACM} + \widehat{MFB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ANM} + \widehat{MNB} = 90^0$, hay $\widehat{ANB} = 90^0$.

– Mặt khác $\widehat{ANC} = 90^0 \Rightarrow$ 3 điểm C, N, B thẳng hàng.

– Lại có $\widehat{ANC} = \widehat{FNB} = 90^0 \Rightarrow$ 2 tia NA và NF trùng nhau, hay 3 điểm A, F, N thẳng hàng.

b) Dễ thấy khi M chuyển động trên đoạn AB thì N chuyển động trên nửa đường tròn cố định đường kính AB. Mà góc $\widehat{ANM} = \widehat{ACM}$ không đổi (tg $\widehat{ACM} = \dfrac{AM}{MC} = k$), nên đường thẳng MN đi qua điểm cố định S trên nửa đường tròn đường kính AB còn lại.

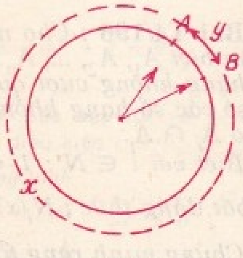
* Cuối cùng chúc các bạn thu được nhiều kết quả thú vị trong học toán bằng những cách nhìn khác nhau.

Bài T1/196 : *Lúc rời nhà đi, bạn Tùng xem giờ thấy đồng hồ chỉ hơn 1 giờ, và khi đến trường thì thấy hai kim đồng hồ đã đổi vị trí cho nhau (trong thời gian này hai kim không chập với nhau lần nào).*

Tính thời gian Tùng đi từ nhà đến trường, lúc Tùng rời nhà và lúc Tùng đến trường.

Lời giải : của các bạn *Lê Xuân Minh*, 7E, Ba Đình, Tx Thanh Hóa và *Trần Việt Dũng*, 8/2, Chu Văn An, Tp. Đà Nẵng.

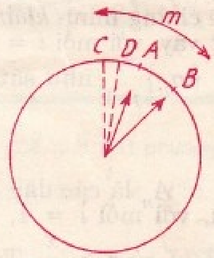
Giả sử lúc Tùng rời nhà kim giờ ở vị trí A, kim phút ở vị trí B (h.1). Hai kim không có vị trí ngược lại vì trong suốt thời gian Tùng đến trường, kim phút không chập với kim giờ. Chia mặt đồng hồ thành 12 vạch chỉ giờ. Kim giờ quay từ A đến B được y vạch và kim phút quay từ B đến A được x vạch. Quãng đường hai kim quay tổng cộng được một vòng nên $x + y = 12$ (1). Kim phút quay nhanh gấp 12 lần kim giờ nên $x/y = 12$ (2).



Hình 1

Từ (1) và (2) ta tính được $y = \dfrac{12}{13}$

Vậy thời gian Tùng đi từ nhà đến trường là 12/13 h ≈ 55 phút 23 giây.



Hình 2

Bây giờ ta tính thời điểm kim giờ ở vị trí A, kim phút ở vị trí B. Gọi vị trí của số 12 trên mặt đồng hồ là C, vị trí của số 1 là D (h.2). Gọi n là số vạch từ C đến A, m là số vạch từ C đến B thì

$$m - n = y = 12/13 \qquad (3)$$

khi kim giờ quay từ D đến A được $n - 1$ vạch thì kim phút quay từ C đến B được m vạch. Kim phút quay nhanh gấp 12 lần kim giờ nên

$$m/(n-1) = 12 \qquad (4)$$

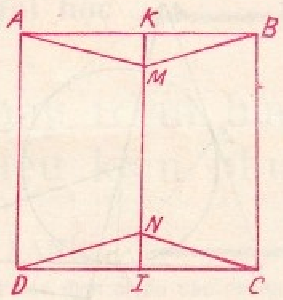
Từ (3) và (4) ta có $n = 168/143 = 1\dfrac{25}{143}$, $m = 2\dfrac{14}{143}$. Vậy Tùng rời nhà lúc $1\dfrac{25}{143}$ giờ ≈ ≈ 1 giờ 10 phút 29 giây và đến trường lúc $2\dfrac{14}{143}$ giờ ≈ 2 giờ 5 phút 52 giây.

Nhận xét : Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Mai Thanh Bình*, 7M ; *Nguyễn Ngọc Tân*, 9M, Marie Curie, *Trần Bàng*, 8H, Trưng Vương, Hà Nội. *Phạm Anh Tuấn*, 8H, Chuyên Bỉm Sơn ; *Nguyễn Minh Thanh*, *Trương Minh Tuệ*, 8E, Ba Đình, Thanh Hóa, *Nguyễn Viết Hải*, 7A, Chuyên Phong Châu, *Vương Minh Thu*, 8B, Chuyên Việt Trì, Vĩnh Phú.

TÔ NGUYÊN

Bài T2/196 : *Có 5 điểm nằm trong hình vuông có cạnh là 36,7. Chứng minh rằng có thể tìm được trong hình vuông này 1 điểm mà khoảng cách của nó đến 5 điểm kia đều lớn hơn 10.*

Lời giải : Gọi các đỉnh hình vuông là A, B, C, D. Nối trung điểm K của AB với trng điểm I của DC. Trên đoạn thẳng KI lấy M và N sao cho $KM = NI = 8$. Ta có $MN = KI - KM - NI = 36,7 - 16 = 20,7$ và $AM = BM = CN = DN = \sqrt{(36,7/2)^2+8^2} = \sqrt{336,7225+64} = \sqrt{400,7225} > 20$. Do đó các hình tròn bán kính là 10 và có tâm lần lượt tại A, B, C, D, M, N không có điểm chung. Với 5 điểm bất kỳ nằm trong hình vuông thì cùng lắm chúng chỉ ở trong 5 hình tròn nói trên. Vậy tồn tại ít nhất 1 hình tròn không chứa điểm nào trong 5 điểm đó. Tâm của hình tròn này hiển nhiên có khoảng cách từ nó đến 5 điểm đều lớn hơn 10.



Nhận xét : Hầu hết các lời giải gửi tới tòa soạn đều thiết kế 6 hình tròn bán kính không nhỏ hơn 10, tâm thuộc hình vuông và chúng rời nhau để dẫn tới lập luận như trên. Một số bạn để 6 hình tròn bán kính 10 trong đó có những hình tròn tiếp xúc nhau nên dẫn tới lí luận thiếu chặt chẽ. Một số bạn khác lấy 5 điểm đã cho làm các tâm để vẽ các hình tròn trên bán kính 10 và chứng minh 5 hình tròn này chưa phủ kín hình vuông để suy ra tồn tại điểm thỏa mãn bài toán.

Các bạn có lời giải tốt là : *Nguyễn Phú Bình* (9A – Bế Văn Đàn – Hà Nội) ; *Phạm Tuấn Anh, Nguyễn Quốc Anh, Vũ Văn Hoan, Lê Văn An* (9T – Phan Bội Châu, Nghệ An), *Trịnh Hữu Trung, Hoàng Khắc Công, Đỗ Quang Thơ, Lê Vũ Long, Trương Mạnh Tuấn, Lê Viết Hải* (9T, Lam Sơn, Thanh Hóa), *Vũ Thu Hương* (9 – PTNK Hải Hưng) ; *Phạm Lê Hùng* (9A, Trưng Nhị, Hà Nội) ; *Mai Thanh Bình, Nguyễn Ngọc Tân* (7M, 9M, Mari Quyri, Hà Nội),...

Đặc biệt bạn *Nguyễn Phú Quảng* (9A – Trưng Nhị – Hà Nội) đã tổng quát bài toán :

"Cho 5 điểm nằm trong hình vuông cạnh l thì luôn tồn tại ít nhất 1 điểm trong hình vuông mà khoảng cách từ đó tới 5 điểm đều lớn hơn k, với k thỏa mãn $3k^2 + kl - \frac{l^2}{2} < 0$". Kết quả là đúng nhưng chỉ tiết lí luận của bạn ở phần cuối lại hơi lúng túng nên không mạch lạc.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/196 : *Vòng tròn nội tiếp (O) của ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB và BC ở các điểm E và F. Phân giác của góc A cắt EF ở điểm K. Chứng minh rằng $\widehat{CKA} = 90^o$*

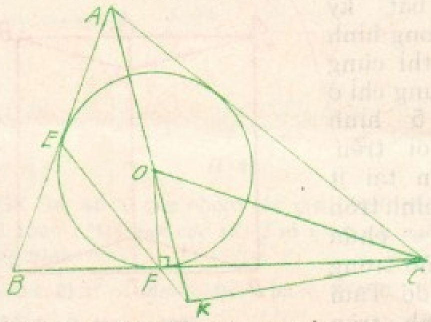
Lời giải :

Đề bài lẽ ra phải là "phân giác của góc A cắt tia EF...". Xét các trường hợp sau :

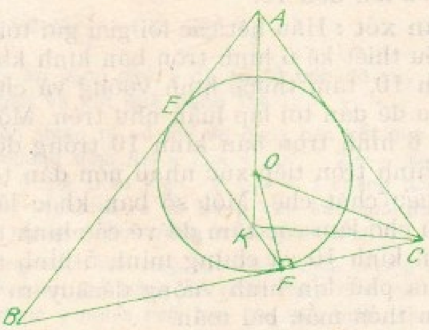
1) $AC > AB$:

Ta có $\widehat{BEF} = \widehat{BFE} \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BFE} = \frac{180^o - \widehat{EBF}}{2} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB}}{2}$. Mặt khác $\widehat{EKA} = \widehat{BEF} - \widehat{EAK}$. Suy ra : $\widehat{EKA} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = \widehat{OCF}$.

Do đó tứ giác OFKC nội tiếp được. Vậy $\widehat{CKA} = \widehat{OFC} = 90^o$. ĐPCM



2) $AC < AB$: Tương tự như trên ta có :



$\widehat{BFE} = \frac{180^o - \widehat{ABC}}{2}$

Mặt khác $\widehat{KOC} = \widehat{OCA} + \widehat{OAC} = \frac{\widehat{BCA} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{180^o - \widehat{ABC}}{2}$. Tức là $\widehat{BFE} = \widehat{KOC}$. Do đó tứ giác OKFC nội tiếp được. Suy ra $\widehat{CKA} = \widehat{CFO} = 90^o$.

3) $AB = AC$. Khi đó $F \equiv K$. Dễ dàng suy ra ĐPCM. Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $\widehat{CKA} = 90^o$.

Nhận xét :

1. Đa số các bạn mặc nhiên chỉ xét bài toán trong hình vẽ mà mình có được, tức là làm 1 trong 2 trường hợp 1 và 2 nói trên. Phần lớn giải dài dòng.

2. Bạn *Đoàn Định Trung*, Trưng Vương, Hà Nội có lời giải tốt nhất.

3. Các bạn giải tương đối tốt bài toán : *Tạ Thị Bích Hạnh*, trường Lê Lợi, Hà Tây ; *Đỗ Trung Châu*, Việt Trì, Vĩnh Phú ; *Nguyễn Thắng Sơn*, trường Hồng Bàng, Hải Phòng ; *Nguyễn Phú Bình*, trường Bế Văn Đàn, Hà Nội, *Lê Vũ Long*, Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Ngô Thị Mai*, Nghĩa Đàn, *Phạm Tuấn Anh*, trường Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Lê Phước Danh*, trường Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên - Huế ; *Nguyễn Văn Nghiêm*, trường Lê Khiết, Quảng Ngãi.

VŨ KIM THỦY

Bài T4/196 : *Cho n ($n \geq 2$) dãy số dương phân biệt $A_1, A_2, ..., A_n$. Kí hiệu $N_i(x)$ là số các số hạng không vượt quá x của dãy A_i ; $N_{ij}(x)$ là số các số hạng không vượt quá x của phần giao $A_i \cap A_j$.*

Biết với $i \in N : 1 \leq i \leq n$ và với $x \in Z^+$ có bất đẳng thức : $N_i(x) \geq \frac{x}{e}$ với $e = 2,71828...$

Chứng minh rằng tồn tại 2 dãy A_i, A_j trong n dãy đã cho thỏa mãn bất đẳng thức :

$$N_{ij}(x) \geq \frac{nx(n-1)}{2\binom{n}{2}e^2}$$

Lời giải (của *Nguyễn Thái Hà*, 10M Mari-Quyri, Hà Nội) : Ta sẽ chứng minh *khẳng định của bài ra là sai*. Thật vậy, với mỗi $i = 1, 2, ..., n$ xây dựng dãy $A_i = \{a_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ như sau :

$$a_{ij} = j + \frac{i}{n} - 1 \ \forall j \geq 1.$$

Dễ thấy các dãy $A_1, A_2, ..., A_n$ là các dãy số dương phân biệt. Hơn nữa, với mỗi $i = 1, 2, ..., n$ và với $x \in Z^+$ thì $N_i(x) = x > \frac{x}{e}$. Tuy nhiên, do $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$ (dễ thấy) nên $N_{ij}(x) = 0 \ \forall i \neq j$ và $\forall x \in Z^+$. Và bởi vậy, không tồn tại A_i, A_j để $N_{ij}(x) \geq \frac{nx(n-1)}{2\binom{n}{2}e^2}$ (!)

Nhận xét : Việc để bài toán trên xuất hiện trong mục "Đề ra kì này" là sơ xuất đáng tiếc. Tòa soạn thành thực cáo lỗi cùng bạn đọc.

• Các bạn *Lê Anh Cường* và *Nguyễn Lê Minh* (Lam Sơn, Thanh Hóa) đề nghị : *Để bài ra có thể giải được cần :*

a) *Sửa giả thiết theo một trong hai hướng sau :*

i) Thay điều kiện "$A_1, A_2, ..., A_n$ là n dãy số dương" bởi điều kiện "*$A_1, A_2, ..., A_n$ là n dãy số nguyên dương*".

ii) Thay điều kiện "$N_i(x)$ là... ; $N_{ij}(x)$ là ... $A_i \cap A_j$" bởi điều kiện "*$N_i(x)$ là số các số nguyên không vượt quá x của dãy A_i ; $N_{ij}(x)$ là các số nguyên không vượt quá x của phần giao $A_i \cap A_j$*".

b) Song song với việc sửa giả thiết như trên, sửa phần kết luận thành "*tồn tại hai dãy A_i, A_j sao cho :*

$$N_{ij}(x) \geq \frac{nx(n-e)}{2\binom{n}{2}e^2}$$

Bạn Cường và bạn Minh đã cho lời giải đúng đối với bài toán đã được sửa đổi. Hơn nữa, bạn Minh còn chỉ ra đúng rằng với giả thiết đã được sửa như trên, kết luận của bài ra vẫn sai chí ít là trong các trường hợp $n = 2, 3, 4$.

3. Lời giải của Đáp án là lời giải cho bài toán với giả thiết cần được sửa như đã nêu ở trên, và theo lời giải này ta cũng chỉ có thể có được khẳng định rằng *tồn tại hai dãy A_i, A_j sao cho :*

$$N_{ij}(x) \geq \frac{nx(n-e^2)}{2\binom{n}{2}e^2}\,!$$

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T5/196 : *Cho $\alpha, \beta, \gamma > 0$; $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$. Chứng minh rằng :*

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma) \leq \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha)$

Lời giải : (của nhiều bạn)

Ta xét :

$$S = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) - [\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$= [\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)] + [\sin(\beta+\gamma) - \sin\beta] + [\sin(\alpha+\gamma) - \sin\alpha] - \sin\gamma$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[-\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\gamma}{2}\right) + \cos\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right) + \cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) - \cos\frac{\gamma}{2}\right]$$

$$= 4\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$= 4\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 8\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

Do $\alpha, \beta, \gamma > 0$ và $\alpha+\beta+\gamma \leq \pi$ nên $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, $\sin\frac{\beta}{2} > 0$, $\sin\frac{\gamma}{2} > 0$ và $\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \geq 0$

Suy ra : $S \geq 0$. Từ đó dẫn đến bất đẳng thức cần chứng minh.

Ta hãy thấy : bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi$

Nhận xét : Có 129 lời giải gửi về và có đúng 19 lời giải mắc sai lầm (chủ yếu nhớ... nhầm công thức biến đổi lượng giác). Ngoài lời giải trên, một vài bạn sử dụng đạo hàm để xét hàm $f(\alpha) = S$. Bạn *Nguyễn Tuấn Hải* (11M, Mari Quyri, Hà Nội) chứng minh khẳng định tổng quát cho n góc với điều kiện tương tự.

Các bạn có lời giải tốt là : *Trần Thanh Hoàn* (11I, Đông Hà, Quảng Trị), *Phan Anh Tuấn* (11A, Nguyễn Huệ, Hà Tây), *Trần Quang Huy* (11, Chuyên Toán Vĩnh Phú), *Trần Đăng Hòa* (10A, ĐHTH Hà Nội), *Trần Thị Hạnh* (11CT, PTNK Hải Hưng), *Tăng Nam Long* (12CT, Phan Bội Châu, Nghệ An), *Đỗ Quang Minh* (12A, Chuyên Tuyên Quang), *Nguyễn Đức Kế* (Trần Phú, Hà Tĩnh), *Nguyễn Anh Tuấn* (10A$_1$, Công Lập, Bạc Liêu, Minh Hải), Đoàn Nguyên Chương (10A$_1$, Lê Quý Đôn, Đà Nẵng), *Phạm Việt Nga* (10, Trần Phú, Hải Phòng), *Đinh Trung Hàng*, *Nguyễn Thái Hà* (10M, Mari Quyri, Hà Nội) ; *Gia Cát Võ Hùng* (10A, Lê Hồng Phong, Nam Hà), ...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T6/196. *Cho hai đa thức bậc bốn $P(x)$ và $Q(x)$ có hệ số hữu tỷ. Chứng minh rằng nếu $P(x)$ và $Q(x)$ có một nghiệm chung vô tỷ và hai nghiệm chung hữu tỷ thì $P(x)$ và $Q(x)$ còn có thêm một nghiệm chung khác nữa.*

Lời giải (của đa số các bạn)

Giả sử $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$; $a_4 \neq 0$; $a_i \in Q$

$Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$; $b_4 \neq 0$; $b_j \in Q$

$j = 0, 1, 2, 3, 4.$

Gọi nghiệm chung vô tỷ là α_1 và hai nghiệm chung hữu tỷ là α_2 và α_3. $P(x)$ còn có thêm một nghiệm khác nữa là α và $Q(x)$ cũng có thêm một nghiệm khác nữa là β.

Theo định lý Viét thì

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha = -\frac{a_3}{a_4} \in Q \qquad (1)$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha + \alpha_3\alpha = \frac{a_2}{a_4} \in Q \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra $\alpha_1 + \alpha \in Q$. Do vậy, từ (2) suy ra :

$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2(\alpha_1+\alpha) + \alpha_3(\alpha_1+\alpha) + \alpha_1\alpha \in Q \Leftrightarrow \alpha_1\alpha \in Q$$

Cũng lập luận như vậy, ta có : $\alpha_1 + \beta \in Q$ và $\alpha_1\beta \in Q$

Suy ra : $\alpha - \beta = (\alpha_1 + \alpha) - (\alpha_1 + \beta) \in Q$

$$\alpha_1(\alpha - \beta) = \alpha_1\alpha - \alpha_1\beta \in Q$$

Từ hai hệ thức này, suy ra $\alpha - \beta = 0$ (do α_1 vô tỷ)

Nhận xét : Bài này được đông đảo các bạn tham gia giải và các cách giải gửi đến đều đúng. Một số bạn còn mở rộng bài toán cho đa thức bậc tùy ý với hệ số hữu tỷ. Ngoài ra, bạn *Nguyễn Lê Minh* còn đưa ra cách giải dựa trên nhận xét (định lý Viét) rằng một đa thức bậc ≤ 3 với giả thiết có hai nghiệm hữu tỷ và một nghiệm hữu tỷ thì đa thức đó đồng nhất bằng 0. Ta thấy đa thức $b_4P(x) - a_4Q(x)$ có tính chất đó.

Vậy $P(x) = \frac{a_4}{b_4}Q(x)$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/196. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện :*

$$P(x) + P(1) = \frac{1}{2}[P(x+1) + P(x-1)]\ \forall x$$

Lời giải (của đa số các bạn)

Đặt $P(1) = a$ và xét đa thức

$$Q(x) = P(x) - ax^2$$

Khi đó $Q(1) = 0$ và $P(x) = Q(x) + ax^2$

Theo vào điều kiện bài toán, ta được

$$Q(x) + ax^2 + Q(1) + a =$$

$$= \frac{1}{2}[Q(x+1) + a(x+1)^2 + Q(x-1) + a(x-1)^2]\ \forall x$$

$$\Leftrightarrow Q(x) = \frac{1}{2}[Q(x+1) + Q(x-1)]\ \forall x$$

$$\Leftrightarrow Q(x) - Q(x-1) = Q(x+1) - Q(x)\ \forall x$$

$\Leftrightarrow Q(x) - Q(x-1) = b$ (b hằng số) $\forall x$ (1)

Đặt $Q(x) = bx + R(x)$ thì từ (1) ta thu được

$$bx + R(x) - b(x-1) - R(x-1) = b$$

$$\Leftrightarrow R(x) = R(x-1)\ \forall x$$

$\Leftrightarrow R(x) = c$ (c – hằng số)

Vì $Q(1) = 0$ nên $c = -b$

Vậy $P(x) = ax^2 + bx - b$ (2)

Thử lại, ta thay đa thức dạng (2) thỏa mãn.

Nhận xét : Hầu hết các bạn gửi lời giải đến tòa soạn đều giải đúng. Một số bạn còn cho cách giải theo phương pháp nội suy và phương pháp hệ số bất định.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/196 : Trên mặt phẳng cho tập hợp M gồm n điểm, với mỗi điểm thuộc M tồn tại đúng hai điểm thuộc M có khoảng cách đến nó bằng 1, hơn nữa, khoảng cách giữa hai điểm bất kì của M không vượt quá 1. Chứng minh rằng n là số lẻ.

Lời giải (Theo *Hà Thanh Hải*, 12T Lam Sơn, Thanh Hóa).

Xét hai đoạn thẳng AB, CD độ dài 1 ($A, B, C, D \in M$). Giả sử hai đoạn này không có chung đầu mút, ta sẽ chứng minh chúng cắt nhau tại điểm trong của mỗi đoạn. Thật vậy, giả sử ngược lại xảy ra :

i) *Trường hợp 1: A, B, C, D* là 4 đỉnh của một tứ giác lồi. Khi đó $AC + BD > AB + CD = 2$. Suy ra hoặc $AC > 1$ hoặc $BD > 1$, mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

ii) *Trường hợp 2 : A, B, C, D không phải là 4 đỉnh của một tứ giác lồi.* Khi đó sẽ có một điểm, chẳng hạn D bị chứa bởi ΔABC. Hiển nhiên $D \notin [CB]$, $D \notin [AC]$. Do đó $\widehat{BDC} + \widehat{ADC} \geq 180^o$ hoặc $\widehat{BDC} \geq 90^o$ hoặc $\widehat{ADC} \geq 90^o$, và bởi vậy hoặc $BC > CD = 1$ hoặc $AC > CD = 1$, mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy hai đoạn thẳng độ dài 1 có các đầu mút thuộc M phải hoặc có chung một đầu mút hoặc cắt nhau tại điểm trong của mỗi đoạn. (1)

Kí hiệu tất cả các điểm của tập M là $A_1, A_2, ..., A_n$. Nối tất cả các cặp điểm A_i, A_j mà $A_iA_j = 1$. Tất cả các đoạn thẳng nối được sẽ cho ta một số hữu hạn các đường gấp khúc đơn, mà mỗi đường gấp khúc đều có tất cả các đỉnh là các điểm thuộc M. Xét đường gấp khúc đơn (K) có độ dài lớn nhất và không mất tổng quát, giả sử là $A_1A_2... A_k$. Dễ thấy phải có $A_kA_1 = 1$, và $k \geq 3$. Ta sẽ chứng minh k lẻ. Thật vậy, nếu $k = 3$ thì điều cần chứng minh hiển nhiên đúng. Xét $k > 3$. Khi đó, từ (1) và $A_lA_k = 1$ suy ra tất cả các đỉnh A_i của (k) với i lẻ lớn hơn 3 phải nằm trong cùng một nửa mặt phẳng mở có bờ là đường thẳng A_lA_k, còn tất cả các đỉnh A_i của (K) với i chẵn phải nằm trong cùng một nửa mặt phẳng (mở) đối của nửa mặt phẳng nói trên. Hơn nữa, do $[A_{k-1}A_k]$ phải cắt $[A_1A_2]$ nên A_2 và A_{k-1} không thể nằm khác phía đối với A_1A_k. Từ đó $k - 1$ chẵn và suy ra k lẻ (2).

Bây giờ ta sẽ chứng minh $k = n$. Thật vậy, giả sử ngược lại $k < n$. Khi đó phải tồn tại A_p, $A_q \in M$ mà $A_p, A_q \notin (K)$ và $A_pA_q = 1$. Do (1) nên tất cả các đỉnh A_i của (K) với i lẻ phải nằm trong cùng một nửa mặt phẳng mở có bờ là đường thẳng A_pA_q ; còn tất cả các đỉnh A_i của (K) với i chẵn phải cùng nằm trong nửa mặt phẳng (mở) đối của nửa mặt phẳng vừa nêu. Hơn nữa do $[A_lA_k]$ phải cắt $[A_pA_q]$ nên A_1 và A_k phải nằm khác phía đối với A_pA_q. Từ đó suy ra k chẵn, mâu thuẫn với (2). Vậy $k = n$ và do (2) nên n lẻ (ĐPCM)

Nhận xét : Trong số tất cả các lời giải gửi tới Tòa soạn chỉ có ba lời giải đúng, là các lời giải của *H.T. Hải, Hoàng Văn Long* (12A PTCT ĐHSP Vinh), và *Nguyễn Quang Huy* (12T Phan Bội Châu, Nghệ An).

NGUYỄN KHẮC MINH

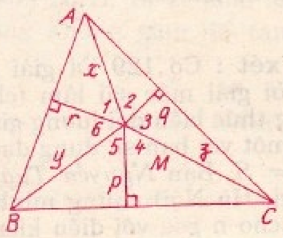
Bài T9/196 *Cho tam giác ABC và M là điểm nằm trong tam giác. Kí hiệu x, y, z lần lượt là MA, MB, MC và p, q, r lần lượt là khoảng cách từ M đến BC, CA, AB. Chứng minh :*

a) $xyz \geq (p+q)(q+r)(r+p)$

b) $x^2y^2z^2 \geq (px+qy)(qy+rz)(rz+px)$

Lời giải (Dựa theo *Trần Quang Huy* – 11 chuyên Toán Vĩnh Phú)

a) Ta có $(p+q)(q+r)(r+p) = z(\cos M_4 + \cos M_3)x(\cos M_2 + \cos M_1)\, z(\cos M_6 + \cos M_5) \leq$



$\leq xyz\left(\dfrac{\sum\limits^{6}\cos M_i}{3}\right)^3$ (bđth Cô-si) $\leq$

$\leq xyz\left(\dfrac{1}{3}\cdot 6\cos\dfrac{M_1+M_2+\ldots M_6}{6}\right)^3$ (vì hàm cosx lồi trên $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]) = xyz$.

b) đpcm $\Leftrightarrow \left(\dfrac{p}{y}+\dfrac{q}{x}\right)\left(\dfrac{q}{z}+\dfrac{r}{y}\right)\left(\dfrac{r}{y}+\dfrac{p}{z}\right) \leq 1$

$\Leftrightarrow (\cos M_5 + \cos M_2)(\cos M_3 + \cos M_6)(\cos M_1 + \cos M_4) \leq 1$

$\Leftrightarrow \text{VT} \leq \left(\dfrac{\sum\limits^{6}\cos M_i}{3}\right)^3$ (bđt Côsi) $\leq$

$\leq \left(\dfrac{1}{3}\cdot 6\cos\dfrac{M_1+M_2+\ldots+M_6}{6}\right)^3 = 1$

Dấu "=" xẩy ra khi ΔABC đều.

Nhận xét. Có 108 bạn giải, tất cả đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Trần Quang Huy*, 11 chuyên toán Vĩnh Phú) ; *Nguyễn Hoàng Công* (10T, thị trấn Sơn Tịnh, Quảng Ngãi) ; *Lê Thanh Tùng* (11CT, Hùng Vương, Vĩnh Phú) ; *Lê Nguyên Chất* (11T, Lam Sơn, Thanh Hóa)

ĐẶNG VIỄN

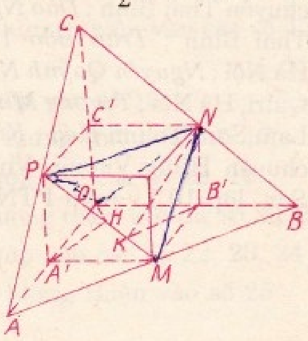
Bài T10/196. *Cho tứ diện vuông OABC (OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một) ; OA = a ; OB = b ; OC = c. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh rằng trong tứ diện OMNP nếu nhị diện cạnh OM vuông thì ta có :*

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Lời giải (Dựa theo *Nguyễn Thái Hà* – 10M PTNK Marie Curie Hà Nội). Ta chứng minh bài toán tổng quát hơn :

$\dfrac{1}{c^2} = \left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right) tg^2\dfrac{\alpha}{2}$ (α – góc nhị diện cạnh OM có chứa đoạn OC). Gọi A', B' là trung điểm tương ứng của OA, OB, ta có :

$A'P \mathbin{/\!/}= \dfrac{OC}{2}$; $A'M \mathbin{/\!/}= \dfrac{OB}{2}$, $OA'MB'$ là hình chữ nhật ; $PA', NB' \perp (OAB)$ (vì chúng // OC mà $OC \perp (OAB)$ do $\perp OA, OB$). Hạ $A'H$, $B'K \perp OM$ (1), ta có $PH, NK \perp OM$ (2) (định lí 3 đường vg). Mà $NB' = PA'$



$\left(=\dfrac{c}{2}\right)$; $B'K = A'H$ (đối xứng qua tâm hình chữ nhật $OA'MB'$) nên hai tam giác vuông $NB'K$, $PA'H$ bằng nhau, hay $\widehat{NKB'} = \widehat{PHA'}$; Kết hợp với (1), (2) ta có các nhị diện cạnh OM lần lượt chứa NB', PA' bằng nhau, suy ra mỗi nhị diện này bằng $\dfrac{180^0-\alpha}{2}$ $\left(= 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Ta có : $A'P^2 = A'H^2 \cdot tg^2\left(90 - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{A'H^2}{tg^2\frac{\alpha}{2}}$ (3). Hơn nữa, trong tam giác vuông $A'OM$ ($\widehat{A'} = 90^0$), ta lại có :

$\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'O^2} + \dfrac{1}{A'M^2}$ (4). Từ (3) và (4) thay $A'P = \dfrac{c}{2}$; $A'O = \dfrac{a}{2}$; $A'M = \dfrac{b}{2}$, ta có công thức nêu trên. Với $\alpha = 90^0$; ta có đpcm, và bài toán đã được giải xong.

Nhận xét : 1. Lời giải nêu trên còn có thể dùng để giải bài toán đảo (bạn đọc tự phát biểu và giải).

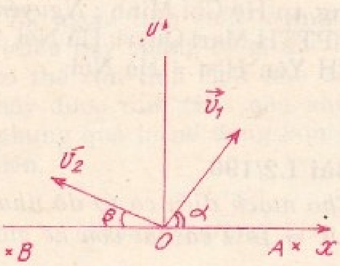
2. Có 96 bạn giải, tất cả đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Thái Hà* (10M PTKN Marie Curie – Hà Nội) ; *Đinh Thành Trung* (10CT – ĐHTH Hà Nội) ; *Nguyễn Xuân Thắng* (10T PTTH Đông Hà – Quảng Trị) ; *Phạm Đào Lâm* (11T – PTNK Hải Hưng) ; *Nguyễn Văn Hòa* (12A Huỳnh Ngọc Huệ – Đại Lộc, QNĐN).

ĐẶNG VIỄN

Bài L1/196 *Hai vật được ném đi đồng thời từ cùng một điểm : vật thứ nhất được ném lên nghiêng một góc α = 60° so với phương nằm ngang, vật thứ hai được ném lên nghiêng một góc β = 30° so với phương nằm ngang, nhưng về hướng ngược lại so với vật thứ nhất. Vận tốc ném của cả hai vật là bằng nhau và v = 1,414 m/s. Tính khoảng cách giữa hai vật sau 1,8s. Bỏ qua sức cản của không khí.*

Lời giải

Phương trình chuyển động của các vật là :



$$\begin{cases} x_1 = v\cos\alpha \,.\, t \\ y_1 = v\sin\alpha t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} x_2 = v\cos\beta t \\ y_2 = v\sin\beta t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ta thấy rằng $y_1 = 0$ khi $t_1 = \dfrac{2v\sin\alpha}{g}$, và $y_2 = 0$ khi $t_2 = \dfrac{2v\sin\beta}{g}$. Vì $t_2 < t_1 < 1,8$(s) nên sẽ có hai trường hợp :

– Nếu sau 1,8*s* hai vật chưa rơi xuống tới đất (muốn vậy điểm ném *O* phải ở cách mặt đất một khoảng tối thiểu nào đó, khoảng trên 15m, tính theo công thức

$h_{min} = U_o \sin\beta\, t - \dfrac{1}{2}gt^2$ với $t = 1,8s$) thì sau $t = 1,8s$ vật thứ nhất ở điểm *A*, vật thứ hai ở điểm B với khoảng cách hai vật là $l = \overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} =$
$= vt\sqrt{2(1 + \cos(\alpha + \beta))} = vt\sqrt{2} \approx 3,6$m (lấy $v = 1,414 \approx \sqrt{2}\ m/s$).

– Nếu sau 1,8*s* một trong hai vật (vật 2) hoặc cả hai vật đều đã rơi xuống đất (vật 2 rơi xuống trước) nghĩa là điểm ném *O* cách mặt đất một khoảng nhỏ hơn 15m, thì tùy vị trí của điểm ném *O* mà khoảng cách hai vật sẽ khác nhau ; khi đó phải tìm điểm rơi của hai vật (dựa vào phương trình chuyển động) để từ đó xác định khoảng cách hai vật. Nếu giả thiết điểm *O* ngay trên mặt đất, thì khoảng cách 2 vật bằng $U\cos\alpha \,.\, t_1 + U\cos\beta \,.\, t_2 \approx \dfrac{\sqrt{3}}{5}$ m.

Nhận xét. Có 105 bài giải đã gửi đến tạp chí, nhưng hầu hết chỉ xét trường hợp đầu tiên, chỉ có em *Trần Văn Giang* (10A7, PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định) là đã xét trường hợp thứ hai (khi *O* ở ngay trên mặt đất). Ngoài bài giải tốt của em *Giang*, còn có các em sau đây có bài giải khá tốt : *Hồng Linh*, 12F, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Trần Anh Bảo* 12A PTTH chuyên Thái Bình ; *Nguyễn Thanh Hải*, 12CT PTTH Đào Duy Từ, Đồng Hới, Quảng Bình ; *Lạc Thái Minh*, 12CL PTTH Lê Hồng Phong, tp Hồ Chí Minh ; *Nguyễn Quỳnh Nam*, 10M PTTH Mari Quyri, Hà Nội, *Trần Bảo*, 10A PTTH Yên Hòa – Hà Nội.

MAI TÙNG

Bài L2/196

Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Cho biết $R = 1k\Omega$ và hai vôn kế giống nhau. Vôn kế V_1 chỉ 11V và vôn kế V_2 chỉ 1V. Tính U_{CD} và điện trở vôn kế.

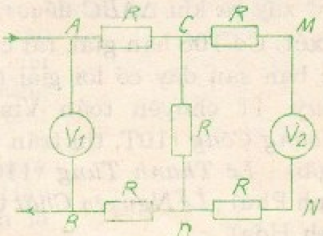
Lời giải : Ta nhận xét cường độ dòng điện qua *AC* bằng cường độ dòng điện qua *DB*, do đó $U_{AC} = U_{DB}$. Từ hệ thức $U_{AB} = U_{AC} + U_{CD} + U_{DB} = 2U_{AC} + U_{CD}$ suy ra

$$I_{AC} = I_{DB} = \frac{U_{AB} - U_{CD}}{2R} = \frac{11 - U_{CD}}{2R} \quad (1)$$

Ta lại có $U_{CD} = U_{CM} + U_{MN} + U_{ND} = 2U_{CM} + U_{MN}$
(vì $U_{CM} = U_{ND}$), từ đó

$$I_{CM} = \frac{U_{CM}}{R} = \frac{U_{CD} - U_{MN}}{2R} = \frac{U_{CD} - 1}{2R} \quad (2)$$

Tại nút *C* : $I_{AC} = I_{CD} + I_{CM}$ (3)



Biết $I_{CD} = \dfrac{U_{CD}}{R}$, từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{11 - U_{CD}}{R} = \frac{U_{CD}}{R} + \frac{U_{CD} - 1}{2R} \rightarrow U_{CD} = 3V$$

và do đó $I_{CM} = \dfrac{1}{R}$. Mặt khác

$$I_{MN} = I_{CM} = \frac{U_{MN}}{R_V} = \frac{1}{R_V}.$$

Từ đó $R_V = R = 1k\Omega$

Nhận xét : Có 88 em đã gửi bài giải trong đó có 80 em có đáp số đúng. Các em có lời giải tốt : *Đặng Quang Dũng* B_o 10 ĐHTH, Hà Nội ; *Nguyễn Mạnh Hà*, CL PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Trịnh Chí Thịnh*, 11 A3 PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định ; *Đạo Lý*, 11A PTTH chuyên Thái Bình ; *Đào Ngọc Xuân*, 10A PTTH Thái Bình ; *Trần Bảo* 10A PTTH Yên Hòa, Hà Nội ; *Nguyễn Quỳnh Nam*, 10M PTTH Mari Quiri, Hà Nội ; *Trương Minh Thanh*, 10F PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Kiều Hữu Dũng*, 12CT, chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú ; *Trần Tuấn Sơn*, lớp 10 Lí-toán PTNK, Hải Hưng.

MAI OANH

ỐNG KÍNH

CẢI CÁCH DẠY VÀ HỌC TOÁN

ĐƯA QUY NẠP TOÁN HỌC VÀO LỚP NÀO ?

Quy nạp toán học là một phương pháp chứng minh toán học đặc biệt cho phép ta rút ra những quy luật tổng quát dựa trên cơ sở của những trường hợp riêng.

Vấn đề này trong chương trình toán cũ đã được trình bày ngay từ đầu lớp 10 nhưng trong chương trình toán hiện hành mãi đến lớp 11 mới đề cập. Điều này đã gây không ít khó khăn cho thầy, trò trong việc giải toán.

Một ví dụ dễ thấy nhất là bài toán :

"Cho ba số tự nhiên $a < b < c$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $d > a$ ta có

$$a^d + b^d < c^d"$$

(Bài 12 trang 57 Đại số 10, *Trần Văn Hạo* (chủ biên)). Đây là bài toán khó đối với học sinh diện đại trà nếu chưa được trang bị quy nạp toán học (Xem lời giải trang 76 sách bài tập đại số 10 Trần Văn Hạo...).

Sau đây là lời giải bằng quy nạp toán học mà mọi học sinh đều có thể làm được nếu đã được học quy nạp toán học từ đầu chương trình toán 10.

Với $d = 1 \Rightarrow a = o \Rightarrow a^d + b^d = o^1 + b^1 = b < c = c^1$

Giả sử với $d = k$ ta có $a^k + b^k < c^k$

Xét khi $d = k + 1$

$c^{k+1} = c.c^k > c(a^k + b^k) = c.a^k + c.b^k$

$> a.a^k + b.b^k = a^{k+1} + b^{k+1}$

Vậy $a^{k+1} + b^{k+1} < c^{k+1}$

Do đó theo nguyên lí quy nạp, ta có đpcm.

Chắc chắn bạn đọc đã tìm được nhiều ví dụ khác nữa.

Vì vậy, nên chăng đưa quy nạp toán học ngay vào đầu chương trình toán 10.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Giải đáp bài

LÀM THẾ NÀO ĐỂ NÉM 15 TÊN CƯỚP XUỐNG BIỂN

Vẽ một vòng tròn, trên đó xếp 30 mẩu giấy đánh số từ 1 đến 30 thay cho 30 người. Ta sẽ thấy những người mang số sau đây lần lượt bị ném xuống biển. *Vòng một :* 9, 18, 27. *Vòng hai :* 6, 16, 26. *Vòng ba :* 7, 19. *Vòng bốn :* 30, 12, 24. *Vòng năm :* 8, 22. *Vòng sáu :* 5, 23. Các người còn lại trên tàu mang số : 1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 29.

Do đó thuyền trưởng đã sắp đặt chỗ ngồi cho mọi người như sau (theo chiều kim đồng hồ)

4. Người lương thiện vào các số 1, 2, 3, 4

tiếp theo là 5 tên cướp vào các số 5,6,7,8,9

tiếp đến 2 người lương thiện vào các số 10,11

tiếp đến 1 tên cướp vào số 12

tiếp đến 3 người lương thiện vào các số 13, 14, 15

tiếp đến 1 tên cướp vào số 16

tiếp đến 1 người lương thiện vào số 17

tiếp đến 2 tên cướp vào các số 18, 19

tiếp đến 2 người lương thiện vào các số 20, 21

tiếp đến 3 tên cướp vào các số 22, 23, 24

tiếp đến 1 người lương thiện vào số 25

tiếp đến 2 tên cướp vào các số 26, 27

tiếp đến 2 người lương thiện vào các số 28, 29

cuối cùng 1 tên cướp vào số 30,

và như vậy là 15 tên cướp đều bị ném xuống biển.

Các bạn *Trần Cường,* 6 toán, PTCS Phạm Huy Quang, Thái Bình, *Phan Thanh Trung* 6T, Quán Hành, Nghi Lộc, Nghệ An ; *Nguyễn Quang Huy* 7H, Trưng Vương, Hà Nội ; *Ngô Ngọc Diện,* 7CT, Mỹ Văn, Hải Hưng có giải đáp tốt.

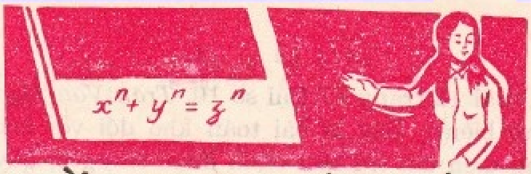
BÌNH PHƯƠNG

Giải trí TOÁN HỌC

CON SỐ 73 KÌ LẠ

Con số 73, ngoài tính chất là một số nguyên tố (điều này chẳng có gì đặc biệt lắm) liệu có thể còn tính chất nào đáng chú ý ? Thấy được tính chất này không đơn giản, nhưng quả là nó đáng làm cho ta ngạc nhiên.

(Xem tiếp trang 11)



ĐỀ RA KÌ NÀY

Các lớp PTCS

Bài T1/200 : Có tồn tại hay không một số nguyên dương là bội của 1993 và có 4 chữ số cuối cùng là 1994 ?

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/200 : Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có tất cả các hệ số nguyên không âm nhỏ hơn 6 thỏa mãn $P(6) = 1994$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

Bài T3/200 : Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng :

$$a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc$$

PHẠM NGỌC QUANG

Các lớp PTTH

Bài T4/200 : Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên $N \geqslant 1$, ta có :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)\,2^n} < 1 - \ln 2$$

ĐÀM VĂN NHỈ

Bài T5/200 : Tìm tất cả các hàm $f(x)$ có tập xác định và tập giá trị là đoạn [0, 1], thỏa mãn :

1) $f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \forall x_1 \neq x_2$
2) $2x - f(x) \in [0 , 1] \quad \forall x \in [0 , 1]$
3) $f(2x - f(x)) = x \qquad \forall x \in [0 , 1]$

HÀ HUY VUI

Bài T6/200 : Cho số nguyên dương n. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc $2n+1$ sao cho $\forall k \in N$ các đồ thị $y = P^{(-k)}x$ ($P^{(-2k)}(x)$ là đạo hàm bậc $2k$ của $P(x)$ đều có tâm đối xứng)

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/200 : Cho các số nguyên dương k và n thỏa mãn $k \leqslant n$. Xét phép toán sau : mỗi lần, lấy k số, nằm ở k vị trí liên tiếp của bộ số có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rồi thay mỗi số bởi số đối của nó. Gọi T là tập gồm tất cả các bộ số có thứ tự $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) Nếu $(t_1 , t_2 , \ldots t_n) \in T$ thì $t_i \in \{-1 ; +1\}$ $\forall i = \overline{1, n}$.

2) Nếu $(t_1 , t_2 , \ldots , t_n) \in T$ thì tồn tại một phương án thực hiện liên tiếp phép toán nói trên đối với $(t_1 , t_2 , \ldots , t_n)$ sao cho sau hữu hạn lần ta sẽ nhận được bộ số $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ số } 1})$

Tìm số phần tử của tập T.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/200 : Cho 3 véctơ tùy ý, mỗi véctơ có độ dài không vượt quá 1. Chứng minh rằng có thể tìm được trong chúng 2 véctơ sao cho véctơ tổng hoặc véctơ hiệu của hai véctơ này có độ dài không vượt quá 1.

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài T9/200 : Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp k, tâm O, bán kính R, đường tròn nội tiếp tâm I, bán kính r. Một đường tròn k_o khác, tiếp xúc với hai cạnh CA, CB lần lượt tại D, E và tiếp xúc trong với đường tròn k. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp I là trung điểm của DE.

ĐỀ DỰ TUYỂN IMO - 34

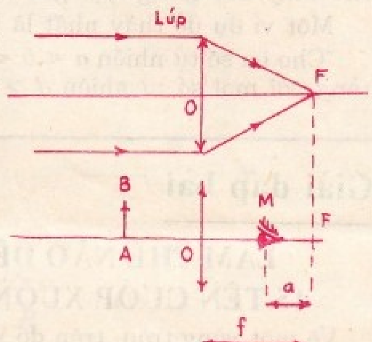
Bài T10/200 : Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối diện bằng nhau : $BC = DA$, $CA = DB$, $AB = DC$. M là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng bình phương khoảng cách từ M đến một trong các đỉnh của tứ diện không lớn hơn tổng bình phương khoảng cách từ M đến ba đỉnh còn lại.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Các Đề Vật lí

Bài L1/200 :

Chùm tia tới kính lúp song song với trục chính sẽ hội tụ tại F trên trục chính (F là tiêu điểm ảnh của kính). Mắt người quan sát đặt tại M trên trục chính ở trước F một đoạn a và điều chỉnh sao cho ảnh của một vật phẳng nhỏ AB mà mắt nhìn thấy ở cách mắt một khoảng l. Hãy chứng minh là độ bội giác thu được là

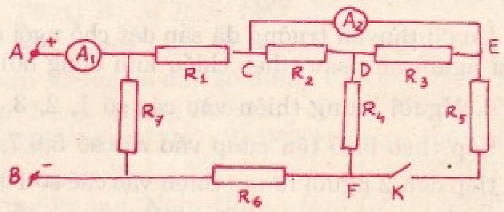


$$G = \frac{D}{f}\left(1 + \frac{a}{l}\right)$$

D là khoảng nhìn rõ ngắn nhất của mắt người quan sát và f là tiêu cự của kính lúp. Suy ra có mấy trường hợp mà độ bội giác bằng $\frac{D}{f}$?

PHAN TUẤN KHANH

Bài L2/200 : Cho mạch điện như hình vẽ.



$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$

$R_5 = R_6 = 3R$; $R_7 = 5R$

Bỏ qua điện trở của dây nối, khóa K và ampe kế. Khi K mở, ampe kế A_1 chỉ $2A$. Hãy tính :

1) Số chỉ của các ampe kế A_1 và A_2 khi K đóng

2) Với $R = 21\Omega$ hãy tính U_{AB}

LẠI THẾ HIỂN

Chú ý : Cuộc thi giải toán thường kì năm 1994 vẫn tiến hành bình thường song song với cuộc thi giải toán đặc biệt.

PROBLEMS OF THIS ISSUE

For Lower secondary schools

T1/200. Does it exist a positive integer number with 4 last digits that are 1994 and that number is divisible by 1993.

DANG HUNG THANG

T2/200. Find all polynomials $P(x)$ with non – negative integer coefficients (all smaller than 6) such that $P(6) = 1994$

NGUYEN DUC TAN

T3/200. Let I be a incenter of triangle ABC and $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Prove that $a\,IA^2 + b\,.\,IB^2 + c.IC^2 = abc$

PHAM NGOC QUANG

For Upper secondary schools

T4/200. Show that for every natural number $N \geq 1$, the following inequality

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)\,2^n} < 1 - ln2$$

holds.

DAM VAN NHI

T5/200. Find all functions $f : [0,1]\ [0,1]$ such that

1) $f(x_1) \neq f(x_2)$ for $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in [0,1]$
2) $2x - f(x) \in [0,1]\ \ \forall x \in [0,1]$
3) $f(2x - f(x)) = x \quad \forall x \in [0,1]$

HA HUY VUI

T6/200. For a positive integer n, find all polynomials $P(x)$ of degree $2n + 1$ such that every graf $y = P^{(2k)}(x)$ (where $P^{(2k)}(x)$ - $2k$ times derivate of $P(x)$ $\forall k \in N$) has centers of symetry

NGUYEN VAN MAU

T7/200. Let k and n be posotive integers and $k \leq n$. The following operation is caried :

For each time, k consecutive coordinates $(x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_{j+k})$ of ordeved n-tuple $(x_1, x_2, ... x_n)$ are changed by oposite sign coordinates $(-x_{j+1}, -x_{j+2}, ..., -x_{j+k})$.

T is a set of all n - tuyles $(t_1, t_2, ... t_n)$ with the following properties :

1) If $(t_1, t_2, ..., t_n) \in$ T then $t_i \in \{-1, 1\}$ $\forall i = \overline{1,n}$

2) For every $(t_1, t_2 ..., t_n) \in T$ it exists a finite number of operations after that it can be obtained n-tuple $(\underbrace{1, 1, ... 1}_{n})$.

Find # T.

NGUYEN KHAC MINH

T8/200. Show that for 3 arbitrary vectors of lengths not greater than 1, it can be chosen 2 vectors such that either vector of theor sum or vector of their difference will have length not greater than 1.

NGUYEN HUY DOAN

T9/200. Consider the triangle ABC, its circumcircle k of center O and radius R and its incirle of center I and radius r. Another circle k_0 is tangent to the sides CA, CB, at D, E, respectively and it is internal tangent to k.

Show that the incenter I is the midpoint of DE.

ESP$_1$ (IMO – 1993)

T10/200. Given tetrahedron $ABCD$ with $BC = DA$, $CA = DB$, $AB = DC$ and given a poind M. Prove that the square of the distance from M to one of 4 vertexes of $ABCD$ is not greater than sum of square of distances from M to other 3 vertexes.

NGUYEN DANG PHAT

CON SỐ 73 KÌ LẠ

(Tiếp theo trang 9)

Hãy lấy một bội số bất kì của 73. Chẳng hạn $18834 = 73 \times 258$. Tách số này thành hai phần

– số tạo thành bởi hai chữ số cuối : 34 ;

– số tạo thành bởi các chữ số còn lại : 188.

Bình phương hai số mới này : $34^2 = 1156$, $188^2 = 35344$. Tổng của hai bình phương này lại là một bội số của 73. Thật vậy

$1156 + 35.344 = 36500 = 73 \times 500$.

Dĩ nhiên bạn có thể giải trí bằng cách chứng tỏ rằng các số khác không có tính chất này. Tuy nhiên 73 không phải là con số duy nhất có tính chất đó. Còn có một số nữa, gồm 3 chữ số. Bạn có thể tìm ra số này không.

ĐÀO TRỌNG QUANG (sưu tầm)

ĐỀ RA CỦA CUỘC THI ĐẶC BIỆT

Chào mừng 30 năm Tạp chí Toán học và tuổi trẻ

A – CÁC LỚP PTCS

Bài 1/PTCS : Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$5(a^3 + b^3 + c^3 + ab + bc + ca) + 3abc \geq \frac{7}{3}$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG

Bài 2/PTCS : Xét tập hợp tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho tam thức bậc hai $ax^2 - bx + c$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(0, 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của a, của b và của c.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài 3/PTCS : Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 - y^2 + 3930x - 3989y = 120464$$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài 4/PTCS : Có 17 học sinh giỏi được dự liên hoan, mỗi người đều quen với ít nhất 4 người khác (Nếu A quen B thì đương nhiên B cũng quen A). Họ có ý định sắp xếp ngồi chung quanh một bàn tròn sao cho mỗi người đều ngồi cạnh hai người quen. Hỏi có khi nào không thể thực hiện được ý định đó hay không, tại sao ?

ĐẶNG VIỄN

Bài 5/PTCS : Một đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và cũng tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt ở P và Q.

a) Chứng minh rằng trung điểm của PQ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Hãy nêu cách dựng đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn (ABC) và tiếp xúc với hai cạnh AB, AC của ΔABC.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

B – CÁC LỚP PTTH

Bài 1/PTTH : Tìm tất cả các cặp (x, y) với x và y nguyên thỏa mãn phương trình :

$$x^2 - 2y^2 + 10xy = 1$$

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài 2/PTTH : Cho $x, y, z, t \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$M = \frac{\dfrac{y+t}{x+z} + \dfrac{z+t}{t+x}}{\dfrac{y+z}{x+y} + \dfrac{x+z}{y+t}}$$

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài 3/PTTH : Giải phương trình hàm

$$f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$$

trên tập các hàm liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$

NGUYỄN XUÂN HUỲNH

Bài 4/PTTH : Cho ΔABC. Dựng các tam giác đồng dạng với tam giác ABC :

$\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta A_2BC_2 \backsim \Delta A_3B_3C \backsim \Delta ABC$. *Kí hiệu* A_o, B_o, C_o *lần lượt là trung điểm các đoạn* A_2A_3, B_3B_1, C_1C_2.

Chứng minh rằng $\Delta A_oB_oC_o \backsim \Delta ABC$.

(Các đỉnh của cả 4 tam giác đều được lấy theo chiều ngược kim đồng hồ)

TẠ HỒNG QUẢNG

Bài 5/PTTH : Trong không gian cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng.

a) Chứng minh rằng tồn tại một tam giác $(\mathbb{C})$ có độ dài các cạnh là

$BC + DA$, $CA + DB$ và $AB + DC$.

b) Hỏi bốn điểm A, B, C, D phải sắp đặt như thế nào trong không gian để tam giác $(\mathbb{C})$ là vuông ?

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Chú ý : Mỗi bài giải viết riêng trên một mảnh giấy có để họ tên và địa chỉ.

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

Cách giải phương trình và bất phương trình bậc hai chứa tham biến và thỏa mãn điều kiện phụ

NGÔ THÚC LANH

Phép giải nhiều phương trình thường dựa đến việc giải những phương trình bậc hai chứa tham biến và thỏa mãn điều kiện phụ.

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$(\lg\sin x)^2 - 2m\lg\sin x - m^2 + 2 = 0$$

Để giải phương trình này trước hết ta chú ý rằng để cho phương trình có nghĩa, ta phải có $0 < \sin x$. Với điều kiện đó, đặt $t = \lg\sin x$, ta được phương trình $t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0$. Vì $0 < \sin x \leq 1$ khi và chỉ khi $\lg\sin x \leq 0$, nên phương trình đã cho tương đương với hệ hỗn hợp

$$\begin{cases} t = \lg\sin x \ (2k\pi < x < (2k+1)\pi) \\ t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0 \\ t \leq 0 \end{cases}$$

Như vậy phép giải phương trình đã cho dựa đến phép giải hệ hỗn hợp

$$\begin{cases} f(t) = t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0 \\ t \leq 0 \end{cases}$$

Đó là một phương trình bậc hai đối với t, chứa tham biến m và thỏa mãn điều kiện $t \leq 0$.

Thí dụ 2. Giải bất phương trình

$$4^{\sin x} + (m-1)2^{1+\sin x} - m^2 > 0$$

Để giải bất phương trình này ta đặt $2^{\sin x} = t$. Với chú ý rằng $\frac{1}{2} \leq 2^{\sin x} \leq 2$, ta đi tới hệ tương đương

$$\begin{cases} t^2 + 2(m-1)t - m^2 > 0 \\ \frac{1}{2} \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Đây là một bất phương trình bậc hai đối với t chứa tham biến m và thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$.

Dưới dạng tổng quát, bài toán đặt ra như sau :

Giải phương trình (bất phương trình) bậc hai

$$f(t) = at^2 + bt + c = 0 \ (f(t) = at^2 + bt + c > 0)$$

trong đó các hệ số a, b, c phụ thuộc tham biến m, với điều kiện $\alpha \leq t \leq \beta$.

Để giải bài toán này, ta phải so sánh α và β với các nghiệm của phương trình hoặc bất phương trình đã cho, rồi từ đó rút ra các nghiệm thỏa mãn điều kiện đã cho.

Cơ sở của việc so sánh một số α với các nghiệm của tam thức bậc hai $f(t) = at^2 + bt + c$ là định lí sau

Cho tam thức bậc hai

$$f(t) = at^2 + bt + c \,;\, a, b, c \in R \ (a \neq 0)$$

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, $\frac{s}{2} = -\frac{b}{2a}$

Điều kiện ắt có và đủ để cho các nghiệm t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ *của tam thức f(t) tồn tại và*

I – Cả hai đều nhỏ hơn số thực là

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \alpha - \frac{s}{2} > 0 \end{cases}$$

II – Cả hai đều lớn hơn số thực α là

$$\Delta \geq 0$$
$$af(\alpha) > 0$$
$$\alpha - \frac{s}{2} < 0$$

III – Thỏa mãn điều kiện $t_1 < \alpha < t_2$ *là*

$$af(\alpha) < 0$$

Các điều kiện trên đây có ý nghĩa hình học như sau

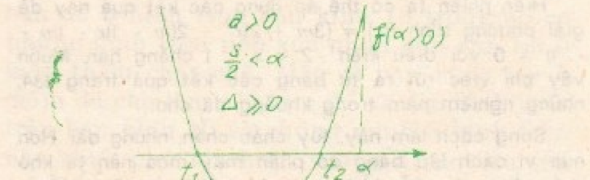
1) Dấu của biệt thức Δ xác định vị trí của đường parabol $y = at^2 + bt + c$ đối với trục hoành. Điều kiện $\Delta \geq 0$ chứng tỏ rằng đường parabol $f(t)$ có hai hay một điểm chung với trục hoành.

2) Dấu của hệ số a xác định chiều các nhánh của đường parabol.

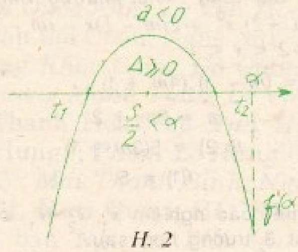
3) Dấu của $f(\alpha)$ xác định điểm $(\alpha, f(\alpha))$ của đường parabol nằm trên hay nằm dưới trục hoành.

4) Dấu của hiệu $\alpha - t_o$ xác định vị trí của hoành độ của đỉnh đường parabol đối với điểm α.

Trường hợp I được minh họa hình học như sau

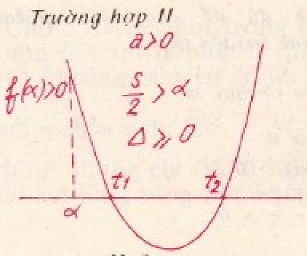


H. 1

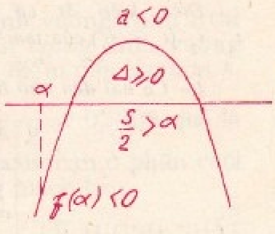


H. 2

Trường hợp II

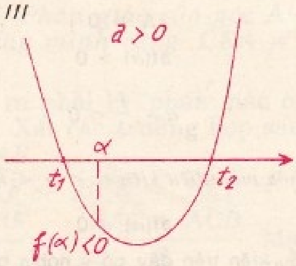


H. 3

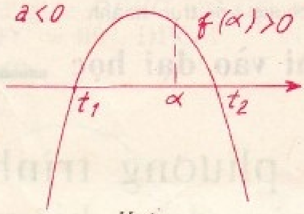


H. 4

Trường hợp III



H. 5



H. 6

SGK Đại số 10 của nhóm tác giả ĐHSP HN đã đưa ra bài toán : "*So sánh các số −2 và 1 với các nghiệm của phương trình*

$(3m + 2)\,x^2 - 2(m - 1)x - (m - 1) = 0.$

(Thí dụ 3, trang 133)

Để giải bài toán này, SGK đã xét dấu của

Δ', $af(-2)$, $\frac{s}{2} - (-2)$, $af(1)$, $x_o - 1$

Rồi áp dụng định lí đã nêu ở trên để suy ra bảng biện luận và kết quả trang 134.

Hiển nhiên ta có thể áp dụng các kết quả này để giải phương trình $f(x) = (3m + 2)x^2 - 2(m - 1)x - (m - 1) = 0$ với điều kiện $-2 < x < 1$ chẳng hạn. Muốn vậy chỉ việc rút ra từ bảng các kết quả trang 134, những nghiệm nằm trong khoảng đã cho.

Song cách làm này, tuy chắc chắn, nhưng dài. Hơn nữa vì cách lập bảng có phần máy móc nên ta khó thấy được ý nghĩa hình học của mỗi bước. Qua thí dụ dưới đây ta sẽ thấy cách giải phương trình bậc hai chứa tham số và thỏa mãn điều kiện phụ như thế nào.

Ta lấy lại bài toán : *Giải phương trình* $f(x) = (3m + 2)\,x^2 - 2(m - 1)x - (m - 1) = 0$ *với điều kiện* $-2 < x < 1$.

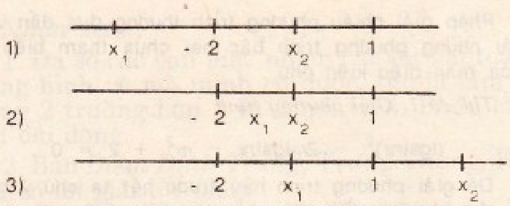
Ta có $\Delta' = (m - 1)\,(4m + 1)$

$a = 3m + 2$

$f(-2) = 5(3m + 1)$

$f(1) = 5.$

Với giả thiết các nghiệm x_1, x_2 $(x_1 \leq x_2)$ tồn tại, ta chỉ cần xét 3 trường hợp sau :



Trong các trường hợp 1) và 2) 1 ở ngoài khoảng hai nghiệm. Vậy ta phải có $af(1) > 0$, vì $f(1) = 5$ nên $a > 0$.

Trong trường hợp 3), 1 nằm trong khoảng hai nghiệm, vậy ta phải có $af(1) < 0$ hay $a < 0$.

$a < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{3}$. Trong trường hợp này (3)) vì $af(1) < 0$ nên chắc chắn phương trình có 2 nghiệm và 1 nằm giữa hai nghiệm. Như vậy trong trường hợp này chỉ nghiệm x_1 thích hợp.

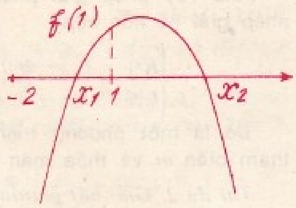
Đoán nhận hình học

$a > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$

Để phương trình có nghiệm ta phải có

$\Delta' = (m - 1)\,(4m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{4}$

hoặc $m \geq 1$.

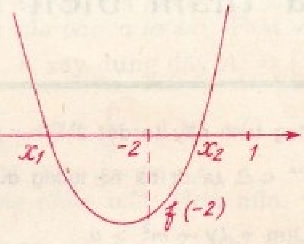


H. 7

Với điều kiện này, ta có

● *Trường hợp 1* :

$f(-2) < 0 \Leftrightarrow 3m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$



H. 8

Vì $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$, nên trong trường hợp này ta phải có $-\frac{2}{3} < m < -\frac{1}{3}$

Với các điều kiện này, phương trình có một nghiệm, cụ thể là x_2 thỏa mãn điều kiện $-2 < x < 1$.

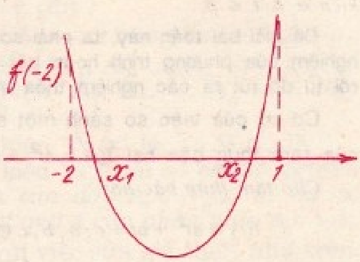
● *Trường hợp 2*

$f(-2) > 0 \Leftrightarrow 3m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.

Phối hợp với các điều kiện $m \leq -\frac{1}{4}$ và $m \geq 1$, ta được hai nhóm điều kiện

$-\frac{1}{3} < m \leq -\frac{1}{4}$ và $m \geq 1$

Với các điều kiện này, phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện thuộc $(-2\ ;\ 1)$.



H. 9

Ta hãy áp dụng phương pháp trên đây để giải các bài toán cho trong Thí dụ 1 và Thí dụ 2 trên kia.

Thí dụ 1 : Giải phương trình

$$(\lg\sin x)^2 - 2m\lg\sin x - m^2 + 2 = 0$$

Giải. Đặt $t = \lg\sin x$ $(2k\pi < x < (2k+1)\pi)$, như đã trình bày ở trên, ta đi tới hệ hỗn hợp

$$\begin{cases} t^2 - 2mt - m^2 + 2 = 0 \\ t \leqslant 0 \end{cases}$$

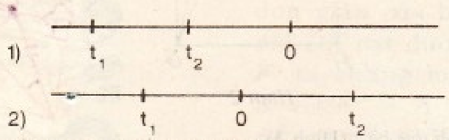
Xét tam thức bậc hai

$$f(t) = t^2 - 2mt - m^2 + 2$$

ta có

$$a = 1$$
$$s/2 = m$$
$$\Delta' = 2(m^2 - 1)$$
$$f(0) = -m^2 + 2$$

Với điều kiện các nghiệm t_1 và t_2 tồn tại $(t_1 \leqslant t_2)$, ta chỉ cần xét các trường hợp sau :



Vì $a = 1 > 0$ nên đường parabol $y_2 = f(t)$ quay bề lõm về phía trên. Do đó

Trường hợp 1. Ta phải có

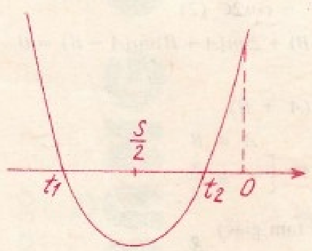
$$\begin{cases} \Delta' \geqslant 0 \\ \dfrac{s}{2} < 0 \\ f(0) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta' = 2(m^2 - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow m \leqslant -1 \text{ hoặc } m \geqslant 1 \\ \dfrac{s}{2} = m < 0 \\ f(0) = -m^2 - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leqslant m \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$$

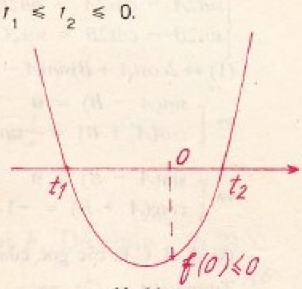
Từ đó suy ra

$$-\sqrt{2} \leqslant m \leqslant -1$$

Với các điều kiện trên phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $t_1 \leqslant t_2 \leqslant 0$.



H. 10



H. 11

Trường hợp 2 : Ta phải có

$$f(0) \leqslant 0$$

Vì $a = 1 > 0$, nên $af(0) \leqslant 0$

Vậy trong trường hợp này, phương trình $f(t) = 0$ bao giờ cũng có hai nghiệm và chỉ nghiệm t_1 thỏa mãn điều kiện $t \leqslant 0$.

Ta có $f(0) = -m^2 + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow m \leqslant -\sqrt{2}$ hoặc $m \geqslant \sqrt{2}$

Trường hợp $m = -\sqrt{2}$ đã được xét ở trên. Vậy các điều kiện là $m < -\sqrt{2}$ hoặc $m \geqslant \sqrt{2}$

Với điều kiện này phương trình $f(t) = 0$ có một nghiệm cụ thể là t_1 thỏa mãn điều kiện $t \leqslant 0$.

Trở lại phương trình ban đầu, với mỗi nghiệm t thích hợp ta cần giải phương trình

$$t = \lg\sin x$$

ta được $\sin x = 10^t$

Từ đó suy ra

$$x = (-1)^n \arcsin 10^t + n\pi$$

Sau đây là bảng tổng kết các kết quả đã đạt được qua sự biện luận ở trên.

$m < -\sqrt{2} \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin 10^{m - \sqrt{2(m^2-1)}} + n\pi$

$-\sqrt{2} \leqslant m \leqslant -1 \Rightarrow x = (-1) \arcsin 10^{m \pm \sqrt{2(m^2-1)}} + n\pi$

$-1 < m < \sqrt{2} \Rightarrow$ vô nghiệm

$m \geqslant \sqrt{2} \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin 10^{m - \sqrt{2(m^2-1)}}$

Thí dụ 2. Giải bất phương trình

$$4^{\sin x} + (m-1)2^{1+\sin x} - m^2 > 0$$

Giải. Đặt $t = 2^{\sin x}$ và chú ý rằng $\frac{1}{2} \leqslant 2^{\sin x} \leqslant 2$.

ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} f(t) = t^2 + 2(m-1)t - m^2 > 0 \\ \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

Ta có

$$a = 1$$

$$\Delta' = (m-1)^2 + m^2 = 2m^2 - 2m + 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + m - 1 - m^2 = -\left(m^2 - m + \frac{3}{4}\right) =$$

$$= -\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] < 0$$

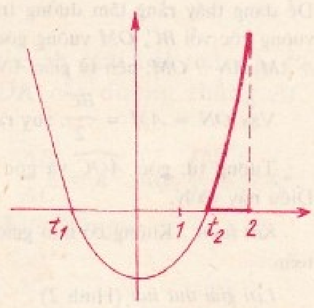
$$f(2) = 4 + 4m - 4 - m^2 = -m(m-4)$$

Vì $af\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, nên phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1 và t_2 $(t_1 < t_2)$, và $\frac{1}{2}$ nằm giữa hai nghiệm đó

t_1 $\frac{1}{2}$ t_2 2

Bất phương trình $f(t) > 0$ có tập nghiệm là $T = (-\infty, t_1) \cup (t_2, +\infty)$. Hệ đã cho sẽ có nghiệm nếu 2 nằm ngoài khoảng (t_1, t_2). Vậy ta phải có $f(2) = m(m-4) > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Với điều kiện này, tập nghiệm của hệ đã cho là $(t_2 ; 2)$



H. 12

Đoán nhận hình học

Quay về ẩn x, ta có

$$1 - m + \sqrt{2m^2 - 2m + 1} < 2^{\sin x} \leqslant 2$$

Từ đó

$$\log_2(1 - m + \sqrt{2m^2 - 2m + 1}) < \sin x \leqslant 1$$

Giải ra ta được, với điều kiện $0 < m < 4$

$$2\pi n + \arcsin\log_2(1 - m + \sqrt{2m^2 - 2m + 1}) < x <$$
$$< 2\pi n + \pi - \arcsin\log_2(1 - m + \sqrt{2m^2 - 2m + 1}).$$

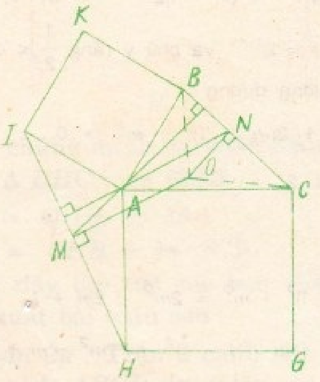
VỀ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

TRẦN THANH THIÊN

Dưới đây là một bài toán thi vô địch Liên Xô (cũ), cách đây khoảng hơn 10 năm :

"Cho tam giác ABC. Trên ba cạnh của tam giác ABC, về phía ngoài tam giác ta dựng ba hình vuông. Xác định hình dạng của tam giác ABC nếu 6 đỉnh của ba hình vuông (không phải là đỉnh của tam giác) nằm trên một đường tròn" Xin giới thiệu với bạn đọc một số lời giải.

Lời giải thứ nhất (Hình 1)



Hình 1

Trước hết, bạn đọc có thể chứng minh được kết quả quen thuộc sau : Với hai hình vuông $ABKI$ và $ACGH$ nói trong đầu bài thì trung tuyến AM của tam giác AIH vuông góc với BC và trung tuyến AN của tam giác ABC vuông góc với IH. Đồng thời, ta cũng chứng minh được :

$$AM = \frac{BC}{2},\ AN = \frac{IH}{2}.$$

Trở lại bài toán : Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Giả sử 6 đỉnh của ba hình vuông thuộc đường tròn. Dễ dàng thấy rằng tâm đường tròn ấy chính là O. Vậy ON vuông góc với BC, OM vuông góc với IH. Từ đó suy ra, ON // AM, AN // OM, nên tứ giác $ANOM$ là hình bình hành.

Vậy $ON = AM = \dfrac{BC}{2}$, suy ra góc $\widehat{BOC}$ bằng 1 vuông.

Tương tự, góc $\widehat{AOC}$ và góc $\widehat{AOB}$ cùng bằng 1 vuông. Điều này vô lý.

Kết luận : Không có tam giác nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải thứ hai (Hình 2)

Chúng ta giả sử hình vuông thứ ba là $BCFE$. Dễ thấy $\Delta AFC = \Delta GBC$. (c.g.c), suy ra : $AF = GB$.

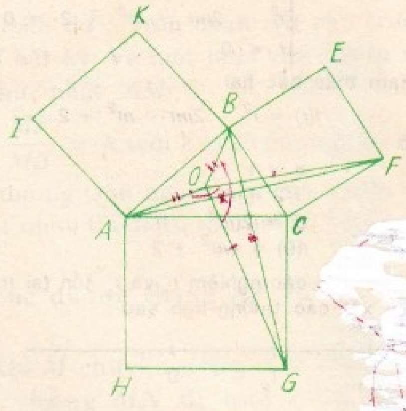
Mặt khác $OA = OB$, $OF = OG$, suy ra $\Delta AOF = \Delta BOG$.

Vậy : $AOF = BOG$. Từ đó : $\widehat{AOG} = \widehat{BOF}$, nên $\Delta AOG = \Delta BOF$ (c.g.c). Do đó $AG = BF$, suy ra :

$$AC = BC.$$

Hoàn toàn tương tự, $AC = AB$

Vậy tam giác ABC đều. Thử lại, nếu tam giác ABC đều thì đỉnh của ba hình vuông nằm trên một đường tròn.



Hình 2

Lời giải thứ ba : (Hình 3)

gọi P, Q là các trung điểm của AC, và HG. Hiển nhiên O, P, Q thẳng hàng và $OP \perp AC$, $OQ \perp HG$. Ta chọn chiều dương của trục OP theo hướng của vectơ $\overrightarrow{PQ}$.

Khi đó : $\overline{OP} = R\cos B$

(R là bán kính đường tròn (ABC). $\overline{PQ} = AC = 2R\sin B$

Vậy $OQ^2 = (OP + PQ)^2 = R^2(\cos B + 2\sin B)^2$

$= R^2(\cos^2 B + 4\cos B\sin B + 4\sin^2 B)$.

Ta lại có : $HQ^2 = (R\sin B)^2 = R^2\sin^2 B$

Vậy $OH^2 = R^2(\cos^2 B + 4\cos D\sin B + 5\sin^2 B)$

$= R^2(2\sin 2B - 2\cos 2B + 3)$

Tương tự : $OG^2 = R^2(2\sin 2A - 2\cos 2A + 3)$

$OK^2 = R^2(2\sin 2C - 2\cos 2C + 3)$

Do $OH = OG = OK$ nên :

$$\begin{cases} \sin 2A - \cos 2A = \sin 2B - \cos 2B & (1) \\ \sin 2B - \cos 2B = \sin 2C - \cos 2C & (2) \end{cases}$$

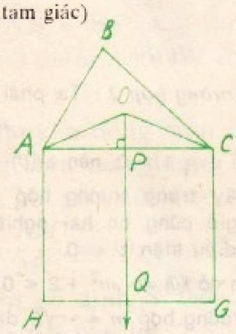
(1) $\Leftrightarrow 2\cos(A+B)\sin(A-B) + 2\sin(A+B)\sin(A-B) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(A-B) = 0 \\ \cos(A+B) = -\sin(A+B) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(A-B) = 0 \\ \cot g(A+B) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ C = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

(vì A, B, C là các góc của tam giác)

Tương tự : (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = C \\ A = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$



Hình 3

Vậy tam giác ABC chỉ có thể là tam giác đều hoặc là tam giác vuông cân. Dĩ nhiên, trong ba lời giải ít nhất hai lời giải sai.

Các bạn học sinh thử xét lời giải nào sai. Chúng tôi thiết nghĩ việc làm đó có thể giúp ích phần nào cho các bạn tránh các sai lầm trong việc giải các bài toán nói chung và các bài toán hình học phẳng nói riêng.

KẾT QUẢ PHIẾU THĂM DÒ

Trong số tạp chí tháng 7.1993 *Toán học và tuổi trẻ* có gửi đến bạn đọc Phiếu thăm dò. Ngày 24.7.1993 phiếu trả lời đầu tiên về đến tòa soạn và ngày 24.10.1993 phiếu thứ 115 và là phiếu cuối cùng đã đến tòa soạn.

Trả lời câu 1 có 23% số phiếu dành cho số báo 191 (5.1993) ; đó là số được nhiều người thích nhất. Số báo 181 (1.1992) được ít phiếu nhất (11%).

Trả lời câu 2, chuyên mục *Đề ra* nhận được 80% số phiếu, tiếp đến là *Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học, Đề thi, Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông* (78%). Mục *Ống kính cải cách dạy và học toán* nhận được ít phiếu nhất (47%).

Trả lời câu 3, có 35% cho rằng Đề ra là khó, 62% cho là vừa, 3% cho là dễ, 3% cho là hơi khó và có 2% cho đề Vật lí là dễ.

Trả lời câu 4, có 3% cho lượng đề ra là nhiều, 40% cho là ít và 55% cho là vừa, có 1% cho đề vật lí là ít.

Trả lời câu 5, có 61% đồng ý đưa Đề tin học vào và 39% phản đối.

Trả lời câu 6, có 47% cho hình thức tạp chí là *đẹp*, 49% cho là *trung bình* và 3% cho là *xấu*.

Trả lời câu 7, có 65% cho biết nhận được tạp chí vào *cuối tháng đó*, 19% nhận được vào *đầu tháng sau*, 15% nhận được *muộn hơn nữa*. (Đáng tiếc là trong số này lại có một số thư gửi từ các thành phố Hồ Chí Minh, Nam Định chứ không phải từ các vùng nông thôn hẻo lánh).

Trả lời câu 8, có 5 ý kiến đề nghị không thêm mục nào, 11 đề nghị thêm mục Danh nhân toán học, 10 đề nghị thêm Đề thi học sinh giỏi các nước, thêm Giai thoại toán học (5 ý kiến), thêm bài viết cho PTCS (5 ý kiến), thêm bài Tin học (6 ý kiến), thêm mục Hóa học (5 ý kiến), Học sinh tìm tòi (6 ý kiến), thêm bài Vật lí (5 ý kiến), Giải đáp thắc mắc (3 ý kiến), Lịch sử toán học (2 ý kiến), Diễn đàn kinh nghiệm giải toán (3 ý kiến), Dạy giải một loại toán trong SGK (2 ý kiến), Toán học đó đây, Nhìn ra nước ngoài...

Trả lời câu 9, có 28% đề nghị không bớt mục nào, có 9 ý kiến đề nghị bỏ mục Nụ cười toán học, 8 đề nghị bỏ Vật lí, 4 đề nghị bỏ Giải trí toán học, 4 đề nghị bỏ Ống kính CCDVHT, 3 đề nghị bỏ Bạn có biết, 2 đề nghị bỏ Tin học, 2 đề nghị bỏ Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán, 1 đề nghị bỏ Đề ra kì này (!)

Những bài được nhiều người thích hơn cả :

Ẩn sau định lí Ptôlêmê *(Lê Quốc Hán)*, Bạn biết gì xung quanh định lí Viét *(Đặng Hùng Thắng)*, Phương pháp hình học chứng minh bất đẳng thức, *(Phan Huy Khải)*, Tập dượt sáng tạo như thế nào, Hãy nhìn ra các gốc cái cơ bản trong sự đa dạng của các bài toán *(Lê Thống Nhất)*, Nhân một bài thi học sinh giỏi *(Hoàng Chúng)*, Một loại bài toán thường gặp trong các kì thi vào PTTH *(Nguyễn Thị Bính)*, Trở về cội nguồn môn Lượng giác *(Lê Quốc Hán)*, Cái gì ẩn đàng sau đường tròn Ơle *(Nguyễn Đăng Phất)*. Một vài phương pháp tính tổng *(Tạ Hồng Quảng)* Thực nghiệm toán học để tìm tòi *(Nguyễn Cảnh Toàn)*, Một giờ học định lí Pitago ở Pháp *(Vũ Hữu Bình)*... Có 3 ý kiến cho rằng bài nào cũng thích.

Trả lời câu 11, có 16% cho rằng không có bài nào không thích. Một số ý kiến chỉ cho tòa soạn biết những bài mình không thích.

Trả lời câu 12 có rất nhiều ý kiến. Nhiều ý kiến đề nghị tăng trang. Đề nghị thêm bài cho mục *Dành cho các bạn chuẩn bị thi đại học*, thêm bài cho PTCS, gắn với chương trình CCGD, đề ra còn khó và chưa phù hợp vì số đông đặt mục tiêu thi đại học ; ra tờ Vật lí riêng, Tin học riêng. Lại có ý kiến đề nghị thêm bài Vật lí, Tin học... Đề nghị báo ra sớm hơn, hình thức cần đẹp hơn. Một bạn ở Đà Lạt khen báo chất lượng hơn trước nhưng phàn nàn là cả Đà Lạt chỉ có 1 chỗ bán, một bạn ở Đông Triều, Quảng Ninh phải đạp xe tới Hải Dương mua báo...

Chúng tôi chân thành cảm ơn các bạn đã nhiệt tình gửi ý kiến góp ý của mình về tòa soạn. Ngay trong năm 1994 này chúng tôi đã có những thay đổi về nội dung và hình thức đáp ứng nguyện vọng của bạn đọc. Hy vọng rằng càng ngày THVTT càng bổ ích và đẹp hơn để phục vụ tốt hơn bạn đọc yêu toán trong cả nước.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

SÁCH MỚI CỦA NXB GIÁO DỤC

1. Giai thoại toán học (tập I 162 trang, giá $3200^{đ}$).

Nếu trong văn chương có "văn chương truyền khẩu" thì có lẽ trong Toán học cũng có những câu chuyện "Toán học truyền khẩu" kết hợp tài tình, đầy sáng tạo cái "tư duy lôgic" với chất "hải", chất "lãng mạn" bằng một nghệ thuật độc đáo. Trong tập sách này, tác giả đã tập hợp những câu chuyện toán học có liên quan đến các truyền thuyết, sự tích lịch sử, phong tục, giai thoại về cuộc đời các danh nhân... được lưu truyền trong dân gian, trong sách vở...

Cuốn sách sẽ đem đến cho bạn đọc những phút giải trí bổ ích, những phát hiện thú vị, bất ngờ về các màu sắc phong phú của thiên nhiên, lịch sử, phong tục xã hội, địa lí nhiều vùng khác nhau trên thế giới. Nội dung toán học được cài đặt khéo léo, tưởng là khó mà hóa dễ, tưởng là dễ mà lại hóa ra cũng khó... Đó cũng là điều mà tác giả – Nhà giáo Phan Thanh Quang – muốn mang đến cho bạn đọc.

2. Bất đẳng thức (172 trang, giá $5400^{đ}$).

Đây là cuốn đầu tiên trong TỦ SÁCH CHUYÊN TOÁN CẤP 3 mà Nhà xuất bản Giáo dục bắt đầu tổ chức biên soạn để phục vụ các thầy giáo, học sinh các lớp chọn, chuyên Toán nhằm cung cấp cho học sinh hệ thống kiến thức cơ bản và nâng cao ở mức độ thích hợp theo các chuyên đề, cung cấp hệ thống các bài toán cùng phương pháp giải nhằm tạo điều kiện rèn luyện tư duy và khả năng độc lập, sáng tạo toán học.

Cuốn sách do GS Phan Đức Chính biên soạn gồm các chương về những bất đẳng thức quan trọng, bất đẳng thức lượng giác, bất đẳng thức hình học, bất đẳng thức giải tích. Phần phụ lục trình bày một số vấn đề đặc biệt như bất đẳng thức Nesbit, đa thức Tsêbưsep, bài toán gieo n điểm và một hình vuông...

Tiếp theo cuốn *Bất đẳng thức* này là các cuốn *Phương pháp giải phương trình, bất phương trình* của GS Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp vectơ trong hình học, số phức...* của GS Nguyễn Đăng Phất, GS Đoàn Quỳnh... sẽ lần lượt ra mắt bạn đọc.

3. Xây dựng hình học bằng phương pháp tiên đề (180 trang, giá $4500^{đ}$)

Cuốn sách giúp bạn đọc hiểu rõ những vấn đề cơ bản của việc xây dựng Hình học bằng phương pháp tiên đề, một phương pháp quan trọng được dùng để xây dựng các bộ môn toán học hiện đại. Phương pháp này đã ra đời cách đây hơn hai ngàn năm và đã được hoàn thiện song song với sự phát triển của Hình học Oclit cùng sự ra đời của các môn Hình học khác. Ngày nay, phương pháp tiên đề đã từ Hình học lan rộng phát huy ảnh hưởng sang nhiều ngành Toán học khác, kể cả tin học và nhiều bộ môn khoa học xã hội khác.

Cuốn sách do tác giả Nguyễn Mộng Hy biên soạn nhằm phục vụ cho sinh viên toán các trường Đại học, Cao đẳng, các giáo viên toán trường phổ thông trung học cơ sở và phân ban cùng những người ham thích toán học... Sách gồm các chương về lịch sử của việc xây dựng hình học, hệ tiên đề của hình học Oclit, hệ tiên đề của hình học Lôbasepxki, giới thiệu một số hệ tiên đề trong xây dựng hình học...

V.D.T.

ISSN : 0866 - 8035 - Chỉ số 12884. Mã số : 8H 119 M4.
In tại xưởng in Nhà xuất bản Giáo dục
In xong và gửi lưu chiểu tháng 2/1994
Giá : 1200đ
Một nghìn hai trăm đồng