Viết Hùng https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

3
1987
Số 155

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập : Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập : Ngô Đạt Tứ

Trụ sở : 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói : 52825

CON ĐƯỜNG TỪ... HÀM SỐ LÔGARIT ĐẾN... HÀM SỐ MŨ

VŨ DƯƠNG THỤY

CHO đến nay, những hiểu biết ban đầu về lôgarit được trình bày từ một bảng so sánh giữa một cấp số cộng và một cấp số nhân. Việc so sánh này được nêu ra đã lâu, từ trước cả năm 1614 là năm xuất bản bảng lôgarit đầu tiên — một công trình lao động bền bỉ suốt 34 năm trời của J. Nêpe. Chẳng hạn, có thể tìm thấy trong tác phẩm « Nguồn gốc số học » (1472) của nhà toán học Irăng An Kasi, hoặc, chi tiết hơn, trong cuốn « Số học thuần túy » của Mikhain Stiphen, ở đó có bảng :

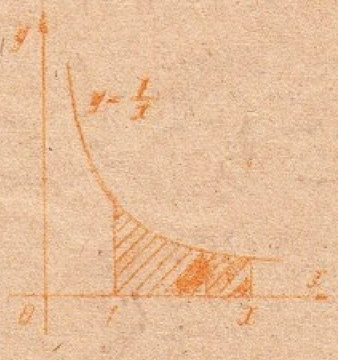
−3	−2	−1	0	1	2	3	4
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16

dòng trên là một cấp số cộng, dòng dưới là một cấp số nhân.

Trong các công trình của nhiều nhà toán học ở thế kỷ XVII, như Xen Vinxen (1647), Phecma (1657), Meccatô (1668) đã nêu sự liên hệ giữa giá trị $\log x$ với diện tích của một hình được giới hạn phía dưới bởi một phần của trục hoành từ 1 đến x, hai bên bởi những phần của đường thẳng song song với trục tung, còn phía trên bởi một phần của nhánh hypecbôn $y = 1/x$ (phần có kẻ gạch ở hình 1). Sự liên hệ này được biểu thị bởi công thức :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Trong bài giảng nổi tiếng « Toán sơ cấp với quan điểm cao cấp » năm 1907 — 1908, Klây đã đề nghị dùng công thức này làm cơ sở để xây dựng lý thuyết lôgarit trong giáo trình toán phổ thông. Còn định nghĩa hàm số lôgarit như là hàm số ngược của hàm số mũ như ở trường phổ thông hiện nay được Ơle nêu ra năm 1748



Hình 1

trong cuốn « Nhập môn giải tích vô hạn ». Như vậy là phải trải qua 134 năm kể từ khi lôgarit được đề nghị đưa ra sử dụng (1614), chúng ta mới xác định định nghĩa lôgarit làm cơ sở cho giáo trình toán phổ thông.

Bài báo này trình bày *lý thuyết hình học của lôgarit* dựa theo quan điểm của Klây. Nó không đòi hỏi những hiểu biết về tích phân cũng như giới hạn, mà chủ yếu chỉ cần đến những kiến thức ở lớp đầu bậc PTTH. Khái niệm lôgarit được định nghĩa bằng hình học cho phép suy ra ngay được một số tính chất của nó đồng thời còn cho phép từ đó suy ra khái niệm và tính chất của lũy thừa.

Để đơn giản, chúng ta chỉ giới hạn ở hệ thống lôgarit với cơ số lớn hơn 1. Nhờ công thức

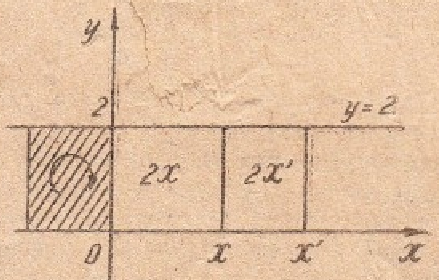
$$\log_a x = \ln x/\ln a$$

mà định nghĩa lôgarit với cơ số $a > 1$ (xem mục 3) được áp dụng cho cả trường hợp $0 < a < 1$.

1. Hàm số biểu diễn diện tích một hình

Trước hết ta đi từ một hàm số đơn giản nhất (hàm hằng) cùng đồ thị của nó để đến một hàm số khác biểu diễn diện tích một hình.

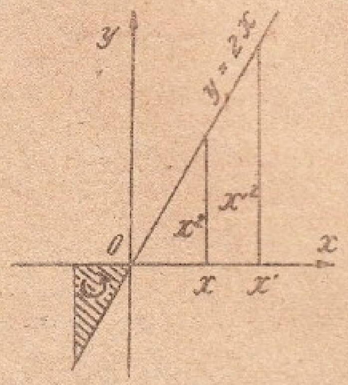
Trên hình 2 biểu diễn đường thẳng $y = 2$ song song với trục Ox. Cứ với mỗi giá trị dương x đều ứng với tung độ bằng 2 và với diện tích hình chữ nhật $2x$. Như vậy, diện tích các hình chữ nhật trên hình 2 được biểu diễn bởi hàm số bậc nhất $y = 2x$.



Hình 2

Ta chuyển sang hình 3 biểu diễn đường thẳng $y = 2x$. Với mỗi giá trị dương x tùy ý đều ứng với không những tung độ $2x$ mà cả diện tích tam giác vuông $1/2 \cdot x \cdot 2x = x^2$. Do đó diện tích các tam giác trên hình 3 được biểu diễn bởi hàm số $y = x^2$.

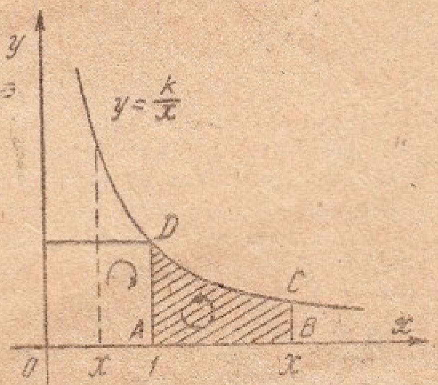
Trong hai thí dụ trên, ta giả thiết $x > 0$. Nếu $x < 0$ thì ở trường hợp thứ nhất, diện tích hình chữ nhật tương ứng là âm ($2x < 0$), còn trong trường hợp thứ hai, diện tích tam giác là dương ($x^2 > 0$). Để xác định dấu cho mọi trường hợp ta qui ước: đi từ gốc O đến điểm có hoành độ x và tiếp tục theo chu vi của hình, nếu ngược chiều kim đồng hồ thì diện tích được xem là dương còn nếu cùng chiều kim đồng hồ thì xem là âm. Như vậy, ở hai thí dụ trên, hàm số $2x$ và x^2 biểu diễn diện tích ứng với cả trường hợp $x < 0$.



Hình 3

2. Hàm số lôgarit

Bây giờ ta khảo sát đồ thị hàm số $y = k/x$ và chỉ giới hạn ở giá trị k dương. Trên hình 4 là đồ thị hàm số $y = 1/x$ với $x > 0$.



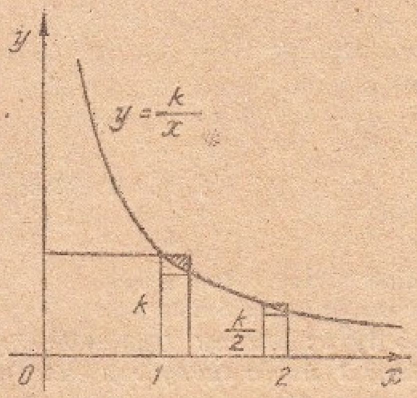
Hình 4

Chúng ta xem diện tích hình $ABCD$ là một hàm số của x. Ở đây, ta bắt đầu tính trên trục Ox từ điểm A có hoành độ 1.

Diện tích hình này xác định một hàm số mới gọi là *hàm số lôgarit* của x, kí hiệu: $\log x$.

Từ định nghĩa này suy ra ngay được rằng $\log x$ dương khi $x > 1$ và âm khi $x < 1$. Đương nhiên khi $x = 1$ thì diện tích hình bằng 0: $\log 1 = 0$. Chú ý rằng khi x tăng thì diện tích hình cũng tăng: $\log x$ tăng theo x.

Ta có thể tính giá trị gần đúng của $\log x$ với độ chính xác cho trước. Chẳng hạn, ta phải tính $\log 2$. Muốn vậy, ta chia đoạn [1; 2] trên Ox



Hình 5

(hình 5) thành một số phần bằng nhau, chẳng hạn làm 10 phần, tương ứng với 10 đường vạch song song với Oy. Để tính gần đúng, ta tính diện tích các hình chữ nhật được giới hạn bởi các đường vạch. Nếu chọn chiều cao là tung độ ứng đường vạch bên trái, ta có số đo diện tích gần đúng thừa, còn nếu chọn là đường vạch bên phải, ta được giá trị gần đúng thiếu. Kết quả ta có hai *hình bậc thang* mà giá trị log2 gồm giữa các số đo diện tích hai hình này. Biết chiều ngang mỗi hình chữ nhật là 0,1, ta có giá trị gần đúng thiếu bằng :

$$0{,}1\left(\frac{k}{1{,}1} + \frac{k}{1{,}2} + \frac{k}{1{,}3} + \frac{k}{1{,}4} + \frac{k}{1{,}5} + \frac{k}{1{,}6} + \frac{k}{1{,}7} + \frac{k}{1{,}8} + \frac{k}{1{,}9} + \frac{k}{2}\right) \approx$$

$$\approx 0{,}1k(0{,}91 + 0{,}83 + 0{,}77 + 0{,}71 + 0{,}67 + 0{,}62 + 0{,}59 + 0{,}56 + 0{,}53 + 0{,}50) = 0{,}671k$$

Tương tự, giá trị gần đúng thừa bằng : $0{,}721k$. Như vậy $0{,}671k < \log 2 < 0{,}721k$

Giá trị trung bình cộng của hai kết quả cho ta

$$\log 2 \approx 0{,}696k$$

Nếu cạnh đáy của hình trên Ox không phải được chia làm 10 mà chia 100 phần thì sẽ được kết quả chính xác hơn 10 lần. Giá trị gần đúng của log2 với 5 chữ số thập phân là :

$$\log 2 \approx 0{,}69315k$$

Cũng như thế, ta có thể tính giá trị gần đúng lôgarit của các số khác. Chẳng hạn $\log 3 \approx 1{,}09861k$; $\log 5 \approx 1{,}60944k$; $\log 10 \approx 2{,}30259k$ v.v...

Ta còn có thể tính được lôgarit của những số nhỏ hơn 1, biết rằng giá trị đó âm, như

$\log 0{,}1 \approx -2{,}30259k$; $\log 0{,}2 \approx -1{,}60944k$; $\log 0{,}5 \approx -0{,}69315k$ v.v...

Nếu ta chọn hệ số k khác nhau, chẳng hạn là 1 ; 2 ; 5 ;..., thì sẽ được những hàm số lôgarit khác nhau và đều dựng được đồ thị của những hàm số ấy.

Đồ thị một hàm số lôgarit là một đường cong liên tục như đã trình bày trong sách giáo khoa toán phổ thông trung học.

3. Cơ số

Với $k = 1$, ta được *lôgarit tự nhiên*, kí hiệu là ln (l và n là hai chữ đầu tiên của lôgarithmus và naturail). Theo kết quả ở trên $\ln 2 \approx 0{,}69315$; $\ln 3 \approx 1{,}09861$;... Nghĩa là $\ln x < 1$ với $x = 2$ và $\ln x > 1$ với $x = 3$, mà hàm số này lại tăng khi x tăng từ 2 đến 3. Cho nên, giữa 2 và 3 tất phải có một giá trị x để $\ln x$ đúng bằng 1. Có thể chứng minh rằng tồn tại giá trị đó. Nó bằng 2,71828..., được kí hiệu bởi chữ e và gọi là số Nêpe, tên nhà toán học xứ Ecốt thế kỷ XVII. Như vậy

$$e \approx 2{,}71828 \text{ và } \ln e = 1$$

Với hệ số k dương bất kỳ, ta dễ dàng thấy rằng : $\log x = k \ln x$.

Bây giờ ta có thể chọn k sao cho $\log x$ bằng 1 với giá trị cho trước nào đấy của $x > 1$. Chẳng hạn, nếu muốn được hàm số lôgarit nhận giá trị 1 ứng với $x = 10$ thì chỉ cần chọn k sao cho

$$\log 10 = k \ln 10 = 1$$

nghĩa là $k = 1 : \ln 10 \approx 1 : 2{,}30259 \approx 0{,}43429$. Khi đó, người ta gọi là *lôgarit thập phân*, ký hiệu lg.

Như vậy $\lg x \approx 0{,}43429 \ln x$. Chẳng hạn

$$\lg 2 \approx 0{,}43429 \ln 2 \approx 0{,}30103 ;$$
$$\lg 3 \approx 0{,}43429 \ln 3 \approx 0{,}47712 \text{ v.v...}$$

Nói chung, đối với số bất kỳ $a > 1$, có thể chọn được số k sao cho giá trị tương ứng của lôgarit bằng 1

$$\log a = k \ln a = 1$$

Khi $k = 1/\ln a$, ta có hàm số $\log x$ nhận giá trị 1 khi $x = a$. Ta ký hiệu là $\log_a x$, số a được gọi là *cơ số của lôgarit*. Như vậy

$$\log_a x = \ln x/\ln a \text{ và } \log_a a = 1.$$

Rõ ràng là chính lôgarit tự nhiên có cơ số 1, còn lôgarit thập phân có cơ số là 10.

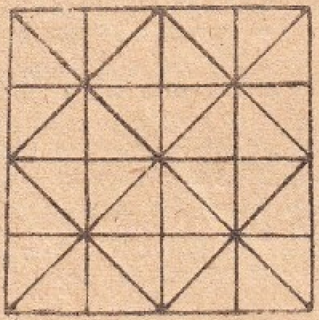
(Còn nữa)

GIẢI ĐÁP THẮC MẮC

VẼ BẰNG MẤY NÉT

VŨ ĐÌNH HÒA

VỪA qua tòa soạn báo « Toán học và tuổi trẻ » nhận được thư của tập thể chiến sĩ hòm thư 6B — 401 (Nghệ Tĩnh) hỏi rằng: *Cần bao nhiêu đường một nét để vẽ được hình sau:*



Hình 1

Về nguyên tắc lời giải bài toán này không khác lời giải bài toán 7 chiếc cầu ở thành Königsberg, một bài toán được Ơle giải quyết ở thế kỷ 18.

Trước hết ta phân loại các đỉnh của hình ra làm 2 loại, loại *đỉnh lẻ* và loại *đỉnh chẵn*.

Đỉnh lẻ là các đỉnh có một số lẻ đoạn xuất phát từ nó, và đỉnh chẵn là các đỉnh còn lại. Nếu vẽ một đường một nét không khép kín (tức là đỉnh đầu và đỉnh cuối phân biệt nhau) và tách nó ra khỏi hình, thì tính chẵn lẻ của 2 đỉnh đầu mút của đường thay đổi còn của các đỉnh khác được giữ nguyên. Từ đó suy ra nếu có thể vẽ hình 1 bằng các đường một nét thì ta cần ít nhất là 8 đường một nét như vậy. Ngoài ra các bạn có thể thấy rằng quả thật có thể vẽ được hình 1 bằng 8 đường một nét. Bằng lập luận tương tự ta thấy hiển nhiên:

Định lý 1: *Nếu một hình có 2n đỉnh lẻ thì cần không ít hơn n đường một nét để vẽ nó.*

Câu hỏi được đặt ra là liệu có thể vẽ một hình có $2n$ đỉnh lẻ bằng đúng n đường một nét không? Điều đó dễ dàng chuyển về câu hỏi tương đương rằng: liệu một hình không có đỉnh lẻ nào và liên thông (tức là từ một đỉnh có thể tới tất cả các đỉnh khác) có thể vẽ bằng một đường một nét kép kín không (bằng cách thêm vào giữa một cặp đỉnh lẻ một cạnh mới nối chúng)? Câu trả lời trong trường hợp này là có:

Định lý 2: *Mọi hình liên thông và không có đỉnh lẻ nào đều có thể vẽ được bằng đường một nét khép kín*

Ta chứng minh định lý này bằng cách sử dụng nguyên lý cực đại. Từ giả thiết liên thông ta suy ra tồn tại những đường một nét khép kín (không nhất thiết phải chứa tất cả các cạnh của hình). Bởi vì nếu xuất phát từ một đỉnh nào đó và đi theo các cạnh tới các đỉnh khác thì nhất định có lúc ta tới một đỉnh đã đi qua (nếu không thì đỉnh cuối cùng có đúng 1 cạnh xuất phát). Trong tất cả các đường một nét khép kín ta xét đường có nhiều cạnh nhất.

Bạn đọc có thể chứng minh dễ dàng rằng khi đó đường một nét này chứa tất cả các cạnh của hình. Để có thể chứng minh tiếp, các bạn tham khảo thêm lời giải bài toán 9/138 đăng trên tờ số 1/1985 báo « Toán học và tuổi trẻ ».

Tất nhiên có bạn sẽ hỏi « Vậy với những hình có $2n + 1$ đỉnh lẻ thì sao? ». Xin nhường cho các bạn chứng minh rằng mọi hình đều chỉ có một số chẵn đỉnh lẻ mà thôi.

Bài 1/152 *Cho 2 dãy số thực vô hạn* $\{u_n\}$ *và* $\{v_n\}$ *thỏa mãn các điều kiện*

1) $u_1 = 1985$, $v_1 = 1987$.

2) $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}$; $n = 1, 2, \ldots$

Chứng minh rằng

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant 2^{2^n}/2^n \text{ với mọi } n.$$

Lời giải: Vì $u_1 > 0$, $v_1 > 0$ suy ra $u_n > 0$, $v_n > 0$ $\forall n$.

Ta lại có

$$u_{n+1} - v_{n+1} = (u_n - v_n)^2/2(u_n + v_n) > 0$$

$\forall n = 1, 2, \ldots$, suy ra $u_k > v_k$ $\forall k = 2, 3, \ldots$

Vậy $0 < (u_k - v_k)/2(u_k + v_k) < 1$, $\forall k = 2, 3, \ldots$

Từ đó

$u_{k+1} - v_{k+1} = (u_k - v_k)^2/2(u_k + v_k) < u_k - v_k$

Vậy $u_{n+1} - v_{n+1} < u_n - v_n < \ldots < u_2 - v_2 = 1/1986 < 2$.

Mặt khác dễ thấy $2^n > 1 + n$ do đó

$$2^{2^n} \geqslant 2^{n+1} \Rightarrow 2^{2^n}/2^n \geqslant 2.$$

Bởi vậy

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant 2 \leqslant 2^{2^n}/2^n \quad \forall n = 1, 2\ldots$$

Đ.H.T.

Bài 2/152. *Cho các số thực $x_1, \ldots, x_n$:*

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1.$$

Ký hiệu $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$. Giả sử các số này thỏa mãn

$$\sum_{j=0,\ j\neq i}^{n+1} 1/(x_i - x_j) = 0$$

trong đó $i = 1, 2, \ldots, n$.

Chứng minh rằng $x_{n+1-i} = 1 - x_i$ đối với $i = 1, 2, \ldots, n$.

Lời giải: Gọi $P(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)(x - x_{n+1})$ và

$$P_k(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n+1} (x - x_i)$$

Dễ thấy $P'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} P_k(x)$ và

$$P''(x) = \sum_{\substack{j,k=0\\ k\neq j}}^{n+1} P_k(x)/(x - x_j)$$

Từ đó

$$P''(x_i) = \sum_{\substack{j,k=0\\ k\neq j}}^{n+1} P_k(x_i)/(x_i - x_j) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n+1} P_i(x_i)/(x_i - x_k) = 0$$

do điều kiện của đầu bài với $i = 1, 2, \ldots, n$.

Do đó $x(x-1)P''(x) = (n+2)(n+1)P(x)$ (1)

Dễ dàng thấy rằng chỉ tồn tại duy nhất một đa thức bậc $n+2$ với hệ số cao nhất bằng 1 thỏa mãn (1).

Mặt khác đa thức $Q(x) = (-1)^n . P(1-x)$ thỏa mãn phương trình (1). $Q(x)$ là đa thức bậc $n+2$ với hệ số cao nhất bằng 1. Vậy

$(-1)^n P(1-x) = P(x)$.

Từ đó và từ giả thiết

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$$

ta suy ra điều phải chứng minh

Nhận xét: Bài toán này chỉ có hai bạn gửi lời giải đến nhưng lời giải đều không đúng.

Đ.H.T

Bài 3/152: *Cho dãy số x_n, y_n được xác định theo qui luật:*

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}\sin^2\alpha$$
$$y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}\cos^2\alpha$$

với $x_o = 0$, $y_o = \cos\alpha$. Chứng minh rằng:

$$x_n y_n = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} C_{2n}^{2i-1}\sin^{2i}(2\alpha)$$

$$(C_n^p = n!/(n-p)!\,p!).$$

Lời giải: (của *Ngô Bảo Châu* — A_o10 ĐHTH).

Ta có $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}\sin^2\alpha \\ y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}\cos^2\alpha \end{cases}$

Nhân 2 vế của đẳng thức trên với $\cos\alpha$, của đẳng thức dưới với $\sin\alpha$ ta được

$$\begin{cases} x_n\cos\alpha = x_{n-1}\cos\alpha + y_{n-1}\sin\alpha \cdot \sin2\alpha \\ y_n\sin\alpha = y_{n-1}\sin\alpha + x_{n-1}\cos\alpha \cdot \sin2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n\cos\alpha + y_n\sin\alpha = \\ = (x_{n-1}\cos\alpha + y_{n-1}\sin\alpha)(1 + \sin2\alpha) \\ x_n\cos\alpha - y_n\sin\alpha = \\ = (x_{n-1}\cos\alpha - y_{n-1}\sin\alpha)(1 - \sin2\alpha) \end{cases}$$

Truy hồi dần đến x_o ta có

$$\begin{cases} x_n\cos\alpha + y_n\sin\alpha = \\ = (x_o\cos\alpha + y_0\sin\alpha)(1 + \sin2\alpha)^n \\ x_n\cos\alpha - y_n\sin\alpha = \\ = (x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha)(1 - \sin2\alpha)^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_n\cos\alpha + y_n\sin\alpha)^2 = \\ = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha(1 + \sin2\alpha)^{2n} \\ (x_n\cos\alpha - y_n\sin\alpha)^2 = \\ = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha(1 - \sin2\alpha)^{2n} \end{cases}$$

Trừ 2 đẳng thức trên theo vế thì có

$4x_n y_n \sin\alpha . \cos\alpha =$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\,[(1 + \sin2\alpha)^{2n} - (1 - \sin2\alpha)^{2n}]$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} C_{2n}^{2i-1}(\sin 2\alpha)^{2i-1}\right]$$

$$\Rightarrow x_n y_n = \frac{1}{4}\sin 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{n} C_n^{2i-1}(\sin 2\alpha)^{2i-1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n} C_n^{2i-1}(\sin 2\alpha)^{2i}\right] \qquad \text{(đ.p.c.m)}$$

Nhận xét: Các bạn gửi bài đến đều xuất phát từ việc tìm hệ số λ sao cho:

$$x_n + \lambda y_n = h(x_{n-1} + \lambda y_{n-1}).$$

Nhưng tiếp đó một số bạn biến đổi còn dài...

Đ.B.K.

Bài 4/152: *Hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn:*

1) $f(0) = 0$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

3) $f(x).f(2x^2) = f(2x^3 + x)$, $\forall x \in R$.

Chứng minh rằng $f(x) = 0$, $\forall(x) \in R$.

Lời giải: Từ 1) và 2) suy ra $\forall a > 0$ bé tùy ý, $\exists \varepsilon > 0$ sao cho có

$$|f(x)| \leqslant a \text{ với } |x| \leqslant \varepsilon. \qquad (a)$$

Kí hiệu T là số lớn nhất thuộc $[0, +\infty]$ thỏa mãn

$$|f(x)| \leqslant a \quad \forall |x| < T \qquad (b)$$

ta sẽ chứng minh $T = +\infty$.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $0 < T < +\infty$

Từ 3) suy ra nếu $x \in (-T, T) \cap (-\sqrt{T/2}, \sqrt{T/2})$ ta có:

$$|f(2x^3 + x)| = |f(x)f(2x^2)| \leqslant a^2 \leqslant a$$

Đặt $m = \min(T, \sqrt{T/2})$, ta có: $|f(x)| \leqslant a$ với tất cả $|x| < 2m^3 + m$. Theo định nghĩa của T suy ra $2m^3 + m \leqslant T$. (*)

Trong cả hai trường hợp $\min(T, \sqrt{T/2}) = T$ hoặc $\min(T, \sqrt{T/2}) = \sqrt{T/2}$ ta đều có $2m^3 + m > T$. Trong trường hợp $m = T$ bất đẳng thức $2m^3 + m > T$ là hiển nhiên còn trong trường hợp $m = \sqrt{T/2}$ thì

$$2m^3 + m = 2.T/2.\sqrt{T/2} + \sqrt{T/2} =$$

$$= \sqrt{T/2}(T + 1) \geqslant \sqrt{T/2}.2\sqrt{T} = \sqrt{2}.T > T,$$

mâu thuẫn với (*). Vậy $T = +\infty$

Như vậy (b) đúng cho mọi $a > 0$ bé tùy ý và x bất kỳ. Suy ra

$$f(x) = 0, \forall x \in R$$

V.Đ.H

Bài 5/152: *Giải phương trình:*

$$tg^2x + tg^2 2x + cotg^2 3x = 1 \qquad (*)$$

Lời giải: Điều kiện: $x \neq \pi/2 + k\pi$, $x \neq \pi/4 + k\pi/2$, $x \neq k\pi/3$

Ta có $$cotg\,3x = \frac{1 - tgx\,tg2x}{tgx + tg2x}$$

hay $tgx\,tg2x + tg2x\,cotg3x + cotg3x\,tgx = 1$

Vậy (*) $\Leftrightarrow tg^2x + tg^2 2x + cotg^2 3x = tgx\,tg2x + tg2x\,cotg3x + cotg3x\,tgx$

$\Leftrightarrow (tgx - tg2x)^2 + (tg2x - cotg3x)^2 + (cotg3x - tgx)^2 = 0$

$\Leftrightarrow tgx = tg2x = cotg3x$. Hệ phương trình này vô nghiệm.

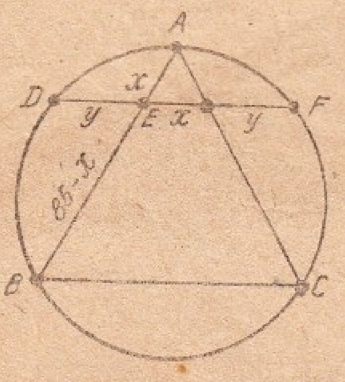
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét: Đa số các bạn đều giải theo cách này và có lời giải đúng. Một số bạn đi đến kết luận sai lầm rằng: $tgx = tg2x = cotg3x = 0$. Riêng bạn *Hoàng Công Bảo Đàm* (10CT Quốc học Huế) dùng bất đẳng thức để giải có hướng đúng nhưng còn nhầm lẫn.

Đ.B.K

Bài 6/152: *Cho $\triangle$ đều ABC có cạnh bằng 86. Trên cạnh AB lấy một điểm E cách A một khoảng x. Từ E vẽ ra phía ngoài tam giác một tia song song với BC. Tia này cắt cung chắn bởi AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Hãy tính độ dài y của ED, biết rằng x và y đều là các số nguyên dương.*

Lời giải:



DE kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại F.

Đặt $AE = x$, $DE = y$ ta có $EB = 86 - x$, $EF = x + y$. Theo tính chất phương tích có: $x(86 - x) = y(x + y)$ hay là $86x = x^2 + xy + y^2$ (1)

Do x, y là số tự nhiên, đặt $d = (x, y)$, suy ra tồn tại x_1, y_1 với $(x_1, y_1) = 1$ sao cho $x = dx_1$, $y = dy_1$. Thay vào (1) ta có

$$86dx_1 = d^2(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)$$

hay là: $86x_1 = d(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)$ (2)

Do $(x_1, y_1) = 1$ nên có $(x_1, x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) = 1$ và $x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2$ là số lẻ $\geqslant 3$, từ (2) có $86 \vdots (x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)$ nên có $43 = x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2$

Bằng cách thử trực tiếp $x_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ta có được 2 nghiệm $x_1 = 1, y_1 = 6$ và $x_1 = 6, y_1 = 1$. Thay vào (2) ta có 2 nghiệm:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 12 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 72 \\ y = 12 \end{cases}$$

Trong cả hai trường hợp ta đều có $y = 12$

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Đức Thành, Đoàn Anh Trung, Bùi Thành An*, (10 CT ĐHSP Vinh, 12CT Phan Bội Châu Nghệ Tĩnh), *Hà Huy Minh* và *Nguyễn Bảo Châu* ($A_0$10 ĐHTH HN) có lời giải tốt, tuy nhiên còn một vài thiếu sót nhỏ.

Các bạn khác giải sai hoặc không tới kết quả cuối cùng.

V.Đ.H

Bài 7/152. *Cho tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c còn độ dài bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R. Gọi S và p là diện tích và nửa chu vi của tam giác. Chứng minh rằng:*

$$4S^2 \leqslant a^2(p-b)(p-c) + b^2(p-a)(p-c) + c^2(p-a)(p-b) \leqslant p^2R^2$$

Lời giải: Các bạn *Hà Huy Minh, Ngô Văn Minh* (10 ĐHTH Hà Nội) *Nguyễn Đức Thành* (10 ĐHSP Vinh) có lời giải đúng.

Lời giải sau dựa theo lời giải của hai bạn Minh.

Ta có $S = abc/4R$ và $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ cho nên $p^2R^2 = pa^2b^2c^2/16(p-a)(p-b)(p-c) =$

$= a^2b^2c^2 . S^2/16(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2$

còn

$a^2(p-b)(p-c) = a^2p(p-a)(p-b)(p-c)/p(p-a) =$

$= a^2S^2/p(p-a) = S^2(a/(p-a) - a/p)$

tương tự $b^2(p-a)(p-c) = S^2(b/(p-b) - b/p)$

$c^2(p-a)(p-b) = S^2(c/(p-c) - c/p)$

Đặt $X = a/(p-a)$; $Y = b/(p-b)$; $Z = c/(p-c)$ ta có đẳng thức cần chứng minh là:

$4S^2 \leqslant S^2(X+Y+Z-(a+b+c)/p) \leqslant X^2Y^2Z^2S^2/16$.

hay $4 \leqslant X + Y + Z - 2 \leqslant X^2Y^2Z^2/16$.

Mặt khác do

$a/(p-a) = X$ nên $a/p = X/(X+1)$. Vậy

$X/(X+1) + Y/(Y+1) + Z/(Z+1) = a/p + b/p + c/p = 2$

Vậy $X(Y+1)(Z+1) + Y(Z+1)(Y+1) +$

$+ Z(X+1)(Y+1) = 2(X+1)(Y+1)(Z+1)$

suy ra $X + Y + Z + 2 = XYZ$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số dương X, Y, Z, 2 ta có

$$2 + X + Y + Z \geqslant 4\sqrt[4]{2XYZ}$$

do đó $XYZ \geqslant 4\sqrt[4]{2XYZ}$ và $XYZ \geqslant 8$.

Vậy $X + Y + Z - 2 \geqslant 4$ (1)

Mặt khác $(XYZ - 8)^2 \geqslant 0$

nên $(XYZ)^2 - 16(XYZ) + 64 \geqslant 0$

hay $X^2Y^2Z^2 \geqslant 16(XYZ - 4) = 16(X+Y+Z+2-4)$

Vậy $X^2Y^2Z^2/16 \geqslant X + Y + Z - 2$ (2)

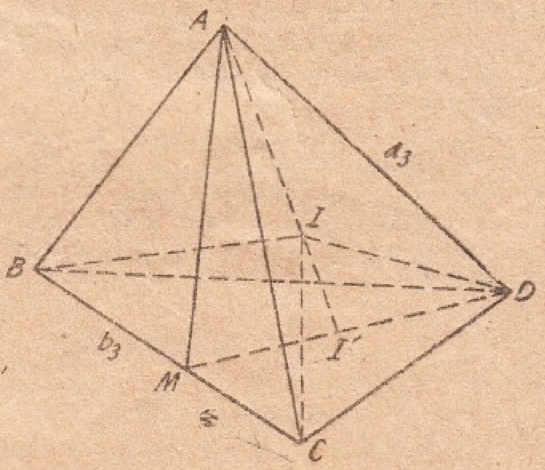
Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh. Muốn có dấu « = » thì ta phải có $X = Y = Z = 2$ tức là $a/(p-a) = b/(p-b) = c/(p-c) = 2$ hay $2p = 3a = 3b = 3c$. Ta có tam giác đều. Ngược lại khi $a = b = c$ thì ta lại có $X = Y = Z = 2$ do đó $X + Y + Z - 2 = 4$ và $X^2Y^2Z^2/16 = 4$

N. Q. T.

Bài 8/152: *Cho tứ diện ABCD có các cạnh $AB = a_1$, $CD = b_1$, $AC = a_2$, $BD = b_2$, $AD = a_3$ và $BC = b_3$. Gọi các khoảng cách từ tâm I hình cầu nội tiếp tứ diện đến các cạnh a_i và b_i tương ứng là h_i và d_i ($i = 1, 2, 3$). V là thể tích tứ diện này. Chứng minh bất đẳng thức:*

$$a_1b_1(h_1+d_1) + a_2b_2(h_2+d_2) + a_3b_3(h_3+d_3) \geqslant 18V$$

Lời giải: Kéo dài AI cắt mặt phẳng (BCD) tại I'. Gọi M là giao điểm của $(AI'D)$ với BC. Hạ $BB_1 \perp (AMD)$ và $CC_1 \perp (AMD)$. Ta có: $BM \geqslant BB_1$ và $CM \geqslant CC_1$. Suy ra:



$BM + CM \geqslant BB_1 + CC_1 \Leftrightarrow b_3 \geqslant BB_1 + CC_1$ (*)

Dấu « = » xảy ra khi và chỉ khi $BC \perp (AMD)$. Điều này chỉ xảy ra khi $BC \perp AD$ và đường vuông góc chung của BC và AD đi qua I. Từ (*) ta có:

$(*) \Leftrightarrow b_3 . S_{AID} \geqslant (BB_1 + CC_1) S_{AID}$

$\Leftrightarrow b_3 . S_{AID} \geqslant 3V_{IABD} + 3V_{IACD}$

$\Leftrightarrow a_3b_3h_3/2 \geqslant r(S_{ABD} + S_{ACD})$ (1)

(r là bán kính hình cầu nội tiếp).

Một cách tương tự ta cũng chứng minh được:

$a_1b_1h_1/2 \geqslant r(S_{ABC} + S_{ABD})$ (2)

$a_2b_2h_2/2 \geqslant r(S_{ACB} + S_{ACD})$ (3)

$a_1b_1d_1/2 \geqslant r(S_{CDA} + S_{CDB})$ (4)

$a_2b_2d_2/2 \geqslant r(S_{BDA} + S_{BDC})$ (5)

$a_3b_3d_3/2 \geqslant r(S_{BCA} + S_{BCD})$. (6)

Cộng vế với vế 6 bất đẳng thức trên ta được:

$[a_1b_1(h_1+d_1) + a_2b_2(h_2+d_2) + a_3b_3(h_3+d_3)]/2 \geqslant$

$\geqslant 3r(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{ADB})$

$\Leftrightarrow a_1b_1(h_1+d_1) + a_2b_2(h_2+d_2) + a_3b_3(h_3+d_3) \geqslant$

$\geqslant 18V$ (7)

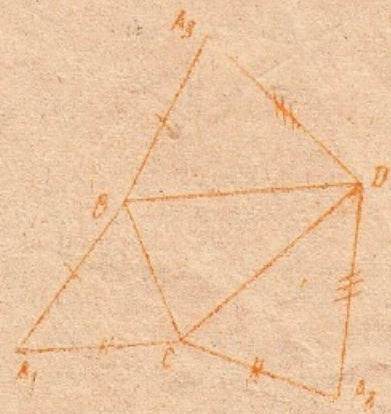
Dấu đẳng thức ở bất đẳng thức (7) xảy ra khi và chỉ khi có dấu đẳng thức ở đồng thời (1), (2), (3), (4), (5) và (6). Điều cuối cùng xảy ra khi và chỉ khi $BC \perp AD$, $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ và đường vuông góc chung của các cặp cạnh này đi qua I. Dễ dàng chứng minh được rằng điều kiện cần và đủ để xảy ra điều này là tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều. Vậy dấu đẳng thức ở bất đẳng thức (7) xảy ra khi và chỉ khi tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều.

Nhận xét: Các lời giải gửi tới đều không hoàn chỉnh. Bạn *Bùi Thanh An* (12CT, Phan Bội Châu Nghệ Tĩnh) trong lời giải của mình đã sử dụng một kết quả không có trong sách giáo khoa mà không chứng minh.

N. K. M.

Bài 9/152: *Chứng minh rằng tổng các góc phẳng tại đỉnh bất kỳ của tứ diện bằng 180° khi và chỉ khi các mặt của tứ diện là những tam giác bằng nhau.*

Lời giải: Cắt tứ diện $ABCD$ theo các cạnh AB, AC và AD, rồi mở các mặt bên BAC, CAD, DAB ra và trải chúng xuống mặt phẳng của mặt BCD ta được các tam giác BA_1C, CA_2D, DA_3B (xem hình vẽ). Ta có: $BA_1 = BA_3$, $CA_1 = CA_2$, $DA_2 = DA_3$ (*)



a) Điều kiện cần: Ta phải chứng minh $\Delta BA_1C = \Delta DBA_3 = \Delta A_2CD = \Delta BDC$ xuất phát từ giả thiết tổng các góc phẳng tại 1 đỉnh bất kỳ của tứ diện $ABCD$ bằng 180°. Thật vậy, do các góc $\widehat{A_3BD}$, $\widehat{DBC}$, $\widehat{CBA_1}$ – là các góc phẳng tại đỉnh B của tứ diện $ABCD$ – có tổng bằng 180° nên 3 điểm A_1, B, A_3 thẳng hàng và từ (*) suy ra B là điểm giữa của A_1A_3. Một cách tương tự, ta cũng có A_3, D, A_2 thẳng hàng và D là điểm giữa của A_3A_2; A_2, C, A_1 thẳng hàng và C là điểm giữa của A_2A_1. Từ đây dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

b) Điều kiện đủ: Ta phải chứng minh tổng các góc phẳng tại 1 đỉnh bất kì của tứ diện $ABCD$ bằng 180° xuất phát từ giả thiết $\Delta BA_1C = \Delta DBA_3 = \Delta A_2CD = \Delta BDC$. Thật vậy, do $\Delta DBA_3 = \Delta A_2CD$ và $DA_2 = DA_3$ suy ra $\widehat{A_2CD} = \widehat{DBA_3}$. Do $\Delta A_2CD = \Delta BDC$ và 2 tam giác này có cạnh CD chung nên suy ra $\widehat{CA_2D} = \widehat{DBC}$. Do $\Delta BA_1C = \Delta A_2CD$ và $CA_1 = CA_2$ nên suy ra $\widehat{CDA_2} = \widehat{CBA_1}$. Từ đó suy ra các góc $\widehat{DBA_3}$, $\widehat{DBC}$, $\widehat{CBA_1}$ – là các góc phẳng tại đỉnh B của tứ diện $ABCD$ – có tổng bằng tổng của các góc $\widehat{A_2CD}$, $\widehat{CA_2D}$, $\widehat{CDA_2}$ – là các góc trong của ΔA_2CD. Vậy tổng các góc phẳng tại đỉnh B của tứ diện $ABCD$ bằng 180°. Một cách tương tự ta cũng sẽ có tổng các góc phẳng tại mỗi đỉnh A, C, D bằng 180°.

Nhận xét: Tất cả các bài giải gửi tới (trừ bài giải của *Lê Hữu Hùng*, 12A1 PTTH Lam Sơn – Thanh Hóa, chỉ chứng minh điều kiện cần) đều đúng. Tuy nhiên một nhược điểm nổi bật của các bạn gửi bài giải là chưa phân biệt được điều kiện cần và điều kiện đủ.

N. K. M.

Bài 10/152: *Giả sử có n ngôi nhà và một nhà máy điện. Hỏi có bao nhiêu cách mắc điện tới các ngôi nhà sao cho nhà nào cũng có điện, nhưng nếu bỏ đi một đoạn dây điện tùy ý, sẽ có nhà bị ngắt điện.*

Lời giải: Giả sử $A_1, \ldots, A_n$ là các ngôi nhà của ta và A_{n+1} là nhà máy điện. Như vậy nếu ta mắc điện sao cho mỗi nhà chỉ nhận điện từ nhiều nhất là một nhà khác, thì bao giờ cũng có một ngôi nhà A_i ($i \leqslant n$) chỉ được nối với đúng một nhà khác – chẳng hạn nếu ta xuất phát từ nhà máy điện, đi theo đường dây điện, thì ta sẽ đến một trong những ngôi nhà cuối cùng như vậy.

Bây giờ ta đem ứng một cách mắc điện với một bộ $(j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$ theo qui tắc sau:

1) Trong các ngôi nhà ở cuối đường dây điện gọi A_{i_1} là ngôi nhà có chỉ số nhỏ nhất. Chỉ số của ngôi nhà được nối với A_{i_1} (chỉ có đúng một ngôi nhà như thế) được đặt là j_1.

2) Đem bỏ đi ngôi nhà A_{i_1}, gọi A_{i_2} là ngôi nhà có chỉ số nhỏ nhất trong các ngôi nhà ở

cuối đường dây. Đặt chỉ số của ngôi nhà được nối với A_{i_2} là j_2. Giả sử ta có chỉ số j_t rồi thì j_{t+1} là chỉ số của ngôi nhà được nối với ngôi nhà $A_{i_{t+1}}$, là ngôi nhà có chỉ số nhỏ nhất trong tất cả các ngôi nhà ở cuối đường dây.

Như vậy thì với mỗi cách mắc điện ta có được một bộ $(j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$ với $1 \leqslant j_t \leqslant n$ $(t = 1, 2, \ldots, n-1)$ được xác định một cách duy nhất. Ta thấy dễ dàng rằng:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \min\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}\} \\ i_2 &= \min\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, j_2, \ldots, j_{n-1}\} \\ &\ldots\ldots \\ i_{n-1} &= \min\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}, j_{n-1}\} \end{aligned}\right\} (*)$$

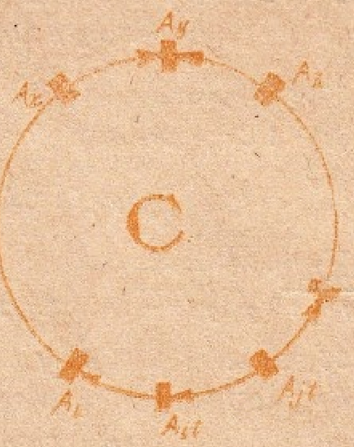
Qua (*) ta thấy ngay là ứng với hai cách mắc điện khác nhau là hai bộ $(j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$ khác nhau.

Như vậy ta có số các cách mắc điện có thể $\leqslant (n+1)^{n-1}$. Mặt khác ta có thể xây dựng từ một bộ $(j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$ cho trước một cách mắc điện tương ứng. Thực vậy nếu có một bộ $(j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$ thì ta xác định một bộ $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$ tương ứng bởi (*). Ngoài ra đặt $j_n = n + 1$ và $i_n = \min(\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\})$. Ta cho nối dây từ nhà A_{j_t} sang nhà A_{i_t} $(t = 1, 2, \ldots, n)$ và kí hiệu ở trên sơ đồ các nhà bằng một véc tơ đi từ điểm A_{j_t} sang A_{i_t} tương ứng. Cách mắc điện này thực hiện được và thấy:

(a). Mỗi nhà có nhiều nhất là một véc tơ dẫn đến nó

(b). Không tồn tại $s \leqslant t$ để có $j_t = i_s$.

Bây giờ ta chứng minh rằng trên hệ thống dây mắc, không tồn tại một vòng kín (các cạnh không xét hướng). Thực vậy nếu ta có điều ngược lại. Có thể giả thiết rằng j_t là chỉ số nhỏ nhất mà khi nối A_{j_t} với A_{i_t} thì xuất hiện chu trình C. Từ (b) suy ra là A_{j_t} dẫn sang 2 nhà bên cạnh nó ở trên C (tức là theo chiều véc tơ dẫn



đi từ A_{j_t} sang hai nhà bên cạnh. Nếu đi theo chiều từ A_{j_t} theo 2 cạnh véc tơ, ta dẫn đến một nhà A_y nào đó nhận điện từ 2 nhà bên cạnh (tức là 2 véc tơ dẫn đến nó). Điều này mâu thuẫn với (a). (**)

Cuối cùng ta phải chỉ ra là từ nhà máy điện điện có thể tới mỗi nhà tùy ý. Chú ý rằng hệ thống của ta có n đoạn dây dẫn. Giả sử rằng nếu nó chia thành khu vực s và t nhà không được nối với nhau bởi đoạn dây nào thì bằng quá trình đếm các nhà ở cuối đường dây và lần lượt vứt bỏ chúng, thì ta thấy số lượng dây ở trong mỗi cụm $\leqslant s - 1$ và $\leqslant t - 1$ tương ứng. Suy ra tổng số dây $\leqslant s + t - 2 = n - 1$, vô lý. Suy ra $(n+1)^{n-1}$ không lớn hơn số các cách mắc điện

Vậy ta có tất cả $(n+1)^{n-1}$ cách mắc điện khác nhau.

Nhận xét: Tòa soạn không nhận được bài giải nào cho bài toán này.

V.Đ.H

Bài 11/152: *Tìm các số a, b, c trong các số từ 1 đến 9 thỏa mãn đẳng thức:*

$$\overline{aab} \cdot 2a = \overline{cca} \cdot (a-1)$$

Lời giải: Các bạn *Nguyễn Quang Minh* (Hải Phòng), *Hoàng Nhật Ngọc Anh* (Hậu Giang) *Phạm Xuân Du*, (Nam Định), *Hoàng Long* (Hải Phòng) và *Lê Thị Hường* (Thanh Hóa) có lời giải đúng. Sau đây là bài giải của bạn *Hường* (PTCS Đông Vệ Thanh Hóa).

Từ giả thiết ta suy ra $a \neq 1$ và

$$(110a + b)2a = (110c + a)(a - 1)$$

hay

$$2ab - a(a-1) = 110[c(a-1) - 2a^2]$$

Do đó

$$2ab - a(a-1) \vdots 110$$

Nhưng do:

$$-a(a-1) < 2ab - a(a-1) = -(a-b)^2 + b^2 + a < b^2 + a$$

nên

$$-72 < 2ab - a(a-1) < 81 + 9 = 90$$

Vậy $2ab - a(a-1) = 0$

Do $a \neq 0$ nên $2b - a + 1 = 0$; $a = 2b + 1$ là số lẻ; đồng thời phải có $c(a-1) - 2a^2 = 0$. Từ đó suy ra

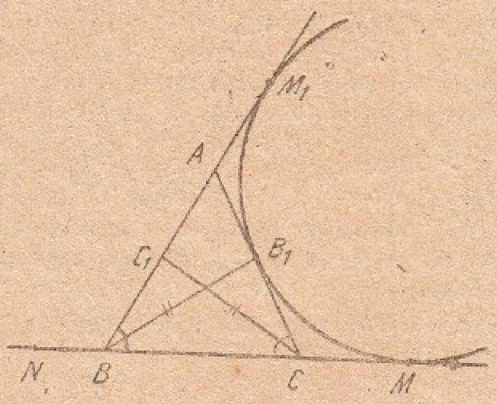
$$c = 2a^2/(a-1) = 2(a+1) + 2/(a-1)$$

Vậy $a - 1$ là số tự nhiên là ước của 2 và chẵn. Ta có $a - 1 = 2$ suy ra $a = 3$; $c = 9$; $b = 1$.

N.Q.T.

Bài 12/152: *Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 là các tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp* *trong các góc A, B, C tương ứng với các cạnh BC, CA và AB. Chứng minh rằng, nếu $AA_1 = BB_1 = CC_1$ thì tam giác ABC đều.*

Lời giải: (của *Lê Thị Hường*, lớp 8A PTCS Đông Vệ, Thanh Hóa).



Gọi p là nửa chu vi $\triangle ABC$. Xét vòng tròn bàng tiếp trong một góc bất kỳ của $\triangle ABC$, chẳng hạn góc B. Gọi M và M_1 lần lượt là tiếp điểm của vòng tròn này với các cạnh BC và BA. Ta có: $CB_1 = CM$ và $AB_1 = AM_1$.

suy ra:

$$2p = AB + BC + CA$$
$$= AB + AM_1 + BC + CM$$
$$= BM_1 + BM \quad (*)$$

Nhưng do $BM_1 = BM$ nên từ (*) ta có
$$BM = BM_1 = p.$$

Gọi N là tiếp điểm của vòng tròn bàng tiếp trong góc C với cạnh BC. Khi đó ta có: $BM = CN$ (vì cùng bằng p). Suy ra: $BN = CM$. Nhưng do $BN = BC_1$ và $CM = CB_1$ nên $BC_1 = CB_1$.

Xét 2 tam giác BCC_1 và CBB_1 ta có:

BC chung

$BC_1 = CB_1$ (theo chứng minh trên)

$BB_1 = CC_1$ (theo giả thiết)

Do vậy $\triangle BCC_1 = \triangle CBB_1$ (c.c.c). Suy ra:
$$\widehat{B} = \widehat{C}$$

Một cách tương tự ta cũng sẽ chứng minh được
$$\widehat{A} = \widehat{B}$$

Từ đó suy ra $\triangle ABC$ là tam giác đều (đpcm).

Nhận xét: Các bạn *Hoàng Long*, *Nguyễn Quang Minh*, (8A, PTCS Hồng Bàng, Hải Phòng) và *Phạm Xuân Du* (8CT, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Hà Nam Ninh) và *Nguyễn Lê Dũng* (9CT, PTCS Trần Quốc Toản, Nha Trang) cũng có lời giải đúng.

N.K.M

Lớp cuối cấp PTCS

Bài 1/155. Chứng minh rằng nếu $|a| > 2$ thì hệ phương trình sau đây vô nghiệm.

$$\begin{cases} x^5 - 2y = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Đặng Viễn

Bài 2/155. Cho góc $\widehat{xOy}$. Hai điểm B chạy trên Ox, C chạy trên Oy sao cho chu vi $\triangle OBC$ bằng $2p$ cho trước.

Xác định B, C sao cho diện tích $\triangle OBC$ lớn nhất.

Đàm Văn Nhỉ

Các lớp PTTH

Bài 3/155. Đặt $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$. Hãy chứng minh rằng

a) S_n không nguyên với $n \geqslant 2$

b) Ký hiệu phần không nguyên của S_n là $\{S_n\}$ (chẳng hạn $\{2{,}5\} = 0{,}5$, $\{3{,}14\} = 0{,}14$; ...) thì ta có thể tìm được $n_0 \leqslant 1987$ sao cho $\{S_{n_0}\} \leqslant 0{,}002020$

Vũ Đình Hòa

Bài 4/155. Cho m, n là các số tự nhiên. Chứng minh bất đẳng thức
$$|m/n - \sqrt{2}| \geqslant 1/(\sqrt{2} + 3/2)n^2$$

Nguyễn Minh Đức

Bài 5/155. Giải phương trình
$$32x(x^2 - 1)(2x^2 - 1)^2 = 1 - 1/x \qquad (1)$$
với $0 < x < 1$

Nguyễn Khắc Minh

Bài 6/155. Giải phương trình
$$x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{x-1} = 3xy/2$$

Bài 7/155. Tìm tất cả các hàm số f, thỏa mãn: $f(x)f(y) = f(x^2 + y^2)$ với mọi số thực x, y

Trần Xuân Đáng

Bài 8/155. Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin\alpha \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \cos^2\alpha \\ \sin^4 x + \sin^4 y = \cos 2\alpha \end{cases}$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 9/155. Giả sử l_a, l_b, l_c là các đường phân giác trong và m_a, m_b, m_c là các đường trung tuyến, r và R tương ứng là bán kính của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp, p là nửa chu vi của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$l_a^6 + l_b^6 + l_c^6 \leqslant p^4(p^2 - 12rR) \leqslant m_a^6 + m_b^6 + m_c^6$$

và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

F. Lauenberger (Hoàng Đức Tân sưu tầm)

Bài 10/155. Tia Om trong góc tam diện đều $Oxyz$ tạo với Ox, Oy, Oz ba góc bằng nhau và bằng α. Trên Om lấy điểm M cố định. Ta xét các vị trí của mặt phẳng (P) đi qua M và cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C.

Hãy chính xác hóa vị trí của (P) để cho:

$$T = \frac{OA^{1987} + OB^{1987} + OC^{1987}}{OA \cdot OB \cdot OC} \text{ nhỏ nhất}$$

Đào Trường Giang

Bài 11/155. Cho một hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau và bằng AC', góc tam diện đỉnh A là đều.

a) Tính số đo góc các mặt của tam diện đỉnh A.

b) Một mặt phẳng cắt các cạnh AB, AD và AA' lần lượt tại M, N, P và cắt AC' ở Q. Chứng minh rằng

$$1/AQ = 1/AM + 1/AN + 1/AP$$

Phạm Đăng Long

Bài 12/155. Trên mặt bàn người ta dán một số hình tròn có bán kính bằng nhau sao cho không có hai hình tròn nào giao nhau. Hãy chứng minh rằng với 4 màu khác nhau ta có thể tô các hình tròn (mỗi hình tròn tô một màu) sao cho các hình tròn tiếp xúc nhau được tô bằng các màu khác nhau!

Bùi Văn Thanh

CÁC ĐỀ TOÁN ÔN TẬP

Lớp cuối cấp PTCS

1. Giả sử x và y là các số dương. Gọi m là số bé nhất trong các số x; $y + 1/x$; $1/y$. Hãy tìm giá trị lớn nhất có thể đạt được của m.

2. Giải phương trình trong tập hợp số tự nhiên.

$$(x + y)^2 + x + 4y = 0$$

3. Cho $y = (x^2 + 1/x^2)/(x^2 - 1/x^2)$;

$$z = (x^4 + 1/x^4)/(x^4 - 1/x^4)$$

Hãy biểu diễn z qua y.

4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở C và D. Qua C vẽ hai cát tuyến bất kỳ vuông góc nhau.

Cát tuyến thứ nhất cắt (O) và (O') ở A và A'.

Cát tuyến thứ hai cắt (O) và (O') ở B và B'.

Gọi giao điểm của AB và $A'B'$ là M. Tìm quỹ tích của M.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Một điểm M chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Gọi M_1, M_2 là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Chứng minh M_1M_2 luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Đào Trường Giang

Lớp 10.

1. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{1986\sqrt{1985}} < 2$$

2. Giải phương trình

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{12}{30}\sqrt{a^2+x^2} = \frac{10}{25}x$$

3. Cho $x > y$ và $x.y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$(x^2 + y^2)/(x - y)$$

4. chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geqslant \frac{3}{4}\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

5. Một tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1, chiều cao có độ dài là một số tự nhiên. Chứng minh tam giác này đều.

Đào Trường Giang

Lớp 11

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x + y = 1 \\ yz + y + z = 5 \\ xz + x + z = 2 \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$\sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 1} = 2 + (x - y)^2$$

3) Chứng minh hằng đẳng thức:

$[\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha][\sin(\gamma - \beta) + \sin\alpha] =$
$[\sin(\gamma + \alpha) - \sin\beta][\sin(\gamma - \alpha) + \sin\beta]$.

4) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn và ngoại tiếp một đường tròn khác. Kí hiệu S là diện tích của tứ giác và a, b, c, d là độ dài các cạnh của tứ giác ấy. Chứng minh: $S = \sqrt{abcd}$

5) Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Lấy điểm P trên cạnh CC_1 sao cho $C_1P = 2CP$. Xác định góc giữa hai mặt phẳng BD_1P và ABC.

Nguyễn Khắc Minh

Lớp 12

1) Giải và biện luận phương trình.

$$4^x - (2a + 1)2^x + a^2 + a = 0.$$

2) Xác định các giá trị của a để phương trình

$$4x|x| + (a - 7)x + 1 = 0$$

có đúng 2 nghiệm số.

3) Tìm các khoảng đồng biến của hàm số:

$$y = 3/4.x - 13/16.\sin 2x - 1/32 \sin 4x.$$

4) Thể tích của một lăng trụ tam giác đều bằng V. Hãy xác định độ dài của cạnh đáy lăng trụ để diện tích toàn phần của lăng trụ là nhỏ nhất.

5) Cho ba mặt cầu đôi một tiếp xúc với nhau và cùng tiếp xúc với một mặt phẳng. Khoảng cách giữa các tiếp điểm của các mặt cầu đó với mặt phẳng là a, b, c. Hãy xác định các bán kính của các mặt cầu.

Nguyễn Khắc Minh

LỜI GIẢI TÓM TẮT CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÀN QUỐC NĂM 1986

LÊ HẢI CHÂU

Bài 1: *Cho n bất phương trình $4x^2 - 4a_ix + (a_i - 1)^2 \leqslant 0$ với $a_i \in [1/2, 5]$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Gọi x_i là nghiệm bất kỳ của bất phương trình ứng với tham số a_i. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\Big/ n} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n + 1$$

Lời giải:

Ta có

$\Delta'_i = (2a_i)^2 - 4(a_i^2 - 2a_i + 1) = 4(2a_i - 1) \geqslant 0$

do $a_i \geqslant 1/2$ nên các bất phương trình có nghiệm

$$\frac{2a_i - \sqrt{4(2a_i - 1)}}{4} \leqslant x \leqslant \frac{2a_i + \sqrt{4(2a_i - 1)}}{4}$$

hay

$$\frac{a_i - \sqrt{2a_i - 1}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a_i + \sqrt{2a_i - 1}}{2} \qquad (1)$$

Từ $(a_i - 1)^2 \geqslant 0$ suy ra $a_i^2 \geqslant 2a_i - 1$.

Do $2a_i - 1 \geqslant 0$ nên có $a_i - \sqrt{2a_i - 1} \geqslant 0$.

Mặt khác do $a_i \leqslant 5$ nên

$$a_i + \sqrt{2a_i - 1} \leqslant (5 + 3)/2 = 4.$$

Vậy từ hệ thức (1) ta có

$$0 \leqslant x_i \leqslant 4.$$

Theo định lý đảo của tam thức bậc hai, ta có:

$$x_i^2 - 4x_i \leqslant 0 \quad (i = \overline{1, n})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\Big/ n \leqslant \left(4\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n \qquad (2).$$

Ta lại có:

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n - 1\right]^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n + 1\right]^2 \geqslant \left(4\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n \qquad (3).$$

Từ (2) và (3) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

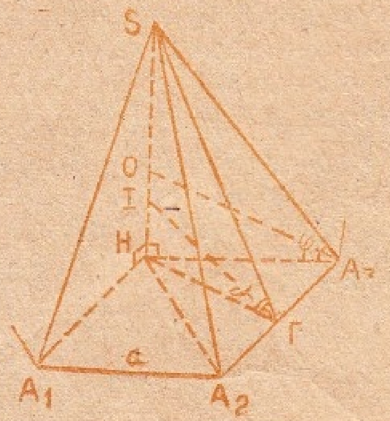
Bài 2: *Gọi R và r là bán kính các hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp 1986 giác đều.*

1) Chứng minh rằng $R/r \geqslant 1 + 1/\cos(\pi/1986)$.

2) Tính diện tích xung quanh của hình chóp có cạnh đáy bằng a khi ở bất đẳng thức trên xảy ra dấu bằng.

Lời giải: Ta xét bài toán với hình chóp n giác đều. Khi $n = 1986$ ta trở về bài toán phải giải.

Do hình chóp đã cho là đều nên các tâm O và I của hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp nằm trên đường cao SH của hình chóp



Ta có $r = HI = HF \cdot \mathrm{tg}\,\widehat{IFH} =$

$$= \frac{a}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{n}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

với $\widehat{SFH} = \alpha$ và IF là phân giác góc $\widehat{HFS}$.

Ta lại có:

$$SH = HA_3 \cdot \mathrm{tg}\,\widehat{SA_3H} = \frac{a\,\mathrm{tg}\varphi}{2\sin(\pi/n)}$$

(HA_3 là bán kính đường tròn ngoại tiếp n giác đều) và khi O nằm trong hình chóp thì.

$$SH = SO + OH = R + \sqrt{OA_3^2 - HA_3^2} =$$
$$= R + \sqrt{R^2 - a^2/4\sin^2(\pi/n)}.$$

Vậy ta có:

$$R + \sqrt{R^2 - a^2/4\sin^2(\pi/n)} = a\,\mathrm{tg}\varphi/2\sin(\pi/n).$$

Từ đó rút ra được:

$$R = a/2\sin(\pi/n)\sin 2\varphi.$$

Vậy theo (1) ta có:

$$R/r = 1/\cos(\pi/n)\sin 2\varphi\ \mathrm{tg}(\alpha/2) \qquad (2)$$

Từ đó ta chứng minh được

$$R/r \geqslant 1 + 1/\cos(\pi/n) \qquad (3).$$

Khi O nằm ngoài hình chóp thì $SH = SO - OH$ ta cũng được kết quả như trên.

Diện tích xung quanh

$S_{xp} = n \cdot S_{SA_2A_3} = n/2 \cdot SF \cdot A_2A_3 =$

$= n/2 \cdot a \cdot HF/\cos\alpha = na/2\cos\alpha \cdot a/2 \cdot \mathrm{cotg}(\pi/n)$

$= na^2\mathrm{cotg}(\pi/n)/4\cos\alpha.$

Sử dụng đẳng thức trong (3) và sau một số biến đổi ta được:

$$S_{xp} = na^2(\cos(\pi/n) + 1)/4\sin(\pi/n).$$

Bài 3: *Cho $M(y)$ là một đa thức bậc n sao cho $M(y) = 2y$ với $y = 1, 2, 3, \ldots, n+1$. Tìm $M(n+2)$.*

Lời giải: Nhận xét rằng:

$2^m = (1+1)^m = C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^m$ với m nguyên dương trong đó

$$C_m^k = m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)/k!$$

Xét đa thức bậc n:

$$P(y) = 2\sum_{k=0}^{n}(y-1)(y-2)\ldots(y-k)/k!$$

Với $y = 1, 2, \ldots, n+1$ ta có

$$P(y) = 2\left(C_{y-1}^0 + C_{y-1}^1 + \ldots + C_{y-1}^{y-1}\right) = 2^y$$

Như vậy hai đa thức bậc n: $M(y)$ và $P(y)$ trùng nhau tại $n+1$ giá trị phân biệt nên $P(y) \equiv M(y)$ và ta có:

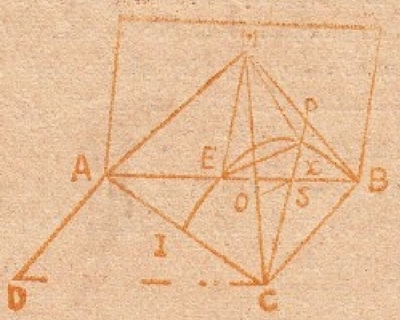
$$M(n+2) = 2\cdot\left(C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+1}^n\right)$$
$$= 2\left(2^{n+1} - C_{n+1}^{n+1}\right) = 2^{n+2} - 2.$$

Bài 4: *Cho hình vuông ABCD cạnh 2a. Trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng ABCD qua AB ta dựng tam giác đều AMB. Một điểm S chạy trên AB cách B một khoảng SB = x. Gọi P là hình chiếu của M trên SC và E, O theo thứ tự là các điểm giữa của AB, CM.*

1) Tìm quĩ tích của P khi S chạy trên AB

2) Tính các giá trị cực đại và cực tiểu của SO

Lời giải: 1) Theo định lý ba đường vuông góc thì $EP \perp CS$ ($ME \perp$ mq $ABCD$) tức là $\widehat{EPC} = 90°$. Vậy quĩ tích của P là cung tròn đường kính EC giới hạn ở hai đầu B và I (I là hình chiếu của M trên AC).



2) SO là trung tuyến của tam giác MSC nên
$$SO^2 = [2(SM^2 + SC^2) - MC^2]/4.$$
Nhưng $MS^2 = x^2 + 4a^2 - 4ax\cos 60^\circ = x^2 + 4a^2 - 2ax$
$$SC^2 = 4a^2 + x^2;\ MC^2 = 8a^2.$$
Vậy SO cực đại khi $x = 2a$, lúc đó giá trị cực đại bằng $2a$. SO cực tiểu khi $x = a/2$, lúc đó giá trị cực tiểu bằng $a\sqrt{7}/2$.

Bài 5 : *Tìm các giá trị tự nhiên của n ($n > 1$) để cho bất đẳng thức*
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant x_n \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$
đúng với mọi x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$)

Lời giải: Với $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 1$ và $x_n = 2$. Bất đẳng thức cho ta:
$$n - 1 + 4 \geqslant (n-1).2$$
Suy ra $n \leqslant 5$. Ta viết bất đẳng thức đã cho như sau
$$x_n^2 - (x_1 + \ldots + x_{n-1})x_n + (x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2) \geqslant 0.$$
Vế trái là một tam thức bậc hai đối với x_n. Tam thức này không âm với mọi x_n khi và chỉ khi biệt số
$$\Delta = (x_1 + \ldots + x_{n-1})^2 - 4(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2) \leqslant 0$$
hay $4(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2) \geqslant (x_1 + \ldots + x_{n-1})^2$ (1).

Áp dụng bất đẳng thức Côsi – Bunhiacôpxki cho $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bất kỳ và $1, 1, \ldots, 1$ ($n-1$ lần) ta có:
$$(n-1)(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2) \geqslant (x_1 + \ldots + x_{n-1})^2 \quad (2)$$
Với $4 \geqslant n-1$, từ (2) ta thấy bất đẳng thức (1) luôn xảy ra với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Vậy các giá trị tự nhiên của n thỏa mãn đầu bài là $n = 2, 3, 4, 5$.

Bài 6 : *Từ dãy số tự nhiên 1, 2, 3,..., ta lập dãy số sau: Số hạng thứ nhất là số lẻ, cụ thể là số 1; Hai số hạng tiếp theo là các số chẵn 2 và 4; Ba số hạng tiếp theo là các số lẻ 5, 7, 9; Bốn số hạng tiếp theo là các số chẵn 10, 12, 14, 16. Năm số hạng tiếp theo là các số lẻ 17, 19, 21, 23, 25. Tìm số hạng thứ n của dãy số trên.*

Lời giải :

Ta so sánh dãy số A đã cho với dãy số B và gọi $H = \{h\}$ là dãy số gồm hiệu những số hạng tương ứng của A và B

$B = \{2n\}$:	2, 4, 6	8, 10, 12,	14, 16, 18, 20,	22,...
$A = \{a_n\}$:	1, 2, 4,	5, 7, 9,	10, 12, 14, 16,	17,...
$H = \{h_n\}$:	1, 2, 2	3, 3, 3,	4, 4, 4, 4,	5,...

Theo bảng trên ta thấy rằng H gồm một số 1, hai số 2, ba số 3,..., n số n và $a_n = 2n - h_n$.

Ta hãy tìm h_n. Các số hạng của H gồm những nhóm có giá trị lặp lại:
$$(1), (2, 2), (3, 3, 3), \ldots, \underbrace{(k-1, k-1, \ldots)}_{k-1 \text{ lần}} \underbrace{(k, k, \ldots)}_{k \text{ lần}} \ldots$$
Ta phải tìm nhóm có h_n, nếu h_n ở trong nhóm thứ k thì giá trị của nó là k. Ta thấy rằng phần của dãy trước nhóm k là: một số 1, hai số 2,... $k-1$ số $k-1$, với $1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) = (k-1)k/2$ số hạng.

Như vậy, nếu $(k-1)k/2 + 1 \leqslant n < k(k+1)/2 + 1$ thì $h_n = k$. Ta giải hệ bất phương trình trên để tìm k theo n, nghĩa là tính h_n theo n.

a) $(k-1)k/2 + 1 \leqslant n \Leftrightarrow (1 - \sqrt{8n-7})/2 \leqslant k \leqslant$
$$\leqslant (1 + \sqrt{8n-7})/2$$
b) $k(k+1)/2 + 1 > n \Leftrightarrow (-1 - \sqrt{8n-7})/2 > k$
$$\text{hoặc } (-1 + \sqrt{8n-7})/2 < k.$$
Như vậy: $(-1 + \sqrt{8n-7})/2 < k \leqslant (1 + \sqrt{8n-7})/2$.

Suy ra $k = [(1 + \sqrt{8n-7})/2] = h_n$ (dấu $[x]$ chỉ phần nguyên của x).

Vậy: $a_n = 2n - [(1 + \sqrt{8n-7})/2]$, $n = 1, 2, \ldots$

Nhận xét : Qua việc chấm các bài thi năm nay chúng tôi thấy một số bài làm còn bộc lộ một số thiếu sót cần khắc phục:

1. *Xét sót trường hợp.* Chẳng hạn: Khi giải bài số 2, có nhiều bài giải không xét trường hợp tâm O mặt cầu ngoại tiếp nằm ngoài hình chóp.

2. *Không xét phần giới hạn cho quỹ tích.* Thí dụ như ở bài 4, nhiều bài không giới hạn quỹ tích nên dẫn đến lúng túng và sai lầm trong phần đảo.

3. Sử dụng công thức không thuộc phạm vi của chương trình toán phổ thông và phổ thông chuyên toán mà không chứng minh. Chẳng hạn khi giải bài 3 một số bài giải đã sử dụng công thức La-grăng (Lagrange) mà không chứng minh.

MỘT BÀI TOÁN CỦA TRÒ CHƠI

PHAN ĐỨC THÀNH

1. Phát biểu bài toán.

Giả sử có 2 phe đối lập tham chiến (chẳng hạn 2 người chơi một trò chơi nào đó...). Bên A có lực lượng a (người, tiền, của...) Bên b có lực lượng b. Giả sử ở mỗi trận (ván, lần đấu, trận đánh...) khả năng thắng ở bên A là p $(0 < p < 1)$, còn khả năng thua là q $(p + q = 1)$. Khi thắng bên A được tăng thêm (được thưởng, được bổ sung ...) lực lượng của mình thêm 1 đơn vị, khi thua bên A bị giảm (bị phạt, bị mất,...) lực lượng của mình 1 đơn vị. Sau một số lần đấu có thể xảy ra tình huống: bên A bị mất hết lực lượng a của mình, hoặc bên A thu được toàn bộ lực lượng $a + b$ về phía minh. Tình hình ấy được gọi là *sự thất bại* đối với bên A hoặc thất bại đối với bên B. Bài toán đặt ra là hãy xác định khả năng thất bại của bên A là bao nhiêu?

2. Mô hình toán học của bái toán:

Một chất điểm (hạt) xuất phát từ gốc tọa độ và di động trên một khoảng hữu hạn. Khi đạt đến điểm mút của khoảng thì di động chấm dứt. Chẳng hạn giả sử hạt di động đến các đường thẳng $y = -a$ hay $y = b$ $(a, b > 0)$ thì chấm dứt. Di động đã mô tả ở trên tương ứng với di động của hạt xuất phát từ điểm $y = a$ và có biên tại các điểm $y = 0$ và $y = a + b$.

Gọi $Q(a)$ là số đo khả năng hạt xuất phát từ điểm $y = a$ đạt đến đường thẳng $y = 0$ sớm hơn đường thẳng $y = a + b$.

Tương tự gọi $P(a)$ — số đo khả năng hạt đạt đến đường thẳng $y = a + b$ sớm hơn đường thẳng $y = 0$. Người ta chứng minh được rằng $P(a)$ và $Q(a)$ thỏa mãn phương trình:

$$Q(a) = pQ(a + 1) + qQ(a - 1) \qquad (1)$$

rong đó p là khả năng hạt từ vị trí a chuyển sang vị trí $a + 1$ ở lần di động đầu tiên và q là khả năng hạt từ vị trí a chuyển sang vị trí $a - 1$.

Rõ ràng là $Q(0) = 1$, $Q(a + b) = 0$ $\qquad (2)$

Ta viết lại (1) dưới dạng thuận tiện hơn:

$$q(Q(a) - Q(a - 1)) = p(Q(a + 1) - Q(a)) \qquad (3)$$

Ta xét 2 trường hợp:

1/ Giả sử $p = q = 1/2$ (chẳng hạn khi 2 bên ngang sức) Khi ấy với mọi a

$$Q(a) - Q(a - 1) = Q(a + 1) - Q(a) = d$$

Khi đó $Q(a)$ lập thành cấp số cộng với công sai d

$$Q(a) = Q(0) + ad$$

Nhờ (2) ta có $d = -1/(a + b)$

Vậy: $Q(a) = 1 - a/(a + b) = b/(a + b)$ $\qquad (4)$

Tương tự từ điều kiện $P(0) = 0$, $P(a + b) = 1$ ta tìm được

$$P(a) = a/(a + b)$$

Như vậy ta luôn có $P(a) + Q(a) = 1$

2/ Giả sử $p \neq q$. Đặt $h = q/p$ từ (3) ta có

$$Q(a + 1) - Q(a) = h(Q(a) - Q(a - 1)) =$$
$$= \dots = h^a(Q(1) - Q(0)).$$

Lấy tổng 2 vế theo a từ 1 đến m bất kỳ ta có

$$Q(1) - Q(m + 1) = (Q(0) - Q(1))\frac{h(1 - h^m)}{1 - h} \qquad (5)$$

Chú ý đến (2) từ (5) ta có

$$Q(1) = \frac{h - h^{a+b}}{1 - h^{a+b}}$$

Cuối cùng ta có:

$$Q(a) = \frac{h^a - h^{a+b}}{1 - h^{a+b}} \qquad (6)$$

Tương tự ta tìm được:

$$P(a) = \frac{1 - h^a}{1 - h^{a+b}}$$

Như vậy ta lại có: $P(a) + Q(a) = 1$

Tóm lại khả năng để bên A bị thất bại có số đo bằng

$$Q(a) = \begin{cases} b/(a + b) & \text{nếu } p = q = 1/2 \\ \dfrac{h^a - h^{a+b}}{1 - h^{a+b}} & \text{nếu } p \neq q \end{cases}$$

Bảng sau đây cho ta một số giá trị cụ thể của $Q(a)$

p	q	a	b	$Q(a)$
0,5	0,5	50	50	0,5
0,5	0,5	90	10	0,1
0,45	0,55	90	10	0,866
0,6	0,4	10	90	0,017

Từ bảng trên ta có nhận xét:

— Trong trường hợp $p = q = 1/2$ (hai bên ngang sức) bên nào có lực lượng yếu bên ấy có khả năng thất bại lớn hơn.

— (Suy từ bảng cuối) khi chơi với đối thủ có lực lượng mạnh (giàu) nếu khả năng thắng ở mỗi trận vẫn cao thì khả năng thất bại vẫn bé.

Cuối cùng ta xét trường hợp giới hạn khi bên A chơi với đối thủ « giàu vô hạn » ($b = \infty$) và giả sử khi ấy ta vẫn có $p > q$ (bên A chơi có nghệ thuật hơn).

Bằng cách qua giới hạn khi $b \to \infty$ trong $Q(a)$ và chú ý rằng $h = q/p < 1$ ta đi đến $Q(a) \to h^a$ và khả năng thắng của bên A dần đến giới hạn $1 - h^a$.

Như vậy bên A có lực lượng a vẫn có khả năng thắng không ít lắm mặc dầu đối thủ của nó giàu vô hạn.

Trong toán học có những bài toán khá nổi tiếng hoặc vì nó khám phá được một quy luật khách quan nào đó khá sâu sắc, hoặc vì nó giải quyết được nhiều vấn đề của thực tiễn khá phong phú. Bài toán về « sự thất bại » trên đây là một trong những bài toán thuộc loại đó.

Giải đáp bài

« CÂU HỎI CỦA NGƯỜI TỬ TÙ »

Người tử tù hỏi người lính bất kỳ một trong bốn câu hỏi sau sẽ xác định được cửa người lính được hỏi đang gác là cửa gì:

Câu 1: Người nói thật gác cửa sống phải không?

Câu 2: Người nói dối gác cửa chết phải không?

Câu 3: Người nói thật gác cửa chết phải không?

Câu 4: Người nói dối gác cửa sống phải không?

(Trong đó câu 1 và câu 2 tương đương với nhau, câu 3 và câu 4 tương đương với nhau).

Để trả lời câu 1 hoặc câu 2, người lính gác cửa sống bao giờ cũng gật, người lính gác cửa chết bao giờ cũng lắc; vì vậy thấy người lính gật đầu thì người tử tù yên tâm đi ra lối cửa đó, thấy người lính lắc đầu thì người tử tù phải ra lối cửa kia. Đối với câu 3 hoặc câu 4 thì ngược lại.

Có thể trình bày sự trả lời của các người lính bằng bảng sau:

Cửa	Người gác	Trả lời câu 1, 2	Trả lời câu 3, 4
Sống	Nói thật	Gật	Lắc
	Nói dối	Gật	Lắc
Chết	Nói thật	Lắc	Gật
	Nói dối	Lắc	Gật

Lời giải trên đây là lời giải thông thường. Bạn Huỳnh Minh Lân ở quận 1 thành phố Hồ Chí Minh còn đưa lời giải cầu kỳ hơn: người tử tù hỏi một trong hai người lính câu hỏi: « Nếu tôi hỏi anh lính gác cửa bên kia cửa anh ấy gác là cửa sống à thì anh ấy sẽ gật đầu phải không? » hoặc 1 câu hỏi tương tự như vậy bằng cách thay từ « sống » bằng từ « chết » hoặc từ « gật » bằng từ « lắc ».

Các bạn tự suy luận sẽ thấy lời giải của bạn Lân cũng là lời giải đúng.

P.Q.G.

THÔNG BÁO

Bắt đầu từ số 4 năm 1987 trở đi giá mỗi số báo Toán học và tuổi trẻ là 10 đồng

In 13000 cuốn Tại Xí nghiệp in 75 Hàng Bồ — Hà Nội.
Số in 115/87. In xong và gửi lưu chiểu tháng 7-1987.
Chỉ số: 12 884
Giá 2.000