TOÁN HỌC và Tuổi trẻ

VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

2
1987
Số 154

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói: 52825

Trao đổi với các bạn trẻ yêu toán:

CÓ THỂ LÀM TOÁN SINH ĐỘNG HƠN ĐƯỢC KHÔNG?

BÙI QUANG TRƯỜNG

Sách giáo khoa đã giới thiệu hàng loạt mẹo mực để tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định dạng $ax + by = c$. Đây là một bài toán đơn giản và nếu giải nó thông qua việc áp dụng máy móc phương pháp giải người ta sẽ phải lặp đi lặp lại cùng một kiểu lý luận để t, t_1, t_2,... nguyên. Từ đó dễ cảm thấy chán khi phải làm mãi các việc đơn điệu và rất ngại khi phải tìm tới t_3, t_4, t_5...

Chẳng hạn, một lời giải mẫu trong sách giáo khoa lớp 12 về cách tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$23x + 53y = 109 \qquad (1)$$ là như sau:

Từ (1) ta có

$$x = (109 - 53y)/23 = 4 - 2y + (17 - 7y)/23.$$

Muốn x nguyên phải có $t = (17 - 7y)/23$ là số nguyên hay

$$23t + 7y = 17 \qquad (2)$$

Từ (2) có $y = (17 - 23t)/7 = 2 - 3t + (3 - 2t)/7$. Muốn y nguyên phải có $(3 - 2t)/7 = t_1$ nguyên hay $$7t_1 + 2t = 3 \qquad (3).$$

Từ (3) có $t = (3 - 7t_1)/2 = 1 - 3t_1 + (1 - t_1)/2$. Vì t và t_1 nguyên nên phải có $(1 - t_1)/2 = t_2$ nguyên hay $2t_2 + t_1 = 1$ (4)

Như vậy $t_1 = 1 - 2t_2$ và $t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2$ hay $t = -2 + 7t_2$. Khi đó ta được $y = 2 - 3t + (3 - 2t)/7 = 2 - 3t + t_1 = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2) = 9 - 23t_2$

và $x = 4 - 2y + (17 - 7y)/23 = 4 - 2y + t =$
$= 4 - 2(9 - 23t_2) - 2 + 7t_2 = -16 + 53t_2$.

Phương pháp giải đã dẫn chúng ta tới đích, nhưng việc làm thật tẻ nhạt. Nếu nghĩ rằng mọi điều trong sách vở là đã tuyệt vời, kín kẽ rồi thì chúng ta sẽ thụ động và làm cho suy nghĩ của chúng ta nông cạn.

Chúng ta hãy thử tìm một con đường khác. Xét bài toán: tìm nghiệm nguyên của phương trình $12x + 67y = 43$ (5)

Từ (5) có $x = 3 - 5y + (7 - 7y)/12 = 3 - 5y + 7(1 - y)/12$

Vì 7 và 12 nguyên tố cùng nhau nên để x nguyên thì $(1 - y)/12 = t$ phải nguyên. Từ đó suy ra $y = 1 - 12t$ và $x = 67t - 2$.

Phải chăng phương pháp giải ở đây chỉ thuận lợi cho việc giải phương trình (5) mà thôi? Để trả lời cho câu hỏi này chúng ta hãy thử giải phương trình (1) theo kiểu đã giải phương trình (5).

Từ (1) ta có $x = 4 - 2y + (17 - 7y)/23$. Giá như 17 và 7 có ước số chung, hay đẹp hơn nữa: 17 chia hết cho 7 (!). Cố tạo ra con số chia hết cho 7, chúng ta cộng và trừ thêm 4 thì được $x = 4 - 2y + [7(3 - y) - 4]/23$. Con số 4 mới xuất hiện đã gây thêm phiền phức. Nếu nó chia hết cho 23 thì tốt quá (!). Bằng một linh cảm trực giác chúng ta chọn con số khác: 46.

Ta viết $x = 4 - 2y + (17 - 7y)/23 =$
$4 - 2y + (17 - 7y + 46 - 46)/23 = 4 - 2y + [7(9 - y)]/23 - 2$
Tuyệt! Như vậy phải có $(9 - y)/23 = t$ nguyên suy ra $y = 9 - 23t$ và

$$x = 2 - 18 + 46t + 7t = 53t - 16$$

Nói một cách khát quát: để tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ (6) chúng ta có thể giải như sau: Trước tiên đưa (6) về dạng $a'x + b'y = c'$ với a', b', c', nguyên và rút ra $x = (c' - b'y)/a'$. Sau đó chọn A là bội nguyên của a' sao cho $c' + A$ chia hết cho b' tức là $A = ma'$, $c' + A = kb'$ với m và k là các số nguyên

Vậy $x = (c' + A - b'y - A)/a' = (kb' - b'y)/a' - m$ $= b'(k - y)/a' - m$.

Cuối cùng, giản ước b'/a' để đưa về dạng tối giản $b'/a' = b''/a''$. Muốn x nguyên phải có $(k - y)/a'' = t$ nguyên. Từ đó suy ra $y = k - a''t$, $x = b''t - m$.

Thí dụ: tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$-12x + 3,22\ldots y = 39\frac{2}{9} \quad (7).$$

Giải: $3,22\ldots = 3 + 2/9 = 29/9$

Do đó (7) $\Leftrightarrow -12x + 29y/9 = 353/9$
hay $-108x + 29y = 353$.

Từ đó $y = (353 + 108x)/29 = 12 + 3x + (5 + 21x)/29 =$
$= 12 + 3x + (5 + 21x + 58 - 58)/29 = 10 + 3x + 21(3 + x)/29$
(vì nhận thấy trong các bội số nguyên của 29 thì 58 khi cộng 5 sẽ chia hết cho 21).

Muốn y nguyên thì $(3 + x)/29 = t$ phải là số nguyên. Vậy $x = 29t - 3$
và $y = 10 - 9 + 87t + 21t = 1 + 108t$.

Bản chất của phương pháp nêu trên chính là: để tìm toàn bộ các nghiệm nguyên của phương trình $ax' + by' = c'$ chúng ta chỉ cần tìm một cặp nghiệm nguyên của nó.

($c' + A = kb'$ và $A' = ma'$ tức là $c' + ma' = kb' \Rightarrow a'(-m) + b'k = c'$). Vì vậy, lời giải rất ngắn gọn.

Qua câu chuyện về cách tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định này, tôi không muốn dừng ở mục tiêu giới thiệu với bạn đọc một phương pháp giải khác với sách giáo khoa mà còn muốn nhắc nhở bạn đọc: đừng vội vã thỏa mãn và yên lòng với những kết quả đã nêu trong sách vở mà phải luôn luôn nghĩ đến những cái mới tốt đẹp hơn, trong sáng hơn và hãy dũng cảm, kiên trì tiếp cận chúng.

Tiểu sử các nhà toán học

MUHAMET IBN MUXA ALGOREZMI

NĂM 1983 theo quyết định của UNESKO (tổ chức văn hóa giáo dục và khoa học của Liên hiệp quốc) toàn thế giới đã tổ chức trọng thể lễ kỷ niệm 1.200 năm năm sinh nhà bác học lớn người Trung Á Muhamet Ibn Muxa Algôrêzmi, một con người mà tên tuổi đã vĩnh viễn đi vào lịch sử toán học, thiên văn học và địa lý học của nhân loại.

Thế kỷ thứ 8 và thứ 9 vùng Trung Á đóng một vai trò quan trọng trong đời sống văn hóa và xã hội của các quốc gia Arâp. Miền Gôrêzmi (nay thuộc địa phận của nước cộng hòa Uzbekixtan, Liên Xô) có một lịch sử phong phú và phát triển lâu đời. Đây là đầu mối giao lưu giữa những thành phố thuộc vùng bờ Biển Vàng, xứ Ấn Độ nóng ấm miền Kiat, Gurganza v.v... Thời đó, những người dân vùng Gôrêzmi đã có lịch riêng, có một nền nông nghiệp và thủ công phát triển, có nhiều ngành khoa học với lịch sử phát triển lâu đời.

Năm 762 quốc vương Halip Đinacti Abbasigov an-Mansur đã quyết định chuyển kinh đô đến Bagđat. Tại đây quốc vương đã mở một thư viện lớn mang tên là Hizanat al-hicma (kho báu) hoặc còn gọi là cung thông thái, thu hút nhiều nhà bác học lớn của các vương quốc đến sống và làm việc. Các nhà khoa học đã thành lập một Viện Hàn lâm khoa học và xây dựng hai đài thiên văn lớn, một đài đặt ở đỉnh núi Caxiôn gần Đamasca, một đài đặt tại kinh đô Bagđat. Tại những trung tâm thiên văn nói trên người ta đã tiến hành đo kinh tuyến trái đất và góc lệch giữa mặt phẳng xích đạo với mặt phẳng quỹ đạo của trái đất. Algôrêzmi đã có nhiều đóng góp quan trọng trong những hoạt động khoa học đó. Xuất thân từ vùng Gôrêzmi nhưng sau đó ông đã tìm đến cung thông thái để mở mang kiến thức và làm việc. Tri thức về thiên văn của Algôrêzmi rất uyên bác, các bảng thiên văn của ông được nhiều nhà bác học lớn truyền nhau sử dụng. Những kiến thức của ông đóng góp cho lĩnh vực số học và đại số là đặc sắc hơn cả. Algôrêzmi đã viết cuốn « Sách tóm tắt về tính toán algebr và mucabal » trình bày nhiều phương pháp và thuật toán biến đổi đại số và lập tương quan. Thuật ngữ algebr (khôi phục) và mucabal (tương quan) dùng để nói về hai thao tác chủ yếu và hay dùng trong đại số ở thời Trung Thế kỷ. Tác phẩm này của Algôrêzmi được các trung tâm văn hóa khác của Châu Âu sao chép lại và truyền bá đi nhiều nơi. Bản thân thuật ngữ algebr sau đó cũng được các nhà khoa học Châu Âu công nhận để định danh cho môn đại số học (ALGEBRE, ALGEBRA).

Lần đầu tiên trong lịch sử toán học Algôrêzmi đã phân loại 6 dạng chuẩn tắc của các phương trình đại số bậc 1 và bậc 2, đề xuất các công thức giải. Khái niệm về phương trình đại số đã xuất hiện từ trước thời Algôrêzmi nhưng không một nhà toán học nào trước ông nhìn nhận đại số học như một nguyên lý khoa học độc lập.

Hệ thập phân đã được người Ấn độ dùng từ lâu, do đó các nhà toán học Arap gọi hệ thống đó là hệ Ấn độ. Nhờ công lao của Algôrêzmi mà hệ đếm này được truyền bá rộng rãi sang phương Đông.

Vào thế kỷ thứ 13, Lêônarđô Fibônatxi mang biệt hiệu là Piđanxki đã viết cuốn « Abaca » trong đó dành nhiều trang nói về các công trình của Algôrêzmi, còn các nhà toán học Carđanô (1501 — 1576) và Tartalia (1500 — 1557) thì gọi Algôrêzmi là nhà phát minh ra các nguyên lý của số học Ấn độ và hình học ứng dụng. Hiện nay ở Viện Bảo tàng Cambriđ còn trưng bày một trong những bản dịch cuốn « Sách tóm tắt về tính toán algebr và mucabal » của Algôrêzmi. Bản thân từ Algôrêzmi một thời gian dài ở Châu Âu được dùng để nói về số học dựa trên các ký hiệu Ấn độ và ngày nay thuật ngữ đó đã chính thức được dùng trong toán học và tin học với nghĩa là thuật toán hoặc thuật giải (Algorithm)

Algôrêzmi còn viết nhiều cuốn sách về thiên văn và địa lý trong đó ông đề xuất cách lập lịch mô tả chuyển động của mặt trời, mặt trăng và 5 hành tinh khác của Thái dương hệ. Trong cuốn « Các bức tranh của trái đất » ông đã tổng hợp những kiến thức uyên bác của loài người về địa lý mà nhiều năm sau đó không một nhà bác học nào của Châu Âu có thể viết nổi. Trong cuốn địa lý thế giới nổi tiếng này ông đã phân biệt các vùng khí hậu và tự nhiên khác nhau, mô tả các quốc gia các vùng biển, các đảo và quần đảo, các con sông và suối v.v...

Khoảng năm 830 Algôrêzmi viết cuốn lịch sử thế giới, mô tả những sự kiện lớn từ thời Alexanđr Makeđon đến thế kỷ thứ 9. Algôrêzmi đề xuất nhiều nguyên lý phát triển nhận thức, phương pháp nghiên cứu khoa học, cách thức vận dụng các thành tựu lý thuyết vào thực tiễn. Hai tượng đài đã được dựng ở Tasken, Thủ đô nước Cộng hòa Uzbêkixtan, Liên Xô và ở thành phố Hive để ghi nhận những công lao to lớn của Algôrêzmi đóng góp cho nền văn minh nhân loại.

XUÂN HUY

Tìm hiểu toán học hiện đại:

ĐƯỜNG CONG PEANO

NGÔ VIỆT TRUNG

THÔNG thường mọi người đều hiểu đường cong là một đường gì đó mà người ta có thể chuyển động theo thời gian liên tục từ một điểm này đến một điểm khác. Trên mặt phẳng điều này có nghĩa là ứng với một giá trị t (thời gian) người ta có một điểm (x, y) của đường cong với các hàm tọa độ:

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t)$$

là liên tục và đường cong chính là tập các điểm $(\varphi(t), \Psi(t))$ khi t chạy trên một đoạn thẳng hay toàn bộ đường thẳng thực. Đây cũng là định nghĩa đường cong do nhà toán học Pháp Jordan đưa ra ở thế kỷ trước. Cần phải nhắc lại là một hàm số $f(t)$ được gọi là liên tục nếu giá trị hàm số tại hai giá trị càng gần nhau bao nhiêu thì càng giống nhau bấy nhiêu: cụ thể là tại một giá trị t_0 cho trước và với mọi số dương ε nhỏ tùy ý người ta có thể tìm được một số dương δ sao cho $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$

$$\text{nếu } |t - t_0| < \delta.$$

Năm 1980, nhà toán học Ý Peano đã tìm ra một đường cong theo định nghĩa trên lấp đầy một hình vuông. Trực quan mà nói, khó lòng có thể coi một hình vuông là đường cong. Vì vậy định nghĩa của Jordan chưa phải là hoàn hảo. Peano xây dựng đường cong đó như sau.

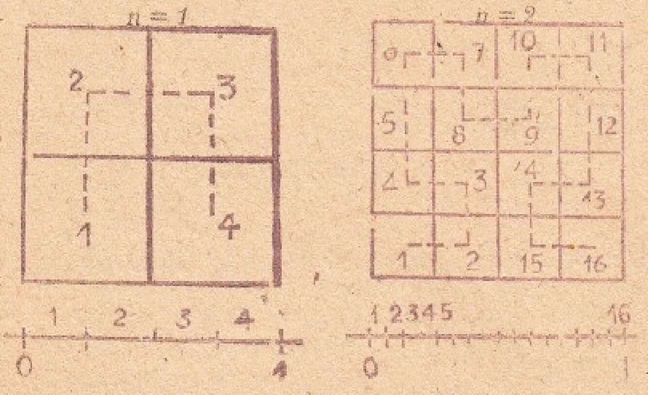
Hãy xét một hình vuông V bất kỳ trên mặt phẳng. Ta chia V ra làm 4^n hình vuông bằng nhau với mọi số tự nhiên n. Hãy ký hiệu các hình vuông này với thứ tự V_1^n, V_2^n, ..., $V_{4^n}^n$ sao cho

(1) V_k^{n-1} là hợp các hình vuông V_{4k-3}^n, V_{4k-2}^n, V_{4k-1}^n, V_{4k}^n với mọi $k = 1, 2, \dots, 4^{n-1}$

(2) V_k^n và V_{k+1}^n có cạnh chung với mọi $k = 1, 2, \dots, 4^n - 1$.

Bằng quy nạp có thể thấy điều này luôn luôn thực hiện được (xem hình vẽ). Tương tự ta cũng chia đoạn thẳng $[0, 1]$ ra làm 4^n phần bằng nhau với kí hiệu T_1^n, T_2^n, ... $T_{4^n}^n$ theo thứ tự từ trái sang phải. Rõ ràng các đoạn thẳng này cũng thỏa mãn các tính chất giống như (1) và (2):

(3) T_k^{n-1} là hợp các đoạn thẳng T_{4k-3}^n, T_{4k-2}^n, T_{4k-1}^n, T_{4k}^n với mọi $k = 1, 2, \dots, 4^{n-1}$



(4) T_k^n và T_{k+1}^n có điểm chung với mọi $k = 1, 2, \dots, 4^n - 1$.

Với mọi điểm t của đoạn thẳng $[0, 1]$ ta có thể tìm được một chuỗi các đoạn thẳng lồng nhau:

$$T_{\alpha_1}^1 \supset T_{\alpha_2}^2 \supset \dots \supset T_{\alpha_n}^n \supset \dots$$

cùng chứa điểm t. Theo (1) và (3) ta cũng có

$$V_{\alpha_1}^1 \supset V_{\alpha_2}^2 \supset \dots \supset V_{\alpha_n}^n \supset \dots$$

Độ dài cạnh các hình vuông này tiến tới không, nên chúng có một điểm chung duy nhất với tọa độ (x, y). Chú ý rằng nếu

$$T_{\beta_1}^1 \supset T_{\beta_2}^2 \supset \dots \supset T_{\beta_n}^n \supset \dots$$

là một chuỗi đoạn thẳng lồng nhau khác cùng chứa điểm t, thì sẽ có một số n_0 sao cho $\alpha_n = \beta_n + 1$ hoặc $\alpha_n = \beta_n - 1$ với mọi $n \geqslant n_0$. Theo (2) thì $V_{\alpha_n}^n$ và $V_{\beta_n}^n$ sẽ có cạnh chung và do đó chuỗi các hình vuông lồng nhau

$$V_{\beta_1}^1 \supset V_{\beta_2}^2 \supset \dots \supset V_{\beta_n}^n \supset \dots$$

sẽ cũng có điểm chung duy nhất là (x, y). Đặt

$$\varphi(t) = x, \ \Psi(t) = y.$$

Ta sẽ chứng minh các hàm $\varphi(t)$ và $\Psi(t)$ là liên tục.

Với mọi số dương ε nhỏ tùy ý ta có thể chọn một số tự nhiên n sao cho $n\varepsilon$ lớn hơn cạnh hình vuông V. Nếu t và t_0 là hai điểm trên đoạn thẳng $[0, 1]$ có khoảng cách

$$|t - t_0| < 1/4^n,$$

thì ta có thể tìm được một đoạn thẳng T_α^n chứa cả t lẫn t_0. Theo định nghĩa, các điểm $(\varphi(t), \Psi(t))$ và $(\varphi(t_0), \Psi(t_0))$ sẽ cùng nằm trong hình vuông V_α^n. Do cạnh của V_α^n nhỏ hơn ε,

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon, \ |\Psi(t) - \Psi(t_0)| < \varepsilon.$$

Vấn đề còn lại là phải chứng minh V chính là tập các điểm $(\varphi(t), \Psi(t))$ khi t chạy trên đoạn thẳng $[0, 1]$. Cho (x', y') là một điểm bất kỳ của V. Ta có thể tìm được một chuỗi các hình vuông lồng nhau:

$$V_{\alpha_1'}^1 \supset V_{\alpha_2'}^2 \supset \dots \supset V_{\alpha_n'}^n \supset \dots$$

cùng chứa điểm (x', y'). Chuỗi các đoạn thẳng lồng nhau

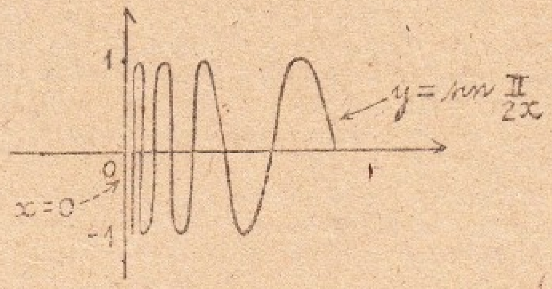
$$T_{\alpha_1'}^1 \supset T_{\alpha_2'}^2 \supset \dots \supset T_{\alpha_n'}^n \supset \dots$$

sẽ có một điểm chung duy nhất t'. Theo định nghĩa các hàm $\varphi(t)$ và $\Psi(t)$ thì ta phải có

$$\varphi(t') = x', \ \Psi(t') = y'.$$

Như vậy V là một đường cong theo định nghĩa của Jordan. Cũng cần phải nhận xét rằng ánh xạ $t \mapsto (x, y)$ như trên không phải là ánh xạ $1-1$. Thật vậy, dễ thấy tâm điểm của V là ảnh của hai điểm khác nhau thuộc các đoạn thẳng T_1^1 và T_4^1. Điều này gợi ý cho ta định nghĩa đường cong như Jordan đã làm với điều kiện thêm là ánh xạ $t \mapsto (x, y)$ phải là một ánh xạ $1-1$. Tuy nhiên, định nghĩa này cũng không chứa hết các đường cong hiểu một cách trực quan. Ví dụ như hợp hai đường cong $y = \sin(\pi/2x)$ $(0 < x \leqslant 1)$ và $x = 0$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$ không phải là một đường cong theo nghĩa trên (xem hình vẽ).

Đường cong này cũng không phải là một đường cong theo định nghĩa của Jordan.



Tóm lại, với các ví dụ trên, người ta thấy cách hiểu đường cong theo định nghĩa thông thường, một mặt quá tổng quát và mặt khác lại không bao gồm hết các đường cong vẫn thường xuất hiện trong vật lý, hóa học, v.v...

GIẢI BÀI *kỳ trước*

Bài 1/151 *Cho dãy số $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ có các tính chất $a_n = a_{5n}$, $n \geqslant 1$; $a_{5m+1} = 1$; $a_{3+5m} = 0$ với mọi $m \geqslant 0$ nguyên.*

Chứng minh dãy số không có chu kỳ.

Lời giải: Giả sử dãy số có chu kỳ T. Ta viết dưới dạng $T = 5m + r$ $(0 \leqslant r \leqslant 4)$, m nguyên không âm (do $T > 0$). Ta sẽ chỉ ra điều vô lý.

Thực vậy: Do $a_{5m+1} = 1$ suy ra $a_1 = 1$.

Với $T = 5m + 1$ ta có $a_1 = a_{2T+1} = a_{2(5m+1)+1} = a_{5(2m)+3} = 0$ vô lý.

Với $T = 5m + 2$; ta có $a_1 = a_{T+1} = a_{5m+2+1} = a_{5m+3} = 0$ vô lý.

Với $T = 5m + 3$; ta có $a_1 = a_{4T+1} = a_{4(5m+3)+1} = a_{20m+13} = a_{5(4m+2)+3} = 0$. Vô lý.

Với $T = 5m + 4$; ta có $a_1 = a_{3T+1} = a_{3(5m+4)+1} = a_{5(3m+2)+3} = 0$ vô lý.

Với $T = 5m$, ta có $a_{s+m} = a_{5(s+m)} = a_{5(s+m)+4T} = a_{5(s+m)+20m} = a_{25m+5s} = a_{5(5m+s)} = a_{5m+s} = a_s$ với mọi $s \in N$. Điều này chứng tỏ m cũng là chu kỳ và mâu thuẫn với điều $5m$ là chu kỳ.

Tóm lại, dãy số có tính chất trên không thể có chu kỳ.

Nhận xét: Các bạn *Hà Huy Minh* ($A_0$10 ĐHTH Hà Nội); *Trần Việt Dũng* (11 CT Hà Nội – Amstexdam); *Trần Quang Minh* (10 PTTH Tây Sơn, Hà Nội) và *Phạm Quỳnh Thư* (12CT, PTTH Lê Qui Đôn, Nha Trang) có lời giải tốt.

T.V.T

Bài 2/151. *Cho $f(x) = x^n$, $x = 1, 2, \ldots$ và n là số nguyên dương cố định. Gọi $f(x) = d_1(x)d_2(x)\ldots d_{r(x)}(x)$ là biểu diễn thập phân của $f(x)$. Ta thành lập số thập phân:*

$$a = 0{,}1d_1(2)d_2(2)\ldots d_{r(2)}(2)d_1(3)\ldots d_{r(3)}(3)d_1(4)d_2(4)\ldots$$

Số thập phân a có là hữu tỷ đối với giá trị n nào đó hay không?

Lời giải: Cách 1. Giả sử có một giá trị của n để a là số hữu tỷ. Khi đó bắt đầu từ một vị trí nào đó phần thập phân của a sẽ là tuần hoàn. Giả sử với $x > k$ thì $f(x)$ rơi vào phần tuần hoàn; Do $f(x) \neq 0$ với mọi x nguyên nên chu kỳ không thể gồm toàn các chữ số 0. Gọi p là số các chữ số của chu kỳ. Chọn m nguyên sao cho $10^m > k$ và $mn > 2p$. Khi đó $f(10^m)$ sẽ rơi vào phần tuần hoàn và vì $f(10^m) = 10^{mn}$, $mn > 2p$ nên suy ra sẽ có một chu kỳ gồm toàn các chữ số 0. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ không có một giá trị nào của n để a là số hữu tỷ.

Cách 2. Nếu a là số hữu tỷ với một giá trị nào đó của n thì bắt đầu từ một vị trí nào đó phần thập phân của a sẽ là tuần hoàn. Gọi p là số các chữ số của chu kỳ và giả sử với $x > k$ thì $f(x)$ rơi vào phần tuần hoàn. Chọn các số nguyên N và $x > k$ sao cho.

$$10^{Np-1} < f(x) < f(x+1) < 10^{Np} \qquad (1)$$

Các giá trị N mà $10^{(Np-1)/n} > k$ và $10^{Np/n} - 10^{(Np-1)/n} > 2$ đủ đảm bảo cho ta chọn được $x > k$ thỏa mãn (1). Khi đó $f(x)$ và

$f(x+1)$ cùng chiếm đúng N chu kỳ của số thập phân a mà $f(x)$ và $f(x+1)$ được đặt nối tiếp nhau trong biểu diễn thập phân của số a, suy ra $f(x) = f(x+1)$. Mâu thuẫn này chứng tỏ không có một giá trị nào của n để a là số hữu tỷ.

Nhận xét: Tất cả các lời giải gửi tới đều có ý tưởng như cách 1, song lập luận của các bạn còn dài dòng và thiếu chặt chẽ.

N.K.M

Bài 3/151: *Cho dãy số $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ với $0 < x_n < 1$ và $x_{n+1}(1 - x_n) > 1/4$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/2$.*

Lời giải: (của nhiều bạn).

Vì $0 < x_n < 1$ nên dãy số bị chặn. Theo giả thiết $x_{n+1}(1 - x_n) > 1/4$ và cũng có $x_n(1 - x_n) \leqslant 1/4$, nên suy ra $x_n < x_{n+1}$.

Dãy số $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên nên có giới hạn. Đặt $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ta có:

$$1/4 \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{n+1}(1 - x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty}(1 - x_n) = a(1 - a)$$

Suy ra $0 \geqslant (1/2 - a)^2$ vậy $a = 1/2$.

Nhận xét: Bạn *Nguyễn Công Đào, Nguyễn Quang Hưng, Nguyễn Lê Dũng, Bùi Thanh An, Mai Văn Thanh, Nguyễn Thanh Hoàn, Phạm Quỳnh Thư, Hạ Thái Sơn, Hoàng Quang Lực, Sỹ Ngọc Hoan, Trần Xuân Nhân, Lê Hồng Sơn, Nguyễn Việt Trung* có lời giải tốt.

V.Đ.H

Bài 4/151: *Giải phương trình:*

$$27\cos^4 x + 8\sin x = 12.$$

Lời giải: của *Lâm Đạo Tuấn* và *Trần Xuân Nhân*, lớp 11 trường PTTH Lê Quí Đôn và PTTH Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang.

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$27\cos^4 x + 8\sin x = 12(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 27\cos^4 x - 12\sin^2 x + (8\sin x - 12\cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(3\cos^2 x - 2\sin x)(3\cos^2 x + 2\sin x) - 4(3\cos^2 x - 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\cos^2 x - 2\sin x)(9\cos^2 x + 6\sin x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\sin^2 x + 2\sin x - 3)(9\sin^2 x - 6\sin x - 5) = 0$$

a) $3\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = (\sqrt{10} - 1)/3$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{lr} x = \alpha + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \dots & (1) \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \dots & (2) \end{array}\right.$$

với α là góc có $\sin\alpha = (-1 + \sqrt{10})/3$.

b) $9\sin^2 x - 6\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow \sin x = (1 - \sqrt{6})/3$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{lr} x = \beta + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \dots & (3) \\ x = -\beta + (2k+1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \dots & (4) \end{array}\right.$$

với β là góc có $\sin\beta = (1 - \sqrt{6})/3$.

Vậy phương trình đã cho có 4 họ nghiệm (1), (2), (3) và (4).

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Công Đào* (Gia lai Kon tum), *Nguyễn Văn Hải* (Quảng Nam, Đà Nẵng), *Hà Huy Minh* ($A_0$10 ĐHTH Hà Nội) có lời giải tốt.

N.K.M

Bài 5/151: *Trên khoảng $(0, +\infty)$ cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$\forall \lambda \in [0, 1]$, $x, y \in (0, +\infty)$. Chứng minh rằng:

1) Nếu $f(x) \leqslant 0$ thì hàm số $g(x) = f(x)/x$ đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$. Kết quả còn đúng nữa không nếu $f(x) > 0$?

2) Nếu tồn tại $f'(x)$, $f''(x)$ trên $[0, +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf'(x) - f(x)) \leqslant 0$ thì hàm số $g(x) = f(x)/x$ đơn điệu giảm trên $(0, +\infty)$.

Lời giải: 1) Giả sử $h > 0$ là số bất kỳ, thì từ tính chất của $f(x)$, với $x \in (0, +\infty)$ ta có:

$$f(x) = f\left((x+h)\cdot\frac{x}{x+h} + 0\cdot\frac{h}{x+h}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x}{x+h}\cdot f(x+h) + \frac{h}{x+h}\cdot f(0) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x}{x+h}\cdot f(x+h).$$

Do $h > 0$, $x \in (0, +\infty)$ nên:

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x+h)}{x+h} \qquad \text{(đ.p.c.m)}$$

Kết quả trên không còn đúng, nếu $f(0) > 0$. Thực vậy hàm số $f(x) = 1 + x^2$ thỏa mãn điều kiện của bài toán, nhưng $f(0) = 1 > 0$ và $f(x)/x = x + 1/x$ đơn điệu giảm khi $x \in (0, 1)$ và đơn điệu tăng khi $x \in (1, +\infty)$.

2) Ta có thể thấy đây là hàm lồi, nên $f''(x) \geqslant 0$. Ta cũng có thể chứng minh khẳng định này như sau. Giả sử $\lambda \in (0, 1)$ ta có

$$f(x + \lambda(y - x)) = f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

suy ra:

$$f(x + \lambda(y - x)) - f(x) \leqslant \lambda(f(y) - f(x))$$

Nếu $y > x$ thì

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda(y - x)} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Cho $\lambda \to 0$ thì vế trái tiến tới $f'(x)$ (theo định nghĩa đạo hàm) $\Rightarrow f'(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Mặt khác, xuất phát từ

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

và bằng cách làm tương tự ta có

$f'(y) \geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Vậy $f'(x) \leqslant f'(y)$.

Từ đó suy ra $f'(x)$ đơn điệu tăng trên $[0, +\infty]$, do đó $f''(x) \geqslant 0$.

Đặt $\varphi(x) = xf'(x) - f(x)$, ta có:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

$\varphi'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) \geqslant 0$, $x \in [0, +\infty)$.

Vậy $\varphi(x)$ đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$. Để ý rằng

$\lim\limits_{x \to +\infty} (xf'(x) - f(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) \leqslant 0$, nên $\varphi(x) \leqslant 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$

Từ đó suy ra $g'(x) \leqslant 0$ $\forall x \in (0, \infty)$. Hay ta có $g(x)$ đơn điệu giảm trên $(0, +\infty)$ (đ.p.c.m).

Nhận xét:

1. Bài này chỉ có 3 bạn *Nguyễn Thanh Hoàn*, *Trần Xuân Nhàn* và một bạn không rõ tên gửi bài giải.

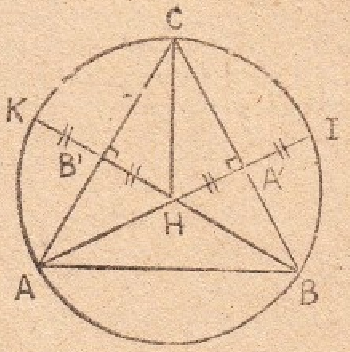
2. Nói cho chính xác thì trong câu 1) ta chỉ chứng minh được $g(x)$ là *hàm không giảm*, trong câu 2) ta chỉ khẳng định được $g(x)$ là *hàm không tăng*.

V.Đ.H

Bài 6/151. *Cho $\triangle ABC$, các đường cao AA', BB' cắt đường tròn ngoại tiếp ở I, K. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ là nhọn và $A'I = B'K$ thì $\triangle ABC$ cân.*

Lời Giải: (của *Nguyễn Lê Dũng* lớp 9CT trường PTCS Trần Quốc Toản và nhiều bạn khác).

Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$. Ta có $\widehat{KAC} = \widehat{KBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{KC}$).



$\widehat{KBC} = \widehat{CAI}$ (góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

Vậy $\widehat{KAC} = \widehat{CAI} \Rightarrow AB'$ vừa là phân giác vừa là đường cao của $\triangle AKH$.

$\Rightarrow AB'$ là trung tuyến của $\triangle$ cân AKH

$\Rightarrow B'K = B'H$, tương tự $A'I = A'H$, theo giả thiết $A'I = B'K$ vậy $B'H = A'H \Rightarrow H$ cách đều 2 cạnh AB và $AC \Rightarrow CH$ vừa là đường phân giác vừa là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ cân ở C.

Nhận xét: Các bạn gửi bài đến giải theo rất nhiều cách khác nhau và đều đúng.

Đ.B.K

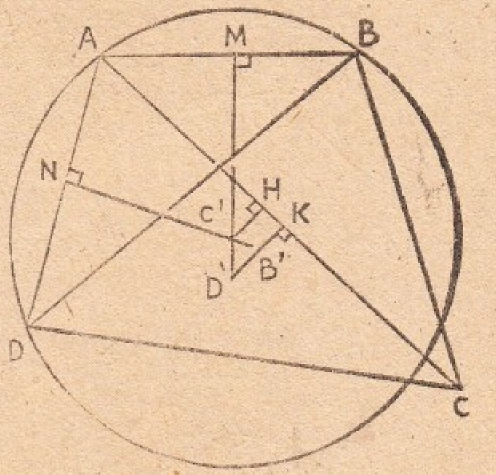
Bài 7/151 *Cho $ABCD$ là tứ giác lồi có các đỉnh không nằm trên một đường tròn. Gọi $A'B'C'D'$ là tứ giác có các đỉnh A', B', C', D' là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Ta viết $T(ABCD) = A'B'C'D'$. Lại lấy $A''B''C''D'' = T(A'B'C'D') = T(T(ABCD))$.*

a) Hãy chứng minh $ABCD$ và $A''B''C''D''$ đồng dạng.

b) Hệ số đồng dạng phụ thuộc vào độ lớn các góc tứ giác $ABCD$. Xác định hệ số này.

Lời giải: Có bốn bài giải gửi về tòa soạn, nhưng chưa thật chặt chẽ trong lý luận.

a) Do A, B, C, D không cùng nằm trên một đường tròn nào nên $A'B'C'D'$ là bốn điểm phân biệt. Ta có $A'B'$, $A'D'$, $B'C'$... lần lượt là trung trực của CD, BD, BC, AD...



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Ta có tứ giác nội tiếp $AMC'N$. Hạ $C'H \perp AC$. Do $B'D' \perp AC$ nên $B'D' // C'H$. Vậy B' và D' nằm về cùng một phía đối với đường thẳng $C'H$ và M, N cũng nằm về cùng một phía đối với đường thẳng $C'H$. Vậy $\widehat{B'C'D'} = \widehat{MC'N} =$ $= \pi - \widehat{BAD}$.

Tương tự $\widehat{C'D'A'} = \pi - \widehat{CBA}$;

$\widehat{D'A'B'} = \pi - \widehat{DCB}$;

$\widehat{A'B'C'} = \pi - \widehat{ADC}$.

Do đó $A'B'C'D'$ cũng là tứ giác lồi không nội tiếp được. Cũng vậy ta lại có $A''B''C''D''$ là tứ giác lồi và hơn nữa $A''B''$, AB cùng vuông góc với $C'D'$ nên $A''B''//AB$. Tương tự $B''C''//BC$ và $C''A''//CA$. Do đó các tam giác $A''B''C''$ và ABC đồng dạng. Lập luận tương tự ta cũng có các cặp tam giác đồng dạng $A''D''C''$ và ADC; $B''C''D''$ và BCD; $A''B''D''$ và ABD. Suy ra $ABCD$ và $A''B''C''D''$ đồng dạng.

b) Giả sử $B'D'$ cắt AC tại K (trung điểm của AC). Trên $B'D'$ ta định chiều dương từ phía chứa D tới AC. Khi đó

$\overline{B'K} = AC \cdot \cos\widehat{D}/2\sin\widehat{D}$; $\overline{D'K} = AC \cos\widehat{B}/2\sin\widehat{B}$

và

$$D'B' = |\overline{B'K} - \overline{D'K}|$$

$$= AC \sin(\widehat{D} + \widehat{B})/2\sin\widehat{D}\sin\widehat{B}$$

Tương tự

$$C''A'' = \left| \frac{D'B'' \sin(\widehat{A'} + \widehat{D'})}{2\sin\widehat{A'} \cdot \sin\widehat{B'}} \right|$$

Do đó

$$\frac{A''C''}{AC} = \frac{1}{4} \left| \frac{\sin(\widehat{B} + \widehat{D})\sin(\widehat{A} + \widehat{C})}{\sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\sin\widehat{D}} \right|$$

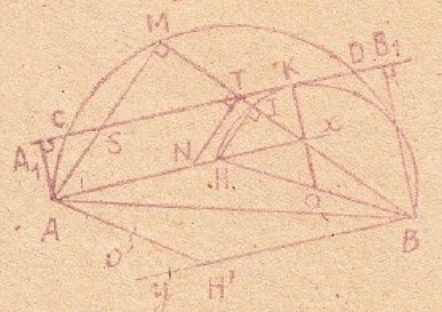
N.Q.T

Bài 8/151: *Cho hai điểm C và D trên nửa đường tròn đường kính AB; M là một điểm di động trên cung $\overset{\frown}{CD}$; MA cắt đoạn CD ở S; MB cắt đoạn CD tại T. Hãy dựng vị trí của điểm M sao cho đoạn ST có độ dài lớn nhất.*

Lời giải:

1. Phân tích: Giả sử đã dựng được điểm M. Qua A kẻ $Ax//CD$. Từ T kẻ đường thẳng $//AM$ cắt Ax ở N. Ta có $AN = ST$ và $NT \perp MB$. Như vậy việc dựng M được quy về việc dựng T trên CD để đoạn AN lớn nhất và $NT \perp MB$.

Vẽ vòng tròn đường kính BH (H ở trên Ax) tiếp xúc CD ở K cắt MB ở I. Nếu K trùng



với T (khi đó I trùng với T) thì N trùng với H. Nếu T không trùng với K thì T ở ngoài vòng tròn đường kính BH và nằm trong đoạn MI. Lại có $HI \perp BM$ nên luôn có $AN \leqslant HA$.

Gọi A_1, H_1, B_1 là hình chiếu vuông góc của A, H, B lên đường thẳng CD; ta có $AA_1 = HH_1$ và $OK = (HH_1 + BB_1)/2$ (đường trung bình của hình thang HH_1B_1B). Vậy $BH = 2OK = AA_1 + BB_1$ xác định. Từ đó điểm T được xác định ($T \equiv K$) và $AN = AH$ là lớn nhất.

2. *Cách dựng*: Từ A kẻ $Ax//CD$; dựng A_1, B_1 là hình chiếu vuông góc của A và B lên CD; Lấy B làm tâm dựng vòng tròn bán kính $AA_1 + BB_1$ cắt Ax tại H. Vẽ vòng tròn đường kính BH tiếp xúc CD ở T. Đường thẳng BT cắt đường tròn đường kính AB ở M, nối M với A cắt CD ở S. Ta có điểm M cần dựng.

3. *Chứng minh*: Gọi O_1 là hình chiếu vuông góc của O lên CD. Ta có $OO_1 = (HH_1 + BB_1)/2 = (AA_1 + BB_1)/2$ nên O_1 nằm trên đường tròn đường kính BH. Vậy đường tròn này luôn tiếp xúc với đoạn CD. Mặt khác luôn có M thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$ và theo chứng minh ở phần phân tích thì ST là lớn nhất.

4. *Biện luận*: Bài toán luôn có một nghiệm hình duy nhất.

Hiển nhiên trên Ax luôn có một nghiệm hình duy nhất AH. Ta sẽ chỉ ra trên đường thẳng $By//CD$ sẽ không có thêm một điểm M nào cần dựng nữa.

Thực vậy, trên By lấy H' sao cho $AH' = AA_1 + BB_1$. Gọi O' là điểm giữa của AH'; AM cắt CD ở S. Ta có $OO'//AH//SK$ và $OO' = AH = SK$ nên $\square OO'SK$ là hình bình hành. Từ đó $O'S = OK = (AA_1 + BB_1)/2 = AH'/2$ nên tam giác $AH'S$ vuông tại S. Vậy đường tròn đường kính AH' sẽ tiếp xúc CD tại S. Do đó việc chọn A hay B để dựng M đều cho cùng một kết quả.

Nhận xét: Các bạn *Lê Hữu Hùng* (12A1, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa), *Hoàng Trung Nam* (10 chuyên lý, Lê Quí Đôn, Nha trang Phú Khánh) có lời giải tương đối tốt.

T. V. T

Bài 9/151 *Gọi $f(n)$ là số nhỏ nhất các điểm khác nhau trên mặt phẳng sao cho đối với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$ có một đường thẳng chứa đúng k điểm này. Chứng minh rằng*

$$f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right]$$

trong đó $[x]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Lời giải: Xét tập hợp X_n thỏa mãn

(1) Gồm hữu hạn điểm khác nhau trên mặt phẳng

(2) Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$ có một đường thẳng L_k chứa đúng k điểm của X_n

Từ (2) ta có đường thẳng L_n chứa đúng n điểm của X_n, đường thẳng L_{n-1} chứa đúng $(n-1)$ điểm của X_n và ít nhất có $(n-2)$ điểm trong số đó không nằm trên L_n, đường thẳng L_{n-2} chứa $(n-2)$ điểm của X_n và ít nhất có $(n-4)$ điểm trong số đó không nằm trên L_n cũng như $L_{n-1}, \ldots$ đường thẳng $L_{n-[n/2]}$ chứa $(n-[n/2])$ điểm của X_n và ít nhất có $(n-2[n/2])$ điểm trong số đó không nằm trên bất cứ một đường thẳng nào trong các đường thẳng $L_n, L_{n-1}, \ldots, L_{n-[n/2]+1}$. Do đó nếu kí hiệu $|X_n|$ là số các điểm của X_n, ta có:

$$|X_n| \geqslant n + (n-2) + (n-4) + \ldots + (n - 2[n/2]) = g(n)$$

Suy ra: $f(n) = \min \{|X_n| : X_n$ thỏa mãn (1) và (2) $\} \geqslant g(n)$.

Bây giờ, bằng phương pháp qui nạp theo n ta sẽ chứng tỏ rằng với mỗi n bất kì đều tồn tại một tập hợp X_n thỏa mãn (1), (2) và có $|X_n| = g(n)$. Thật vậy, với $n = 1$ hay $n = 2$ ta có tập hợp gồm 1 hay 2 điểm là tập hợp cần tìm. Giả sử X_m là tập hợp thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và có $|X_m| = g(m)$. Lấy một đường thẳng L không đi qua bất kì một điểm nào của X_m và cắt tất cả các đường thẳng L_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, nhưng không đi qua giao điểm nào của các đường thẳng ấy. Gọi P_k là giao điểm của L và L_k và giả sử P_{m+1}, P_{m+2} là hai điểm của L khác với $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Sau khi thêm vào X_m các điểm $P_1, P_2, \ldots, P_{m+2}$ ta được tập hợp X_{m+2} thỏa mãn (1) và có $|X_{m+2}| = g(m) + (m+2) = g(m+2)$. Hơn nữa với mỗi $k = 1, 2, \ldots, m$ đường thẳng L_k chứa đúng $(k+1)$ điểm của X_{m+2}. Đường thẳng L chứa đúng $(m+2)$ điểm của X_{m+2} và dĩ nhiên ta luôn tìm được một đường thẳng chỉ chứa đúng 1 điểm của X_{m+2}. Từ đây suy ra tập X_{m+2} cũng thỏa mãn (2). Theo nguyên lý qui nạp ta có điều muốn chứng minh. Vậy $f(n) = g(n) = ([n/2] + 1)(n - [n/2]) = [(n+2)/2][(n+1)/2]$ (đpcm)

Nhận xét: Trong số các lời giải gửi tới chỉ có lời giải của bạn *Nguyễn Công Đào* (Gialai — Kontum) là trọn vẹn hơn cả, song rất tiếc là lập luận của bạn Đào không rõ ràng, một số chỗ thiếu chặt chẽ, không chính xác. Các bạn khác đều mắc phải một sai lầm là sau khi chứng minh được $f(n) \geqslant g(n)$ vội vã kết luận ngay $f(n) = g(n)$.

N. K. M

Bài 10/151 *Cho ABCD là tứ diện có tổng các cạnh đối diện bằng 1. Chứng minh rằng*

$$r_A + r_B + r_C + r_D \leqslant \sqrt{3}/3$$

trong đó r_A, r_B, r_C, r_D là các bán kính các đường tròn nội tiếp của các mặt và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ diện ABCD là đều

Lời giải: (của *Hà Thái Sơn*, 10A PTTH *Trần Quốc Tuấn* thị xã Quảng Ngãi).

Xét một tam giác có ba cạnh a, b, c, nửa chu vi p, bán kính nội tiếp r. Khi đó diện tích tam giác đó là

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Do $(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27}$

nên ta có $r \leqslant p\sqrt{1/27}$ và có dấu bằng khi $a = b = c$.

Vậy với tứ diện $ABCD$ ở trên thì

$$r_A + r_B + r_C + r_D \leqslant \sqrt{1/27}\left(\frac{AB+BC+CA}{2} + \frac{AB+BD+DA}{2} + \frac{AC+CD+DA}{2} + \frac{BC+CD+DB}{2}\right) = \sqrt{1/27}\cdot 3 = \sqrt{3}/3.$$

và có dấu bằng khi và chỉ khi bốn mặt cùng là tam giác đều.

N. Q. T

Bài 11/151. *Chứng minh rằng với mọi số hữu tỉ, a, b, c đôi một khác nhau ta đều có*

$$M = 1/(b-c)^2 + 1/(c-a)^2 + 1/(a-b)^2$$

là bình phương của một số hữu tỉ.

Lời giải: Đặt $x = 1/(b-c)$, $y = 1/(c-a)$, $z = 1/(a-b) \Rightarrow 1/x + 1/y + 1/z = b - c + c - a + a - b = 0$.

hay $xy + yz + zx = 0$

Do đó

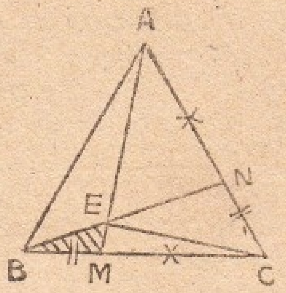
$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 \quad \text{(đpcm)}$$

Nhận xét: Đa số các bạn gửi bài đến đều đặt $x = b - c$; $y = c - a$; $z = a - b$ nên biến đổi còn dài dòng. Các bạn *Phạm Văn Thái* (lớp 8I trường PTCS Cao Thắng, Đà Nẵng), và bạn *Nguyễn Lê Dũng* (lớp 9CT trường PTCS Trần Quốc Toản) có lời giải ngắn, gọn hơn cả.

Đ. B. K

Bài 12/151 *Cho tam giác ABC đều có diện tích S. Trên BC và CA lấy các điểm M và N sao cho MC = 2MB ; AN = 2NC. AM cắt BN tại E. Tính diện tích của tam giác EBM.*

Lời giải: (của *Nguyễn Văn Phong* lớp 9 chuyên toán Quy Nhơn).



Ta có $S_{ABC} = S$. Gọi $S_{EBM} = x$.

$$\left.\begin{array}{l} MC = 2BC/3 \Rightarrow S_{AMC} = 2S/3 \\ MC = 2BM \Rightarrow S_{EMC} = 2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow S_{AEC} = 2S/3 - 2x$$

$= NCAC/3 \Rightarrow S_{NEC} = S_{AEC}/3 = (2S/3 - 2x)/3$

$$= 2S/9 - 2x/3 \qquad (1)$$

Mặt khác $S_{NEC} = S_{NCB} - S_{ECB} = S/3 - 3x$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $2S/9 - 2x/3 = S/3 - 3x$ $\Rightarrow 7x/3 = S/9 \Rightarrow x = S/21$ hay $S_{EBM} = S/21$.

Nhận xét: Đa số các bạn kẻ thêm đường thẳng song song và sử dụng tính chất về tỷ lệ diện tích các tam giác đồng dạng để chứng minh cũng ngắn gọn. Một số bạn phạm sai lầm khi tính toán. Riêng bạn Vũ Lê Tú (11 lý 1 PTTH Hà Nội Amsterdam) sử dụng định lý Menelaus nên có lời giải ngắn gọn hơn cả.

Đ. B. K.

LỚP CUỐI CẤP PTCS

Bài 1/154: Cho mặt phẳng kẻ ô vuông đơn vị. Hãy tìm đường tròn có bán kính lớn nhất chỉ đi qua các đỉnh ô vuông mà không cắt một cạnh hình vuông nào cả.

Vũ Đình Hòa

Bài 2/154: Chứng minh rằng nếu

$$y \geq x^3 + x^2 + |x| + 1 \qquad (1)$$

thì ta có: $$x^2 + y^2 \geq 1. \qquad (2)$$

Tìm tất cả những cặp số (x, y) thỏa mãn điều kiện (1) để (2) xảy ra dấu bằng.

Nguyễn Đông Yên

CÁC LỚP PTTH

Bài 3/154: P là số chính phương có $(n+4)$ chữ số trong đó n chữ số đầu tiên và 4 chữ số cuối cùng đều làm thành các số chính phương khác không.

Tìm giá trị lớn nhất của P.

Đỗ Lâm Phóng

Bài 4/154: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho n chia hết cho $[\sqrt[3]{n}]$.

(ở đây $[x]$ chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Trần Duy Hinh

Bài 5/154: Cho các số tự nhiên k và n. Lập hai dãy số $\{a_j\}$ và $\{r_j\}$ như sau:

Bước thứ nhất: chia k cho n được thương là a_1 và dư là r_1.

Bước thứ j: chia $k + r_{j-1}$ cho n được thương là a_j và dư là r_j $(\forall j \geq 2)$.

Tính tổng $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Đỗ Đức Thái

Bài 6/154: Cho $a > 1$, m, n là các số tự nhiên. Chứng minh rằng:

$$a^{2n/m} - 1 \geq n(a^{(n+1)/m} - a^{(n-1)/m}).$$

Tạ Văn Tự

Bài 7/154: Chứng minh rằng với mỗi $0 < \varepsilon < 1$ tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho các hệ số của đa thức

$$(x + y)^n (x^2 - (2 - \varepsilon)xy + y^2)$$

đều dương với mỗi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Nguyễn Minh Đức

Bài 8/154: Giải phương trình:

$$\cos x \cos 2x \cos 3x + \sin x \sin 2x \sin 3x = 1$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 9/154: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi R_1 R_2 R_3, R_4 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, BCD, CDA và DAB.

Chứng minh rằng nếu $\widehat{A} + \widehat{C} > \widehat{B} + \widehat{D}$ thì

$$R_1R_3 < R_2R_4.$$

Hoàng Hoa Trại

Bài 10/154: Chứng minh rằng một tứ giác lồi nội tiếp trong một tam giác đều có cạnh bằng 1 không thể có cả bốn cạnh bên đều lớn hơn 1/2.

Bùi Văn Thanh

Bài 11/154: Chứng minh rằng nếu tất cả các góc nhị diện của một góc tam diện là nhọn, thì các góc phẳng của nó cũng nhọn.

Vũ Đình Hòa

Bài 12/154: Cho một góc tam diện ba mặt vuông $Oxyz$. Điểm M cố định ở trong góc đó. Xét các vị trí của mặt phẳng (P) qua M cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C.

Chính xác hóa vị trí của (P) để

a) Tổng $OA + OB + OC$ nhỏ nhất

b) Tổng các bình phương các cạnh của tam giác ABC nhỏ nhất.

Đào Trường Giang

CÁC ĐỀ TOÁN ÔN TẬP

Lớp cuối cấp PTCS

1. Chứng minh rằng biểu thức
$m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5$
với bất kỳ số nguyên m, n nào cũng không thể bằng 33.

2. Tính tổng

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n}$$

3. Đơn giản biểu thức

$$(1 + 1/2)(1 + 1/4)(1 + 1/16)\ldots(1 + 1/2^{2^n})$$

4. Chứng minh rằng trong một tam giác cân tổng khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ trên cạnh đáy tới 2 cạnh bên thì bằng đường cao hạ xuống cạnh bên.

5. Chứng minh rằng trong 1 tam giác bất kỳ trực tâm của nó đối xứng qua 3 cạnh của tam giác với 3 điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Trần Mai Châu

Lớp 10

1. Cho tam giác ABC, kẻ đường cao BD và CE. Trong tam giác ADE kẻ $DF \perp AE$, $EG \perp AD$. Chứng minh rằng $FG \parallel BC$.

2. Cho d là khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

(R, r là bán kính các đường tròn ngoại, nội tiếp tam giác ABC).

3. Giải phương trình

$$\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1}$$

4. Tìm giá trị của k để phương trình

$$4x^2 - (3k+2)x + k^2 - 1 = 0$$

có một nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11 \\ (x^2 - y^2)xy = 180 \end{cases}$$

Trần Mai Châu

Lớp 11

1. Chứng minh rằng với mọi p, t ta luôn có:
$2(2p-1)^4 + 1 + [1 - 2(2p-1)^4]\sin 2t \geqslant 0$

2. Giải phương trình

$$\log_9(x^2 - 5x + 6)^2 = 2^{-1}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x-1}{2}\right) + \log_3|x-3|$$

3. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = 90^\circ$; $\widehat{B} = 30^\circ$, đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính $\sqrt{3}$. Tính CM với M là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh AB.

4. Giải phương trình
$3 + 4\sqrt{6} - (16\sqrt{3} - 8\sqrt{2})\cos x = 4\cos x - \sqrt{3}$

5. Cho hình chóp tam giác $D.ABC$ có $AB = 6$; $CD = 8$ các cạnh còn lại là $\sqrt{74}$

a. Tính độ dài đường vuông góc chung của AB và CD

b. Xác định điểm O cách đều các đỉnh của hình chóp.

Tạ Văn Tự

Lớp 12

1. Giải phương trình

$$5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$$

2. Giải và biện luận phương trình:
$\sqrt{x - \sqrt{3}} + \alpha^2x^2 + 2\alpha x(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 6\sqrt{2} - 9$

3. Cho ngũ giác $ABCDE$ nội tiếp trong đường tròn bán kính 1.

Cho $AB = \sqrt{2}$; $\widehat{ABE} = \pi/4$; $\widehat{EBD} = \pi/6$;
$BC = CD$

Tính diện tích ngũ giác $ABCDE$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Qua trung điểm SA vẽ mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SBC). Hỏi mặt phẳng α chia hình chóp theo tỷ số nào?

5. Tìm các số nguyên u, v, w thỏa mãn điều kiện sau:

$$3(u-3)^2 + 6v^2 + 2w^2 + 3v^2w^2 = 33.$$

Tạ Văn Tự

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học và cao đẳng

ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐỒ THỊ HÀM PHÂN THỨC

NGUYỄN KHẮC MINH

Trong các kỳ thi tuyển vào các trường đại học và cao đẳng khối A, B ta thường gặp các bài toán yêu cầu xác định các điểm đặc biệt của họ đồ thị cho trước, hoặc xác định điểm $P(a, b)$ có hoành độ a, tung độ b thuộc loại điểm đặc biệt nào của họ đồ thị ấy,..., mà ta sẽ gọi chung là các bài toán về điểm đặc biệt của họ đồ thị.

Việc giải các bài toán về điểm đặc biệt của họ đồ thị $y = f(x, m)$ (1) khi $f(x, m)$ là một đa thức đối với x cũng như đối với m đã được trình bày khá kỹ càng và đầy đủ trong sách giáo khoa phổ thông và trong các tài liệu đã được xuất bản dành cho các bạn học sinh chuẩn bị thi vào đại học và cao đẳng. Trong bài này chúng tôi trao đổi với bạn đọc về việc giải loại bài toán nêu trên trong trường hợp $f(x, m)$ là hàm phân thức, tức khi $f(x, m)$ có dạng:

$$f(x, m) = g(x, m)/h(x) \qquad (2)$$

hoặc $f(x, m) = g(x)/h(x, m)$ (3)

hoặc $f(x, m) = g(x, m)/h(x, m)$ (4)

Trước hết ta xét trường hợp khi $f(x, m)$ có dạng (2). Giả sử có k giá trị ($k = 0, 1, 2...$) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ thỏa mãn $h(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Khi đó tất cả các điểm $M(x_0, y_0)$ có $x_0 = x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) sẽ là các điểm mà tất cả các đồ thị của họ (1) không bao giờ đi qua. Để khảo sát các điểm $M(x_0, y_0)$ có $x_0 \neq x_i$ ($i = 1, 2, \ldots k$) ta khảo sát số nghiệm của phương trình ẩn số m.

$$y_0 = g(x_0, m)/h(x_0) \qquad (5)$$

Vì $h(x_0) \neq 0$ nên ta có (5)

$$\Leftrightarrow y_0 \,.\, h(x_0) = g(x_0, m) \qquad (6)$$

Từ đây suy ra ta có thể thay thế việc khảo sát số nghiệm của phương trình (5) bằng việc khảo sát số nghiệm của phương trình (6), mà các phương pháp khảo sát ta đã quen biết.

Bây giờ ta sẽ xét trường hợp hàm $f(x, m)$ có dạng (4). Giả sử có n giá trị ($n = 0, 1, 2, \ldots$): $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và p giá trị ($p = 0, 1, 2, \ldots$) $m_1, m_2, \ldots, m_p$ thỏa mãn $h(x_i, m) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\forall m$ và $h(x, m_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$; $\forall x$. Khi đó tất cả các điểm $M(x_0, y_0)$ có $x_0 = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sẽ là các điểm mà mọi đồ thị của họ (1) không bao giờ đi qua. Để khảo sát các điểm $M(x_0, y_0)$ có $x_0 \neq x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) ta khảo sát số nghiệm của phương trình ẩn số m,

$$y_0 = g(x_0, m)/h(x_0, m) \qquad (5')$$

Điều kiện để (5') có nghĩa: $m \neq m_j$, $j = 1, \ldots, p$

Xét phương trình: $y_0 \cdot h(x_0, m) = g(x_0, m)$ (7)

Từ lý thuyết phương trình ta thấy phương trình (5') tương đương với phương trình (7) khi $m \neq m_j$ ($j = 1, 2, \ldots, p$). Suy ra số nghiệm của phương trình (5') bằng số nghiệm khác m_j của phương trình (7) và ngược lại số nghiệm khác m_j ($j = 1, 2, \ldots, p$) của phương trình (7) bằng số nghiệm của phương trình (5'). Do vậy ta có khẳng định sau:

1) Phương trình (5') vô nghiệm khi và chỉ khi hoặc phương trình (7) vô nghiệm hoặc phương trình (7) chỉ có các nghiệm $m = m_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$;

2) Phương trình (5') có q nghiệm ($q \neq 0$) khi và chỉ khi phương trình (7) có q nghiệm khác m_j, $j = 1, 2, \ldots, p$;

3) Phương trình (5') có vô số nghiệm khi và chỉ khi phương trình (7) có vô số nghiệm khác m_j, $j = 1, 2, \ldots, p$.

Khẳng định này là cơ sở của phương pháp khảo sát số nghiệm của phương trình (5').

Cách giải bài toán về điểm đặc biệt của họ đồ thị (1) trong trường hợp hàm $f(x, m)$ có dạng (3) hoàn toàn tương tự như cách giải trong trường hợp hàm $f(x, m)$ có dạng (4).

Dưới đây ta sẽ xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1 (Đề thi đại học khối A năm 1974): cho hàm số

$$y = \frac{2x^2 + (6 - m)x + 4}{mx + 2}$$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m đồ thị của hàm số luôn luôn đi qua một điểm cố định duy nhất. Xác định tọa độ của điểm đó.

Giải: Ta phải xác định x_0, y_0 sao cho phương trình (ẩn số m):

$$y_0 = \frac{2x_0^2 + (6 - m)x_0 + 4}{mx_0 + 2} \qquad (8)$$

nghiệm đúng với mọi giá trị của m. Điều kiện để phương trình (8) có nghĩa là $mx_0 + 2 \neq 0$.

Xét phương trình

$$y_0(mx_0 + 2) = 2x_0^2 + (6 - m)x_0 + 4 \qquad (9)$$

Ta có (9) $\Leftrightarrow m(x_0y_0 + x_0) - (2x_0^2 + 6x_0 - 2y_0 + 4) = 0$.
Do đó (9) có vô số nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_0y_0 + x_0 = 0 \\ 2x_0^2 + 6x_0 - 2y_0 + 4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên (ẩn số x_0, y_0) ta được $x_0 = 0$, $y_0 = 2$. Hơn nữa với các giá trị này ta luôn có $mx_0 + 2 = 2 \neq 0$ $\forall m$. Từ đây suy ra phương trình (8) có vô số nghiệm khi và chỉ khi: $x_0 = 0$, $y_0 = 2$. Vậy với mọi giá trị của m đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định duy nhất có hoành độ $x_0 = 0$ và tung độ $y_0 = 2$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \dfrac{(m+1)x^2 - m^2}{m - x}$

Giả sử $P(x_0, y_0)$ với $x_0 > 0$ là một điểm tùy ý trên mặt phẳng tọa độ. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua $P(x_0, y_0)$.

Giải: Đồ thị của hàm số đã cho đi qua $P(x_0, y_0)$ khi và chỉ khi phương trình (ẩn số m):

$$y_0 = \frac{(m+1)x_0^2 - m^2}{m - x_0} \qquad (10)$$

có nghiệm. Điều kiện để (10) có nghĩa:

$$m \neq x_0$$

Xét phương trình (ẩn số m):

$$y_0(m - x_0) = (m+1)x_0^2 - m^2 \qquad (11)$$

Ta có

$$(11) \Leftrightarrow m^2 + m(y_0 - x_0^2) - (x_0^2 + x_0y_0) = 0 \quad (12)$$

Vì:

$\Delta = (y_0 - x_0^2)^2 + 4(x_0^2 + x_0y_0) = [y_0 - x_0 \times (x_0 - 2)]^2 + 4x_0^3 > 0$ $\forall x_0 > 0$, $\forall y_0$ nên phương trình (12) cũng đồng thời là phương trình (11) luôn có 2 nghiệm phân biệt $\forall x_0 > 0$, $\forall y_0$. Hơn nữa, bằng cách thay $m = x_0$ vào (11) ta thấy $m = x_0$ không phải là nghiệm của (11) $\forall x_0 > 0$. Từ đây suy ra phương trình (10) luôn có 2 nghiệm phân biệt $\forall x_0 > 0$, $\forall y_0$. Điều này chứng tỏ luôn tồn tại 2 giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho đi qua $P(x_0, y_0)$ $\forall x_0 > 0$, $\forall y_0$.

Ví dụ 3:

Cho hàm số $y = \dfrac{(3m+1)x - (m^2 - m)}{x + m}$

$m \neq 0$

Tìm tất cả các điểm trên mặt phẳng tọa độ mà đồ thị của hàm số không thể đi qua khi m thay đổi.

Giải: Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm mà đồ thị hàm số không bao giờ đi qua. Điều đó tương đương với phương trình (ẩn số m):

$$y_0 = \frac{(3m+1)x_0 - (m^2 - m)}{x_0 + m} \qquad (13)$$

vô nghiệm. Điều kiện để (13) có nghĩa: $m \neq -x_0$
Xét phương trình:

$$y_0(x_0 + m) = (3m+1)x_0 - (m^2 - m) \qquad (14)$$

Phương trình (13) vô nghiệm khi và chỉ khi hoặc phương trình (14) vô nghiệm hoặc phương trình (14) chỉ có nghiệm $m = -x_0$.

Ta có:

$$(14) \Leftrightarrow m^2 + (y_0 - 3x_0 - 1)m + x_0(y_0 - 1) = 0$$

Suy ra phương trình (14) vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta = (y_0 - 3x_0 - 1)^2 - 4x_0(y_0 - 1) < 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta = (y_0 - 1 - 9x_0)(y_0 - 1 - x_0) < 0.$$

Suy ra hoặc $\begin{cases} y_0 < x_0 + 1 \\ y_0 > 9x_0 + 1 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} y_0 > x_0 + 1 \\ y_0 < 9x_0 + 1 \end{cases}$

Phương trình (14) chỉ có nghiệm $m = -x_0$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta = (y_0 - 1 - 9x_0)(y_0 - 1 - x_0) = 0 \\ x_0(1 - 3x_0) - (x_0^2 + x_0) = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.
Vậy phương trình (13) vô nghiệm khi và chỉ khi:

hoặc $\begin{cases} y_0 < x_0 + 1 \\ y_0 > 9x_0 + 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y_0 > x_0 + 1 \\ y_0 < 9x_0 + 1 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

Điều đó chứng tỏ tất cả các điểm $M(x_0, y_0)$ có tọa độ thỏa mãn các điều kiện trên là tất cả các điểm mà đồ thị của hàm số đã cho không bao giờ đi qua khi m thay đổi. Có thể thấy rằng đó là các điểm nằm trong hai góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = 9x + 1$ và điểm $(0, 1)$ – giao của hai đường thẳng đó.

Ví dụ 4:

Cho hàm số $y = (-x^2 + x - m)/(2x + m)$ (15)
Hỏi có bao nhiêu đồ thị của họ (15) đi qua điểm $A(a, b)$ có hoành độ a, tung độ b cho trước?

Giải: Số đồ thị của họ (15) đi qua điểm $A(a, b)$ chính bằng số nghiệm của phương trình (ẩn số m):

$$b = (-a^2 + a - m)/(2a + m) \qquad (16)$$

Điều kiện để (16) có nghĩa: $m \neq -2a$. Như vậy số nghiệm của (16) sẽ bằng số nghiệm khác $-2a$ của phương trình (ẩn số m):

$$b(2a + m) = -a^2 + a - m \qquad (17)$$

Ta có (17) $\Leftrightarrow (b+1)m + (a^2 - a + 2ab) = 0$.
Từ đây suy ra:

— Phương trình (17) vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b+1=0 \\ a^2-a+2ab\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \text{ hoặc } \begin{cases} b=-1\\ a\neq 0\end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} b=-1 \\ a\neq 3\end{cases}$$

— Phương trình (17) có 1 nghiệm duy nhất $m=-2a$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b+1\neq 0 \\ (-a^2+a-2ab)/(b+1)=-2a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{ hoặc } \begin{cases} b\neq -1\\ a=0\end{cases} \quad \text{ hoặc } \begin{cases} b\neq -1 \\ a=3\end{cases}$$

— Phương trình (17) có 1 nghiệm duy nhất $m\neq -2a$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b+1\neq 0, \\ (-a^2+a-2ab)/(b+1)\neq -2a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{ hoặc } \begin{cases} b\neq -1\\ a\neq 1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \text{ hoặc } \begin{cases} b\neq -1 \\ a\neq 3\end{cases}$$

— Phương trình (17) có vô số nghiệm khác $-2a$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} b+1=0 \\ a^2-a+2ab=0\end{cases} \Leftrightarrow \text{ hoặc } \begin{cases} b=-1\\ a=0\end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} b=-1 \\ a=3\end{cases}$$

Vậy:

— Phương trình (16) vô nghiệm khi và chỉ khi hoặc $b=-1$, $a\neq 0$; hoặc $b=-1$, $a\neq 3$; hoặc $b\neq -1$, $a=0$; hoặc $b\neq -1$, $a=3$. Trong trường hợp này không có một đồ thị nào của họ đã cho đi qua A.

— Phương trình (16) có 1 nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hoặc $b\neq -1$, $a\neq 0$; hoặc $b\neq -1$, $a\neq 3$. Trong trường hợp này có duy nhất một đồ thị của họ đã cho đi qua A.

— Phương trình (16) có vô số nghiệm khi và chỉ khi hoặc $b=-1$, $a=0$; hoặc $b=-1$, $a=3$. Trong trường hợp này tất cả các đồ thị của họ đã cho đều đi qua A.

TOÁN HỌC và ĐỜI SỐNG

TÍNH CÁC CHỈ TIÊU THỜI GIAN TRONG XÂY DỰNG

TRẦN VŨ THIỆU

Bài này giới thiệu với bạn đọc một ứng dụng của toán học trong tính toán thi công và điều khiển quá trình thực hiện các công trình xây dựng.

Để hoàn thành một công trình xây dựng nào đó, thông thường người ta phải làm nhiều công việc khác nhau theo một trình tự kỹ thuật phức tạp. Cho biết:

— Thời gian cần thiết để hoàn thành mỗi công việc;

— Trình tự thực hiện các công việc: việc nào có thể làm ngay, việc nào phải làm sau khi đã hoàn thành một số công việc khác...,

Vấn đề đặt ra là tính toán các chỉ tiêu thời gian sau đây:

a. Thời hạn cần thiết để hoàn thành toàn bộ công trình

b. Thời điểm bắt đầu sớm nhất và muộn nhất của mỗi công việc sao cho toàn bộ công trình được thực hiện trong thời hạn đã tính ở điểm a?

c. Thời điểm kết thúc sớm nhất và muộn nhất của mỗi công việc?

d. Thời gian dự trữ của mỗi công việc, nghĩa là khoảng thời gian tối đa mà mỗi công việc có thể chậm trễ hoặc kéo dài nhưng vẫn không ảnh hưởng gì tới thời gian hoàn thành toàn bộ công trình?

Những công việc nào có thời gian dự trữ bằng 0 gọi là các công việc găng. Muốn toàn bộ công trình không bị kéo dài thì những việc găng không được phép hoàn thành chậm trễ còn các công việc không găng thì có thể chậm trễ hoặc kéo dài đôi chút (trong phạm vi thời gian dự trữ) mà vẫn không ảnh hưởng gì tới thời gian hoàn thành công trình. Vì thế, trong chỉ đạo thực hiện cần tập trung chú ý vào các công việc găng, tìm mọi biện pháp để bảo đảm cho công việc đó được hoàn thành đúng kỳ hạn; có như vậy, toàn bộ công trình mới được hoàn thành đúng kỳ hạn.

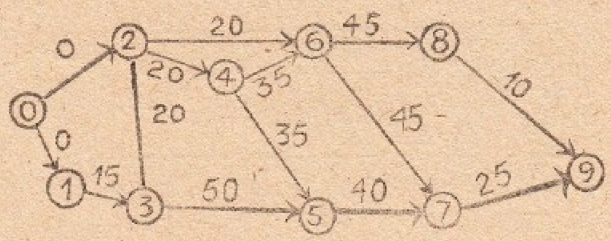
Đó chính là ý nghĩa của phương pháp tính các chỉ tiêu thời gian được trình bày dưới đây.

Để dễ hình dung vấn đề, ta hãy xét ví dụ đơn giản hóa sau đây. Giả sử công trình xây dựng một ngôi nhà gồm 8 công việc chính. Thời gian à trình tự thực hiện các công việc được cho rong bảng 1 (công việc 1 và 2 có thể làm ngay).

Bảng 1

Nº	Tên công việc	Việc cần làm trước	Thời gian hoàn thành (ngày)
1	Làm móng	0	15
2	Chở vật liệu và thiết bị	0	20
3	Xây tường	1,2	50
4	Phần mộc (cột, kèo, cửa...)	2	35
5	Lợp mái, lắp cửa	3,4	40
6	Xây dựng công trình phụ (sân, hè...)	2,4	45
7	Lắp đường điện, nước, quét vôi nhà.	5,6	25
8	Làm hàng rào, trồng cây quanh nhà	6	10

Ta lập một mạng có hướng để mô tả trình tự thực hiện các công việc kể trên. Mỗi công việc được đặt tương ứng với một đỉnh của mạng, các đỉnh đánh số lần lượt từ 1 tới 8 (có 8 công việc cả thảy); đồng thời ta thêm vào mạng một đỉnh đánh số là 0, ứng với việc «khởi công» và một đỉnh đánh số là 9 ($=8+1$), ứng với việc «hoàn thành» Các công việc 1 và 2 có thể khởi công ngay, nên từ đỉnh O ta vẽ các mũi tên tới hai đỉnh 1 và 2, ta được hai cung (0, 1) và (0, 2). Tiếp đó công việc 3 chỉ có thể bắt đầu sau khi đã hoàn thành hai công việc 1 và 2, ta vẽ các mũi tên từ đỉnh 1 và 2 tới đỉnh 3, kết quả ta được hai cung (1, 3) và (2, 3). Tiếp tục làm như vậy cho đến công việc 7 và 8. Nói chung, công việc nào chỉ có thể bắt đầu sau khi đã làm xong một số công việc khác thì ta vẽ các mũi tên đi từ các đỉnh ứng với công việc cần làm trước tới đỉnh ứng với công việc đang xét. Các công việc 7 và 8 không cần hoàn thành trước bất cứ công việc nào khác từ các đỉnh tương ứng, ta vẽ các mũi tên đi thẳng tới đỉnh cuối cùng đỉnh 9 (ứng với việc «hoàn thành»). Sau đó, gán cho mỗi cung một số, gọi là *độ dài* của cung, bằng thời gian cần thiết để hoàn thành công việc ứng với đỉnh gốc của cung (thời gian hoàn thành công việc «khởi công» xem như bằng 0, vì thế các cung đi từ đỉnh O có độ dài bằng 0). Kết quả là ta được một sơ đồ mạng vẽ ở hình 1.



Hình 1

Dựa trên sơ đồ mạng này ta có thể tính toán tất cả các chỉ tiêu thời gian cần thiết đã nêu ở trên. Cụ thể như sau

1. Thời điểm *bắt đầu sớm nhất* của mỗi công việc $j = 1, 2,... 9$ được tính theo công thức:

$BS(j) = \max\{BS(i) + T(i) : (i,j)$ là cung của mạng$\}$ (1) với quy ước $BS(O) = 0$ (thời điểm khởi công xem như bằng 0) và $T(i)$ là thời gian cần thiết để hoàn thành công việc i.

Nhận xét: Thời điểm bắt đầu sớm nhất của mỗi công việc chính bằng độ dài của *đường đi dài nhất* từ đỉnh O tới đỉnh ứng với công việc đang xét. Nói riêng, thời điểm bắt đầu sớm nhất của việc «hoàn thành» (đỉnh 9) chính là thời gian cần thiết để hoàn thành toàn bộ công trình. Vì thế để tính các $BS(j)$ theo (1) ta có thể áp dụng phương pháp tìm đường đi dài nhất đã nêu trong báo THVTT số 152 (6-1986).

2. Thời điểm *kết thúc sớm nhất* của mỗi công việc bằng thời điểm bắt đầu sớm nhất cộng thời gian hoàn thành công việc đó

$$KS(j) = BS(j) + T(j),\ j = 1, 2, .., 8 \qquad (2)$$

3. Thời điểm *kết thúc muộn nhất* của mỗi công việc $i = 1, 2 .., 8$ được tính theo công thức: $KM(i) = \min\{KM(j) - T(j) : (i,j)$ là cung của mạng$\}$ (3) với qui ước $KM(9) = BS(9)$ nghĩa là phải bảo đảm theo công trình hoàn thành đúng kỳ hạn, không được chậm trễ.

4. Thời điểm *bắt đầu muộn nhất* của mỗi công việc bằng thời điểm kết thúc muộn nhất trừ thời gian hoàn thành công việc đó.

$$BM(i) = KM(i) - T(i),\ i = 1, 2, ..., 8 \qquad (4)$$

5. Thời gian *dự trữ* của mỗi công việc bằng thời điểm bắt đầu (kết thúc) muộn nhất trừ thời điểm bắt đầu (kết thúc) sớm nhất của công việc đó:

$$DT(j) = BM(j) - BS(j) = KM(j) - KS(j) \qquad (5)$$
$$(j = 1, 2, ..., 9)$$

Áp dụng các công thức (1) – (5) cho sơ đồ mạng vẽ ở hình 1 ta được kết quả như sau (xem bảng 2):

Bảng 2

Tên công việc	Thời gian hoàn thành	Bắt đầu		Kết thúc		Thời gian dự trữ
		Sớm	Muộn	Sớm	Muộn	
0	0	0	0	0	0	0
1	15	0	5	15	20	5
2	20	0	0	20	20	0
3	50	20	20	70	70	0
4	35	20	30	55	65	10
5	40	70	70	110	110	0
6	45	55	65	100	110	10
7	25	110	110	135	135	0
8	10	100	125	110	135	25
9	0	135	135	135	135	0

Nhìn vào bảng hai ta thấy: thời gian hoàn thành toàn bộ công trình là 135 ngày. Các công việc găng là 2, 3, 5, 7. Các công việc không găng là 1, 4, 6, 8 (có thời gian dự trữ dương nên có thể kéo dài hoặc chậm trễ đôi chút)

Ngoài ra, dựa vào sơ đồ mạng ta còn có thể giải quyết một số bài toán như:

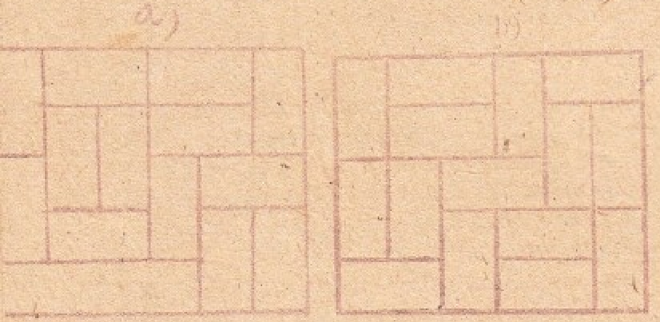
– Với thời hạn hoàn thành toàn bộ công trình đã định trước hãy tổ chức các công việc để đảm bảo chi phí là ít nhất (cực tiểu giá thành công trình), hoặc đảm bảo việc sử dụng nhân lực, vật tư, thiết bị được bình ổn và ở mức thấp nhất.

– Với tổng số chi phí có hạn hoặc với nhịp độ cung cấp nhân lực, vật tư, thiết bị đã biết trước hãy bố trí các công việc sao cho hoàn thành toàn bộ công trình trong thời hạn sớm nhất.

Giải đáp bài

LÁT HÌNH CHỮ NHẬT

Có thể lát hình chữ nhật đã cho theo hai cách sau:



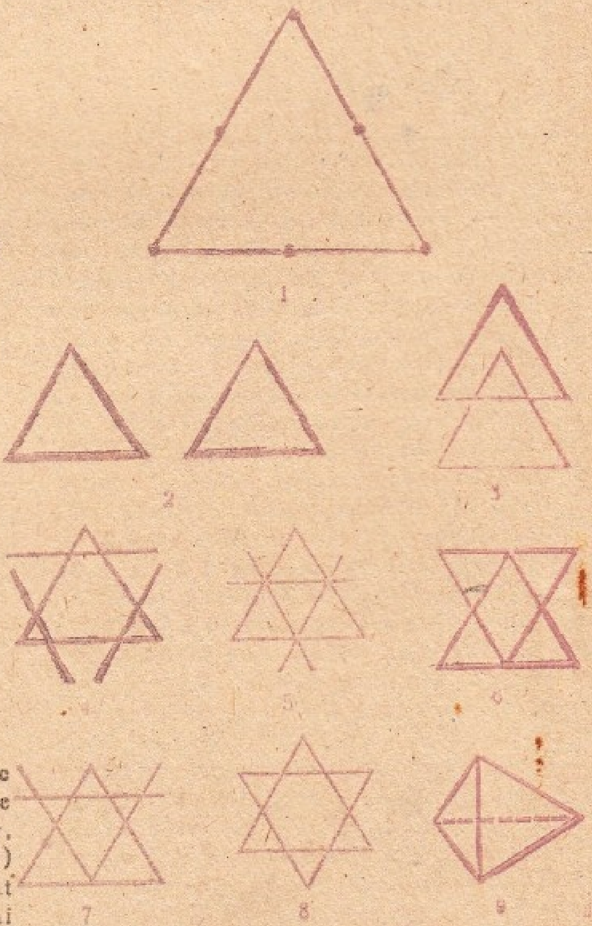
Đinh Tiến Cường
8T, PT Năng khiếu, Hải Hưng

Nếu có thì giờ các bạn hãy suy nghĩ tiếp tục về việc lát một hình chữ nhật có kích thước ($n \times m$) với n, m là các số tự nhiên bất kỳ, bằng những viên gạch lát có kích thước (2×1) sao cho các đường ghép giữa các viên gạch lát không tạo thành các đường thẳng nối liền hai cạnh đối diện của hình chữ nhật.

B. P.

Giải đáp bài

XẾP TAM GIÁC ĐỀU



Tứ diện đều chính là hình có 4 mặt là 4 tam giác đều có cạnh bằng 1 que diêm.

In 14300 số tại Xí nghiệp in 75 Hàng Bồ – Hà Nội. Số in 39/87. In xong và gửi lưu chiểu tháng 5-1987

Chỉ số : 12.884

Giá 2 đồng