TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

1
1987

Số 153

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói: 52825

Bước đầu tìm hiểu toán học hiện đại

MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ BÀI TOÁN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

ĐỖ BÁ KHANG

Lý thuyết đồ thị là một ngành toán học trẻ và đang phát triển mạnh cả về lý thuyết lẫn ứng dụng. Mời các bạn làm quen với thế giới kỳ diệu của bộ môn toán học đẹp đẽ này qua một số định nghĩa cơ sở và mấy bài toán cụ thể.

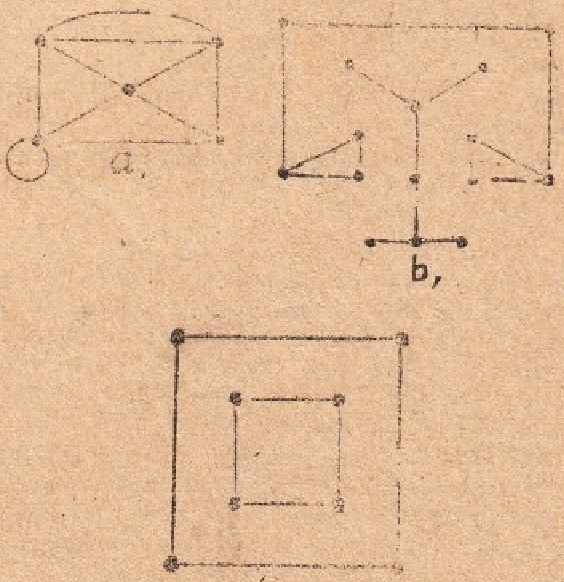
1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA CƠ SỞ

Định nghĩa 1: Đồ thị là một tập hợp gồm hữu hạn điểm gọi là *đỉnh* và một số đường nối một số cặp đỉnh gọi là *cạnh*.

– Thường ta ký hiệu các đỉnh của đồ thị là $A_1, A_2, \ldots, A_n$ còn các cạnh là $u_1, u_2, \ldots, u_k$, mỗi cạnh u sẽ nối 2 đỉnh A_i và A_j nào đấy và ký hiệu là $u = A_iA_j$.

Hình 1 cho ta một số ví dụ về đồ thị

Nếu $A_i \equiv A_j$, tức là nếu cạnh u nối một đỉnh của đồ thị với chính nó thì gọi là *khuyên*. Nếu 2 hay nhiều cạnh cùng nối 1 cặp điểm ta gọi chúng là *cạnh kép*. Đồ thị không có khuyên và cạnh kép được gọi là đồ thị đơn. Ví dụ Hình



Hình 1

1a không phải là đồ thị đơn, còn Hình 1b và 1c là đồ thị đơn. Sau đây chúng ta chỉ xét các đồ thị đơn.

Định nghĩa 2. Số cạnh nối vào một đỉnh A của đồ thị gọi là *bậc* của đỉnh A và ký hiệu là $d(A)$.

Định nghĩa 3. Một dãy các đỉnh $A_1, A_2, \ldots A_m$ của đồ thị đơn được gọi là một *đường đi* của đồ thị nếu:

a) A_iA_{i+1} là cạnh của đồ thị với $1 \leqslant i \leqslant m-1$.

b) $A_i \neq A_j$ nếu $i \neq j$.

Độ dài của đường đi là số cạnh có trong đường đi. Như vậy, độ dài của đường đi $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là bằng $m-1$.

Đặc biệt nếu A_mA_1 lại là một cạnh của đồ thị thì ta có một *chu trình* độ dài m.

Định nghĩa 4. Đồ thị gọi là *liên thông* nếu 2 đỉnh bất kỳ đều có thể nối với nhau bởi một đường đi. Ví dụ đồ thị H.1b không liên thông còn đồ thị H.1c liên thông.

Dễ dàng nhận thấy rằng mỗi đồ thị không liên thông đều được chia thành một số đồ thị con liên thông, rời nhau, mỗi đồ thị con đó được gọi là *thành phần liên thông*. Ví dụ đồ thị H.1b có 2 thành phần liên thông.

2. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐƯỢC ĐƯA VỀ DẠNG ĐỒ THỊ

Bài toán 1. Trong phòng có n người ($n \geqslant 2$). Chứng minh rằng số người có một số lẻ người quen là số chẵn.

Chú ý rằng ta coi quan hệ quen nhau là đối xứng nếu A quen B thì B quen A.

Để đưa bài toán về dạng đồ thị, ta coi mỗi người là 1 đỉnh của đồ thị và 2 người quen nhau là 2 đỉnh được nối bởi 1 cạnh. Ta có bài toán đồ thị sau.

Bài toán 1'. Chứng minh rằng trong một đồ thị đơn n đỉnh ($n \geqslant 2$), số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

Giải: Ta đếm số cạnh của đồ thị bằng cách lấy tổng số cạnh đi vào mỗi đỉnh, tức là tổng của bậc các đỉnh. Vì mỗi một cạnh được đếm 2 lần ở 2 đầu nên số cạnh bằng $(d(A_1)+d(A_2)+\ldots+d(A_n))/2$. Nhưng số cạnh là số nguyên nên $d(A_1)+d(A_2)+\ldots+d(A_n)$ chẵn và, do đó số đỉnh có bậc lẻ phải là số chẵn.

Bài toán 2. Trong phòng có n người ($n \geqslant 3$). Biết rằng mỗi người quen với ít nhất 2 người khác. Chứng minh rằng có thể chọn ra một số người để xếp ngồi quanh một bàn tròn sao cho mỗi người đều ngồi giữa 2 người quen.

Bằng cách xây dựng đồ thị tương tự như ở bài toán 1, ta có bài toán đồ thị sau đây:

Bài toán 2'. Chứng minh rằng trong một đồ thị đơn n đỉnh ($n \geqslant 3$), nếu bậc mỗi đỉnh đều $\geqslant 2$ thì tồn tại một chu trình.

Giải. Xét tất cả các đường đi có thể có trong đồ thị. Vì số đường đi là hữu hạn nên ta có thể chọn ra đường đi có độ dài lớn nhất, gọi đó là $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Vì bậc của $A_1 \geqslant 2$ nên ngoài A_2 ra, A_1 còn phải được nối với ít nhất một đỉnh B nào đó bởi một cạnh của đồ thị. Giả sử $B \neq A_i$ ($i = 3, 4, \ldots, k$), khi đó vì $B \neq A_1$, $B \neq A_2$ nên ta có đường đi $BA_1A_2\ldots A_k$ có độ dài lớn hơn, trái với cách chọn đường đi $A_1A_2\ldots A_k$. Vậy $B = A_i$ với i nào đó $3 \leqslant i \leqslant k$. Khi đó ta có chu trình $A_1A_2\ldots A_{i-1}BA_1$.

Bài toán 3. Một lớp học có $2n$ học sinh đi nghỉ hè. Biết rằng mỗi em có ít nhất n địa chỉ của các bạn và giả sử rằng nếu A có địa chỉ của B thì B có địa chỉ của A. Chứng minh rằng các em học sinh có thể báo tin chuyền cho nhau.

Ở đây ta lại ký hiệu mỗi bạn học sinh bởi 1 đỉnh, 2 bạn có địa chỉ của nhau thì 2 đỉnh tương ứng được nối bởi 1 cạnh. Khi đó 2 bạn có thể nhắn tin cho nhau nếu tồn tại một đường đi nối 2 đỉnh tương ứng. Vậy ta có bài toán đồ thị sau:

Bài toán 3'. Một đồ thị đơn $2n$ đỉnh, mỗi đỉnh có bậc lớn hơn hoặc bằng n là đồ thị liên thông.

Giải. Giả sử đồ thị không liên thông, khi đó trong số các thành phần liên thông của đồ thị có ít nhất 1 thành phần chứa không quá n đỉnh. Vì mỗi đỉnh của thành phần này chỉ được nối với các đỉnh của thành phần đó (các thành phần liên thông rời nhau) nên bậc của các đỉnh đó $\leqslant n-1$, trái với giả thiết. Vậy đồ thị phải liên thông.

Bài toán 4. Trong một buổi dạ hội mỗi người tham dự đều có ít nhất là 3 người quen. Chứng minh rằng có thể chọn ra một số chẵn người để xếp ngồi quanh một bàn tròn sao cho mỗi người đều ngồi giữa hai người quen.

Bài toán đồ thị tương ứng là như sau:

Bài toán 4'. Chứng minh rằng nếu một đồ thị đơn có bậc mỗi đỉnh đều $\geqslant 3$ thì tồn tại chu trình có độ dài chẵn.

Giải: Giả sử tất cả các chu trình của đồ thị đều có độ dài lẻ. Xét tất cả các đường đi có trong đồ thị. Vì số đường đi là hữu hạn nên ta có thể chọn ra đường đi có độ dài lớn nhất, giả sử đó là $A_1A_2\ldots A_k$. Vì $d(A_1) \geqslant 3$ nên ngoài A_2 ra, A_1 còn được nối bởi cạnh đồ thị với ít nhất 2 đỉnh khác. Cũng như trong lời giải ví dụ 2, cả 2 đỉnh này đều phải trong số các đỉnh từ A_3 đến A_k, giả sử đó là các đỉnh A_i và A_j ($i < j$). Vì chu trình $A_1A_2\ldots A_iA_1$ và $A_1A_2\ldots$

A_jA_1 đều có độ dài lẻ nên i và j là số lẻ. Nhưng khi đó chu trình $A_1A_iA_{i+1}...A_jA_1$ có độ dài $j-i$ là số chẵn. Mâu thuẫn chứng tỏ phải có chu trình có độ dài chẵn.

Bài toán 5. n kỵ sỹ được nhà vua mời đến dự tiệc. Biết rằng cứ 2 người không quen nhau thì có tổng số người quen $\geqslant n$. Chứng minh rằng có thể xếp cả n kỵ sỹ quanh một bàn tròn để cho mỗi người đều ngồi giữa 2 người mình quen.

Bài toán có thể phát biểu dưới dạng đồ thị như sau:

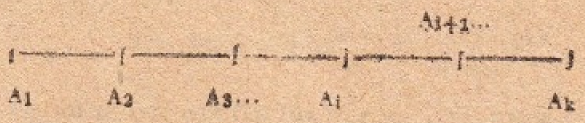
Bài toán 5': Cho 1 đồ thị đơn n đỉnh ($n \geqslant 3$). Biết rằng cứ 2 đỉnh không kề nhau thì có tổng số bậc $\geqslant n$. Chứng minh rằng tồn tại một chu trình đi qua tất cả các đỉnh (một chu trình như thế được gọi là *chu trình Haminton*).

Sau đây là tóm tắt cách giải của bài toán này:

Trước hết, tương tự như ở bài toán 3' ta chứng minh đồ thị là liên thông. Sau đó xét đường đi $A_1A_2...A_k$ có độ dài lớn nhất. Có 2 trường hợp:

a) Nếu A_1 kề với A_k thì chu trình $A_1A_2...A_kA_1$ là chu trình Haminton. Thật vậy nếu $k < n$ thì do tính liên thông ta tìm được một cạnh A_iB với B không nằm trong số các đỉnh $A_1A_2...A_k$. Khi đó ta tìm được đường đi dài hơn $BA_iA_{i+1}...A_kA_1A_2...A_{i-1}$ trái với cách chọn $A_1A_2...A_k$ là đường đi dài nhất.

b) Giả sử A_1 và A_k không kề nhau. theo giả thiết ta có $d(A_1) + d(A_k) \geqslant n$. Khi đó ta có thể chứng minh rằng tồn tại 2 đỉnh kề nhau A_iA_{i+1} $(1 < i < k-1)$ sao cho A_1A_{i+1} và A_iA_k là 2 cạnh của đồ thị. Khi đó ta có đường đi $A_{i+1}A_{i+2}...A_kA_iA_{i-1}A_{i-2}...A_1$ cũng có độ dài k mà lại có 2 đầu mút là A_{i+1} và A_1 kề nhau. Lập luận như ở phần a) suy ra khi đó $A_{i+1}A_{i+2}...A_kA_iA_{i-1}...A_1A_{i+1}$ là chu trình Haminton.



Bước đầu làm quen với một số khái niệm và bài toán của lý thuyết đồ thị, bạn đọc đã biết thêm một công cụ mới để giải một số bài toán khó mà trước đây chỉ có thể giải bằng các lập luận lôgic dài dòng.

Để kết thúc, xin giới thiệu một số bài toán để bạn đọc tự luyện.

1. Một nước có n tỉnh, giữa các tỉnh có hơn $(n-1)(n-2)/2$ đường bay hành khách. Chứng minh rằng một người có thể đi từ một tỉnh bất kỳ này đến một tỉnh bất kỳ khác chỉ bằng máy bay.

2. Trong bài 1, nếu số đường bay $\geqslant 2 + (n-1)(n-2)/2$ chứng minh rằng khi đó một người có thể xuất phát từ 1 tỉnh bằng máy bay lần lượt bay đi tất cả các tỉnh, mỗi tỉnh đúng 1 lần rồi lại trở về tỉnh xuất phát.

3. Trong phòng có n người, mỗi người quen với ít nhất k người khác. Chứng minh rằng có thể chọn ra ít nhất $k+1$ người để xếp ngồi quanh một bàn tròn sao cho mỗi người đều ngồi giữa 2 người quen.

4. Trên bàn cờ 4×4 ô vuông, chứng minh rằng con mã không thể đi qua tất cả các ô, mỗi ô đúng 1 lần rồi lại trở về ô ban đầu.

Bài 1/150. *Dãy số thực* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *xác định như sau:*

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + a_1a_2...a_n$, $\forall n \geqslant 1$. *Đặt*

$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/a_k$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Lời giải: (Của *Lê Minh Chuẩn* 11 CT Quảng nam — Đà nẵng).

Theo giả thiết $a_{i+1} = 1 + a_1a_2...a_i$ $\forall i > 1$, nên

$$\frac{1}{a_{i+1}-1} = \frac{1}{a_1a_2...a_i} = \frac{1}{a_1a_2...a_{i-1}} \cdot \frac{1}{a_i} =$$

$$= \frac{1}{a_i - 1} \cdot \frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_i - 1} - \frac{1}{a_i}$$

hay $\dfrac{1}{a_i} = \dfrac{1}{a_i - 1} - \dfrac{1}{a_{i+1} - 1}$. $\forall i > 1$.

Vậy

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 1/a_i = \frac{1}{a_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{a_i} = 1/a_1 +$$

$$+ 1/(a_2 - 1) - 1/(a_{n+1} - 1) = 2 - 1/(a_{n+1} - 1).$$

Mà $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - 1) = \lim_{n\to\infty} (a_1 \ldots a_n) = \infty$ nên

$\lim_{n\to\infty} 1/(a_{n+1} - 1) = 0.$

Vậy $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$

Nhận xét : Các bạn gửi bài đến đều có lời giải đúng.

Đ.B.K

Bài 2/150 : *Dãy số nguyên dương* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *thỏa mãn điều kiện sau*

$a_0 < a_1 \leqslant a_0+20,\ a_1 < a_2 \leqslant a_1+20,\ a_2 < a_3 \leqslant a_2 + 20 \ldots$

Chứng minh rằng số thập phân $b = 0, a_0a_1a_2\ldots$ trong đó các chữ số của $a_0, a_1, a_2\ldots$ được viết liên tiếp theo thứ tự đó, là không tuần hoàn.

Lời giải : Giả sử b là số thập phân tuần hoàn chu kỳ p.

Chọn số nguyên dương $t > 2p + 2$ và t đủ lớn để $10^t > a_0$. Khi đó sẽ có n sao cho :

$$a_n < 10^t \leqslant a_{n+1}$$

mà theo giả thiết $a_{n+1} \leqslant a_n + 20 < 10^t + 20$

$$\Rightarrow \underbrace{100\ldots0}_{t \text{ chữ số } 0} \leqslant a_{n+1} < \underbrace{10\ldots0}_{t-2 \text{ chữ số } 0}20$$

$\Rightarrow a_{n+1}$ là một số chứa ít nhất $t-2$ chữ số 0 liên tiếp nhau mà $t - 2 > 2p$ nên chu kỳ gồm p chữ số 0 : vô lý vì $a_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ (do $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$).

Vậy b là số thập phân không tuần hoàn.

Nhận xét : – Các bạn giải bài này đều đi đúng hướng nhưng đều lập luận thiếu chính xác.

– Bạn *Lê Đình Thông* (11CT Quốc học Huế) có nhận xét đúng là có thể thay số 20 bởi một số thực bất kỳ lớn hơn 1.

Đ.B.K

Bài 3/150 : *Giả thiết* $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ và $a_n \cdot a_{[(n+1)/2]} \leqslant 1$.

Chứng minh rằng :

$$n\Big/\left(1 + \sqrt[n]{\prod_1^n a_i}\right) \geqslant \sum_1^n 1/(1+a_i).$$

Lời giải : (Của một bạn không ghi tên). Với $a_1, a_2 > 0$ và $a_1 a_2 \leqslant 1$.

Ta thấy :

$$2/(1 + \sqrt{a_1a_2}) - (1/(1 + a_1) + 1/(1+a_2)) =$$
$$= (1/(1 + \sqrt{a_1a_2}) - 1/(1 + a_1)) + (1/(1+\sqrt{a_1a_2}) - 1/(1 + a_2))$$
$$= \sqrt{a_1}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})/(1 + \sqrt{a_1a_2})(1 + a_1) + \sqrt{a_2}(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})/(1+\sqrt{a_1a_2})(1 + a_2)$$
$$= \frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 (1 - \sqrt{a_1a_2})}{(1 + \sqrt{a_1a_2})(1 + a_1)(1 + a_2)} \geqslant 0.$$

Vậy có : $2/(1+\sqrt{a_1a_2}) \geqslant 1/(1+a_1) + 1/(1+a_2)$. **(1)**

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2$ hoặc $a_1.a_2 = 1$.

Áp dụng (1) vào bài ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} 1/(1+a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]} 2/(1+\sqrt{a_ia_{n+1-i}})$$

Dấu bằng xảy ra khi n chẵn và hoặc

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ hoặc $a_ia_{n+1-i} = 1$.

Xét hàm số $f(x) = 1/(1 + e^x)$ ta thấy $f(x)$ là hàm số lõm với $x \leqslant 0$ bởi vì :

$$f'(x) = -e^x/(1 + e^x)^2$$

và $f''(x) = e^x(e^x - 1)/(1 + e^x)^3 \leqslant 0$ (với $x \leqslant 0$). Áp dụng bất đẳng thức Jensen vào hàm lõm với các $x_i \leqslant 0$ và

$$e^{x_i} = \sqrt{a_ia_{n+1-i}} \leqslant 1 \text{ ta có :}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1/(1 + a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]} 2/(1+\sqrt{a_i.a_{n+1-i}}) \leqslant$$
$$\leqslant n\Big/\left(1+\sqrt[n]{\prod_1^n a_i}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi n chẵn và hoặc $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ hoặc $a_i a_{n+1-i} = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) đpcm.

Nhận xét : Các bạn *Nguyễn Lê Dũng* (9CT trường PTCS Trần Quốc Toản, Nha Trang); *Bùi Thanh An* (Phan Bội Châu, Nghệ Tĩnh), *Nguyễn Thị Thu Thủy* (lớp 12A Trưng Vương, Nghĩa Bình), *Phan Long An* (11T PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang), *Hoàng Dương Lân* (10A Ba Đình Hà Nội) *Lê Đình Thông* (11 chuyên toán, Quốc học Huế), *Mai Tuấn Phước* (11CT Quảng Nam Đà Nẵng) có lời giải có ý tốt nhưng rất tiếc là đều có thiếu sót về kỹ năng.

Trường hợp đẳng thức xảy ra đấu bằng đều thiếu trường hợp $a_ia_{n+1-i} = 1$ và n chẵn.

V Đ.H

Bài 4/150: *Giải phương trình*:

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x = 2^{x+1}.$$

Lời giải:

Cách 1 (bạn *Trần Xuân Nhân*, lớp 11 trường PTTH Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang): Điều kiện để phương trình có nghiệm:

$x^2-8x-9 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq 9$ (1)

Vì $\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9} = 16/(\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9})$

đặt $u = \sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9} > 0$ thì phương trình đã cho là:

$$(\sqrt{u})^x + (4/\sqrt{u})^x = 2^{x+1}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{u}/2)^x + (2/\sqrt{u})^x = 2.$$

Lại đặt $t=(\sqrt{u}/2)^x > 0$ ta có $t+1/t=2 \Rightarrow t=1$

Suy ra $(\sqrt{u}/2)^x = 1$. Do điều kiện (1) nên ta có $\sqrt{u}/2=1$ hay là $u=4$, tức là $\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}=4$, do (2) ta có $\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}=4$, suy ra $\sqrt{x^2-8x-9}=0$ hay là $x=-1$ hoặc $x=9$

Thử lại ta thấy hai giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho.

Cách 2: (của một số bạn): Điều kiện để phương trình có nghĩa là $x \leq -1$ hoặc $x \geq 9$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x \geq$$
$$\geq 2\sqrt{[(\sqrt{x^2-8x+7})^2-(\sqrt{x^2-8x-9})^2]^x}$$
$$\geq 2.2^x \geq 2^{x+1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x = \left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x$$

tức là khi $x^2-8x-9=0$ hoặc khi $x=0$. Do điều kiện $x\leq -1$ hoặc $x\geq 9$ ta có $x^2-8x-9=0$ và có $x=-1$ hoặc $x=9$. Phép thử cho ta kết luận đây là 2 nghiệm của phương trình.

Nhận xét: Phần lớn các bạn giải bài toán này đều quên loại nghiệm $x=0$ theo điều kiện để cho phương trình có nghĩa.

V.Đ.H

Bài 5/150: *Giải và biện luận phương trình*:

$$18x^3+63x^2+73x+28 = a/(6x+7)$$

Lời giải: Điều kiện $x \neq -7/6$

Ta có $18x^3+63x^2+73x+28 =$
$= (6x+7)[(6x+7)^2-1]$

nên phương trình tương đương với:

$(6x+7)^2[(6x+7)^2-1] = a$ (1)

Đặt $y=(6x+7)^2$, $y>0$ phương trình trở thành $y^2-y-12a=0$ (2)

có $\Delta = 1+48a$. Vậy:

1. Nếu $a<-1/48$ thì (2) vô nghiệm nên (1) cũng vô nghiệm.

2. Nếu $a=-1/48$ thì (2) có nghiệm kép $y=1/2$, từ đó (1) có hai nghiệm: $x_{1,2}=1/6\ (-7\pm\sqrt{2}/2)$.

3. Nếu $-1/48<a<0$ thì $\Delta>0$ và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt dương:

$$y_1=(1+\sqrt{\Delta})/2,\quad y_2=(1-\sqrt{\Delta})/2$$

nên phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2,3,4}=1/6\left(-7\pm\sqrt{(1\pm\sqrt{48a+1})/2}\right)$$

4. Nếu $a=0$ thì (2) có nghiệm $y_1=1$, $y_2=0$ (loại).

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm:

$$x_1=-4/3,\quad x_2=-1.$$

5. Nếu $a>0$ thì (2) có 2 nghiệm trái dấu

$$(1-\sqrt{\Delta})/2<0<(1+\sqrt{\Delta})/2$$

nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$x_{1,2}=1/6.\left(-7\pm\sqrt{(1+\sqrt{48a+1})/2}\right)$$

Nhận xét: Các bạn *Phạm Ngọc Quang*, *Trần Việt Dũng* (11CT Hà Nội – Amsterdam), *Trần Xuân Nhân* (11B$_{10}$ – PTTH Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang), *Lê Đình Thông* (11CT, Quốc học Huế) *Đoàn Quốc Chiến* (11A$_0$, ĐHTH, Hà Nội) có lời giải tốt.

T. V. T.

Bài 6/150: *A, B, C là ba góc của △ABC (đo bằng radian). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*:

$$M=\frac{A+B}{AB^2C^3}$$ *khi △ABC thay đổi*

Lời giải: (*Đỗ Ngọc Minh Châu, Mai Phước Tuấn, Lê Minh Chuẩn, Đinh Văn Hùng, Mai Văn Huỳnh, Nguyễn thị Thu Thủy, Lê Đình Thông, Trần Quốc Vinh, Bùi Thanh An.*)

Ta có $\pi = A+B+C$

$$=A/2+A/2+B/4+B/4+B/4+B/4+\underbrace{C/9+\dots+C/9}_{9}\geq$$

$$\geq 15.\sqrt[15]{A^2B^4C^9/4^5.9^9}$$

hay

$$\pi^{15} \geqslant 15^{15} . A^2B^4C^9/4^5 . 9^9$$

Suy ra:

$$\pi^{15} . AB^4 \geqslant 15^{15} A^3B^6C^9/4^5 . 9^9$$

Do vậy

$$15^{15} AB^2C^3/4^{5/3}9^3 \leqslant \pi^5 \sqrt[3]{AB^2} \leqslant$$
$$\leqslant \pi^5 (A + B/2 + B/2)/3 = \pi^5 (A + B)/3$$

Từ đó suy ra:

$$(A + B)/AB^2C^3 \geqslant (15/\pi)^5 . 1/(16 . 9^3)$$

Do vậy

$$\min M = (15/\pi)^5 . 1/(16 . 9^3)$$

khi

$$A = 2\pi/15,\ B = 4\pi/15,\ C = 9\pi/15.$$

N.V.M.

Bài 7/150 *Giải và biện luận phương trình*

$$\sqrt[3]{\sin^2(x+\pi/4)} + \sqrt[3]{\cos^2(x+\pi/4)} =$$
$$= m\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos 2x/2}$$

Lời giải: của *Trần Mạnh Hiền, Đinh Văn Hàng, Lâm Đạo Tuấn, Trần Xuân Nhàn, Trần Quốc Vinh...)*

Nhận xét rằng $\forall m, \cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt[3]{\cos^2 x/2}$:

$$\sqrt[3]{(1+\mathrm{tg}x)^2} + \sqrt[3]{(1-\mathrm{tg}x)^2} - \sqrt[3]{1-\mathrm{tg}^2x} = m\sqrt[3]{2}.$$

Đặt $\sqrt[3]{1+\mathrm{tg}x} = u$, $\sqrt[3]{1-\mathrm{tg}x} = v$ thì

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = m\sqrt[3]{2} \\ u^3 + v^3 = 2 \end{cases} \quad (*)$$

1) $m = 0$ phương trình vô nghiệm.

2) $m \neq 0$ thì: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - uv = m\sqrt[3]{2} \\ u + v = 2/m\sqrt[3]{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \sqrt[3]{4}/m - u \\ u^2 - (\sqrt[3]{4}/m)u + \sqrt[3]{2}(2 - m^3)/3m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\triangle = 2\sqrt[3]{2}(2m^3 - 1)/3m^2$$

a) Khi $m < 1/\sqrt[3]{2}$ phương trình vô nghiệm.

b) Khi $m \geqslant 1/\sqrt[3]{2}$ thì:

$\mathrm{tg}x = (u_{1,2} - 1)^3 = \mathrm{tg}\alpha_{1,2} \Leftrightarrow x = \alpha_{1,2} + k\pi$ trong đó

$$u_{1,2} = \sqrt[3]{4}/2m \pm \sqrt{2\sqrt[3]{2}(2m^3 - 1)/3m^2}/2m.$$

N.V.M

Bài 8/150: *Cho tam giác ABC. Đường thẳng d qua A cắt BC tại H, trên AH lấy O sao cho AO = AH/3.*

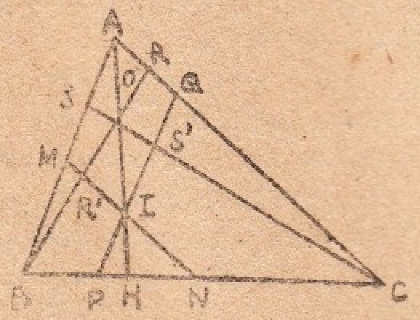
Nối B với O cắt AC tại R. Nối C với O cắt AB tại S. Các điểm R', S' lần lượt là đối xứng của R và S qua O.

Qua R' (S') kẻ đường thẳng song song với AC(AB) cắt AB tại M, cắt BC tại N (cắt BC tại P, cắt AC tại Q).

Xác định vị trí của d để tổng diện tích hai tam giác đó là nhỏ nhất.

Lời giải: Đề không nói rõ «hai tam giác đó» là hai tam giác nào. Riêng bạn *Đoàn Anh Trung* 11 CT, PTTH Phan Bội Châu có nêu thắc mắc đó. Hầu hết đã đoán đúng ý tác giả muốn nói *BMN* và *CPQ*. Riêng lớp 10 CTL, ĐHSP Vinh gửi về 10 bài. Sau đây là bài giải của bạn *Phan Long Ân*, PTTH Lê Quí Đôn, Nha Trang.

Gọi I là trung điểm OH. Khi đó $AO = OI = IH$. Khi đó MN, PQ, AH đồng qui tại I.



Gọi $PH = x$, $HN = y$ ta có $BP = 2x$, $NC = 2y$, $BC = a$. Vậy $3x + 3y = a$.

Gọi diện tích BMN và CPQ lần lượt là S_1 và S_2 và diện tích ABC là S ta có

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \left(\frac{3x + y}{a}\right)^2 + \left(\frac{3y + x}{a}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3x + y}{a} + \frac{3y + x}{a}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3x + y}{a} - \frac{3y + x}{a}\right)^2\right]$$

hay $\dfrac{S_1 + S_2}{S} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4(x + y)}{a}\right)^2 + \left(\frac{2(x - y)}{a}\right)^2\right]$$

Do $x + y = a/3$ không đổi và khi H là trung điểm của BC thì $x = y$ nên khi đó $(S_1 + S_2)/S$ nhỏ nhất tức là $S_1 + S_2$ nhỏ nhất.

N.Q.T

Bài 9/150: *Cho tam giác ABC với các đường cao kẻ từ hai đỉnh A và B cắt nhau tại M. Chứng minh rằng hai đường trung tuyến đi qua hai đỉnh A và B vuông góc với nhau khi và chỉ khi hình chiếu M' của M xuống đường trung tuyến đi qua đỉnh C chia trong đường trung tuyến đó làm hai đoạn theo tỉ lệ 1 : 2.*

Lời giải: Gọi AA' và BB' là các đường cao kẻ từ đỉnh A và B của ΔABC. AA_1, BB_1 và CC_1 là các đường trung tuyến của ΔABC. Gọi O là trung điểm của MC. Dễ thấy rằng các điểm A', M' cùng nằm trên đường tròn (K) tâm O, đường kính MC. Ta có:

$\widehat{C_1AA'} = \widehat{C_1A'A}$ (hai góc đáy của $\triangle$ cân AC_1A')

$\widehat{OA'C} = \widehat{OCA'}$ (hai góc đáy của $\triangle$ cân $OA'C$)

Mà $\widehat{C_1AA'} = \widehat{OCA'}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Nên $\widehat{C_1A'A} = \widehat{OA'C} \Rightarrow \widehat{C_1A'O} = 90°$. Do đó C_1A' là tiếp tuyến tại A' của đường tròn (K). Khi $\widehat{ACB} < 90°$ ta có điểm C_1 và đường tròn (K) nằm ở cùng một phía đối với tiếp tuyến của đường tròn (K) tại C. Do vậy điểm M' – giao điểm thứ hai của CC_1 với đường tròn (K) – nằm trong đoạn CC_1. Trong trường hợp này:

$$C_1A'^2 = C_1M' \times C_1C \qquad (1)$$

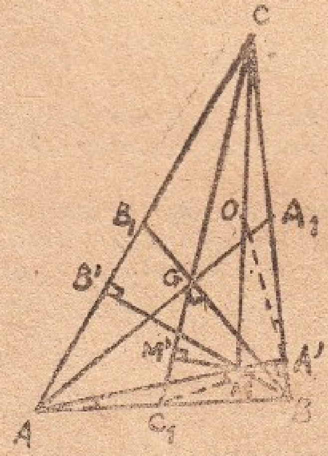
Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Giả sử $AG \perp BG$. Khi đó $AB^2 = AG^2 + BG^2 = (2AA_1/3)^2 + (2BB_1/3)^2 = 4(AA_1^2 + BB_1^2)/9 = 4[(AB^2 + AC^2 - BC^2/2)/2 + (BC^2 + AB^2 - AC^2/2)/2]/9 = (4AB^2 + AC^2 + BC^2)/9 \Rightarrow 5AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB < \max(AC, BC) \Rightarrow \widehat{ACB} < 90°$.

Do vậy theo chứng minh trên, điểm M' chia trong đoạn CC_1. Hơn nữa từ các tam giác vuông $AA'B$ và AGB ta có:

$$C_1A' = C_1G = CC_1/3 \qquad (2)$$

Từ (2) và (1) suy ra $C_1M' = CC_1/9$, hay

$M'C_1 : M'C = 1:8$ đpcm.



b) Giả sử M' chia trong CC_1 theo tỉ lệ $1:8$. Khi đó $M'C_1 = CC_1/9$ (3). Kết hợp (3) và (1) ta được:

$C_1A' = CC_1/3 \Rightarrow C_1A' = C_1G$. Mà $C_1A' = AB/2$ nên $C_1G = AB/2$.

Do đó ΔAGB vuông tại G, hay $AG \perp BG$ (đpcm).

Nhận xét: Tất cả các lời giải gửi tới đều không hoàn chỉnh. Tất cả các bạn đều không chú ý tới hai từ « chia trong » trong đề ra. Một số bạn chỉ chứng minh điều kiện cần, một số bạn khác chỉ chứng minh điều kiện đủ.

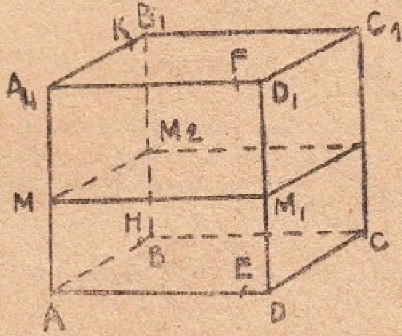
N.K.M

Bài 10/150 *Qua một điểm M bất kỳ thuộc một cạnh của hình lập phương có thể dựng được bao nhiêu mặt phẳng cắt hình lập phương đó sao cho thiết diện thu được là một hình vuông?*

Lời giải (của *Nguyễn Việt Trung* 12CT, PTTH, Lam Sơn, Thanh Hóa).

Gọi hình lập phương là $A_1B_1C_1D_1ABCD$ cạnh a. Không mất tính tổng quát ta giả sử M thuộc AA_1. Trước hết ta nhận thấy rằng muốn thiết diện là hình vuông thì góc M của thiết diện phải là góc vuông tức là thiết diện có hai cạnh vuông góc với nhau tại M. Do góc nhị diện AA_1 là một vuông nên trong hai cạnh của thiết diện đi qua M phải có ít nhất một cạnh vuông góc với AA_1 và do đó độ dài cạnh đó cũng phải bằng a.

Nếu M là A (hoặc A_1) thì trong các cạnh của hình vuông phải có cạnh là AB hoặc AD do đó thiết diện phải là $ABCD$. Nhưng khi đó có thể xem M ở trên AB hoặc AA_1 nên lại có thể thiết diện là AA_1D_1D hoặc AA_1B_1B. Vậy là có 3 thiết diện là hình vuông và nếu chỉ kể các thiết diện cắt hình lập phương thành hai phần ở hai phía thì không có thiết diện hình vuông nào qua một đỉnh của hình lập phương.



Nếu M ở phần trong của cạnh AA_1 thì lại khác. Kẻ MM_1 song song với AD và MM_2 song song với AB. Do nhận xét trên, thiết diện hình vuông qua M phải là 5 hình vuông có các cạnh là MM_1 và MM_2, MM_2 và ME, MM_2 và MF, MM_1 và MH, MM_1 và MK và hai mặt AA_1B_1B và AA_1D_1D.

N.Q.T.

Bài 11/150 : *Giải hệ phương trình* :

$$\begin{cases} xy/(x+y) = a \\ yz/(y+z) = b \\ zx/(z+x) = c \end{cases} \quad \text{với } a, b, c \neq 0$$

Lời giải : Do $a, b, c \neq 0$ nên hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 1/x + 1/y = 1/a & (1) \\ 1/y + 1/z = 1/b & (2) \\ 1/z + 1/x = 1/c & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) ta có $1/x + 1/y + 1/z = 1/2 \times (1/a + 1/b + 1/c)$ kết hợp với (2) ta có

$$1/x = 1/2 \times (1/a + 1/b + 1/c) - 1/b = 1/2 \times$$
$$\times (1/a - 1/b + 1/c) = (bc - ac + ab)/2abc.$$

Tính toán tương tự ta cũng có :

$$1/y = (ac + bc - ab)/2abc;$$
$$1/z = (ab + ac - bc)/2abc$$

Vậy :

— Nếu có ít nhất 1 trong 3 số $bc - ac + ab$, $ac + bc - ab$ và $ab + ac - bc$ bằng 0 thì hệ phương trình vô nghiệm.

— Nếu 3 số đó đều khác 0 thì hệ có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} x = 2abc/(bc - ac + ab) \\ y = 2abc/(ac + bc - ab) \\ z = 2abc/(ab + ac - bc) \end{cases}$$

Nhận xét : Các bạn *Lê Thúy Hà*, *Nguyễn Quang Minh* (8A, PTCS Hồng Bàng, Hải Phòng), *Hoàng Dương Lân* (10A, Ba Đình, Hà Nội) và *Trần Quốc Vinh* (PTCS Sa Đéc, Đồng Tháp) có lời giải tương đối tốt.

T. V. T

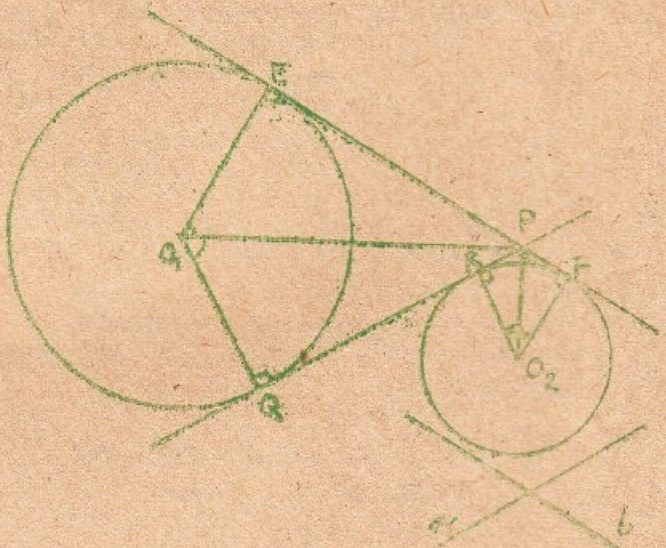
Bài 12/150 : *Dựng hai đường tròn tâm O_1 và O_2 biết hai tâm, phương a của một tiếp tuyến chung trong và phương b của một tiếp tuyến chung ngoài.*

Lời giải : 1) *Phân tích* : Giả sử đã dựng được đường tròn (O_1) tâm O_1 và đường tròn (O_2) sao cho tiếp tuyến chung ngoài $EF//b$, tiếp tuyến chung trong $QR//a$.

Ta có $O_1E \perp EF$ và $O_2F \perp EF$, $O_1Q \perp QR$ và $O_2R \perp QR$. Mà $EF//b$, $QR//a$ nên $O_1E \perp b$ và $O_2F \perp b$, $O_1Q \perp a$ và $B_2R \perp a$

Gọi P là giao của EF và QR. Dễ thấy rằng O_1P và O_2P lần lượt là phân giác của các góc $\widehat{EO_1Q}$ và $\widehat{FO_2P}$. Từ đó ta có cách dựng sau :

2) *Cách dựng* : Qua O_1 vẽ 2 đường thẳng e và q theo thứ tự vuông góc với b và a. Qua O_2 vẽ 2 đường thẳng f và r theo thứ tự vuông góc với b và a. Vẽ các đường phân giác của các góc tạo bởi các đường thẳng e và q; f và r. Chúng cắt nhau tạo thành hình chữ nhật O_1PO_2S. Qua P vẽ 2 đường thẳng a' và b' theo thứ tự song song với a và b. Lấy O_1 làm tâm dựng đường tròn (O_1) tiếp xúc với a', b'. Lấy O_2 làm tâm dựng đường tròn (O_2) tiếp xúc với a', b'. Tiến hành tương tự đối với điểm S ta được cặp đường tròn thứ hai.



3) *Chứng minh* : Qua cách dựng thấy ngay rằng cặp đường tròn (O_1), (O_2) thỏa mãn điều kiện đề bài.

4) *Biện luận* : Nếu $a//b$ bài toán vô nghiệm. Nếu $a \perp b$ bài toán có 1 nghiệm hình. Trong các trường hợp còn lại bài toán có 2 nghiệm hình.

Nhận xét : Tất cả các bạn đều làm sai phần biện luận.

N. K. M

LỚP CUỐI CẤP PTCS

Bài 1/153 : Cho ba số a, b, c thỏa mãn :

$$a/(b - c) + b/(c - a) + c/(a - b) = 0$$

Chứng minh rằng trong ba số này có một số âm và một số dương.

Vũ Đình Hòa

Bài 2/153: Cho tứ giác lồi $ABCD$, $AB = b$; $CD = a$; $AD = BC$; $\widehat{ADC} + \widehat{DCB} = 90°$. Gọi I, N, J và M tương ứng là trung điểm các đoạn AB, AC, CD và BD.

Chứng minh rằng:

$$S \geqslant (a - b)^2/8$$

với S là diện tích tứ giác $INJM$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Tạ Văn Tự

CÁC LỚP PTTH

Bài 3/153: Từ tập hợp $M = \{1, 2, \ldots, 1987\}$ của 1987 số tự nhiên đầu tiên ta có thể chọn được nhiều nhất bao nhiêu tập hợp con (không rỗng) sao cho với bất kỳ hai tập hợp nào trong số các tập hợp con được chọn ra hoặc chúng không có phần tử chung, hoặc chúng bao nhau?

Bùi Văn Thanh

Bài 4/153: Cho dãy số $u_1, u_2, u_3, \ldots$ trong đó $u_1 > 2$ và $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ với $n \geqslant 1$. Với số lẻ p và số chẵn q bất kỳ hãy chứng minh rằng $u_p > u_q$.

Nguyễn Đông Yên

Bài 5/153: Cho n là số nguyên dương, p là số nguyên tố lớn hơn 3. Hãy tìm ít nhất $3(n + 1)$ bộ ba đôi một khác nhau (không kể sai khác do hoán vị) các số nguyên dương (x, y, z) sao cho

$$xyz = p^n(x + y + z).$$

Đề dự tuyển thi toán quốc tế năm 1986

Bài 6/153: Cho k là số thực cố định: $0 \leqslant x, y, z$; $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:

$$F = xy + yz + zx - kxyz.$$

Nguyễn Minh Đức

Bài 7/153: Cho hàm số $f(x) = \sin(x\cos(y)) + \cos(x\sin(y))$ với y là tham số thỏa mãn điều kiện:

$$3\sin^5 y - 2\sin^4 y\cos y - 3\sin^3 y\cos^2 y - 4\sin^2 y\cos^3 y + \sin y\cos^4 y + 2\cos^5 y = 0$$

Hãy xác định y để cho $f(x)$ tuần hoàn.

Tạ Văn Tự

Bài 8/153: Cho a, b, c là các cạnh của ΔABC, có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng:

$$4/3 + 5\sqrt[3]{abc} \leqslant (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) \leqslant 2 + 3\sqrt[3]{abc}$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 9/153: Trên trang giấy có một số vết mực có tổng diện tích bé hơn 1. Chứng minh rằng có thể chia trang giấy thành các hình vuông đơn vị sao cho không có đỉnh nào của hình vuông rơi vào vết mực nào cả.

Vũ Đình Hòa

Bài 10/153: Cho D là điểm trong của tam giác ABC. Ba đường thẳng AD, BD, CD cắt các cạnh BC, AC, AB tương ứng tại X, Y, Z. Chứng minh rằng nếu hai trong ba tứ giác $DYAZ$, $DZBX$, $DXCY$ có thể ngoại tiếp đường tròn thì tứ giác thứ ba cũng thế.

Đề dự tuyển thi toán quốc tế năm 1986

Bài 11/153: Cho hai nửa đường thẳng a và b chéo nhau nhưng vuông góc với nhau nhận AB làm đường vuông góc chung. Một điểm O thay đổi sao cho khi hạ $OA_1 \perp a$ và $OB_1 \perp b$ thì $AA_1 + BB_1 = AB$ và $OA_1 = OB_1$.

Tìm quỹ tích của O.

Phạm Đăng Long

Bài 12/153: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = BC = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c^2$. P là một điểm tùy ý trong không gian. Tính giá trị nhỏ nhất của:

$$f(P) = AP + BP + CP + DP.$$

Đề dự tuyển thi toán quốc tế năm 1986

CÁC ĐỀ TOÁN ÔN TẬP

Lớp cuối cấp phổ thông cơ sở

1) a. Cho $1/a + 1/b + 1/c = 1/(a + b + c)$. Chứng minh rằng với n lẻ ta có:

$$1/a^n + 1/b^n + 1/c^n = 1/(a^n + b^n + c^n).$$

b. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \times \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9.$$

2) Chứng minh rằng :

a) $$\left(\frac{q^2(n-p)}{p-q}+\frac{n^2(m-q)}{m-n}\right):$$

$$:\left(\frac{p^2(m-q)}{p-q}+\frac{m^2(n-p)}{m-n}\right)=\frac{n-q}{m-p},$$

b) $(1-4/1)(1-4/9)\dots(1-4/(2n-1)^2)=$
$=(1+2n)/(1-2n)$.

3) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}=-2{,}5\\[2mm] \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}=1{,}4\end{cases}$$

4) Cho a, b, c là các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<1$$

5) Cho cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài 1. Trên AB, AD lấy các điểm P và Q sao cho chu vi $\triangle APQ$ bằng 2. Chứng minh rằng

$$\widehat{PCQ}=45^\circ$$

Tạ Văn Tự

Lớp 10

1) Đơn giản các biểu thức:

a) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

b) $$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt{a}\right)^2}{ab\cdot\sqrt[6]{ab}}+4\right]\cdot\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

2) Giải các phương trình sau:

a) $2\sqrt[3]{x-3}+2\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{x^2-5x+6}$

b) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{95-x}=5$

3) a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8\end{cases}$$

b) Tìm a, b để hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2x-ay=1-a\\ bx+(3-2b)y=3+a\end{cases}$$

có nghiệm duy nhất là $x=1$, $y=1$:

4) Cho tứ giác lồi $ABCD$; M, N là các điểm giữa của AD và BC.

a) Chứng minh nếu $2MN=AB+CD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình thang.

b) Khi $AB//CD$, hãy tính diện tích hình thang $ABCD$ biết diện tích các ΔOAB và ΔOCD là S_1, S_2 với O là giao của AC và BD.

5) Cho ΔABC cân ở A. Gọi A_1, B_1, C_1 là chân các đường phân giác tương ứng đỉnh A, B, C. Gọi S_1 bằng diện tích $\Delta A_1B_1C_1$, S là diện tích $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

$$(S/S_1=(\sqrt{k}+1/\sqrt{k})^2$$

với $\quad k=BC/AC$.

Tạ Văn Tự

Lớp 11

1) Cho $\sin(2\alpha+\beta)=5\sin\beta$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=3/2\,.\,\mathrm{tg}\alpha$$

2) Cho $\cos\alpha=\sin B/\sin A$; $\cos\beta=\sin C/\sin A$;

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin B\sin C.$$

Chứng minh rằng $\mathrm{tg}^2A=\mathrm{tg}^2B+\mathrm{tg}^2C$.

3) Giải phương trình

$$9^{a-|x-2|}-3^{a-|x-2|}=4.$$

4) Giải và biện luận $\log_a\log_a x\geqslant\log_a\log_3 x$.

5) Trong tứ diện $ABCD$ các góc phẳng của góc tam diện có đỉnh tại C và D đều bằng α; $CD=a$. Tính thể tích của tứ diện.

Nguyễn Văn Mậu

Lớp 12

1) Cho $\begin{cases}ax^2+bx+c<0\\ bx^2+cx+a<0\\ cx^2+ax+b<0\end{cases}$ có nghiệm. Chứng minh rằng $a+b+c<0$.

2) Giải và biện luận:

$$\begin{cases}x^2-(k+1)x+2k-2\leqslant 0\\ x^2-(k+2)x+3k-3\leqslant 0.\end{cases}$$

3) Tìm điều kiện cần và đủ để hệ:

$$\begin{cases}a\sin^2x+b\cos^2x+c=0\\ a\cos^2x+b\sin^2x+c=0\end{cases}$$ có nghiệm

4) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=|x+3|+|x-5|.$$

5) Cho góc vuông $\widehat{mOn}$ trong mặt phẳng P. Đoạn $SO=a$ vuông góc với P, các điểm M, N chuyển động trên Om, On sao cho $OM+ON=a$.

a) Xác định giá trị lớn nhất của thể tích $SOMN$

b) Tìm quĩ tích tâm I của mặt cầu ngoại tiếp $SOMN$. Chứng minh rằng khi tứ diện có thể tích lớn nhất thì bán kính hình cầu ngoại tiếp nhỏ nhất.

c) Chứng minh rằng mặt phẳng (SMN) luôn luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Nguyễn Văn Mậu

PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

LÊ TRẦN CHÍNH

BÀI báo này sẽ giới thiệu với bạn đọc phương pháp dùng phép chiếu vuông góc để giải toán.

Ta nhắc lại (mà không chứng minh) một số tính chất thường dùng của phép chiếu vuông góc:

(a) Trong phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (R): AB có hình chiếu là $A'B'$ thì $A'B' \leqslant AB$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB // (R)$ hoặc $AB \in (R)$.

(b) Trong phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P): đa giác lồi μ với diện tích S, có hình chiếu là đa giác lồi μ' với diện tích S' thì:

$$S' = S \cos\alpha,$$

trong đó α là góc tạo bởi mặt phẳng của đa giác với mặt phẳng (P)

(c) Phép chiếu vuông góc bảo tồn tỉ số các đoạn thẳng cùng phương.

Sau đây là các bài toán với qui ước: mệnh đề « Trong phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (R) điểm A có hình chiếu là A' » được ký hiệu $A \overset{(R)}{\mapsto} A'$.

Bài toán 1: Cho tứ diện $ABCD$. Mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh AB cắt CD tại E. Chứng minh rằng:

$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta ABD} = EC : ED$$

Lời giải: Chọn phép chiếu vuông góc có phương chiếu là AB còn mặt phẳng chiếu là mặt phẳng (P) tùy ý vuông góc với AB.

Ta có: $A \overset{(P)}{\mapsto} A'$

$B \overset{(P)}{\mapsto} A'$

$C \overset{(P)}{\mapsto} C'$

$D \overset{(P)}{\mapsto} D'$

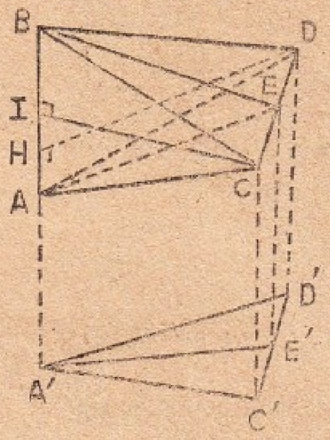
Theo tính chất (c) ta có:

$$EC : ED = E'C' : E'D' \qquad (1)$$

Hạ $CI \perp AB$, $DH \perp AB$. Vì $I \in AB$ nên $I \overset{(P)}{\mapsto} A'$, $H \in AB$ nên $H \overset{(P)}{\mapsto} A'$. Vì $(P) \perp AB$ nên $CI // (P)$, $DH // (P)$.

Theo tính chất (a) ta có $CI = C'A'$, $DH' = D'H'$.

Vậy $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta ABD} =$
$= (CI \cdot AB/2) : (DH \cdot AB/2) = CI : DH =$
$= C'A' : D'A'$ (2)



Vì $(P) \perp AB$ nên $\widehat{C'A'D'}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh AB và do mặt phẳng AEB là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện đó nên $A'E'$ chính là đường phân giác của góc $C'A'D'$.

Theo tính chất của đường phân giác trong một tam giác ta có: $C'A' : D'A' = E'C' : E'D'$ (3)

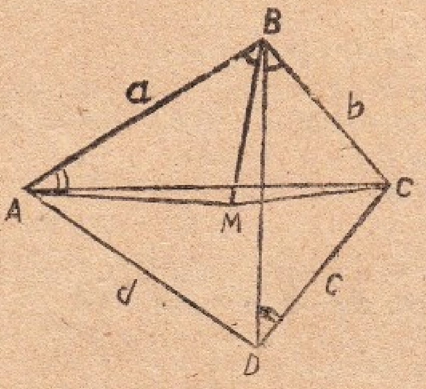
Từ (1) (2) và (3) ta có:

$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta ABD} = EC : ED \qquad \text{(đpcm)}$$

Bài toán 2: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng tổng của 2 trong 3 tích $AB \cdot CD$; $BC \cdot DA$; $CA \cdot BD$ lớn hơn tích thứ 3.

Bổ đề: Trên mặt phẳng cho bốn điểm $ABCD$ ta có: $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geqslant AC \cdot BD$.

Chứng minh: Đặt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$.



Chọn điểm M trong mặt phẳng tứ giác sao cho

$$\widehat{ABM} = \widehat{DBC}; \ \widehat{BAM} = \widehat{BDC}.$$

$\triangle ABM \sim \triangle DBC$ và $AB/AM = BD/DC$

$\Rightarrow AM = ac/f$ (1)

Tương tự: $BM/AB = BC/BD \Rightarrow BM = ab/f$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$AM/BM = e/b$$

Nhưng: $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$ (3) nên từ (2) và (3) ta có:

$$\triangle ABD \sim \triangle MBC$$

$\Rightarrow MC/AD = BC/BD \Rightarrow MC = AD \,.\, BC/BD = db/f$ (4)

Xét tam giác AMC. Từ (1) và (4) ta có:

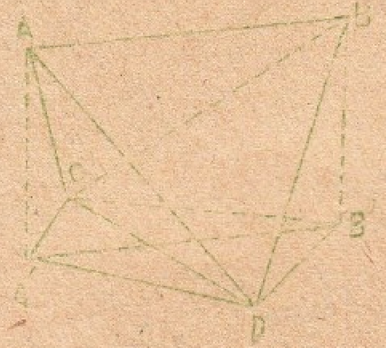
$AM + MC \geqslant AC \Leftrightarrow (ac + bd)/f \geqslant e$

hay $ac + bd \geqslant ef$.

Giải bài toán 2: Ta chứng minh

$AB \,.\, CD \leqslant BC \,.\, DA + CA \,.\, BD$

Hai trường hợp còn lại chứng minh tương tự.



Xét (P) là mặt phẳng chứa CD và song song với AB. Xét phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P)

$A \overset{(P)}{\mapsto} A'$ $\quad B \overset{(P)}{\mapsto} B'$

$C \overset{(P)}{\mapsto} C$ $\quad D \overset{(P)}{\mapsto} D$

Do $AB // (P)$ nên $AB = A'B'$.

Theo bổ đề ta có:

$AB \,.\, CD = A'B' \,.\, CD \leqslant B'C \,.\, DA' + CA' \,.\, B'D$

Theo tính chất (a) ta có:

$B'C \leqslant BC,\ DA' \leqslant DA,\ CA' \leqslant CA,\ B'D \leqslant BD$

Vậy $AB \,.\, CD \leqslant BC \,.\, DA + CA \,.\, BD$ (đpcm)

Bài toán 3: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó góc tam diện đỉnh A có ba mặt vuông.

Chứng minh rằng nếu mặt BCD làm thành với ba mặt kia các góc α, β, γ thì

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

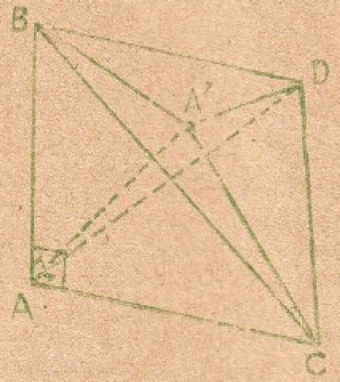
Lời giải:

Gọi A' là hình chiếu của A lên mặt phẳng BCD.

Xét phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng BCD ta có:

$A \overset{(BCD)}{\mapsto} A'$; $\quad C \overset{(BCD)}{\mapsto} C$

$D \overset{(BCD)}{\mapsto} D$



Theo tính chất (b) ta có

$$\cos\alpha\, S_{ACD} = S_{A'CD} \qquad (1)$$

(α là góc giữa (BCD) và (ACD))

Do $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 1V$ nên $AB \perp (CDA)$. Xét phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (ACD)

ta có: $B \overset{(ACD)}{\mapsto} A$; $\ C \overset{(ACD)}{\mapsto} C$; $\ D \overset{(ACD)}{\mapsto} D$

Theo tính chất (b) ta có:

$$\cos\alpha \,.\, S_{BDC} = S_{ACD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\cos^2\alpha \,.\, S_{BCD} = S_{A'CD}$$

Tương tự $\cos^2\beta\ S_{ACD} = S_{A'BD}$

$$\cos^2\gamma\ S_{BCD} = S_{A'DC}$$

Từ đó ta có $S_{BCD}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = S_{A'CD} + S_{A'BD} + S_{A'DC}$

Bạn đọc hãy tự chứng minh rằng A' luôn nằm trong tam giác BCD. Khi đó

$$S_{BCD} = S_{A'CD} + S_{A'BD} + S_{A'DC}$$

Vậy $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (đpcm).

Để kết thúc bài báo xin nêu ra các bài tập:

1. Chứng minh rằng: nếu tứ diện có các mặt tương đương thì các mặt của nó phải bằng nhau.

2. Cho hai đường thẳng x, y trong không gian. A và B là hai điểm cố định trên x; CD là đoạn thẳng có độ dài không đổi trượt trên y. Tìm vị trí của CD sao cho tổng diện tích các mặt của hình tứ diện $ABCD$ là cực tiểu.

3. Nếu xung quanh một hình vuông diện tích bằng 1 không ngoại tiếp được một tam giác diện tích nhỏ hơn 2 thì điều này cũng đúng cho hình chữ nhật.

DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ NGUYÊN TỐ ĐỂ GIẢI TOÁN

ĐỖ ĐỨC THÁI

Các bài toán về giải phương trình Điô phăng thường hay gặp trong chương trình toán học phổ thông, nhất là trong các kỳ thi mang tính chất tuyển chọn.

Nói chung các cách giải phương trình Điô phăng là rất phong phú, mỗi bài mỗi kiểu, không có phương pháp tổng quát. Thường thường, khi giải các bài toán loại này người ta hay sử dụng những tính chất số học đặc biệt như các dấu hiệu chia hết; các tính chất của số nguyên tố của đồng dư thức, của số mũ.. v.v...

Bài viết này giới thiệu với các bạn một vài tính chất của số nguyên tố có dạng $4k+3$, được dùng khá nhiều khi chứng minh một phương trình Điô phăng nào đó là vô nghiệm và giải một vài bài toán khác.

Mệnh đề 1. *Với mọi số nguyên a, số a^2+1 không có ước nguyên tố dạng $4k+3$.*

Chứng minh: Giả sử a là số nguyên nào đó mà a^2+1 có ước nguyên tố p dạng $4k+3$. Từ $a^2+1 \vdots p$ suy ra $a^{4k+2}+1 \vdots p$ (1)

Mặt khác theo định lý nhỏ Fermat ta có

$$a^{p-1}-1 \vdots p, \text{ hay } a^{4k+2}-1 \vdots p \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2 \vdots p \Rightarrow p=2$. Điều này là mâu thuẫn với giả thiết p có dạng $4k+3$.

Vậy: $\forall a \in Z$, a^2+1 không có ước nguyên tố dạng $4k+3$.

Ta nêu ra một vài bài toán áp dụng mệnh đề 1.

Bài toán 1: Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

$$4xy-x-y=z^2$$

Giải: Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$(4x-1)(4y-1)=(2z)^2+1 \qquad (3)$$

Giả sử (x_0, y_0, z_0) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (3).

Ta có $(4x_0-1)(4y_0-1)=(2z_0)^2+1$.

Vì $4x_0-1$ là số nguyên dương $\geqslant 3$ và có dạng $4m+3$ (m nguyên dương) nên nó có ít nhất một ước nguyên tố p dạng $4k+3$. Nhưng theo mệnh đề 1: $[(2z_0)^2+1]$ không có ước nguyên tố dạng $4k+3$.

Vậy phương trình (3) vô nghiệm, hay phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Bài toán 2: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^2-y^3=7 \qquad (4)$$

Giải: Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (4). Ta có

$$x_0^2-y_0^3=7$$

hay $x_0^2+1=y_0^3+8$

$$=(y_0+2)(y_0^2-2y_0+4).$$

Xét trường hợp sau:

1) y_0 chẵn: Khi đó y_0+2 và $y_0^2-2y_0+4$ đều chẵn. $\Rightarrow x_0^2+1 \vdots 4 \Rightarrow x_0^2 \equiv -1 \pmod 4$. Điều này vô lý.

2) y_0 lẻ có dạng $4m+1$ (m nguyên dương): Khi đó y_0+2 có dạng $4m+3$ (n nguyên dương). Mà $y_0+2 \geqslant 3$ nên tồn tại p nguyên tố dạng $4k+3$, mà $p \backslash y_0+2$. Nghĩa là tồn tại p nguyên tố dạng $4k+3$ mà $p \backslash x_0^2+1$. Điều này là vô lí.

3) y_0 lẻ có dạng $4m+3$. Khi đó $y_0^2-2y_0+4$ có dạng $4l+3$. Mà $y_0^2-2y_0+4 \geqslant 3$ nên tồn tại p nguyên tố dạng $4k+3$ mà $p \backslash (y_0^2-2y_0+4)$. Từ đó suy ra x_0^2+1 có ước nguyên tố p dạng $4k+3$. Điều này là vô lý.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Mệnh đề 2: *Cho p là một số nguyên tố dạng $4k+3$, a và b là các số nguyên. Khi đó: nếu $a^2+b^2 \vdots p$ thì a và b đều chia hết cho p.*

Chứng minh: Giả sử $a \not\vdots p$, $b \not\vdots p$.

Theo định lí nhỏ Fermat ta có:

$$a^{p-1}-1 \vdots p, \quad b^{p-1}-1 \vdots p$$

hay: $a^{4k+2}-1 \vdots p$, $b^{4k+2}-1 \vdots p$

Suy ra $a^{4k+2}+b^{4k+2}-2 \vdots p$

$\Rightarrow (a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1}-2 \vdots p$.

Vì $(a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1} \vdots a^2+b^2$ nên $a^{4k+2}+b^{4k+2} \vdots p$. Thế thì phải có $2 \vdots p$: Vô lý.

Vậy $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$.

Từ giả thiết $a^2+b^2 \vdots p$ dễ dàng suy ra cả hai số a, b đều chia hết cho p (đpcm).

Bây giờ ta nêu ra một vài bài toán có áp dụng mệnh đề 2 trong chứng minh.

Bài toán 3: Tìm các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 13y^2 = z^2 \\ 13x^2 + y^2 = t^2 \end{cases} \quad (5)$$

Bài giải: Giả sử (x_o, y_o, z_o, t_o) là một nghiệm của hệ (5).

Đặt $(x_o, y_o) = d \Rightarrow z_o \vdots d$

Đặt $x_o = dx_1$

$y_o = dy_1$ $\quad$ (x_1, y_1, z_1 nguyên dương,

$z_o = dz_1$ $\quad$ $(x_1, y_1) = 1$).

Từ hệ (5) suy ra $14(x_o^2 + y_o^2) =$

$$= z_o^2 + t_o^2 \Rightarrow 14(x_1^2 + y_1^2) = z_1^2 + t_1^2$$

$$\Rightarrow z_1^2 + t_1^2 \vdots 7.$$

Theo mệnh đề đã nêu ta có

$$z_1 \vdots 7,\ t_1 \vdots 7$$

$$\Rightarrow z_1^2 + t_1^2 \vdots 49$$

$$\Rightarrow 14(x_1^2 + y_1^2) \vdots 49$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 \vdots 7$$

lại tiếp tục áp dụng mệnh đề đã nêu ta suy ra

$$x_1 \vdots 7,\ y_1 \vdots 7$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $(x_1, y_1) = 1$. Vậy hệ phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Bài toán 4: Cho x, y là 2 số nguyên khác không thỏa mãn các điều kiện sau:

$$(x + y) \backslash (x^2 + y^2, \frac{x^2 + y^2}{x + y}) \backslash 1978.$$

Chứng minh rằng: $x = y$.

Bài giải: Bài toán không thay đổi nếu ta thay (x, y) bởi $(-x, -y)$ nên hoàn toàn có thể giả sử được $x + y > 0$.

Đặt $k = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} \Rightarrow k \backslash 1978 = 2.23.43$

Xét 2 trường hợp:

1) k chẵn: Đặt $k = 2q$ ($q = 1$ hoặc q là tích các số nguyên tố phân biệt dạng $4k + 3$)

$\Rightarrow x^2 + y^2 \vdots q \Rightarrow x \vdots q,\ y \vdots q$.

Đặt $x = qx_1$

$y = qy_1$ $\quad$ $(x_1, y_1 \neq 0)$

Suy ra: $q^2(x_1^2 + y_1^2) = 2q^2(x_1 + y_1)$

$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 2x_1 + 2y_1$

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow |x_1 - 1| = |y_1 - 1| = 1$

$\Leftrightarrow x_1 = y_1 = 2 \Rightarrow x = y$ (đpcm)

2) k lẻ: $D_{4k} \backslash 1978$ nên $k = 1$ hoặc k là tích các số nguyên tố phân biệt dạng $4k + 3$.

$\Rightarrow x^2 + y^2 \vdots k \Rightarrow x$ và $y \vdots k$

Đặt $x = kx_1$

$y = ky_1$ $\quad$ $(x_1, y_1 \neq 0)$

Suy ra: $k^2(x_1^2 + y_1^2) = k^2(x_1 + y_1)$

$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_1 + y_1$

$\Leftrightarrow (2x_1 - 1)^2 + (2y_1 - 1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow |2x_1 - 1| = |2y_1 - 1| = 1$

$\Leftrightarrow x_1 = y_1 = 1 \Rightarrow x = y$ (đpcm).

Giới thiệu với các bạn thêm một vài tính chất của số nguyên tố. Mong rằng chúng có thể giúp ích các bạn trong tìm tòi và trong giải toán.

Bạn có biết?

VỀ ĐỊNH LÝ STEINER — LEHMUS

LÊ TRƯỜNG TÙNG

NĂM 1840, SL. Lehmus gửi cho nhà hình học Thụy Điển J.Steiner định lý sau đây với yêu cầu đưa ra một cách chứng minh hình học thuần túy: *tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau là tam giác cân*. Định lý này về sau được mang tên Steiner – Lehmus.

Trong chứng minh của mình, Steiner sử dụng công thức sau: nếu d_a, d_b, d_c là các đường phân giác của 3 góc ứng với 3 cạnh đối diện a, b, c tương ứng thì:

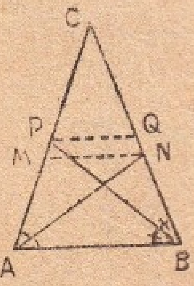
$$\begin{aligned} d_a^2 &= bc(1 - a/(b+c))^2 \\ d_b^2 &= ca(1 - b/(c+a))^2 \\ d_c^2 &= ab(1 - c/(a+b))^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Khi ấy, đẳng thức $d_a^2 = d_b^2$ sau khi biến đổi tương đương thì được

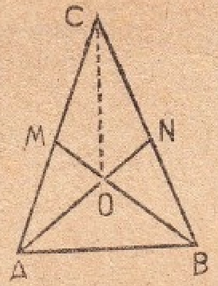
$$c(a+b+c)[(a+b+c)(c^2+ab) + 2abc](a-b) = 0$$

Từ đây suy ra $a = b$. Cách chứng minh này gọn, tuy nhiên phải dùng đến công thức (1) và không được «hình học» cho lắm. Bởi thế, sau khi chứng minh trên được công bố, nhiều người lao vào tìm cách chứng minh khác. Trong những năm tiếp theo, hàng loạt các phương pháp chứng minh khác được đưa ra, tuy vậy trong các phương pháp phải kẻ thêm nhiều đường và kèm theo tính toán khá phức tạp.

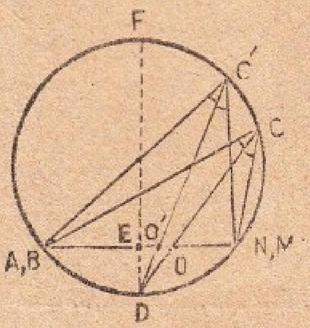
Đến năm 1939, một nữ sinh lớp 10 ở Matscơva (Liên Xô) tên là Lida Kopeikina tìm được một cách chứng minh khá đơn giản sau đây: giả sử 2 đường phân giác AN và BP bằng nhau. Kẻ NM và PQ song song với AB, cắt AC và BC tại M, Q (hình 1). Ta sẽ chứng minh PQ và MN trùng nhau bằng phản chứng. Giả sử MN gần AB hơn PQ, khi đó $MN > PQ$. Do $\widehat{PBQ} = \widehat{PBA} = \widehat{BPQ}$ nên tam giác BPQ cân, $PQ = QB$. Tương tự $AM = MN$. Hai tam giác cân BPQ và AMN có cạnh đáy bằng nhau, cạnh bên $PQ < MN$ nên $\widehat{PQB} > \widehat{AMN}$, tức $\widehat{CBA} < \widehat{CAB}$, từ đây suy ra trong hình thang $AMNB$ có $AM < BN$, mâu thuẫn với $AM = MN > PQ = QB > BN$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ MN và PQ trùng nhau. Khi đó $AMNB$ là hình thang cân nên $\widehat{A} = \widehat{B}$.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Một năm sau, năm 1940 một học sinh lớp 8 cũng ở Matscơva tên là Vôlôdia Bolchiànzki tìm ra một cách chứng minh khác cũng khá đẹp. Giả sử O là giao điểm 2 đường phân giác bằng nhau AN và BM (hình 2), khi đó CO là phân giác của góc C. Hai tam giác ANC và BMC có góc $\widehat{C}$ chung, $AN = BM$, đường phân giác của góc C chung, ta chứng minh chúng bằng nhau (khi đó suy ra $CA = CB$ – đpcm). Thật vậy, ta tách riêng chúng ra thành 2 tam giác ANC và BMC' có $AN = BM$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ đường phân giác CO, $C'O'$ bằng nhau, và xếp chúng lại sao cho AN và BM trùng nhau, 2 đỉnh C, C' nằm cùng phía so với AN, BM và so với đường DF vuông góc và đi qua điểm giữa E của AN (hình 3). Do $\widehat{C} = \widehat{C'}$ nên C và C' nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC. Nếu C khác C', ví dụ cung $\overset{\frown}{DC}$ bé hơn cung $\overset{\frown}{DC'}$ thì chân 2 đường phân giác 2 góc $\widehat{C}$, $\widehat{C'}$ (đi qua D) là O và O' thỏa mãn $DO > DO'$. Do $DC < DC'$ nên $CO < C'O'$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $CO = C'O'$.

Hiện nay L. Kopeikina và V. Bolchianxki là 2 giáo sư toán học có tên tuổi ở Liên Xô.

Năm 1961, cuốn «Nhập môn hình học» của giáo sư Canada tên là H.S.M. Coxeter được in ra và giới thiệu trên tạp chí Scientific American. Phần nói khá hay về định lý Steiner – Lehmus trong bài giới thiệu này lại lôi kéo hàng trăm bạn đọc lao vào tìm cách chứng minh mới. Cách chứng minh của hai kỹ sư người Anh là G. Jylbert và D. Mac-Donnell được đánh giá là đơn giản nhất và được công bố trên tạp chí American Mathematical Monthly năm 1963. Cách chứng minh này dựa vào bổ đề sau:

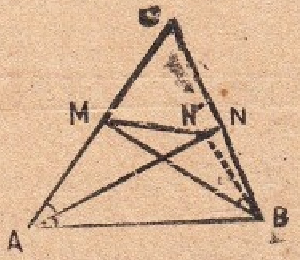
Trong tam giác ABC, nếu $\widehat{A} < \widehat{B}$ thì đường phân giác AN lớn hơn đường phân giác BM.

Chứng minh bổ đề này như sau:

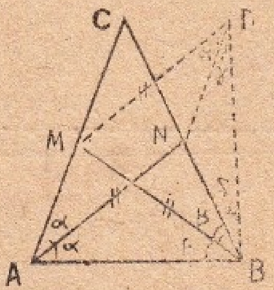
Lấy N' trên AN sao cho $\widehat{MBN'} = 1/2\,\widehat{A}$ (hình 4). Do góc này bằng góc $\widehat{MAN'}$ nên 4 điểm A, M, N', B nằm trên một đường tròn. Góc $\widehat{MAB}$ bé hơn góc $\widehat{N'BA}$ nên cung MB bé hơn cung $N'A$, tức $MB < N'A$ suy ra:

$$MB < N'A < AN.$$

Định lý Steiner – Lehmus suy ra trực tiếp từ bổ đề vừa chứng minh.



Hình 4



Hình 5

Trong một thời gian dài, cách chứng minh trên được xem là đơn giản nhất. Gần đây, cuối năm

1982 trên tạp chí The Mathematical Gazette của Anh lại công bố một cách chứng minh mới rất đơn giản của R.W. Hogg: Giả sử 2 đường phân giác AN và BM bằng nhau. Dựng hình bình hành $AMDN$ và ký hiệu các góc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ như trên hình 5. Do tam giác BMD cân nên

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

Nếu như $\alpha > \beta$ thì $BN > AM = ND$, do đó $\gamma > \delta$, từ đây $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ – vô lý. Tương tự trường hợp $\alpha < \beta$ không thể xảy ra, tức $\alpha = \beta$ (đpcm).

Các bạn thân mến! Với khát vọng vươn tới cái đơn giản nhất, gần 150 năm trôi qua để đưa từ cách chứng minh của Steiner tới cách chứng minh của Hogg. và chắc rằng quá trình này không dừng lại ở đây.

Bây giờ, mời các bạn giải một vài bài tập sau đây:

1. Sử dụng công thức Côsin, chứng minh công thức (1)

2. Chứng minh công thức tổng quát hơn công thức (1): cho tam giác ABC, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, D là 1 điểm trên cạnh BC, $AD = p$, $BD = m$, $CD = n$. Chứng minh rằng:

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n$$

(định lý Steward)

3. Giải thích vì sao cách chứng minh của Jylbert và Mac–Donnell không áp dụng được cho trường hợp AN và BM là 2 đường phân giác ngoài?

4. Trong tam giác ABC, $\widehat{A} = 12°$, $\widehat{B} = 120°$, AN và BM là 2 đường phân giác ngoài. Không sử dụng các hàm số lượng giác, chứng minh $AN = BM$.

CON SỐ KỲ LẠ

Số 142.857 được gọi là *số kỳ lạ* bởi vì nếu ta đem số này nhân với các số từ 1 đến 7 ta được các tích số như trong bảng bên:

Bảng 1

×	1	4	2	8	5	7
1	1	4	2	8	5	7
2	2	8	5	7	1	4
3	4	2	8	5	7	1
4	5	7	1	4	2	8
5	7	1	4	2	8	5
6	8	5	7	1	4	2
7	9	9	9	9	9	9

Ta thấy ngay 6 tích số đầu là các số gồm đúng 6 chữ số của số kỳ lạ. Tích số thứ 7 gồm 6 chữ số 9. Bây giờ có người phát biểu rằng: « Khi ta nhân số kỳ lạ với một số nguyên bất kỳ n, nếu tích số gồm nhiều hơn 6 chữ số thì ta ngắt tích số thành các xâu chữ số gồm 6 chữ số, tính từ hàng đơn vị ngược trở lên (nói khác đi là tính từ phải qua trái). Như vậy mỗi xâu đều có 6 chữ số, trừ xâu cuối cùng có thể có ít hơn 6 chữ số. Tiếp đó ta đem cộng tất cả các xâu này lại. Nếu kết quả của phép cộng là một số có trên 6 chữ số thì ta lại chia xâu kết quả này thành các xâu có 6 chữ số như trên và lại làm phép cộng các xâu. Cứ tiếp tục làm như thế cho tới khi được kết quả là một số chỉ có 6 chữ số thì kết quả cuối cùng này sẽ rơi vào một trong 7 tích số trong bảng ».

Phát biểu này có đúng không? Vì sao?

QUẢN NGỌC SƠN

CÁC BẠN GỬI LỜI GIẢI CẦN CHÚ Ý: *Mỗi lời giải cho một đề viết trên một tờ giấy riêng, không viết nhiều lời giải vào cùng một tờ. Trên mỗi tờ phải ghi rõ họ tên, lớp, trường, huyện (thị trấn), tỉnh (thành phố), bài số mấy của số báo nào. Bài ghi không đúng thể thức không được chấm điểm.*

In 15000 số tại Xí nghiệp in 75 Hàng Bồ – Hà Nội. Số in 39/87. In xong và gửi lưu chiểu tháng 3-1987

Chỉ số: 12.884 Giá 2 đồng