https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC Tuổi trẻ

VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

6
1986
Số 152

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói: 52825

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH NGOÀI HAI VÉCTƠ TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

NGUYỄN THÚC HÀO

TRONG bài này, xin tiếp tục giới thiệu thêm với bạn đọc về ứng dụng của tích ngoài (có thể kết hợp với tích vô hướng) vào hình học phẳng.

1. Hệ thức giữa 3 véctơ bất kỳ.

Từ nay, chúng ta sẽ qui ước bỏ cả dấu mũi tên trên các chữ dùng để chỉ vectơ. Chẳng hạn, $\vec{a}$ sẽ được thay bằng a, sau khi đã nói trước a là một vectơ.

Bây giờ, trong mặt phẳng, xét 3 vectơ bất kỳ a, b, c. Nếu chúng đồng phương với nhau thì

$$[a, b] = [b, c] = [c, a] = 0$$

và không có gì đáng nói. Nếu có ít nhất một cặp vectơ không đồng phương, chẳng hạn a và b, thì:

$$[a, b] \neq 0$$

và vectơ còn lại là c biểu diễn được bằng một tổ hợp tuyến tính của a, b (phân tích c theo hai phương a và b), tức có α, β là số thực sao cho

$$c = \alpha a + \beta b \qquad (1)$$

Lần lượt lấy *tích ngoài* của hai vế với a và b, ta sẽ được:

$$[c, a] = \beta[b, a], \; [c, b] = \alpha[a, b]$$

tức $$\alpha = -\frac{[b, c]}{[a, b]}\; ; \; \beta = \frac{-[c, a]}{[a, b]} \qquad (2)$$

Hệ thức (1) trở nên

$$c = \frac{-[b, c]a - [c, a]b}{[a, b]}$$

hay là

$$[a, b]c + [b, c]a + [c, a]b = 0 \qquad (3)$$

Đó là hệ thức giữa 3 véctơ bất kỳ trong mặt phẳng. Ta chú ý rằng, trường hợp a, b, c đồng phương với nhau thì hệ thức (3) vẫn đúng.

2. Công thức cộng cung trong lượng giác:

Ta hãy xét 3 vectơ a, b, c là những vectơ đơn vị:

$$|a| = |b| = |c| = 1.$$

Định lý Chasles về góc cho ta hệ thức:

$$\overparen{a.c} = \overparen{a.b} + \overparen{b.c} + 2k\pi$$

k là một số nguyên, còn $\overparen{a.c}$, $\overparen{a.b}$, $\overparen{b.c}$ là những góc lượng giác (góc có định hướng nghĩa rộng, của hai tia). Ta hãy đặt:

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

$$\widehat{a \cdot b} = \alpha, \quad \widehat{b \cdot c} = \beta$$

thì

$$\widehat{a \cdot c} = \alpha + \beta \quad (+2k\pi)$$

Từ (3) ta rút ra:

$$[a, c]b = [a, b]c + [b, c]a$$

Nhân *vô hướng* với b, ta có:

$$[a, c](b^2) = [a, b](c, b) + [b, c](a, b)$$

Do a, b, c là vectơ đơn vị, ta được công thức

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad (4)$$

Từ đó suy ra $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, v.v.

3. Đường thẳng, giao điểm của hai đường thẳng.

a) *Đường thẳng*. Ta hãy xác định một đường thẳng bằng cách cho điểm A và phương u (vectơ) của nó. Đường thẳng đi qua A, theo phương u là quỹ tích điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}$ đồng phương với u, tức là

$$[\overrightarrow{AM}, u] = 0$$

hay là

$$[M - A, u] = 0 \qquad (5)$$

Bạn đọc nhớ rằng ta ký hiệu $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$ lần lượt bằng M, A (với O là gốc đã chọn cho các vectơ bán kính của các điểm). Có thể nói (5) là *phương trình* của đường thẳng, trong đó M là *điểm chạy* trên đường thẳng.

b) *Giao của hai đường thẳng*

Cho thêm một đường thẳng thứ hai, đi qua B, theo phương v (khác u), mà phương trình là

$$[B - M, v] = 0, \quad [u, v] \neq 0 \qquad (6)$$

Ta hãy đặt $\qquad M = \alpha u + \beta v \qquad (7)$

và buộc M thỏa mãn cả (5) và (6), sẽ được

$$\left.\begin{aligned} [A - \alpha u - \beta v, u] &= 0 \\ [B - \alpha u - \beta v, v] &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [A, u] + \beta[u, v] = 0 \\ [B, v] - \alpha[u, v] = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta rút ra α, β rồi thay vào (7), được giao điểm của hai đường thẳng (5) và (6) là:

$$M = \frac{[B, v]u - [A, u]v}{[u, v]} \qquad (8)$$

4. Điều kiện đồng qui của ba đường thẳng

Lại cho thêm đường thẳng thứ ba với phương trình là:

$$[C - M, W] = 0 \qquad (9)$$

Ba đường thẳng (5), (6) và (9) là đồng qui nếu và chỉ nếu giao của hai đường (5) và (6), cho bởi (8), thỏa mãn phương trình (9). Điều kiện đó là:

$$[[u, v]C - [B, v]u + [A, u]v, W] = 0$$

hay là

$$[u, v][C, W] + [v, W][A, u] + [W, u][B, v] = 0 \qquad (10)$$

Ấy là điều kiện đồng qui cho 3 đường thẳng (5), (6) và (9).

Chú ý. 1) Có thể lấy điểm C làm gốc các vectơ buộc. Khi ấy $C = 0$. Điều kiện (10) trở nên:

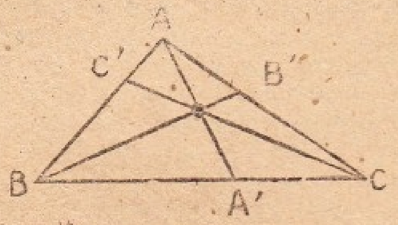
$$[v, W][A, u] + [W, u][B, v] = 0 \qquad (11)$$
$$(C = 0)$$

2) Nếu mỗi đường thẳng được xác định bằng 2 điểm, tức nếu cho 3 đường thẳng AA', BB', CC', thì ta lấy các vectơ chỉ phương là:

$u = \overrightarrow{AA'} = A' - A$, $v = \overrightarrow{BB'} = B' - B$, $W = \overrightarrow{CC'} = C' - C$ rồi áp dụng điều kiện (10) hoặc (11).

5. Định lý Céva.

Cho tam giác ABC. Trên các cạnh (có thể kéo dài) BC, CA, AB, lần lượt cho các điểm A', B', C'. Hãy tìm điều kiện đồng qui cho 3 đường thẳng AA', BB', CC'.



Như trong bài trước ở mục nói về định lý Menelaus (THVTT số 2-1985), ta hãy đặt:

$$\alpha = \left(\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\right), \quad \beta = \left(\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}\right), \quad \gamma = \left(\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}\right).$$

Từ đó, ta suy ra:

$$A' = \frac{B - \alpha C}{1 - \alpha}, \quad B' = \frac{C - \beta A}{1 - \beta}, \quad C' = \frac{A - \gamma B}{1 - \gamma}$$

Chọn $C = 0$, ta có:

$$A' = \frac{B}{1 - \alpha}, \quad B' = \frac{-\beta A}{1 - \beta}, \quad C' = \frac{A - \gamma B}{1 - \gamma}$$

Ta lại có:

$$u = A' - A = \frac{B - (1 - \alpha)A}{1 - \alpha}$$

$$v = B' - B = \frac{-\beta A - (1 - \beta)B}{1 - \beta}$$

$$w = C' - C = C' = \frac{A - \gamma B}{1 - \gamma}$$

Áp dụng điều kiện (11), ta sẽ được

$$(1 + \alpha\beta\gamma)[A, B]^2 = 0$$

Nhưng $[A, B] \neq 0$, cho nên

$$\alpha\beta\gamma = -1 \qquad (12)$$

https://tieulun.hopto.org

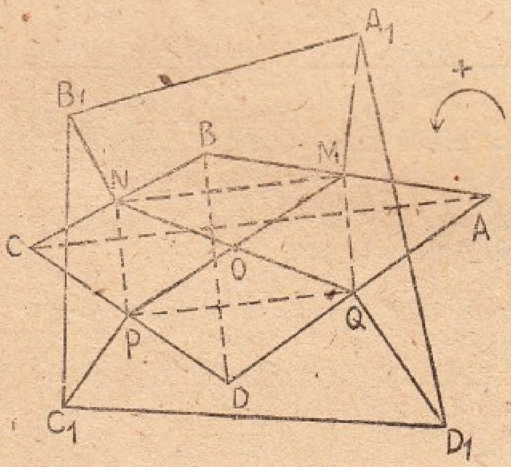
6 Bài toán 7/142 của báo THVTT số 5-1985.

Đề bài: — Trên các cạnh của tứ giác lồi có diện tích S, về phía ngoài, dựng các hình vuông. Tâm các hình vuông đó tạo thành một tứ giác có diện tích S_1. Chứng minh:

a) $S_1 \geqslant 2S$

b) $S_1 = 2S$ khi và chỉ khi các đường chéo của tứ giác ban đầu bằng nhau và vuông góc với nhau.

Giải. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Ta gọi M, N, P, Q lần lượt là các trung điểm của AB, BC, CD, DA. Hai đoạn MP và NQ có giao điểm O mà ta biết là trung điểm của mỗi đoạn. Ta gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là tâm các hình vuông dựng trên AB, BC, CD, DA về phía ngoài. Chọn O làm gốc các vectơ điểm.



a) Ta hãy tính S.

Ta có:

$$2S = [\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] + [\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}]$$
$$= [\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}]$$
$$= [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}]$$
$$= [2\overrightarrow{NM}, 2\overrightarrow{PN}]$$
$$= 4[M - N, N - P]$$
$$= 4[M - N, N + M]$$
$$2S = 8[M, N] \qquad (1)$$

Ở đây, ta nhớ rằng $P = -M$, $Q = -N$.

b) Bây giờ tính S_1

Ta hãy đặt:

$\overrightarrow{AB} = 2u$, $\overrightarrow{BC} = 2v$, $\overrightarrow{CD} = 2w$, $\overrightarrow{DA} = 2r$.

Ta gọi u', v', w', r' lần lượt là ảnh của các vectơ u, v, w, r trong phép quay một góc vuông theo chiều âm tức $-\pi/2$. Ta thấy rằng:

$$A_1 = M + u', B_1 = N + v', C_1 = -M + w', D_1 = -N + r' \qquad (2)$$

Ta có:

$$2S_1 = [A_1, B_1] + [B_1, C_1] + [C_1, D_1] + [D_1, A_1]$$

hay là

$$2S_1 = [M + u', N + v'] + [N + v', -M + w'] + [-M + w', -N + r'] + [-N + r', M + u']$$
$$2S_1 = 4[M, N] + 2[M, v' - r'] + 2[N, w' - u'] + [u', v'] + [v', w'] + [w', r'] + [r', u'] \qquad (3)$$

Do phép quay bảo toàn tích ngoài, cho nên:

$$[u', v'] = [u, v] = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

Cũng vậy ta có:

$$[v', w'] = [v, w] = \frac{1}{2} S_{BCD}$$
$$[w', r'] = [w, r] = \frac{1}{2} S_{CDA}$$
$$[r', u'] = [r, u] = \frac{1}{2} S_{ABD}$$

Cộng lại, được:

$$[u', v'] + [v', w'] + [w', r'] + [r', u'] = S = 4[M, N] \qquad (4)$$

Mặt khác nếu gọi A', B', C', D' là các vectơ ảnh của A, B, C, D trong phép quay góc $-\pi/2$, thì:

$$\left.\begin{array}{l} 2(v' - r') = C' - B' + D' - A' = -4M' \\ 2(w' - u') = D' - C' + A' - B' = -4N' \end{array}\right\} \quad (5)$$

trong đó M', N' là các vectơ M, N đã quay góc $-\pi/2$

tức $M' = \frac{1}{2}(A' + B') = -\frac{1}{2}(C' + D')$

$$N' = \frac{1}{2}(B' + C') = -\frac{1}{2}(D' + A')$$

Từ kết quả (5) ta có:

$$2[M, v' - r'] + 2[N, w' - u'] =$$
$$= -4[M, M'] - 4[N, N'] = 4(m^2 + n^2) \qquad (6)$$

Vì nếu đặt $|M| = m$ và $|N| = n$ thì:

$$-[M, M'] = |M|^2 = m^2, -[N, N'] = |N|^2 = n^2$$

Vậy hệ thức (3) cho ta:

$$2S_1 = 8[M, N] + 4(m^2 + n^2)$$

hoặc

$$S_1 = 4[M, N] + 2(m^2 + n^2)$$

hoặc

$$S_1 = 8[M, N] + 2(m^2 + n^2) - 4[M, N]$$
$$= 2S + 2(m^2 + n^2 - 2mn \sin\theta)$$

trong đó θ là góc hai vectơ M, N.

Cuối cùng ta có thể viết:

$$S_1 = 2S + 2[(m - n)^2 + 2mn(1 - \sin\theta)] \qquad (7)$$

Từ kết quả trên, ta suy ra ngay kết luận của bài toán.

https://tieulun.hopto.org

Nhận xét thêm. Ta hãy để ý hai đường chéo của tứ giác $A_1B_1C_1D_1$. Ta có (theo (2) và (5)):

$$p = \overrightarrow{A_1C_1} = C_1 - A_1 = -2M + w' - u' =$$
$$= -2M - 2N' = -2(M + N')$$
$$q = \overrightarrow{B_1D_1} = D_1 - B_1 = -2N + r' - v' =$$
$$= -2N + 2M' = 2(M' - N)$$

Cho quay $+\pi/2$, sẽ được

$$p' = -2(M' - N) = -q,\ q' = 2(-M - N') = p$$

Vậy ta có:

$$[p, p'] = [q, q'] = [-p, q]$$

tức là:

$$|p|^2 = |q|^2 = |p, q|$$

Kết luận là: hai đường chéo A_1C_1 và B_1D_1 bằng nhau và vuông góc với nhau.

7 Bài toán 1 thi quốc tế 1985.

Đề bài: Cho một đường tròn tâm ở trên cạnh AB của một tứ giác lồi $ABCD$ và tiếp xúc với 3 cạnh còn lại. Chứng minh rằng nếu tứ giác nội tiếp, ta có $AD + BC = AB$.

Giải. Ta gọi O là tâm của vòng tròn đã cho, nằm trên AB, và lấy nó làm gốc các vectơ bán kính cho các điểm. Ta đặt:

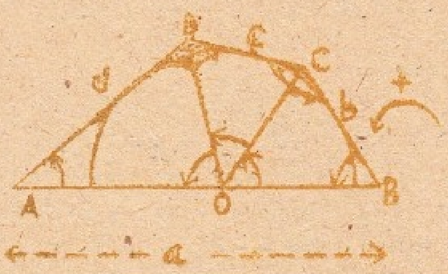
$$AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d.$$
$$\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA} \text{ tức } B = \lambda A \qquad (\lambda \neq 1)$$

Điều ta phải chứng minh là:

$$a = b + d \qquad (1)$$

Điểm O phải cách đều các cạnh BC, CD, DA bằng r, cho nên

$$\frac{[B, C]}{b} = \frac{[C, D]}{c} = \frac{[D, A]}{d} = 2r \qquad (2)$$



Mặt khác điều kiện

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = \pi$$

kéo theo

$$\begin{cases} \sin\widehat{A} = \sin\widehat{C} \\ \sin\widehat{B} = \sin\widehat{D} \end{cases}$$

hay là

$$\begin{cases} \dfrac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]}{a \cdot d} = \dfrac{[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}]}{b \cdot c} \\ \dfrac{[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]}{a \cdot b} = \dfrac{[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}]}{c \cdot d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{[B - A, D - A]}{a \cdot d} = \dfrac{[D - C, B - C]}{b \cdot c} \\ \dfrac{[C - B, A - B]}{a \cdot b} = \dfrac{[A - D, C - D]}{c \cdot d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{[B, D] + [D, A]}{a \cdot d} = \dfrac{[D, B] + [B, C] + [C, D]}{b \cdot c} \\ \dfrac{[C, A] + [B, C]}{a \cdot b} = \dfrac{[A, C] + [D, A] + [C, D]}{c \cdot d} \end{cases}$$

Căn cứ vào (2) và chú ý rằng $B = \lambda A$, $[A, B] = 0$, ta đi đến:

$$\begin{cases} \dfrac{1 - \lambda}{a} = \dfrac{b + c + \lambda d}{b \cdot c} \\ \dfrac{\lambda - 1}{a} = \dfrac{b + \lambda c + \lambda d}{c \cdot d} \end{cases}$$

hay là:

$$\frac{1 - \lambda}{a} = \frac{b + c + \lambda d}{b \cdot c} = \frac{-b - \lambda c - \lambda d}{c \cdot d} =$$
$$= \frac{(1 - \lambda)c}{bc + cd} = \frac{1 - \lambda}{b + d}$$

So sánh hai tỷ số đầu và cuối ($\lambda \neq 1$), ta có:

$$a = b + d$$

Đó là điều phải chứng minh.

Kỷ niệm 250 năm ngày sinh

THÂN THẾ VÀ SỰ NGHIỆP J. F. LAGRANGE (1736–1813)

NĂM nay thế giới kỷ niệm *250 năm ngày sinh* của *J. F. Lagrange*, một trong những nhà toán học lớn nhất của thế kỷ 18.

Lagrange sinh năm 1736 ở thành phố Turin nước Ý và có nguồn gốc Pháp. Năm 19 tuổi ông đã là giáo sư toán học ở trường pháo binh

https://tieulun.hopto.org

Turin. Năm 1766 vua Đức Friedrich II (một vị Mạnh Thường Quân khoa học) mời ông đến Berlin với những lời lẽ khiêm tốn sau: « Nhà toán học lớn nhất châu Âu nên sống cạnh ông vua vĩ đại nhất ». Ông ở Berlin cho đến khi vua Friedrich mất (1786) và sau đó đi Paris. Ở đây ông đã tham gia việc cải cách cân đo của chính quyền cách mạng, trở thành giáo sư ở trường cao đẳng sư phạm năm 1795 và ở trường bách khoa năm 1797. Ông mất năm 1813.

Lagrange là một trong những người đã phát triển phép tính vi tích phân. Ông đã cố gắng xây dựng phép tính này một cách chặt chẽ thông qua các công cụ đại số. Phương pháp của ông khác những người đi trước (Newton, Leibniz, Euler) ở chỗ ông xuất phát từ chuỗi Taylor. Mặc dù phương pháp này tỏ ra có nhiều hạn chế và ông đã không chú ý đúng mức đến tính hội tụ của chuỗi Taylor, các công trình của ông về giải tích và cơ học đã thúc đẩy việc nghiên cứu các hàm số một cách trừu tượng. Các ký hiệu đạo hàm $f'(x)$ $f''(x)$,... quen biết ngày nay cũng như cách biểu diễn chuỗi Taylor

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \ldots$$

là do ông đưa ra đầu tiên.

Trong cuốn « Cơ học giải tích », công trình có giá trị nhất của Lagrange, tất cả các thành tựu trước đây về giải tích đã được trình bày theo một quan điểm thống nhất và phát triển thêm. Thông qua việc ứng dụng rộng rãi phép tính vi tích phân cuốn sách đã hợp nhất được nhiều nguyên lý khác nhau của cơ học. Đây là một thắng lợi rực rỡ của giải tích thuần túy so với các phương pháp hỗn hợp trước đây. Trong phần mở đầu cuốn sách, ông đã tự hào viết rằng: « Trong công trình này người ta không thấy bất kỳ một hình vẽ nào, mà chỉ thấy các phép tính đại số ».

Lagrange còn có những đóng góp nhất định cho việc phát triển đại số và số học. Ông đã đưa ra những phương pháp tách các nghiệm thực của một phương trình đại số và cách xấp xỉ chúng. Các nghiên cứu của ông về các phương trình đại số có bậc lớn hơn 4 đã kích thích các nhà toán học Abel Galois chứng minh các phương trình này không có lời giải tổng quát và phát triển lý thuyết nhóm.

Kỳ Lam

GIẢI BÀI kỳ trước

Bài 1/149: *Gọi $T(n)$ là số ước số của số tự nhiên n. $[x]$: kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có*

$$T(1) + T(2) + \ldots + T(n) = [n/1] + [n/2] + \ldots + [n/n].$$

Lời giải: (dựa theo *Nguyễn Hữu Phương*, 10CT, Quốc học Huế). Gọi A là tập tất cả các cặp số (x, d) trong đó $x \vdots d$ và x, d là các số tự nhiên: $1 \leqslant x$, $d \leqslant n$. Với mỗi x cố định thì rõ ràng có $T(x)$ cặp số (x, d). Vậy khi cho x lần lượt nhận các giá trị từ 1 đến n ta có số phần tử của A chính là

$$T(1) + T(2) + \ldots + T(n).$$

Mặt khác A chính là tập tất cả các cặp số (kd, d) trong đó k, d là các số tự nhiên: $1 \leqslant kd \leqslant n$ hay $1 \leqslant k \leqslant n/d$ hay $1 \leqslant k \leqslant [n/d]$ (do k là số tự nhiên). Với mỗi d cố định thì rõ ràng ta có $[n/d]$ cặp số (kd, d). Vậy khi cho d lần lượt nhận các giá trị từ 1 đến n ta có số phần tử của A chính là

$$[n/1] + [n/2] + [n/3] + \ldots + [n/n].$$

Vậy $T(1) + T(2) + \ldots + T(n) = [n/1] + [n/2] + \ldots + [n/n]$.

Nhận xét: Các bạn *Lê Đình Thông* (10CT Quốc học Huế), *Đoàn Quốc Chiến* (A,10 ĐHTH Hà nội), *Trần Trọng Hùng* (11 CT ĐHSP Hà nội 1), *Phạm Quỳnh Thư* (11CT PTTH Lê Quí Đôn, Nha Trang), *Trương Văn Đại* (11T PTTH Nguyễn Trung Trực Rạch giá Kiên Giang), *Đoàn Anh Trung* (11, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ Tĩnh), *Nguyễn Quang Hưng* (12A PTTH Quang Trung Qui Nhơn) có lời giải tương tự nhưng chỉ bạn *Phương* có cách diễn đạt sáng rõ nhất.

— Đa số các bạn khác giải theo phương pháp qui nạp.

— Nếu xét cả các ước nguyên âm thì phải nhân vế phải với 2.

Đ.B.K

Bài 2/149. *Khi viết $\sqrt{2}$ dưới dạng số thập phân, trong 1986 chữ số thập phân đầu của nó liệu có thể có 1000 chữ số liền nhau có cùng một giá trị c nào đó hay không?*

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Lời giải: Giả sử trong biểu diễn thập phân của $\sqrt{2}$ có l số c đứng liền nhau:

$$\sqrt{2} = 1,a_1a_2\ldots a_k\underbrace{cc\ldots c}_{l}\ldots$$

Ta chứng minh $k \geqslant l - 2$.

Thật vậy, đặt $\alpha = 1,a_1a_2\ldots a_k + \frac{c}{9}\cdot 10^{-k}$.

Vì $1/9 = 0.11\ldots$ nên bắt đầu từ vị trí $k+1$ trở đi chữ số thập phân của α là c.

Suy ra, $\sqrt{2}$ và α chỉ có thể khác nhau từ vị trí thập phân thứ $k+l+1$ trở đi. Do đó $|\sqrt{2} - \alpha| \leqslant 10^{-(k+l)}$. Nhân hai vế với $\sqrt{2} + \alpha$ và chú ý rằng $\sqrt{2} + \alpha < 4$ ta được:

$$|2 - \alpha^2| < 4\cdot 10^{-(k+l)} \quad (1)$$

Nhận xét rằng $9\cdot 10^k\alpha$ là một số nguyên nên nếu nhân hai vế của (1) với $81\cdot 10^{2k}$ ta được:

$$|162\cdot 10^{2k} - (9\cdot 10^k\cdot\alpha)^2| < 364\cdot 10^{k-l} \quad (2)$$

Nếu $k - l \leqslant -3$ thì từ (2) suy ra $162\cdot 10^{2k} = (9\cdot 10^k\cdot\alpha)^2$ hay 162 là một số chính phương, điều này mâu thuẫn. Vậy phải có $k - l > -3$ hay $k \geqslant l - 2$. Áp dụng vào bài toán trong trường hợp $k + l \leqslant 1986$ thì $2l - 2 \leqslant k + l \leqslant 1986$ do vậy $l \leqslant 994 < 1000$. Bài toán được giải đáp.

Nhận xét: Bạn *Đoàn Quốc Chiến* (A₀10 ĐHTH Hà Nội) có lời giải đúng

N.V.M

Bài 3/149: *Chứng minh rằng nếu:*

$a\sin x + b\cos\sqrt{2}x \geqslant 0$ với mọi giá trị của x thì $a = b = 0$.

Lời giải: *cách 1* (của nhiều bạn): Đặt

$$f(x) = a\sin x + b\cos\sqrt{2}x.$$

Theo bài ra ta có: $f(0) = b \geqslant 0$ (1)

Mặt khác: $f(\pi) = b\cos\sqrt{2}\pi \geqslant 0$ (2)

Do $\pi < \sqrt{2}\cdot\pi < 3\pi/2$ nên $\cos\sqrt{2}\pi < 0$ và vì thế từ (2) suy ra $b \leqslant 0$ (3). Kết hợp (1) và (3) ta được $b = 0$. Khi đó $f(x) = a\sin x \geqslant 0$ với mọi giá trị của x. Từ đây dễ dàng suy ra $a = 0$

Tóm lại ta có $a = b = 0$ (đpcm).

Cách 2 (của *Nguyễn Thanh Hoàn*, 10 Chuyên lý, PTTH Lê Quí Đôn, Nha Trang)

Theo bài ra ta có:

$$a\sin x + b\cos\sqrt{2}x \geqslant 0.$$

và $a\sin(-x) + b\cos[\sqrt{2}(-x)] \geqslant 0$ với mọi giá trị của x.

Cộng vế với vế hai bất đẳng thức trên ta được

$2b\cos\sqrt{2}x \geqslant 0$ với mọi giá trị của x.

Khi x thay đổi trên trục số, $\cos\sqrt{2}x$ có dấu biến thiên nên bất đẳng thức trên chỉ xảy ra khi $b = 0$. Khi đó ta có $a\sin x \geqslant 0$ với mọi x và từ đây dễ dàng suy ra $a = 0$.

N.K.M

Bài 4/ 49: *Cho dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn các điều kiện $0 < x_n \leqslant x_{n+1}$; $n = 1, 2, \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$*

Chứng minh rằng tồn tại dãy $\{y_n\}$ sao cho

$$y_n > 0\ \forall n;\quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n < \infty;\quad \sum_{n=1}^{\infty} x_ny_n = \infty.$$

Lời giải (của *Đoàn Quốc Chiến* A 10 ĐHTH Hà Nội)

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ nên với mọi n thuộc N có k_n để $x_{k_n} > n^2$.

Suy ra: tồn tại dãy $k_1 < k_2 < \ldots$ mà $x_{k_n} > n^2$ với $n = 1, 2, \ldots$

Chọn dãy $y_1, y_2 \ldots$ như sau:

$$y_i = \begin{cases} 1/j^2 & \text{nếu } i = k_j \\ 1/2^i & \text{nếu } i \neq k_j, \forall j. \end{cases}$$

Khi đó rõ ràng dãy $\{y_i\}$ thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Thật vậy, với mọi i, $y_i > 0$ và

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i < \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n <$$

$$< 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1) + 1 < 4.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_ny_n > \sum x_{k_n}\, y_{k_n} = \infty.$$

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Công Đào* (Kon Tum), *Nguyễn Hữu Phương* (Quốc học Huế), *Lê Đình Thông* (Quốc học Huế) có lời giải đúng.

N.V.M

Bài 5/149: *Cho Parabol $y = x^2$, đường thẳng Δ vuông góc và cắt trục tung của hệ trục tọa độ tại điểm I. Qua I kẻ hai đường thẳng cắt Parabol tại các điểm A, B và C, D.*

Các đường AC và BD cắt Δ tại M và N. Chứng minh rằng $IM = IN$.

Lời giải: Vì I nằm trên trục tung; A, B, C, D nằm trên parabol $y = x^2$; và M, N nằm trên

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

đường thẳng Δ có các tính chất nêu trong đề bài, nên tọa độ của chúng có thể viết được: $I(0, i)$; $A(a, a^2)$; $B(b, b^2)$; $C(c, c^2)$; $D(d, d^2)$; $M(m, i)$; $N(n, i)$.

Khi đó phương trình đường thẳng AC là:

$$\frac{x-a}{c-a} = \frac{y-a^2}{c^2-a^2} \Leftrightarrow y = (a+c)x - ac.$$

Do M nằm trên AC nên: $i = (a+c)m - ac$

$$\Rightarrow m = \frac{i+ac}{a+c} \qquad (1)$$

Xét tương tự với điểm N và đường thẳng BD ta sẽ được:

$$n = (i+bd)/(b+d) \qquad (2)$$

Phương trình của các đường thẳng AB và CD tương ứng là:

$$y = (a+b)x - ab \qquad (3)$$

và $$y = (c+d)x - cd \qquad (4)$$

Do I nằm trên AB và CD nên từ (3) và (4) rút ra: $i = -ab = -cd$. Suy ra: $b = -i/a$ và

$$d = -i/c \qquad (5)$$

Thay (5) vào (2) ta có:

$$n = -\frac{i + i^2/ac}{i/a + i/c} = -\frac{i+ac}{a+c} \qquad (6)$$

Từ (1) và (6) suy ra: $m + n = 0$. Điều này chứng tỏ $IM = IN$, vì $m = \overline{IM}$ và $n = \overline{IN}$.

Nhận xét: Lời giải của các bạn gửi đến đều có ý tưởng như trong lời giải trên, nhưng đa số các bạn mắc chung một nhược điểm là vấp vào những tính toán cồng kềnh, thậm chí có bạn chọn những cách tính toán quá phức tạp. Các bạn có lời giải tốt hơn cả: *Phan Long An, Châu Minh Trí* (PTTH Lê Quí Đôn, Nha Trang), *Bùi Thanh An* (PTTH Phan Bội Châu, Nghệ Tĩnh) và *Đỗ Ngọc Minh Châu* (PTTH Pleiku I, Gialai Kontum)

N.K.M

Bài 6/149: *Cho* $0 \leqslant x_i \leqslant 2$; $i = \overline{1, n}$. *Chứng minh rằng*: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n - x_nx_1 \leqslant n$.

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Lời giải:

Do $0 \leqslant x_i \leqslant 2$ ta có $(2-x_i)(x_{i+1}-2) \leqslant 0$ và $-3x_ix_{i+1} \leqslant 0$. Vậy: $(2-x_i)(x_{i+1}-2) - 3x_ix_{i+1} \leqslant 0$ (với $x_{n+1} = x_1$) hay:

$$2x_i + 2x_{i+1} - 4x_ix_{i+1} \leqslant 4, \; i = \overline{1, n}$$

Cộng vế với vế n bất đẳng thức trên ta có:

$$4\sum_{i=1}^{n} x_i - 4\sum_{i=1}^{n} x_ix_{i+1} \leqslant 4n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 \ldots - x_nx_1 \leqslant n.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2n$ bất đẳng thức trên xảy ra dấu bằng, tức là:

$$\begin{cases} (2-x_i)(x_{i+1}-2) = 0 \\ x_ix_{i+1} = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = 0 \\ x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = 2 \\ n \text{ chẵn.} \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} x_1 = x_3 = \ldots = 2 \\ x_2 = x_4 = \ldots = 0 \\ n \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Nhận xét: Các bạn *Phan Văn Hòa* (11CT ĐHSP HN1); *Đoàn Quốc Chiến* ($A_0$10 ĐHTH Hà Nội); *Lê Đình Thông* (10CT, Quốc học Huế), *Nguyễn Việt Trung, Lê Hữu Hùng* (CT Lam Sơn, Thanh Hóa), *Nguyễn Anh Quân* (8A Chu Văn An, Hà Nội) và *Vũ Hữu Viên* (Toán I ĐHSP Hồ Chí Minh) có lời giải tốt.

T.V.T

Bài 7/149: *Giải phương trình*:

$$\sqrt[4]{4\sin^2x - 4\sin x + 2} + \sqrt{8\sin^2x - 8\sin x + 11} = 1 - 12\sin^2x + 12\sin x.$$

Lời giải: Phương trình được viết lại là:

$$\sqrt[4]{4(\sin x - 1/2)^2 + 1} + \sqrt{8(\sin x - 1/2)^2 + 9} = 4 - 12(\sin x - 1/2)^2.$$

Vậy vế trái luôn không nhỏ hơn 4 còn vế phải luôn không lớn hơn 4. Từ đó nghiệm của phương trình là (trường hợp xảy ra đẳng thức)

$$\sin x = 1/2 \Leftrightarrow x_1 = \pi/6 + 2k\pi, \; x_2 = 5\pi/6 + 2k\pi, \quad k \text{ nguyên.}$$

Nhận xét: Các bạn *Phan Văn Hòa, Trần Trọng Hùng* (CT ĐHSP, HN1), *Đoàn Quốc Chiến* ($A_0$10 ĐHTH Hà Nội), *Phan Phương Đạt* (PTTH. Hà Nội − Amsterdam), *Lê Đình Thông* (10CT, Quốc học Huế) và *Vũ Hữu Viên* (Toán I, ĐHSP, Hồ Chí Minh) có lời giải tốt.

T.V.T

Bài 8/149: *Cho chóp tam giác có các cạnh bên đôi một vuông góc với nhau. Gọi α, β, γ là các góc giữa đường cao xuất phát từ đỉnh và các cạnh bên của hình chóp. Chứng minh rằng*

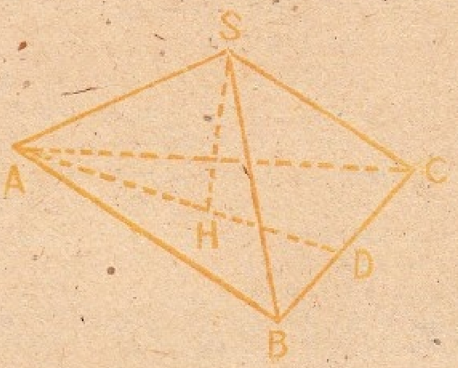
$$\frac{1}{2} < \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta + \sin^2\gamma} + \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha + \sin^2\gamma} + \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta} < 1$$

Giải: (Mọi bài gửi đến đều giải được. Các bạn *Nguyễn Hữu Phương*, 10CT Quốc học Huế;

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Đoàn Anh Trung, 11 PTTH Phan Bội Châu Nghệ Tĩnh; *Võ Nguyễn Đình Nguyên*, 11CT Phan Châu Trinh Đà Nẵng: và *Trương Kim Minh Châu*. 12/1 PTTH Phan Châu Trinh Đà Nẵng đã nhận ra bất đẳng thức mạnh hơn. Sau đây là lời giải của bạn *Trung*)



Đặt tên như hình vẽ $\widehat{ASH} = \alpha$; $\widehat{BSH} = \beta$; $\widehat{CSH} = \gamma$. AH cắt BC tại D.

Ta có tam giác ASD vuông tại S:

$$1/SH^2 = 1/SA^2 + 1/SD^2.$$

Do SA và SH cùng vuông góc với BC nên $SD \perp BC$. Ta có $1/SD^2 = 1/SB^2 + 1/SC^2$.

Vậy $1/SH^2 = 1/SA^2 + 1/SB^2 + 1/SC^2$.

$\cos\alpha = SH/SA$, $\cos\beta = SH/SB$, $\cos\gamma = SH/SC$

Vậy $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

và $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

Đặt $\sin^2\beta + \sin^2\gamma = m$, $\sin^2\gamma + \sin^2\alpha = n$,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = p$$

Như vậy $m + n + p = 4$.

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = (2 - \sin^2\alpha) - 1 = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 1 = m - 1.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh là

$$1/2 < (m-1)/m + (n-1)/n + (p-1)/p < 1$$

hay $1/2 < 3 - (1/m + 1/n + 1/p) < 1$

Do $m, n, p < 2$ nên $1/m + 1/n + 1/p > 3/2$.

Vậy $3 - (1/m + 1/n + 1/p) > 3 - 3/2 = 1/2$.

Ta có $(m + n + p)(1/m + 1/n + 1/p) =$

$$= 3 + (m/n + n/m) + (n/p + p/n) + (p/m + m/p) \geqslant 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

hay $4(1/m + 1/n + 1/p) \geqslant 9$

$$\Rightarrow 1/m + 1/n + 1/p \leqslant 9/4$$

Vậy $3 - (1/m + 1/n + 1/p) \leqslant 3 - 9/4 = 3/4$.

Chỉ có dấu bằng khi $m = n = p$ tức là

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$$

hay $\alpha = \beta = \gamma$ hay $SA = SB = SC$. Vậy ta có

$$\frac{1}{2} < \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta + \sin^2\gamma} + \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma + \sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta} \leqslant 3/4$$

N. Q. T.

Bài 9/149: *Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau hai điểm C và D lần lượt chạy trên Ax và By sao cho*

$$a/AC + b/BD = k$$

trong đó a, b là hai độ dài cho trước, k là một số dương cho trước

a) Chứng minh rằng đoạn CD luôn luôn cắt một đoạn thẳng cố định.

b) Tìm vị trí của C và D sao cho thể tích của tứ diện $ABCD$ là nhỏ nhất.

Lời giải: (*Lê Đình Thống* 10CT Quốc học Huế)

a) Kẻ $Ay' // By$, $DD' // BA$ với D' trên Ay'. Khi đó $AD' = BD$ và

$$a/Ac + b/AD' = k.$$

Gọi I là điểm chia trong $D'C$ theo tỷ lệ $a : b$

Kẻ hình bình hành $AMIN$ (M trên Ay', N trên Ax)

Ta có:

$$AM/AD' = NI/AD' = IC/CD' = IC/(ID' + IC) = b/(a + b).$$

Tương tự

$$AN/AC = a/b + a.$$

Vậy

$$AM/AD' + AN/AC = 1.$$

Do đó $AM = b/k$, $AN = a/b$.

Vậy M, N và do đó I là những điểm cố định. Gọi IJ là đoạn thẳng thuộc đường thẳng qua I, song song với AB và bị chắn bởi hai mặt phẳng song song, một mặt chứa Ax, một mặt chứa By. Khi đó đoạn IJ cố định và nằm trong mặt phẳng $(DD'C)$ cắt DC.

b) Hai tam giác ABD và $AD'D$ bằng nhau. Vậy thể tích chóp $C.ABD$ bằng thể tích chóp

https://tieulun.hopto.org

$C.AD'D$. Do đường cao hạ từ D của tứ diện $CAD'D$ là không đổi nên thể tích tứ diện đó nhỏ nhất khi diện tích $AD'C$ nhỏ nhất. Vậy thể tích $ABCD$ nhỏ nhất khi diện tích $AD'C$ nhỏ nhất.

Ta có

$$\frac{S_{AMN}}{S_{AD'C}} = \frac{AM}{AD'} \cdot \frac{AN}{AC} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{AM/AD' + AN/AC}{2} \right)^2 = 1/4$$

và có dấu bằng khi $AM/AD' = AN/AC$ hay $AN/AC = 1/2$, $AC = 2AN = 2a/k$ (do đó $BD = AD' = 2b/k$).

N.Q.T.

Bài 10/149 : *Cho tam giác ABC có $\widehat{BCA} = 90°$. Hãy tìm trong không gian tất cả các điểm P sao cho $PA^2 + PB^2 \leqslant PC^2$.*

Lời giải :

Cách 1 : (Của bạn *Phạm Quỳnh Thư*, lớp 11CT Lê Quí Đôn Nha Trang)

Gọi điểm M là trung điểm AB. Kéo dài CM về phía M một đoạn $MD = MC$. Ta có tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Với P là điểm bất kỳ trong không gian ta có :

$$PC^2 + PD^2 = 2PM^2 + CD^2/2 =$$
$$= 2PM^2 + AB^2/2 = PB^2 + PA^2.$$
$$0 \leqslant PC^2 - PB^2 - PA^2 = -PD^2 \Leftrightarrow PD = 0$$

Vậy với điểm P trong không gian thỏa mãn $PC^2 \geqslant PA^2 + PB^2$ thì $P = D$.

Cách 2 : Của bạn *Trịnh Đào Hương Đình* PTTH. Pleiku 1 Gialai Kontum).

Dựng hệ trục tọa độ Đề – các vuông góc $Oxyz$ trong không gian sao cho $O \equiv C$, $Ox = (CA)$, $Oy = (CB)$. Đặt $A(a, o, o)$ $B(o, b, o)$ và gọi $P(x, y, z)$ là điểm tùy ý trong không gian ta có :

$$PA^2 + PB^2 \leqslant PC^2 \Leftrightarrow [(x-a)^2 + y^2 + z^2] +$$
$$+ [x^2 + (y-b)^2 + z^2] \leqslant [x^2 + y^2 + z^2] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = 0 \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ rằng tập hợp cần tìm chỉ chứa một phần tử duy nhất là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $ACBP_0$, ở đó P_0 có tọa độ là $P_0(a, b, 0)$.

Nhận xét : Trừ có một bạn có lời giải sai, còn các bạn khác đều giải đúng và hay hơn đáp án ra.

V.Đ.H

Bài 11/147 : *Chứng minh rằng tích của 8 số tự nhiên liên tiếp không bao giờ là số chính phương.*

Lời giải :

Ta xét tích của 8 số tự nhiên liên tiếp :

$$T_n = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)$$
$$= [n(n+7)][(n+1)(n+6)][(n+8)(n+5)] \times$$
$$\times [(n+3)(n+4)]$$
$$= (n^2+7n)(n^2+7n+6)(n^2+7n+10)(n^2+7n+12).$$

Dễ thấy là T_n là số chẵn, ngoài ra ta có :

$$(A^2 + 2A - 22)^2 < T_n < (A^2 + 2A - 20)^2 \quad (*)$$

với $A = n^2 + 7n + 6$ (A hiển nhiên là số chẵn), vì (*) tương đương với hệ :

$$\begin{cases} -4A^2 + 56A + 484 < 0 & (1) \\ 0 < 64A + 400 & (2) \end{cases}$$

Bất đẳng thức (2) là hiển nhiên do $A > 0$, còn bất đẳng thức (1) thì tương đương với

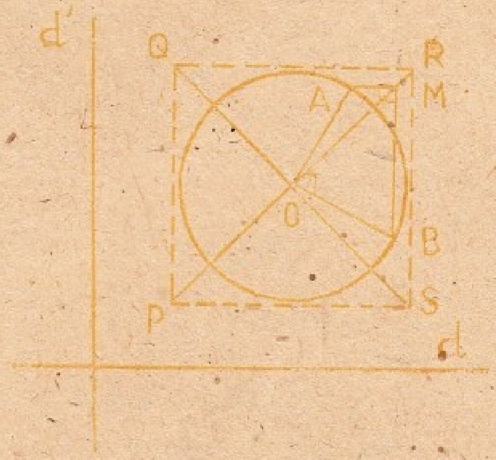
$$-A^2 + 14A + 121 < 0$$

được thỏa mãn với mọi A do tam thức bậc hai này có $\Delta' = 7^2 - 121 < 0$. Vậy T_n không thể là chính phương.

Nhận xét : Các bạn gửi bài đều có ý giải tốt. Tuy nhiên nhiều bạn không ghi rõ bước giải cụ thể. Có bạn quên không cho biết tên trong bài giải.

V.Đ.H

Bài 12/149 : *Cho 2 đường thẳng $d \perp d'$ và đường tròn (O). OA và OB là hai bán kính thay đổi vuông góc với nhau. Qua A kẻ đường thẳng // d, qua B kẻ đường thẳng // d' cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích M.*



Lời giải : *Thuận* :

Theo giả thiết đầu bài ta luôn có tứ giác $OAMB$ (hoặc tứ giác $OABM$) nội tiếp ⇒

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

$\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{ABO} = 45^\circ$ (vì $\triangle AOB$ vuông, cân ở O) (hoặc $\widehat{AMO} = 135^\circ$)

$\Rightarrow OM$ lập với d góc 45°

$\Rightarrow M$ nằm trên 2 đường thẳng đi qua O và tạo với d góc 45°.

Giới hạn: M chỉ nằm trong hình vuông $PQRS$ ngoại tiếp (O) và có các cạnh $//d$ và $//d'$.

Vậy M nằm trên 2 đường chéo của hình vuông $PQRS$.

Đảo: Lấy điểm M bất kỳ trên đường chéo PR (hoặc trên QS), qua M kẻ đường thẳng $//d$ cắt (O) ở A, kẻ bán kính $OB \perp OA$. Ta phải chứng minh $MB//d'$.

Thật vậy, tứ giác $OAMB$ nội tiếp vì $\widehat{AMO} = \widehat{ABO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AOB} = 1v$ mà $AM//d$, $d \perp d' \Rightarrow MB//d'$.

Kết luận: Quĩ tích của M là 2 đường chéo hình vuông ngoại tiếp đường tròn (O) và có các cạnh $//d$ và $//d'$.

Nhận xét:

— Đa số các bạn gửi bài đến đều giải đúng trừ vài trường hợp chỉ kết luận quĩ tích là 1 đường chéo thôi.

— Kỹ năng trình bày 1 bài toán quĩ tích của phần lớn các bạn còn yếu, thiếu chính xác.

Đ.B.K

Bài 1/152. Cho 2 dãy số thực vô hạn $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ thỏa mãn các điều kiện:

1) $u_1 = 1985$; $v_1 = 1987$

2) $u_{n+1} = 1/2 . (u_n + v_n)$;

$$v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; \; n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng:

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{2^{2^n}}{2^n} \; \forall n.$$

Lê Đình Thịnh

Bài 2/152. Cho các số thực $x_1, \ldots, x_n$:

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1.$$

Ký hiệu $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$. Giả sử rằng các số này thỏa mãn:

$$\sum_{j=0\,(j \neq i)}^{n+1} 1/(x_i - x_j) = 0, \text{ trong đó } i = 1, 2, \ldots, n$$

Chứng minh rằng:

$x_{n+1-i} = 1 - x_i$ đối với $i = 1, 2, \ldots, n$.

Đề dự tuyển thi toán quốc tế lần thứ 27

Bài 3/152. Cho dãy số x_n, y_n được xác định theo quy luật:

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \sin^2\alpha$$
$$y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1} \cos^2\alpha$$

với $x_0 = 0$, $y_0 = \cos\alpha$. Chứng minh rằng

$$x_n y_n = \frac{1}{4} \times \sum_{i=1}^{n} C_{2n}^{2i-1} \sin^{2i}(2\alpha)$$

$$(C_n^p = n!/(n-p)!\,p!)$$

Tạ Văn Tự

Bài 4/152. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1) $f(0) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

3) $f(x)\,(f2x^2) = f(2x^3 + x)$ với mọi x thực

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi x thực

Nguyễn Minh Đức

Bài 5/152. Giải phương trình:

$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 2x + \mathrm{cotg}^2 3x = 1$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 6/152. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 86. Trên cạnh AB lấy một điểm E cách A một đoạn x. Từ E vẽ ra phía ngoài tam giác một tia song song với BC. Tia này cắt cung chắn bởi AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm D.

Hãy tính độ dài y của đoạn ED. Biết rằng x và y đều là các số nguyên dương.

Đề dự tuyển thi toán quốc tế lần thứ 2.

Bài 7/152. Cho tam giác có độ dài các cạnh là a, b, c. Độ dài bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ấy là r, R.

Gọi S, p là diện tích, nửa chu vi của tam giác. chứng minh rằng:

https://tieulun.hopto.org

$$4S^2 \leqslant a^2(p-b)(p-c) + b^2(p-a)(p-c) + c^2(p-a)(p-b) \leqslant p^2R^2$$

Chu Hoằng

Bài 8/152 Cho tứ diện $ABCD$, có các cạnh $AB = a_1$; $CD = b_1$; $AC = a_2$; $BD = b_2$; $AD = a_3$ và $BC = b_3$. Gọi các khoảng cách từ tâm I hình cầu nội tiếp tứ diện đến các cạnh a_i và b_i tương ứng là h_i và d_i $(i = 1, 2, 3)$. V là thể tích tứ diện này. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a_1b_1(h_1 + d_1) + a_2b_2(h_2 + d_2) + a_3b_3(h_3 + d_3) \geqslant 18V$$

Đào Trường Giang

Bài 9/152. Chứng minh rằng tổng các góc phẳng tại đỉnh bất kỳ của tứ diện là bằng 180° khi và chỉ khi các mặt của tứ diện là những tam giác bằng nhau.

Đề dự tuyển thi toán quốc tế lần thứ 27

Bài 10/152. Giả sử có n ngôi nhà và một nhà máy điện. Hỏi có bao nhiêu cách mắc điện từ nhà máy điện tới các ngôi nhà này sao cho nhà nào cũng có điện, nhưng nếu bỏ đi một đoạn dây điện tùy ý, sẽ có nhà bị ngắt điện.

Vũ Đình Hòa

Bài 11/152 Tìm các số a, b, c trong các số từ 1 đến 9 thỏa mãn đẳng thức

$$\overline{aab} \cdot 2a = \overline{cca} \cdot (a-1)$$

Phạm Quang Giám

Bài 12/152 Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 là các tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C tương ứng với các cạnh BC, CA, và AB. Chứng minh rằng nếu $AA_1 = BB_1 = CC_1$ thì tam giác ABC đều.

Trần Xuân Đáng

CÁC ĐỀ TOÁN ÔN TẬP

Lớp cuối cấp phổ thông cơ sở

1. Phân tích ra thừa số:
   a) $(1 + x^2) - 4x(1 - x^2)$
   b) $x^5 + x + 1$

2. Cho $3a^2 + 3b^2 = 10ab$; $b > a > 0$. Hãy tính giá trị biểu thức

$$p = (a - b)/(a + b)$$

Cho $x = 1/(a-1)$ tính giá trị biểu thức:

$$P = \left(1 + \frac{1}{a+x}\right) : \left(1 - \frac{1}{a+x}\right) \cdot \left[1 - \frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right].$$

3. Giải phương trình:
   a) $|x - 5| + |2x - 3| = 2$
   b) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

4. Cho tam giác vuông ABC, cạnh huyền $AB = 10$; bán kính đường tròn nội tiếp là 4. Tính diện tích của tam giác.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. A_1, B_1, C_1 là giao điểm của các đường cao với đường tròn tương ứng vẽ từ đỉnh A, B và C. Cho tỷ số độ dài các cung $\overline{C_1BA_1} : \overline{A_1CB_1} : \overline{B_1AC_1} = p : q : r$. Hãy tính các góc của tam giác ABC.

Lớp 10

1. Đơn giản các biểu thức sau:
   a) $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$
   b) $\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{12\sqrt{5} + 29}$.

2. Giải các phương trình sau:
   a) $4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(1 + x)$
   b) $x\sqrt{x^2 + 15} - \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^2 + 15} = 2$.

3. Giải các hệ phương trình sau:
   a) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. qua trọng tâm G vẽ các dây cung AA_1, BB_1, CC_1. Chứng minh rằng:

$$GA/GA_1 + GB/GB_1 + GC/GC_1 = 3$$

5. Cho 4 điểm A, B, C, D trong mặt phẳng. Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn điều kiện: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = K^2$ (K là độ dài cho trước).

https://tieulun.hopto.org

Lớp 11

1. Xác định các góc của Δ ABC khi biết $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{A}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

2. Giải phương trình:
$$2^x + 3^x + 5^{x-1} = 2^{1-x} + 3^{1-x} + 5^{-x}$$

3. Giải bất phương trình:
$$|x+1|^{\log_a(x+1)^2} \geqslant a(x+1)^3.$$

4. Tính giá trị của biểu thức:
$$P = 3\sin 10^\circ \sin^3 30^\circ - \sin^3 10^\circ \sin 30^\circ.$$

5. Chứng minh rằng: $\log_7 8 > \log_9 10$.

Lớp 12

1. Xét tam thức bậc 2: $f(x) = x^2 + ax + b$

Chứng minh rằng:
$$\max\{|f(0)|, |f(1)|, |f(-1)|\} \geqslant \frac{1}{2}$$

2. Giải phương trình: $2x + 1/4 . (1 - x^2)^2 = 1$

3. Giải phương trình:
$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\cos 2x + \sin 3x}$$

4. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:
$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{cotg}\frac{A}{2}\,\mathrm{cotg}\frac{B}{2}\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2} \geqslant \frac{28}{3\sqrt{3}}$$

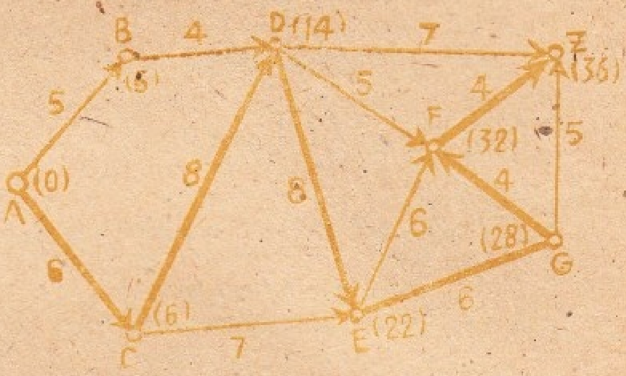
5. Xét các tứ diện có tổng độ dài các cạnh = 1. Tìm tứ diện có thể tích lớn nhất.

ĐƯỜNG ĐI NÀO DÀI NHẤT?

TRẦN VŨ THIỆU

TRONG các số báo trước (xem THTT số 13 tháng 10 năm 1965 và số 141 tháng 1-1985), các bạn đã làm quen với bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai điểm cho trước trên một mạng lưới đường giao thông đã cho. Tuy nhiên, trong thực tế không phải lúc nào cũng chỉ yêu cầu tìm đường đi ngắn nhất (nhanh nhất), mà có khi lại cần tìm đường đi dài nhất, xa nhất đấy các bạn ạ! Chẳng hạn, khi cần phải hoàn thành một dự án nào đó (ví dụ, xây dựng một ngôi nhà cao tầng), bao gồm nhiều công việc được làm kế tiếp nhau theo một trình tự nhất định (công việc này chỉ có thể bắt đầu khi một số công việc khác đã hoàn thành) thì thời hạn sớm nhất có thể để hoàn thành toàn bộ dự án chính là độ dài của đường đi dài nhất gồm dãy các công việc kế tiếp nhau, bắt đầu từ lúc khởi công đến khi hoàn thành dự án. Bài toán cho những tình huống tương tự được đặt ra như sau: Cho trước một mạng lưới đường đi (mạng có hướng), trên mỗi cạnh của mạng chỉ rõ chiều đi (chiều mũi tên) và thời gian cần thiết để đi trên đoạn đường đó (xem hình vẽ cột bên). Chẳng hạn, thời gian đi từ A tới B tốn 5 giờ, từ A tới C tốn 6 giờ v.v... Đỉnh A gọi là nguồn và đỉnh Z gọi là đích. Hãy tìm một đường đi dài nhất từ nguồn A tới đích Z.

Có bạn nghĩ rằng vấn đề này cũng chẳng có gì khó, chỉ việc tìm ra tất cả các đường đi có



thể từ A tới Z, rồi so sánh thời gian đi trên các đường ấy với nhau là có ngay đường đi dài nhất. Tất nhiên, với mạng đơn giản thì cách làm này có thể thực hiện được (Bạn hãy thử làm với mạng vẽ ở trên xem sao: có cả thảy 13 cách đi khác nhau từ A tới Z). Nhưng với những mạng phức tạp thì cách đó không còn thích hợp nữa, vì nó mất rất nhiều thời gian và không có gì bảo đảm tránh khỏi nhầm lẫn, sai sót.

Phương pháp sau đây sẽ giúp giải quyết vấn đề đặt ra một cách khá đơn giản và có thể áp dụng cho cả những mạng lưới phức tạp có hàng nghìn đường đi khác nhau mà vẫn cho kết quả khá nhanh chóng. Ta hãy gán cho mỗi đỉnh (ngã ba, ngã tư, v.v..) của mạng một số gọi

https://tieulun.hopto.org

là «thế vị» như sau: ta có thế vị của A (đỉnh nguồn) bằng 0; sau đó gán cho mỗi đỉnh kề A (tức là đỉnh có mũi tên đi từ A tới cụ thể ở đây là B và C) một thế vị bằng thời gian đi trên đoạn đường từ A tới đỉnh ấy: thế vị của B bằng 5, của C bằng 6, rồi cho mỗi đỉnh kề B (mà chưa có thế vị) một thế vị bằng thế vị của B cộng với thời gian đi trên đoạn đường từ B tới đỉnh ấy: thế vị của D là $5+4=9$, v.v.. và cứ theo cách đó tiếp tục. Nói chung, một đỉnh chưa có thế vị mà kề một đỉnh đã có thế vị rồi thì được gán cho một thế vị bằng thế vị của đỉnh này cộng thêm thời gian đi trên đoạn đường từ đỉnh này tới đỉnh phải gán thế vị. Làm như vậy cho tới khi mọi đỉnh đều có thế vị. Sau đó điều chỉnh các thế vị theo qui tắc: nếu hiệu số thế vị của đỉnh ở cuối mũi tên và thế vị của đỉnh ở gốc mũi tên (ví dụ D và C) nhỏ hơn thời gian đi trên đoạn đường nối hai đỉnh ấy ($9-6<8$) thì ta tăng thế vị của đỉnh ở cuối mũi tên (đỉnh D) để cho hiệu số nói trên vừa đúng bằng thời gian này (ở đây ta tăng 9 thành 14 để có $14-6=8$). Chừng nào còn điều chỉnh được thì cứ điều chỉnh, cho tới khi nào không điều chỉnh được nữa thì thế vị của mỗi đỉnh (số ghi trong ngoặc cạnh mỗi đỉnh) chính là thời gian dài nhất để đi từ A tới đỉnh ấy: nói riêng thế vị của đỉnh Z sẽ là thời gian dài nhất để đi từ A tới Z. Lúc đó trên mạng sẽ có một đường đi từ A tới Z mà thời gian đi trên mỗi đoạn của nó đều bằng hiệu số các thế vị ở hai đầu (đường nét đậm trên hình vẽ): đó chính là đường đi dài nhất từ A tới Z với tổng độ dài bằng 36 giờ).

Có lẽ bạn sẽ thắc mắc: tại sao có thể khẳng định đó là đường đi dài nhất: Câu giải đáp rất đơn giản. Để tiện việc lý luận ta hãy gọi các đỉnh của các mạng lưới là $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (với $a_1 = A$, $a_n = Z$) và thế vị (sau khi đã điều chỉnh xong) của đỉnh a_i là v_i; nếu có đường (mũi tên) đi từ đỉnh a_i tới đỉnh a_j thì ta gọi t_{ij} là thời gian đi trên đoạn đường ấy. Giả sử đường nét đậm (từ a_1 tới a_n) qua các nút $a_1 = a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_p} = a_n$, đường này có tính chất như sau:

$$\begin{cases} v_{i_2} - v_{i_1} = t_{i_1 \cdot i_2} \\ v_{i_3} - v_{i_2} = t_{i_2 \cdot i_3} \\ v_{i_p} - v_{i_{p-1}} = t_{i_{p-1} \cdot i_p} \end{cases}$$

Từ đó, ta tính được thời gian đi trên đường nét đậm này là:

$$t_{i_1 \cdot i_2} + t_{i_2 \cdot i_3} + \ldots + t_{i_{p-1} \cdot i_p} = v_{i_p} - v_{i_1} = v_n - v_1 = v_n - 0 = v_n$$

(bằng thế vị của đỉnh $a_n = Z$).

Mặt khác, nếu có một đường đi bất kỳ từ a tới a_n qua các đỉnh $a_1 = a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q} = a_n$ thì theo cách xác định các thế vị v_j ta có:

$$\begin{cases} v_{j_2} - v_{j_1} \geqslant t_{j_1 \cdot j_2} \\ v_{j_3} - v_{j_2} \geqslant t_{j_2 \cdot j_3} \\ \ldots \\ v_{j_q} - v_{j_{q-1}} \geqslant t_{j_{q-1} \cdot j_q} \end{cases}$$

Từ đó, ta tính được thời gian đi trên đường đi bất kỳ này là:

$$t_{j_1 \cdot j_2} + t_{j_2 \cdot j_3} + \ldots + t_{j_{q-1} \cdot j_q} \leqslant v_{j_q} - v_{j_1} = v_n - v_1 = v_n - 0 = v_n$$

(bằng thế vị của đỉnh $a_n = Z$).

So sánh (1) và (2) có thể kết luận rằng đường nét đậm (có tính chất đã nêu) chính là đường đi dài nhất từ A tới Z.

LỜI GIẢI CÁC BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 27

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài 1 (*HLB Đức*): *d là một số nguyên dương khác 2, 5, 13. Chứng minh rằng trong tập hợp $\{2, 5, 13, d\}$ có thể tìm được hai số phân biệt a và b sao cho $ab-1$ không phải là bình phương của một số nguyên.*

Cách giải 1 (của *Nguyễn Hùng Sơn*). Giả sử $\forall d \in N$ khác 2, 5, 13 ta đều có: $13d-1 = a^2$; $5d-1 = b^2$; $2d-1 = c^2$ ($a, b, c \in N$) khi đó c lẻ, $c = 2c_1+1 \Rightarrow c^2 = 4c_1(c_1+1)+1$ và $a^2 - b^2 = 8d = 4(c^2+1) = 8[2c_1(c_1+1)+1]$. Vậy $a^2 - b^2 \vdots 8$, $a^2 - b^2$ không chia hết cho 16 và a, b cùng tính chẵn lẻ.

1) Xét a, b cùng chẵn; $a = 2a_1$, $b = 2b_1$ thì $a^2 - b^2 = 4(a_1^2 - b_1^2)$. Nếu a_1, b_1 không cùng chẵn lẻ thì $a^2 - b^2 = 8$ không chia hết cho nếu a_1, b_1 cùng chẵn, lẻ thì $a_1^2 - b_1^2 \vdots 4$ nên $a^2 - b^2 \vdots 16$. Vậy cả hai trường hợp đều mâu thuẫn.

2) Xét a, b cùng lẻ. Nếu $d = 2d_1$ thì $c^2 = 4c_1(c_1+1)+1 = 4d_1 - 1$ hay $4[c_1(c_1+1) - d_1] = -2$ mâu thuẫn vì vế trái chia hết cho 4. Nếu $d = 2d_1+1$ thì $5d-1 = 10d_1+4 = 2(5d_1+2) \vdots b^2$ mâu thuẫn vì vế trái chẵn vế phải lẻ.

Cách giải 2 (*Nguyễn Tuấn Trung*): Giả sử $2d-1 = m^2$; $5d-1 = n^2$, $13d-1 = p^2$ thì $4m^2 = 8d-4$ và $p^2 - 4m^2 = (13d-1) - (8d-4) =$

https://tieulun.hoptp.org

$= (5d-1) + 4 = n^2 + 4$ hay $p^2 - n^2 = 4(m^2+1)$ $\Leftrightarrow (p-n)(p+n) = 4(m^2+1)$ (*). Do $2d-1 = m^2$ nên m lẻ, $m = 2m_1 + 1$ nên vế phải của (*) chia hết cho 8 và không chia hết cho 16. Vế trái của (*) là tích 2 số chẵn (vì $(p+n) - (p-n) = 2n$ và vế phải chẵn) mà vế phải chia hết cho 8 nên trong hai thừa số của vế trái phải có 1 thừa số chia hết cho 4, vậy thừa số còn lại chỉ chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4. vậy $(p+n) - (p-n) = 2n \vdots 4$ hay $n \vdots 2$ $\Rightarrow n^2 + 1 = 5d \vdots 2$. Vậy $d \vdots 2$ suy ra $2d = m^2 + 1 \equiv 0 \pmod 4$ mâu thuẫn vì m^2+1 không bao giờ chia hết cho 4.

Bài 2 (*Trung Quốc*): *Trong mặt phẳng, cho $\Delta A_1A_2A_3$ và điểm P_0. Đặt $A_s = A_{s-3}$ với mọi số nguyên $s \geq 4$. Người ta dựng dãy điểm $P_0, P_1, P_2, \ldots$ sao cho P_{k+1} là ảnh của điểm P_k qua phép quay quanh điểm A_{k+1} theo chiều kim đồng hồ với góc quay $120°$, $k = 0, 1, 2, \ldots$*

Chứng minh rằng nếu $P_{1986} = P_0$ thì $\Delta A_1A_2A_3$ là đều.

Lời giải (*Phùng Hồ Hải*): Tích của 2 phép quay $-120°$ quanh 2 điểm A, B là 1 phép quay $120°$ quanh điểm O là đỉnh của tam giác đều ABO có chiều dương. Tích của 2 phép quay $120°$ và $-120°$ quanh hai điểm O, C là một phép tịnh tiến theo véc tơ hợp với $\vec{OC}$ một góc $-30°$ và có độ dài bằng $OC\sqrt{3}$. Vì vậy P_3 là ảnh của P_0 qua phép tịnh tiến với $(\vec{a}, \vec{OA_3}) = -30°$; $|\vec{a}| = OA_3\sqrt{3}$. Suy ra $\vec{a}$ không đổi với mọi P_0 và do đó P_6 là ảnh của P_3 qua phép tịnh tiến véc tơ $\vec{a}$ nên P_6 là ảnh của P_0 qua 2 phép tịnh tiến $\vec{a}$. Vậy P_{1986} là ảnh của P_0 qua 662 lần tịnh tiến véc tơ $\vec{a}$ theo giả thiết $P_{1986} \equiv P_0$ nên $|\vec{a}| = 0$ vậy $|AO_3| = 0$, ta được $\Delta A_1A_2A_3$ đều.

Nhận xét: Các bạn *Hà Anh Vũ, Nguyễn Phương Tuấn, Nguyễn Tuấn Trung* và *Nguyễn Hùng Sơn* cũng có cách giải tương tự. Bài này còn có thể giải bằng cách dùng số phức như sau: để thuận tiện ta coi $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$ là dãy các điểm $A, B, C, A, B, \ldots$ tương ứng và P_0 là gốc tọa độ. Sau k bước, đặt $P_k = A_k + (A_k - P_{k-1})e^{\pi i/3}$, suy ra:

$P_k = (1+u)A_k - uA_{k-1} + u^2A_{k-2} \ldots + (-1)^{k-1}u^{k-1}A_1$; $u = e^{\pi i/3}$

Theo giả thiết $O = P_0 = P_{1986} = A_{1986} - uA_{1985} + \ldots - u^{1985}A_1$. Mà $A_1 = A_4 = A_7 = \ldots$; ... nên:

$O = (1 - u^3 + u^6 - \ldots - u^{1983})(A_3 - uA_2 + u^2A_1) = 0$ hay $662(A_3 - uA_2 + u^2A_1) = 0$ nên $A_3 - A_1 = u(A_2 - A_3)$. Vậy ΔABC là tam giác đều.

Bài 3: (*CHDC Đức*): *Với mỗi đỉnh của một ngũ giác đều đã đặt ứng một số nguyên sao cho tổng của năm số nguyên đó là dương. Với ba đỉnh liên tiếp ứng các số x, y, z mà $y < 0$ thì cho phép thực hiện phép toán sau: thay các số x, y, z theo thứ tự bởi $x+y, -y, z+y$. Phép toán đó cứ được tiếp tục thực hiện khi một trong năm số nhận được vẫn còn là số âm.*

Hỏi quá trình đó có buộc phải chấm dứt sau một số hữu hạn bước hay không.

Lời giải 1: Gọi 5 số nguyên đó là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 và $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = S > 0$. Giả sử $f(X) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 + (x_5 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2$ thì $f(X) \geq 0$. Nếu $x_3 < 0$ thì theo giả thiết, thay véc tơ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ bởi $Y = (x_1, x_2 + x_3, -x_3, x_4 + x_3, x_5)$ thì $f(Y) = (x_2 + x_3 - x_5)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_1 - x_3 - x_4)^2$. Ta được: $f(Y) - f(X) = 2x_3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 2x_3S \leq -2$.

Do vậy, giá trị của hàm $f(X)$ sau mỗi lần thực hiện phép toán đều giảm đi ít nhất 2 đơn vị. Do vậy, quá trình đó buộc phải chấm dứt sau hữu hạn bước.

Lời giải 2 (*Hà Anh Vũ*): Xây dựng hàm $f(X)$ như sau:

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_5)^2 + (x_5 + x_1)^2 \geq 0.$$

Nếu $x_2 < 0$ và $Y = (x_1 - x_2, -x_2, x_3 - x_2, x_4, x_5)$ thì $f(X) - f(Y) = -2x_2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \geq 2$. Ta được đpcm.

Nhận xét. Hầu hết các bạn trong đội tuyển đều định hướng đúng, tức là cần dựng một hàm không âm, bất biến (không thay đổi) khi hoán vị vòng quanh và sau đó chứng minh rằng $f(X) - f(Y) > 0$. Song tất cả đều chọn hàm bậc nhất chứa giá trị tuyệt đối nên việc ước lượng gặp khó khăn và đã không vượt qua được các khó khăn đó. Có một học sinh đoàn Mỹ cũng đi theo hướng này và đã giải quyết trọn vẹn, được ban tổ chức trao giải thưởng đặc biệt. Đó là bài học rất bổ ích đáng để mỗi chúng ta suy xét và tự rút ra kết luận xác đáng.

Bài 4 (*Aixơlen*): *Giả sử A và B là hai đỉnh kề nhau của một n-giác đều ($n \geq 5$) với tâm O. Một tam giác XYZ bằng $\triangle OAB$ lúc đầu trùng với OAB, sau đó chuyển động trong mặt phẳng của n-giác sao cho các điểm Y và Z luôn ở trên biên còn điểm X luôn ở bên trong của hình đa giác đã cho. Hỏi điểm X vạch nên hình gì khi điểm Y cùng với điểm Z chạy hết vòng dọc biên của đa giác?*

Lời giải (*Nguyễn Phương Tuấn*):

Ta xét $Y \in AB$ suy ra $Z \in BC$.

https://tieulun.hopto.org

Ta có $BYXZ$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{XBZ} = \widehat{XYZ} = \widehat{OBC}$$

Vậy B, O, X thẳng hàng, do đó X chạy trên đường thẳng qua O, B.

Giới hạn: Dễ thấy X không thuộc nửa đường thẳng từ O chứa B (do $n \geqslant 5$). Vậy X thuộc đoạn $[OX_0[$ với X_0 là vị trí của X mà XB lớn nhất, ứng với $BY = BZ$:

$$X_0O = X_0B - OB = OE - R$$
$$OE = OB^2/OH = R/\cos(\pi/n)$$

$$\text{Vậy } X_0O = R\,\frac{1-\cos(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}$$

Khi cho Y chạy trên các đoạn BC,... ta cũng được quỹ tích là các đoạn X_1O, X_2O,... tương ứng có độ dài bằng $R\,\dfrac{1-\cos(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}$ là phần kéo dài về phía O của các đoạn BO, CO,...

Nhận xét: Đa số các bạn đều giải được bài này nhưng đều tính toán hình thức bằng phương pháp hình học mà không cho biểu thức cụ thể của OX_0. Vì vậy chỉ có *Nguyễn Phương Tuấn* và *Nguyễn Tuấn Trung* đạt điểm tối đa, số còn lại bị trừ điểm nặng.

Bài 5 (*Anh*): *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định trên tập các số thực không âm và lấy giá trị trong tập đó, sao cho:*

1) $f[xf(y)].f(y) = f(x+y)$ *Với mọi x, y không âm,*

2) $f(2) = 0$

3) $f(x) \neq 0$ với mọi $0 \leqslant x < 2$.

Lời giải 1: Thay $y = 2$ vào 1) ta được $f(x+2) = 0\ \forall x \geqslant 0$ hay $f(x) = 0$ khi $x \geqslant 2$. Giả sử $0 \leqslant y < 2$, $x \geqslant 0$ thì

vế phải của 1) bằng $0 \Leftrightarrow x + y \geqslant 2$ hay $x \geqslant 2 - y$ (1)
vế trái của 1) bằng $0 \Leftrightarrow xf(y) \geqslant 2$

$$\text{hay } \begin{cases} x \geqslant 2/f(y) \\ f(y) \geqslant 0 \end{cases} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow 2/f(y) = 2 - y$ hay: $f(y) = 2/(2-y)$; $0 \leqslant y < 2$ và $f(y) = 0$ khi $y \geqslant 2$.

Để kiểm tra hàm f thỏa mãn 1) ta xét các trường hợp:

a) $x + y < 2$, $xf(y) < 2$. Khi đó $0 \leqslant y < 2$; $f(y) = 2/(2-y)$ và $f(xf(y)) = 2/(2 - xf(y)) = 2/(2 - 2x/(2-y))$. Vậy

$$f(xf(y))f(y) = 2/(2 - 2x/(2-y)) \times 2/(2-y) = 2/(2-x-y) = f(x+y)$$

b) $x + y \geqslant 2$; $xf(y) \geqslant 2$, khi đó cả 2 vế của 1) bằng 0.

c) $x + y \geqslant 2$; $xf(y) < 2$, khi đó $y \geqslant 2$ và 2 vế của 1) bằng 0.

Thật vậy, nếu $0 \leqslant y < 2$ thì $xf(y) = x \times 2/(2-y) < 2 \Leftrightarrow x + y < 2$ không xảy ra.

d) $x + y < 2$, $xf(y) \geqslant 2$ không xảy ra vì khi đó $f(y) \neq 0$ do vậy $0 \leqslant y < 2$ và $xf(y) = x \times 2/(2-y) \geqslant 2 \Leftrightarrow x + y \geqslant 2$.

Lời giải 2 (*Hà Anh Vũ*): Cho $y = 2$ ta được $f(x) = 0$; $x \geqslant 2$.

Xét $0 \leqslant y < 2$. Lấy $x = 0$ ta được $f(0) = 1$.
Lấy $x = 2 - y$ thì $f[(2-y)f(y)]f(y) = 0$.
Vậy $(2-y)f(y) \geqslant 2$ hay $f(y) \geqslant 2/(2-y) > 1$ (*)
Ta chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến trong $[0,2)$. Giả sử $x > y$; $x, y \in [0, \infty)$
thì $f(x) = f(y)f[(x-y)f(y)] \geqslant 1$ nên:
$0 < (x-y)f(y) < 2$ do đó $f[(x-y)f(y)] > 1$.
Vậy $f(x) > f(y)$.
$\forall x, y \in [0,2)$ mà $x + y < 2$ ta có:
$f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ mà $f(y) \geqslant 1$ nên:
$f(xf(y)) \leqslant f(x+y)$ hay $xf(y) \leqslant x + y$ (do f đồng biến).

Vậy $f(y) \leqslant (x+y)/x = 1 + y/x\ \ \forall x < 2 - y$

Cho $x \to 2 - y - 0$ (với y cố định) thì $f(y) \leqslant 1 + y/(2-y) = 2/(2-y)$. Kết hợp với (*) ta được $f(y) = 2/(2-y)$, $0 \leqslant y < 2$ và $f(y) = 0$ Với $y \geqslant 2$.

Tiếp theo, thực hiện phép thử như trên.

Nhận xét: Hầu hết các bạn đều tìm được đáp số của bài toán, nhưng việc chứng minh rằng hàm đã cho thỏa mãn đầu bài thì không được kiểm tra một cách chi tiết.

Bài 6 (*CHDC Đức*): *Giả sử M là một tập hữu hạn những điểm nào đó có tọa độ nguyên trong một mặt phẳng tọa độ. Hỏi phải chăng luôn có thể tô màu mỗi điểm của tập M bằng màu trắng hay màu đỏ sao cho với mọi đường thẳng l song song với một trong các trục tọa độ, giá trị tuyệt đối của hiệu số giữa số các điểm trắng thuộc l và số các điểm đỏ thuộc l không lớn hơn 1? Hãy lập luận cho câu trả lời đó.*

Lời giải: Trả lời: luôn có thể tô màu được. Lấy một đường thẳng l tùy ý song song với một trong các trục tọa độ và cắt tập M theo thứ tự tại các điểm $P_1, P_2, \ldots, P_k$ (thứ tự từ trái qua phải hoặc từ dưới lên trên). Nối P_1 với P_2, P_3 với P_4... Cũng làm như vậy đối với mọi đường thẳng l khác. Ta được một họ các đoạn thẳng và mỗi điểm của M đều thuộc không quá hai đoạn. Vì vậy ta được các đường gấp khúc không có đỉnh chung. Các đường gấp khúc đóng gồm số chẵn các đoạn. Ta có thể tô màu xen kẽ: đỏ, trắng, đỏ, trắng,... đối với mỗ

https://tieulun.hopto.org

đường gấp khúc. Các điểm rời rạc khác không thuộc đường gấp khúc nào thì tô màu tùy ý. Ta được một cách tô màu thỏa mãn điều kiện đầu bài vì các điểm nằm trên các đường song song với các trục tọa độ được nối với nhau với các đoạn mà các điểm đầu và cuối có màu khác nhau.

Nhận xét: Bài này cũng có thể giải bằng phương pháp quy nạp. Song thuật toán tô màu của quá trình quy nạp từ tập M gồm n điểm sang tập khác gồm $n+1$ điểm phải được mô tả chi tiết và đặc biệt phải chỉ ra được rằng mọi trường hợp đều đã được xét hết. Vì không đưa ra được thuật toán cụ thể đó mà các bạn trong đội tuyển đều mắc chung một sai lầm: Giải hình thức trên cơ sở hình thức.

Kết quả là: hầu hết đều đạt điểm tối thiểu hoặc gần tối thiểu.

CÂU HỎI CỦA NGƯỜI TỬ TÙ

NGÀY xưa, có một người tù bị ghép tội chết chém. Nghe đồn rằng người tù rất thông minh, tên chúa ngục cho gọi người tù lên bảo: « Ngục giam nhà ngươi có hai cửa ra. Một là cửa sống, một là cửa chết. Mỗi cửa có một người lính gác, một người nói thật, một người nói dối. Ta cho ngươi được phép hỏi một trong hai người lính đó chỉ một câu hỏi để chọn cửa đi ra. Nếu ra qua cửa sống ta thả, nếu qua cửa chết ta chém. Nhớ rằng cả hai người lính gác đều biết họ gác cửa nào và chỉ trả lời ngươi bằng cách *gật đầu* hay *lắc đầu* chứ không nói ».

Sau một câu hỏi, người tử tù đó đã đi ra qua cửa sống. Các bạn tìm xem câu hỏi của người tử tù đó như thế nào?

Phạm Quang Giám

Giải đáp bài.

GÀ VÀ CHÓ

Chó khoe tài đứng hai chân
Tất cả bất thần chân trước giơ lên
Gà, chó ba mươi sáu tên
Chạm đất đếm liền, có bảy hai chân
Rõ ràng chẳng phải phân vân
Hai tám chân chó đang đâm lên trời
Mỗi con hai cẳng — phải rồi
Mười bốn con chó ai người chẳng hay
Số gà còn lại trong bầy
« *Hai mươi hai* » đó thấy ngay rành rành.

Lại Thế Hiền
Công ty lương thực huyện Long Mỹ
Hậu Giang

THÔNG BÁO

1. Bắt đầu từ năm 1987 trở đi Báo Toán học và Tuổi trẻ sẽ tổ chức CUỘC THI GIẢI TOÁN HÀNG NĂM của báo. Các đề thi là các đề trong mục đề ra kỳ này của tất cả các số báo trong năm đó. Kết quả sẽ thông báo cho cá nhân và nhà trường của người đoạt giải vào tháng 4 và sẽ công bố trên báo số 3 của năm sau.

2. Các giải thưởng gồm có:

* *Giải nhất, nhì, ba*, và *khuyến khích* dành cho cá nhân thuộc từng lớp cuối cấp phổ thông cơ sở, lớp 10, lớp 11, lớp 12 phổ thông trung học.

* *Giải xuất sắc* dành cho những người thuộc lớp dưới mà thành tích đạt được xấp xỉ với người đoạt giải nhất của lớp trên.

* *Giải có nhiều lời giải hay* dành cho những người có nhiều lời giải hay.

* *Giải đặc biệt* dành cho những người đoạt giải nhất ba năm liền.

* *Giải Trường có thành tích cao nhất* dành cho trường có tổng số điểm của các học sinh dự thi cao nhất.

* *Giải Trường có nhiều học sinh dự thi nhất* dành cho trường có số học sinh dự thi nhiều nhất (tính riêng cho từng khối phổ thông cơ sở và phổ thông trung học).

3. Thời hạn nhận lời giải dự thi: Hai tháng sau khi số báo đăng đề phát hành, tính theo dấu bưu điện trên bì thư của nơi gửi lời giải.

4. Lời giải dự thi phải giữ đúng quy định sau:

— Lời giải của cá nhân. Không đứng tên chung từ 2 người trở lên.

— Mỗi lời giải cho một đề viết trên một tờ giấy riêng, trên đó có ghi rõ họ tên, lớp, trường, huyện (thị trấn), tỉnh (thành phố). Nhất thiết không viết nhiều lời giải vào cùng một tờ. Nếu viết chung chỉ được chấm một lời giải (chọn hú họa).

Không cần phải chép lại đề ra nhưng cần ghi rõ bài số mấy của số báo nào (ví dụ: bài 1/153)

BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

In 6300 bản tại Xí nghiệp in 75 Hàng Bồ — Hà Nội.
Số in 174/86. In xong và gửi lưu chiểu tháng 12/86.
Chỉ số: 12884

Giá: 2đ00

https://tieulun.hopto.org