TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

5
1986
Số 151

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói: 52825

Ảnh: NAM HẢI

CHÚC MỪNG 60 NĂM NGÀY SINH

GIÁO SƯ TIẾN SĨ NGUYỄN CẢNH TOÀN, TỔNG BIÊN TẬP BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Nhân dịp 60 năm ngày sinh Giáo sư 28-9-1926 – 28-9-1986 Báo Toán học và Tuổi trẻ xin chúc Giáo sư dồi dào sức khỏe, gia đình hạnh phúc, có nhiều thành tích to lớn trong công tác và trong sự nghiệp.

Báo Toán học và Tuổi trẻ

Giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn và các em học sinh đoạt giải thưởng của Báo THVTT trong ngày lễ kỷ niệm 20 năm ngày thành lập báo, 1984.

NHỮNG BÀI CỦA GIÁO SƯ NGUYỄN CẢNH TOÀN VIẾT CHO BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ TỪ 1964 – 1986

1. Số ảo ngu ngốc hay thông minh	số 1 (10-1964) và (11-1964)
2. Giải đáp thắc mắc	số 2 (11-1964)
3. Câu chuyện về « đường thẳng »	số 4 (1-1965) và 5 (2-1965)
4. Giải đáp thắc mắc	số 4 (1-1965)
5. Một phương pháp suy nghĩ sáng tạo	số 10 (7-1965)
6. Tổng kết cuộc thi giải toán do Báo tổ chức 1965	số 11 (8-1965)
7. Nhận bài hình học trong kỳ thi học sinh giỏi toán lớp 10 toàn miền Bắc (1964 — 1965)	số 12 (9-1965)
8. Lúc còn là học sinh, tôi đã học toán như thế nào?	số 14 (11-1965)
9. Một cố gắng cải tiến cách làm	số 14 (11-1965)
10. Nên học tập tiểu sử các nhà bác học như thế nào?	số 18 (3-1966)
11. Phải biết nhìn một khái niệm toán học theo cách nhìn khác nhau	số 2 (6-1966)
12. Ngay từ bây giờ các bạn hãy tập dượt sáng tạo trong toán học	số 2 (10-1966)
13. Lời giải bài hình học trong kỳ thi chung khảo học sinh giỏi toán 1965 — 1966	số 2 (6-1966)
14. Nhìn các số theo quan điểm «toán tử» có lợi như thế nào?	số 28 (1-1967)
15. Cái gì là quan trọng?	số 31 (4-1967)
16. Tiếp tục một câu chuyện cũ	số 33 (6-1967)
17. Nhận bài hình học trong kỳ thi học sinh giỏi toán lớp 10 (1966 — 1967)	số 36 (8-1967)
18. Nhận bài « hình học » trong kỳ thi học sinh giỏi toán lớp 10 toàn miền Bắc 1968	số 45 (6-1968)
19. Vài nhận xét về bài giải của bạn Ngô Việt Trung giải nhất trong kỳ thi học sinh giỏi toán lớp 10-1969	số 49 (10-1969)
20. Mừng 25 năm đất nước nở hoa	số 56 (9 – 10-1970)
21. Tập hợp, ánh xạ và đẳng cấu	số 59 (3 – 4-1971)
22. Vai trò các tập hợp số	số 61 (7 – 8-1971)
23. Cụ thể và trừu tượng trong việc học toán	số 64 (1 – 2-1972)
24. Chiều sâu của một bài toán giản đơn	số 70 (1 – 2-1973)
25. Tư tưởng tiến công trong toán học	số 81 (11 – 12-1974)
26. Xung quanh thể tích hình chóp tam giác	số 82 (1 – 2-1975)
27. Các bạn trẻ yêu toán nghĩ gì, làm gì để đón mừng nghị quyết của Đại hội Đảng lần thứ IV	số 94 (1 – 2-1977)
28. Tầm quan trọng của một cách nhìn	số 102 (5 – 6-1978) và số 103 (7 – 8-1978)
29. Chuyện lạ mà quen	số 114 (5 – 6-1980)
30. Tại sao lại là $a^2 = b^2 + c^2$?	số 130 (1 – 2-1983)
31. Ẩn sâu trong Pitago là Ơclit	số 131 (1 – 2-1983)
32. Hình học giả Ơclit	số 133 (1 – 2-1984)
33. Tiếp tục câu chuyện hình học giả ơclit	số 136 (3 – 4-1984)
34. Vòng tròn nhiều tâm	số 138 (7 – 8-1984)
35. Số và lệnh	số 139 (9 – 10-1984)
36. Số, lệnh và hình	số 143 (5 – 6-1985)
37. Số, lệnh, hình và gì nữa	số 144 (7 – 8-1985)
38. Nào đã hết đâu với số và lệnh	số 145 (9 – 10-1985)
39. Một kiểu đề toán mới	số 147 (1 – 2-1986) và số 148 (3 – 4-1986)

KỲ THI VÔ ĐỊCH TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 27 TẠI VACXAVA, BA LAN, 1986

NGUYỄN VĂN MẬU

Kỳ thi Toán quốc tế năm nay được tổ chức tại thủ đô Vacxava của Ba Lan từ ngày 4-7 đến 14-7-1986. Tham dự kỳ thi này có 37 đoàn gồm 210 thí sinh, trong đó có 32 đoàn có đủ 6 học sinh tham gia. Đội tuyển của nước ta gồm 6 bạn: *Đoàn An Hải* (lớp 12, trường Phan Bội Châu, Nghệ Tĩnh, số báo danh: VN1) *Phùng Hồ Hải* (lớp 11, ĐHTH Hà Nội, VN2); *Nguyễn Tuấn Trung* (lớp 11, ĐHTH Hà Nội, VN3); *Nguyễn Phương Tuấn* (lớp 11, ĐHSP1 Hà Nội, VN4), *Hà Anh Vũ* (lớp 11, ĐHSP1, HN, VN5) và *Nguyễn Hùng Sơn* (lớp 12, Phan Chu Trinh, QNĐN, VN6).

Ngày 1-7 Giáo sư Đoàn Quỳnh, trưởng đoàn, đã lên đường sang Vacxava trước để kịp cùng với ban tổ chức tham gia chọn các đề thi chính thức. Ngày 5-7 tất cả đều có mặt tại Vacxava. Sau hai ngày nghỉ ngơi tại ký túc xá trường Đại học Bách khoa Vacxava, Ban tổ chức đã chuyển toàn bộ học sinh đến phía bắc thành phố, còn các trưởng và phó đoàn được bố trí ở phía nam thành phố. Đó là những ngày các bạn trong đội tuyển phải tự lực cánh sinh trong mọi công việc, từ những việc nhỏ nhất về sinh hoạt cá nhân cho đến những công việc khác, các bạn phải tìm cách diễn đạt bằng vốn tiếng Nga ít ỏi của mình với cô phiên dịch người Ba Lan. Các bạn của đoàn ta tuy còn ít tuổi và vóc người nhỏ hơn, song rất hoạt bát và đã sớm thích nghi được với hoàn cảnh sống, làm quen nhanh với học sinh các nước khác, tham gia các sinh hoạt tập thể như đấu bóng bàn, đấu cờ vua và cờ tướng... Nhờ vậy mà sức khỏe của toàn đoàn tương đối ổn định.

Ban trù bị đã nghiên cứu các bài thi do các nước gửi đến (rất tiếc, nước ta không kịp gửi đề) và chọn ra 20 đề. Các đề này đều được dịch ra 4 thứ tiếng Nga, Anh, Pháp, Đức có kèm theo đáp án chi tiết. Có thể tạm chia các bài toán thành các nhóm: 4 bài về đại số, 4 bài về số học, 3 bài về lôgic, 2 bài về xác suất, 5 bài về hình học phẳng và 2 bài về hình học không gian. Trong hai ngày 5 và 6/7, các trưởng đoàn họp và quyết định chọn 6 bài làm đề thi chính thức cho hai ngày 9 và 10/7. Thời gian làm bài thi và cách cho điểm không có gì khác so với các năm trước. Mỗi ngày thi 3 bài trong thời gian 4h30' và điểm tối đa cho mỗi bài là 7 điểm. Kết quả của đội tuyển nước ta như sau:

Số B.D	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5	Bài 6	Kết quả	Giải
VN1	3	0	0	2	5	1	11	
VN2	2	7	0	5	7	0	21	III
VN3	7	7	0	7	3	0	24	III
VN4	7	7	2	7	7	0	30	II
VN5	7	7	7	5	7	1	34	I
VN6	7	7	0	6	5	1	26	II
Tổng	33	35	9	32	34	3	146	

Đánh giá kết quả đạt được qua từng bài chúng ta cũng thấy rõ những điểm mạnh và những điểm yếu kém của từng bạn cũng như toàn đoàn. Bài 1 là một bài số học đoàn ta đạt kết quả khá, đứng thứ hai sau đoàn Úc. Bài 2 và 4 là hai bài hình học phẳng quen thuộc, nhưng đoàn ta cũng chỉ đứng thứ 7. Bài 5 là một bài về phương trình hàm, đoàn ta đứng thứ 10. Bài 6 về tô màu thì toàn đội tuyển chỉ đạt có 3 điểm, xếp thứ 31. Có lẽ đó là một trong những mặt yếu kém nhất mà chúng ta cần phải bàn và tìm cách khắc phục trong các năm tới. Riêng bài số 3, bài khó nhất của kỳ thi năm nay, chúng ta đạt 9 điểm. Tuy vậy vẫn được xếp thứ 7 vì nhìn chung các đoàn khác cũng ở tình trạng bất lực như vậy. Một điều đáng lưu ý là kỹ năng tính toán của các bạn trong đội tuyển kém cỏi tới mức báo động. Các phương hướng giải của bài 3 và bài 6 đều được hầu hết các bạn trong đội tuyển định hướng tốt song năng lực thực hiện thì không có, không đề ra được mục tiêu và kỹ năng giải quyết các bước cụ thể.

Ban Tổ chức đánh giá kỳ thi năm nay: Đề ra vào loại khó, các bài thi chính thức đều rất sơ cấp, tuy nhiên, so với kết quả đạt được của kỳ thi năm ngoái tại Phần Lan thì đề thi năm nay có phần dễ hơn. Đoàn ta đạt tổng số điểm 146/252 và xếp thứ 10 (năm ngoái đạt 4·/252 và xếp thứ 5) sau các đoàn Liên Xô, Mỹ (203 điểm), CHLB Đức (196), Trung Quốc (177), CHDC Đức (172), Rumani (171), Bungari (161), Hungari (151) và Tiệp Khắc (149).

Ngày 12-7, Ban chấm thi và các trưởng đoàn họp để quyết định giải thưởng. Giải nhất gồm 18 học sinh đạt từ 34 đến 42 điểm. Giải nhì gồm 41 học sinh đạt từ 26 đến 33 điểm. Giải ba gồm 48 học sinh đạt từ 17 đến 25 điểm. Chiều 14/7 tại lễ trao giải thưởng, bà Bộ trưởng Bộ Giáo dục Ba Lan đã trực tiếp trao giải thưởng cho 107 học sinh đoạt giải tại kỳ thi này. Ngày 15-7 toàn đoàn đã đến Đại sứ quán Việt Nam tại Ba Lan để dự lễ truy điệu Bác Lê Duẩn và nhận phần thưởng do Đại sứ quán và Hội đồng hương Việt Nam tại Vacxava trao tặng.

Sau đây là 6 đề thi chính thức:

Bài 1 (CHLB Đức): d là một số nguyên dương khác 2; 5 và 13. Chứng minh rằng trong tập hợp $\{2, 5, 13, d\}$ có thể tìm được hai số phân biệt a và b sao cho $ab - 1$ không phải là bình phương của một số nguyên.

Bài 2 (Trung Quốc): Trong mặt phẳng, cho $\Delta A_1A_2A_3$ và điểm P_0. Đặt $A_s = A_{s-3}$ với mọi số nguyên $s \geqslant 4$. Người ta dựng dãy điểm P_0; P_1, P_2,... sao cho P_{k+1} là ảnh của điểm P_k qua phép quay quanh điểm A_{k+1} theo chiều kim đồng hồ với góc quay 120°; $k = 0, 1, 2, \ldots$

Chứng minh rằng nếu $P_{1986} = P_0$ thì tam giác $A_1A_2A_3$ là đều.

Bài 3 (CHDC Đức): Với mỗi đỉnh của một ngũ giác đều đã đặt ứng một số nguyên sao cho tổng của năm số nguyên đó là dương. Với ba đỉnh liên tiếp, ứng các số x, y, z mà $y < 0$ thì cho phép thực hiện phép toán sau: thay các số x, y, z theo thứ tự bởi $x + y$, $-y$, $z + y$. Phép toán đó cứ được tiếp tục thực hiện khi một trong năm số nhận được vẫn còn là số âm.

Hỏi quá trình đó có buộc phải chấm dứt sau một số hữu hạn bước hay không?

Bài 4 (Aixơlen): Giả sử A và B là hai đỉnh kề nhau của một n-giác đều $(n \geqslant 5)$ với tâm O. Một tam giác XYZ, bằng tam giác OAB, lúc đầu trùng với OAB, sau đó chuyển động trong mặt phẳng của n-giác sao cho các điểm Y và Z luôn ở trên biên còn điểm X luôn ở bên trong của hình đa giác đã cho. Hỏi điểm X vạch nên hình gì khi điểm Y cùng với điểm Z chạy hết vòng dọc biên của đa giác?

Bài 5 (Anh): Tìm mọi hàm số $f(x)$ xác định trên tập các số thực không âm và lấy giá trị trong tập đó, sao cho:

1) $f[xf(y)] \cdot f(y) = f(x + y)$ với mọi x, y không âm.

2) $f(2) = 0$

3) $f(x) \neq 0$ với mọi $0 \leqslant x < 2$.

Bài 6 (CHDC Đức): Giả sử M là một tập hữu hạn những điểm nào đó có tọa độ nguyên trong một mặt phẳng tọa độ. Hỏi phải chăng luôn có thể tô màu mỗi điểm của tập M bằng màu trắng hay màu đỏ sao cho với mọi đường thẳng l song song với một trong các trục tọa độ, giá trị tuyệt đối của hiệu số giữa số các điểm trắng thuộc l và số các điểm đỏ thuộc l không lớn hơn 1? Hãy lập luận cho câu trả lời đó.

Bài 1/148 *Tìm các số nguyên dương nhỏ nhất v, x, y, z sao cho các số: $2v$, $v + x$, $v + y$, $2x$, $x + y$, $v + z$, $2y$, $x + z$, $2z$ theo thứ tự giảm dần thực sự.*

Lời giải: Theo giả thiết $2v > v + x > v + y > 2x > x + y > v + z > 2y > x + z > 2z$,

ta có $v > x > y > z$: $v + y > 2x$, $v + z > 2y$, $v + z < x + y$, từ đó có:

$v > x > y > z$, $v - x > x - y$, $y - z > v - x$, $(v - x) + (x - y) > y - z$.

Vậy đặt $v - x = a$, $x - y = b$, $y - z = c$, ta có $a, b, c > 0$; $c > a > b$ và $a + b > c$.

Nếu $b = 1$ thì $c \geqslant a + 1 = a + b$ (vô lý)

Nếu $b \geqslant 2$ thì có $a \geqslant 3$ và $c \geqslant 4$ hay cụ thể là: $v - x \geqslant 3$, $x - y \geqslant 2$, $y - z \geqslant 4$, $z \geqslant 1$. Từ đó ta có $z \geqslant 1$, $y \geqslant 5$, $x \geqslant 7$ và $v \geqslant 10$. Rõ ràng 4 số $z = 1$, $y = 5$, $x = 7$ và $v = 10$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Vậy các số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm:

$$z = 1,\ y = 5,\ x = 7 \text{ và } v = 10$$

Nhận xét: Các bạn *Hà Thái Sơn* (9CT, Trường chuyên Văn Toán, T. X. Quảng Ngãi) và *Nguyễn Việt Trung* (11CT, Lam Sơn Thanh Hóa) có lời giải tốt.

T. V. T

Bài 2/148: *Với mọi số tự nhiên n ta đặt*

$$f(n) = [n + \sqrt{n}]$$

trong đó [.] là phần nguyên. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m dãy

$$m, f(m), f(f(m))...$$

chứa vô hạn số chính phương.

Lời giải: Trước hết ta nhận xét rằng với mọi m cố định dãy số m $f(m)$, $f(f(m))$... là dãy số tăng thực sự.

Nếu m là số không chính phương, ta gọi d^2 là số chính phương lớn nhất nhỏ hơn m, hay là $d = [\sqrt{m}]$ và đặt $m = d^2+k$, trong đó $0 < k < 2d + 1$. Ta có:

$$f(m) = d^2 + k + d.$$

Bây giờ ta xét $f(f(m))$. Nếu $k < d + 1$ thì

$[\sqrt{f(m)}] = d$ và $f(f(m)) = d^2 + k + 2d = (d + 1)^2 + (k - 1)$. Suy ra nếu có

$$m - [\sqrt{m}]^2 \leqslant [\sqrt{m}] \qquad (1)$$

thì độ lệch giữa $f(f(m))$ và số chính phương lớn nhất trong các số nhỏ hơn $f(f(m))$ sẽ giảm đi 1 số với độ lệch tương ứng với m. Áp dụng lập luận trên cho số $f(f(m))$ (mà ta thấy ngay là cũng thỏa mãn (1)). Vì vậy sau hữu hạn bước, độ lệch đó sẽ bằng 0, hay nó là số chính phương.

Nếu m không thỏa mãn (1) thì ta có

$$d + 1 \leqslant k < 2d + 1.$$

Khi đó:

$$f(m) = d^2 + k + d = (d + 1)^2 + (k - d - 1).$$

Và có $f(m)$ thỏa mãn (1), vì

$$f(m) - [\sqrt{f(m)}]^2 = k - d - 1 < d < [f(m)].$$

Áp dụng lập luận trên cho $f(m)$ ta được điều cần chứng minh. Nếu m là số chính phương thì như lập luận trên ta thấy hoặc dãy $m, f(m)$,... có vô hạn số chính phương, hoặc là có 1 số trong dãy thỏa mãn điều kiện (1).

Từ đó dễ suy ra rằng m $f(m)$, $f(f(m))$... có vô hạn số chính phương (đpcm).

Nhận xét: Bài này ít bạn giải. Bạn Lê Đạt (11A Trần Phú – Hà Nội) có lời giải, nhưng còn chưa chính xác.

V. Đ. H

Bài 3/148: *Cho dãy vô hạn các số thực $\{a_n\}$ thỏa mãn các điều kiện:*

1) $0 \leqslant a_n \leqslant 2$.

2) $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0$, $n = 1, 2,...$

Chứng minh rằng $0 \leqslant n(a_n - a_{n+1}) \leqslant 2$ với mọi n

Lời giải: Từ giả thiết $a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2} \geqslant 0$ cho mọi i ta suy ra:

$$a_1 - a_2 \geqslant a_2 - a_3 \geqslant ... \geqslant a_n - a_{n+1} \geqslant ... \geqslant$$
$$\geqslant a_m - a_{m+1}$$

cho $m \geqslant n \geqslant 1$ tùy ý.

Từ đó suy ra: $a_1 - a_{n+1} \geqslant n(a_n - a_{n+1})$ (1)

$(m - n + 1)(a_n - a_{n+1}) \geqslant (a_n - a_{m+1})$ (2)

Do $0 \leqslant a_1 \leqslant 2$ và $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 2$ từ (1): suy ra vế phải của bất đẳng thức cần phải chứng minh:

$$n(a_n - a_{n+1}) \leqslant 2.$$

Mặt khác từ (2) có:

$$a_n - a_{n+1} \geqslant \frac{1}{m-n+1} \cdot (a_n - a_{m+1}) \geqslant$$
$$\geqslant -2/(m-n+1)$$

(do $0 \leqslant a_n \leqslant 2$, $0 \leqslant a_{m+1} \leqslant 2$)

Do $m \geqslant n$ tùy ý, suy ra vế trái của bất đẳng thức:

$$a_n - a_{n+1} \geqslant \lim_{m\to\infty} \frac{-2}{m-n+1} = 0.$$

đ. p. c. m

Nhận xét: *Bạn Vũ Anh Sơn* (12 Hà Nội – Amsterdam) có lời giải gọn. Các bạn *Nguyễn Quang Hưng* (11 PTTH Quang Trung – Qui Nhơn) bạn *Lê Đạt* và *Trần Minh* (11 Trần Phú Hà Nội). *Đoàn Quốc Chiến* (10CT, ĐHTH) có lời giải đúng.

V. Đ. H.

Bài 4/148 *Giải và biện luận phương trình*:

$$x^3 + (2 - a^2)a = 2\sqrt[3]{2x + (a^2 - 2)a}$$

Lời giải: Đặt $y = \sqrt[3]{2x + (a^2 - 2)a}$. Từ đề bài ta có:

$$\begin{cases} x^3 + (2 - a^2)a = 2y \\ y^3 + (2 - a^2)a = 2x \end{cases}$$

Vậy có $x^3 - y^3 = 2(y - x)$

$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = y$ hoặc $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0$.

Với $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0$ thì do $x^2 + xy + y^2 + 2 = (x + y/2)^2 + 3y^2/4 + 2 > 0$ nên phương trình $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0$ vô nghiệm.

Với $x = y$. có $x = \sqrt[3]{2x + (a^2-2)a}$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x - (a^2-2)a = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)(x^2+ax+a^2-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = a$ hoặc $x^2+ax+a^2-2 = 0$.

Xét phương trình $x^2+ax+a^2-2=0$ có $\Delta = 8-3a^2$ nên có $x = -a/2$ nếu $|a| = \sqrt{8/3}$. $x = (-a \pm \sqrt{8-3a^2})/2$ nếu $|a| < \sqrt{8/3}$ và vô nghiệm nếu $|a| > \sqrt{8/3}$.

Tóm lại phương trình đề bài có các nghiệm sau:

$|a| > \sqrt{8/3}$, phương trình có một nghiệm $x_1 = a$.

$|a| = \sqrt{8/3}$ phương trình có 2 nghiệm $x_1 = a$, $x_2 = -a/2$

$|a| < \sqrt{8/3}$, phương trình có 3 nghiệm $x_1 = a$, $x_{2,3} = (-a \pm \sqrt{8-3a^2})/2$.

Nhận xét. Các bạn *Đoàn Quốc Chiến* (10CT ĐHTH HN); *Nguyễn Tuấn Anh, Hoàng Thế Hiển* (11 Hà Nội – Amstecđam) và *Hà Thái Sơn* (11 CT, Trường chuyên Văn Toán, TX. Quảng Ngãi) có lời giải tốt.

T.V.T

Bài 5/148. *Chứng minh rằng sin 1986° là số vô tỷ.*

Lời giải (*Lê Đạt, Đoàn Quốc Chiến, Nguyễn Lê Dũng, Phạm Văn Phương...*). Ta có

$\sin 1986^\circ = \sin(11.180^\circ + 6^\circ) = -\sin 6^\circ$

$\sin 18^\circ = 3\sin 6^\circ - 4\sin^3 6^\circ$.

Vậy nếu sin 1986° là số hữu tỷ thì sin 6° là số hữu tỷ, do vậy sin 18° cũng là số hữu tỷ. Ta chứng minh điều này không thể xảy ra. Thật vậy:

$$\sin 2.18^\circ = \cos 3.18^\circ$$

hay $2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$

hay $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$

Vì $\sin 18^\circ > 0$ nên $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Vậy sin 18° là một số vô tỷ.

N.V.M

Bài 6/148. *Xét tập hợp M gồm tất cả các tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ sao cho $a > 0$; $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$.*

Tìm điều kiện cần và đủ để với mọi f thuộc M ta đều có $g(x) = f(x) + \alpha(ax+b) + \beta(bx+c) + \gamma(cx+a)$ thuộc M.

Lời giải: Xét $f(x) = (x+\lambda)^2 = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2$ thuộc M. Khi đó $g(x) = (1+\beta+\gamma x)\lambda^2 + 2(x+\alpha+\beta x)\lambda + x^2 + \alpha x + \gamma \geqslant 0 \quad \forall x, \lambda$.

Vậy $1+\beta+\gamma x \geqslant 0 \ \forall x$. Suy ra $\gamma = 0$ và $1+\beta \geqslant 0$.

Lấy $\lambda = 0$ thì $g(x) = x^2 + \alpha x + \gamma = x^2 + \alpha x \geqslant 0 \ \forall x$, suy ra $\alpha = 0$. Vậy $g(x)$ có dạng:

$g(x) = (1+\beta)\lambda^2 + 2(x+\beta x)\lambda + x^2 \geqslant 0 \quad \forall \lambda, x$.

Từ đó suy ra $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$. Vậy, điều kiện cần để $g(x)$ thuộc M là $\alpha = \gamma = 0$; $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$ (1).

Ngược lại, với điều kiện (1) thì $\forall f(x) = ax^2 + bx + c \in M$ ta có: $g(x) = ax^2 + bx + c + b\beta x + \beta c = ax^2 + b(1+\beta)x + c(1+\beta)$.

Do $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$ nên $ac \geqslant 0$. Do vậy $g(x)$ có biệt thức $\Delta = b^2(1+\beta)^2 - 4ac(1+\beta) = (b^2-4ac)(1+\beta)^2 + 4ac\beta(1+\beta) \leqslant 0$ nên $g(x)$ thuộc M.

Nhận xét: Bạn *Nguyễn Đức Minh* và *Nguyễn Việt Trung* có lời giải tốt nhưng thiếu kiểm tra chi tiết điều kiện đủ.

N. V. M.

Bài 7/148 *Hãy xây dựng một hàm số không là hằng số thỏa mãn điều kiện:*

$$(f(x) - f(y))^2 \leqslant |x-y|$$

với mọi cặp số thực (x, y).

Lời giải: Xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Ta có khi $x, y > 0$ thì $(f(x)-f(y))^2 = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leqslant |\sqrt{x} - \sqrt{y}|\,|\sqrt{x} + \sqrt{y}| = |x-y|$.

Vậy $(f(x)-f(y))^2 \leqslant |x-y|$

Khi $x > 0$, $y \leqslant 0$ có $(f(x)-f(y))^2 = |\sqrt{x}|^2 = x \leqslant |x-y|$.

Khi $x \leqslant 0$, $y > 0$ chứng minh tương tự ta cũng có

$$(f(x)-f(y))^2 \leqslant |x-y|$$

Khi $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$ thì $(f(x)-f(y))^2 = 0 \leqslant |x-y|$.

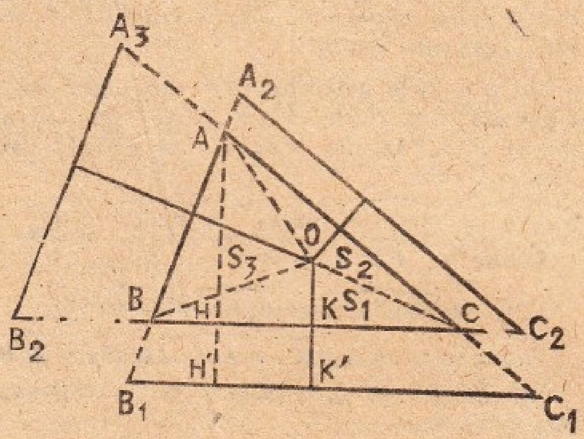
Tóm lại ta luôn có $(f(x)-f(y))^2 \leqslant |x-y|$ với mọi cặp số thực (x, y) nên hàm số $f(x)$ xét ở trên là hàm số cần xây dựng.

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Đức Minh* (11A, Lý Thường Kiệt Hà Nội) *Đoàn Quốc Chiến* ($A_0$10, ĐHTH HN) có lời giải gần giống trên. Một số bạn khác chứng minh các hàm số $f(x) = |x|$ khi $|x| \leqslant 1/2$ và $f(x) = 0$ khi $|x| > 1/2$ hoặc $f(x) = 1/2 \cos x$. Cũng thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

T. V. T

Bài 8/148. *Cho tam giác ABC và một điểm O ở trong tam giác đó. Ở bên ngoài tam giác kẻ các đường thẳng song song với các cạnh, cách chúng một khoảng bằng khoảng cách từ O đến cạnh đó. Mỗi đường thẳng đó tạo với một cạnh của tam giác và các phần kéo dài của hai cạnh kia một hình thang. Xác định vị trí của điểm O để tổng diện tích ba hình thang đó là nhỏ nhất.*

Lời giải. Các bạn *Hoàng Công Bảo Đảm* 10 CT Quốc học Huế, *Nguyễn Việt Trung* 11CT Lam Sơn Thanh Hóa, *Phạm Văn Phương* 11CT, PTNK Hải Hưng *Lê Đạt* 11A Trần Phú Hà Nội có lời giải đúng. Sau đây là lời giải gần giống lời giải của bạn *Đạt* và bạn *Đảm*.



Ký hiệu diện tích các tam giác ABC, OBC, OCA, OAB và các hình thang BCC_1B_1, CAA_2C_2, ABB_2A_3 lần lượt là S, S_1, S_2, S_3, S'_1, S'_2, S'_3.

Do tính đồng dạng của ABC và AB_1C_1 ta có $(S + S'_1)/S = (AH'/AH)^2 = [(AH + OK)/AH]^2$

Ta lại có $S_1/S = OK/AH$. Vậy $(S + S'_1)/S = (1 + S_1/S)^2$ từ đó suy ra $S'_1 = 2S_1 + S_1^2/S$

Tương tự $S'_2 = 2S_2 + S_2^2/S$

$$S'_3 = 2S_3 + S_3^2/S$$

và $S'_1 + S'_2 + S'_3 = 2(S_1 + S_2 + S_3) + (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)/S = 2S + (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)/S$.

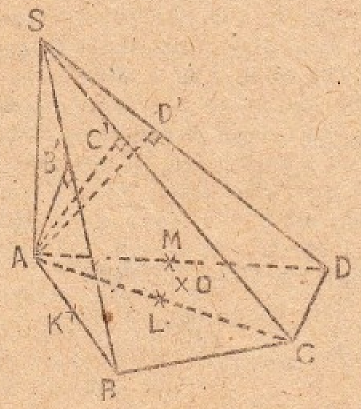
(do $S_1 + S_2 + S_3 = S$). Tổng diện tích $S'_1 + S'_2 + S'_3$ nhỏ nhất khi $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ nhỏ nhất, tức là khi $S_1 = S_2 = S_3 = S/3$. Vậy trọng tâm của ΔABC là vị trí cần xác định của O.

N. Q. T.

Bài 9/148. *Tìm điều kiện mà hình chóp tứ giác S.ABCD phải thỏa mãn để có một mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, C, D của đáy và các hình chiếu (vuông góc) B', C', D' của đỉnh A trên các cạnh SB, SC, SD.*

Lời giải Của bạn *Lê Đạt* (11A Trần Phú Hà Nội)

Điều kiện cần. Giả sử có mặt cầu tâm O đi qua A, B, C, D, B', C', D'. Khi đó giao của mặt cầu này và mặt phẳng đáy là đường tròn đi qua $ABCD$. Vậy đáy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.



Gọi K, L, M lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Ta thấy K, L, M không thẳng hàng vì B, C, D không thẳng hàng.

Mặt cầu tâm O cắt mặt phẳng SAB theo đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABB', có tâm K. Vậy $OK \perp$ mp SAB do đó $OK \perp SA$. Tương tự $OL \perp SA$, $OM \perp SA$. Vậy O, K, L, M nằm trên cùng một mặt phẳng vuông góc với SA. Nhưng vì K, L, M không thẳng hàng nên mặt phẳng đó chính là mặt phẳng đáy của chóp, nói khác đi SA là đường cao của chóp.

Điều kiện đủ: Giả sử $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn (tâm O) và $SA \perp$ mf $ABCD$.

Ta có $OK \perp AB$ lại có $OK \perp SA$ nên $OK \perp$ mf SAB. Do $KA = KB = KB'$ nên $OA = OB = OB'$, vậy B' nằm trên mặt cầu tâm O đi qua A, B, C, D. Tương tự C', D' cũng nằm trên mặt cầu đó.

N. Q. T.

Bài 10/148. *Trong mặt phẳng cho một đa giác lồi 1986 cạnh. Xét tất cả các tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho. Giả sử P là một điểm của mặt phẳng, nằm trong đa giác nhưng không nằm trên cạnh của các tam giác nói trên. Chứng minh rằng số các tam giác chứa điểm P ở trong là một số chẵn.*

Lời giải. (Của *Đoàn Quốc Chiến*, 10CT Đại học Tổng hợp Hà Nội). Ta sẽ chứng minh trong trường hợp tổng quát hơn: Xét đa giác lồi $2n$ cạnh.

1. Dễ thấy rằng với $n = 2$ thì số tam giác chứa P sẽ là 2 (số chẵn) nếu P nằm trong tứ giác.

2. Với n bất kỳ, gọi đa giác $2n$ cạnh đã cho là $A_1A_2 \ldots A_{2n}$.

Xét $\triangle A_iA_jA_k$ bất kỳ $i, j, k \in \overline{1, 2n}$. Ta thấy $\Delta A_iA_jA_k$ là tam giác chung của $2n - 3$ tứ giác có 3 đỉnh là A_i, A_j, A_k và đỉnh thứ tư là một đỉnh khác của đa giác đã cho.

Như vậy, trong đa giác $A_1 .. A_{2n}$ có một số hữu hạn các tứ giác chứa điểm P mà mỗi tứ giác đều có một số chẵn các tam giác chứa điểm P ở trong $\Rightarrow$ số các tam giác chứa điểm P trong đa giác $A_1 .. A_{2n}$ (kể cả lặp) là 1 số chẵn, ta gọi là $2a$, $a \in N$. Mặt khác theo nhận xét trên suy ra mỗi tam giác chứa điểm P đều được tính $2n - 3$ lần vì mọi tam giác đó đều là tam giác chung của $2n - 3$ tứ giác khác nhau. Vậy số tam giác khác nhau chứa điểm P ở trong chính là $2a/(2n - 3)$ phải là 1 số chẵn (đ.p.c.m). Bài toán của ta là trường hợp riêng với $n = 993$.

Nhận xét: Ngoài bạn *Chiến* các bạn gửi bài đến đều sai.

Đ. B. K.

Bài 11/148. *Giả sử $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ với x_1, x_2, x_3 là các số nguyên ($n > 0$). Chứng minh rằng n không thể có dạng $4^a(8b + 7)$ với a, b nguyên không âm.*

Lời giải (của *Bùi Công Minh*, 9CT Trần Quốc Toản, Nha Trang)

Ta để ý rằng: Với m là một số nguyên bất kỳ thì m^2 chia cho 8 hoặc dư 1 hoặc dư 4 hoặc dư 0.

Giả sử tồn tại số nguyên dương

$$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4^a(8b + 7)$$

$* \ a = 0 \Rightarrow n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8b + 7$ vô lý

vì từ nhận xét trên thì $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ chia cho 8 chỉ dư nhiều nhất là 6.

$* \ a \neq 0 \Rightarrow n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4^a(8b + 7) \vdots 4$

Cũng theo nhận xét trên x_i^2 chia cho 4 chỉ dư 1 hoặc 0 nên

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \vdots 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 \vdots 4 \\ x_2^2 \vdots 4 \\ x_3^2 \vdots 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = 2x_5 \\ x_3 = 2x_6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_6^2 = 4^a(8b + 7)$$

$$\Rightarrow x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 4^{a-1}(8b + 7).$$

Cứ làm như vậy sau hữu hạn bước ta có

$$x_{3k+1}^2 + x_{3k+2}^2 + x_{3k+3}^2 = 8b + 7 \quad (k \in N)$$

Điều này là vô lý theo chứng minh trên.

Vậy $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ không thể có dạng $8b + 7$.

Nhận xét: Bài này có thể chứng minh bằng qui nạp theo a.

– Các lời giải khác hoặc lập luận dài dòng hoặc thiếu chính xác.

Đ.B.K.

Bài 12/148: *Cho điểm P nằm trong $\triangle ABC$. Hạ $PA_1 \perp BC$, $PB_1 \perp CA$, $PC_1 \perp AB$. Xét $\triangle A_1B_1C_1$, hạ $PA_2 \perp B_1C_1$, $PB_2 \perp C_1A_1$, $PC_2 \perp A_1B_1$. Xét $\triangle A_2B_2C_2$, hạ $PA_3 \perp B_2C_2$, $PB_3 \perp C_2A_2$, $PC_3 \perp A_2B_2$. Chứng minh rằng $\Delta A_3B_3C_3$ có 3 góc bằng 3 góc của ΔABC.*

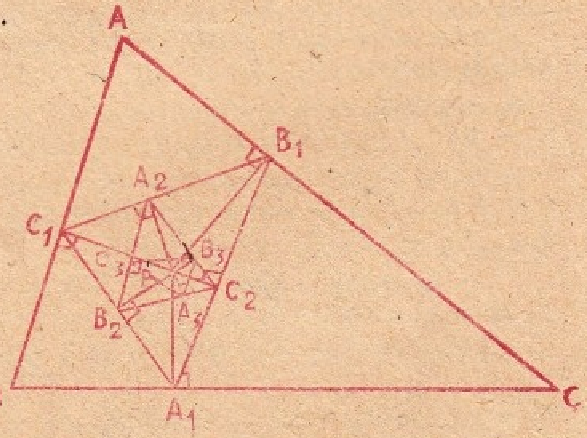
Lời giải. (của nhiều bạn) Do tính chất: tổng 2 góc đối bằng 2v thì tứ giác là nội tiếp, ta có các tứ giác $PA_3C_2B_3$, $PA_2B_1C_2$ và PB_1AC_1 nội tiếp, suy ra:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{PA_3B_3} = \widehat{PC_2A_2} = \widehat{PB_1A_2} = \widehat{PAC_1} \\ \text{Tương tự} \quad \widehat{PA_3C_3} = \widehat{PAB_1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{B_3A_3C_3} = \widehat{B_1AC_1} = \widehat{BAC}.$$

Tương tự ta có $\widehat{A_3B_3C_3} = \widehat{ABC}$, $\widehat{A_3C_3B_3} = \widehat{ACB}$

Vậy $\triangle ABC$ và $\triangle A_3B_3C_3$ có các góc tương ứng bằng nhau.



Nhận xét: Các bạn *Phan Ngọc Hiền* (8CT, Tuy Hòa, Phú Khánh), *Nguyễn Xuân Hương* (8CT, Đông Sơn, Thanh Hóa), *Nguyễn Thị Nguyệt* (8T, PTCS Hoằng Phúc, Hoằng Hóa, Thanh Hóa), *Nguyễn Lê Dũng*, *Bùi Công Minh* (8CT, 9CT, PTCS Trần Quốc Toản, Nha Trang) *Hà Thái Sơn*, (9CT, trường chuyên văn toán thị xã Quảng Ngãi) có lời giải tốt

Đ.B.K.

ĐỀ RA kỳ này

Bài 1/151

Cho dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ có các tính chất $a_n = a_{5n}$, $n \geqslant 1$; $a_{5m+1} = 1$; $a_{3+5m} = 0$ với mọi $m \geqslant 0$.

Chứng minh dãy số không có chu kỳ.

Tạ Văn Tự

Bài 2/151

Cho $f(x) = x^n$, $x = 1, 2, \ldots$ và n là số nguyên dương cố định. Gọi $f(x) = d_1(x)\, d_2(x) \ldots d_{r(x)}(x)$ là biểu diễn thập phân của $f(x)$. Ta thành lập phân số thập phân

$$a = 0{,}1\, d_1(2) d_2(2) \ldots d_{r(2)}(2)\, d_1(3) \ldots$$
$$\ldots d_{r(3)}(3) d_1(4) d_2(4) \ldots$$

Phân số thập phân a có là hữu tỷ đối với giá trị n nào đó hay không?

Đề dự tuyển thi toán quốc tế lần thứ 27

Bài 3/151

Cho dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ với $0 < x_n < 1$ và $x_{n+1}(1 - x_n) > 1/4$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/2$.

Vũ Đình Hòa

Bài 4/151

Giải phương trình $27\cos^4 x + 8\sin x = 12$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 5/151

Trên khoảng $[0, +\infty)$ cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $x, y \in [0, +\infty]$.

Chứng minh rằng:

1) nếu $f(0) \leqslant 0$ thì hàm số $g(x) = f(x)/x$ đơn điệu tăng trên $(0, +\infty)$; Kết quả còn đúng nữa không nếu $f(0) > 0$?

2) Nếu tồn tại $f'(x)$, $f''(x)$ trên $[0, +\infty]$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} (xf'(x) - f(x)) \leqslant 0$ thì hàm số $g(x) = f(x)/x$ đơn điệu giảm trên $(0, +\infty)$.

Đinh Nho Hào

Bài 6/151

Cho ΔABC, các đường cao AA', BB' cắt đường tròn ngoại tiếp ở I, K. Chứng minh rằng nếu ΔABC là nhọn và $A'I = B'K$ thì ΔABC cân.

Đỗ Bá Khôi

Bài 7/151:

Cho $ABCD$ là tứ giác lồi có các đỉnh không nằm trên một đường tròn. Gọi $A'B'C'D'$ là tứ giác có các đỉnh A', B', C', D' là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC. Ta viết $T(ABCD) = A'B'C'D'$. Lại lấy $A''B''D''C'' = T(A'B'C'D')$.

a) Hãy chứng minh $ABCD$ và $A''B''C''D''$ đồng dạng.

b) Hệ số đồng dạng phụ thuộc vào độ lớn các góc của tứ giác $ABCD$. Xác định hệ số này.

Đề dự tuyển thi toán quốc tế lần thứ 27

Bài 8/151:

Cho hai điểm C và D trên nửa đường tròn đường kính AB, M là một điểm di động trên cung CD, MA cắt đoạn CD tại S, MB cắt đoạn CD tại T. Hãy dựng vị trí của điểm M sao cho đoạn ST có độ dài lớn nhất.

Bùi Văn Thanh

Bài 9/151:

Gọi $f(n)$ là số nhỏ nhất các điểm khác nhau trên mặt phẳng sao cho đối với mỗi $k = 1, 2, \ldots n$ có một đường thẳng chứa đúng k điểm này. Chứng minh rằng:

$$f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right]$$

trong đó $[x]$ ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Đề dự tuyển thi toán quốc tế lần thứ 27

Bài 10/151:

Cho $ABCD$ là tứ diện có tổng các cạnh đối diện bằng 1. Chứng minh rằng:

$$r_A + r_B + r_C + r_D \leqslant \sqrt{3}/3.$$

trong đó r_A, r_B, r_C, r_D là các bán kính của các đường tròn nội tiếp các mặt, và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tứ diện $ABCD$ là đều.

Đề dự tuyển thi toán quốc tế lần thứ 27

Bài 11/151:

Chứng minh rằng với mọi số hữu tỷ a, b, c đôi một khác nhau ta đều có:

$$M = 1/(b-c)^2 + 1/(c-a)^2 + 1/(a-b)^2$$

là bình phương của một số hữu tỷ.

Nguyễn Văn Mậu

Bài 12/151:

Cho ΔABC đều, có diện tích S. Trên BC và CA lấy các điểm M và N sao cho $MC = 2MB$; $AN = 2NC$. AM cắt BN tại E. Tính diện tích của ΔEBM.

Nguyễn Văn Mậu

CÁC ĐỀ TOÁN ÔN TẬP

Lớp cuối cấp phổ thông cơ sở

1. Phân tích ra thừa số:

1. $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$

3. $a(b+c)(b^2-c^2) + b(c+a)(c^2-a^2) + c(a+b)(a^2-b^2)$.

2. Cho $2xy - yz + 2xz = 0$. Chứng minh rằng:

$$4x^2y^2(x+y) + y^2z^2(z-y) - 4z^2x^2(2x+z) = 0.$$

3. Cho $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_k/b_k$; n là số nguyên dương:

$c_1, c_2, \ldots c_k$ là các số bất kỳ không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{c_1a_1^n + c_2a_2^n + \ldots + c_ka_k^n}{c_1b_1^n + c_2b_2^n + \ldots + c_kb_k^n}$$

4. Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$). Các đường thẳng qua đỉnh B, C và trung điểm O của đường cao tương ứng đỉnh A cắt các cạnh AB, AC ở M và N. Cho diện tích tam giác ABC bằng S, hãy tính diện tích tứ giác $AMON$.

5. Cho lục giác đều $ABCDEF$; gọi M, N, P là trung điểm tương ứng của các cạnh AB, CD, EF.

1) Chứng minh rằng $\triangle MNP$ đều

2) Tính diện tích ΔMNP nếu diện tích lục giác đều là S

Tạ Văn Tự

Lớp 10

1) Cho

$$x = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}} - 1\right).$$

Chứng minh rằng: $2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

2. Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2+3x+9} = 30$

b) $\sqrt[5]{1+x^2} - \sqrt[5]{1-x^2} = \sqrt[5]{(1-x)^2}$

c) $\sqrt{12 - 12/x^2} - x^2 + \sqrt{x^2 - 12/x^2} = 0$.

3) Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}} + 2\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}} = 3 \\ xy = 3 \end{cases}$

b) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{17}{4}$

$\sqrt{x(x+y)} + \sqrt{x^2+xy+4} = 52$

4. Trên các cạnh AB, BC và CA của ΔABC lấy các điểm M, N và P sao cho $AM : MB = BN : NC = CP : PA = k$. Hãy xác định k để diện tích ΔMNP bằng 0,28 diện tích ΔABC.

5. Cho tam giác ABC vuông ở A có AH, AD là đường cao và phân giác. Gọi r, r_1, r_2 là bán kính của đường tròn nội tiếp các tam giác tương ứng ABC; AHB; AHC. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{2}/AD = 1/AB + 1/AC$

b) $1/AH^2 = 1/AB^2 + 1/AC^2$

c) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$

Tạ Văn Tự

Lớp 11

1. Chứng minh rằng $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

2. Cho $\triangle ABC$ đồng dạng với tam giác có các cạnh là các đường cao của tam giác đã cho. Chứng minh rằng các cạnh của $\triangle ABC$ lập thành một cấp số nhân

3. Cho $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$. Chứng minh rằng

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = 0$$

4. Tính $P = \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ$.

5. Giải phương trình:

$$(3 - 2\sqrt{2})^x + (6 - 4\sqrt{2})^x = 1$$

Nguyễn Văn Mậu

Lớp 12

1. Cho $ac > 0$; $b^2 - 4ac \geqslant 0$; x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$; y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình: $cy^2 + by + a = 0$. Chứng minh rằng

$$\left| x_1^3 + x_2^3 + y_1^3 + y_2^3 \right| \geqslant 4.$$

2. Hãy xác định m sao cho với mọi $x \neq m$ ta đều có:

$$-2 \leqslant \frac{mx - 1}{x - m} \leqslant 3.$$

3. Giải và biện luận phương trình:

$$\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg}(x + \alpha)$$

4. A, B, C là các góc của ΔABC. Chứng minh rằng

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geqslant 1$$

5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$; $CD = b$, các cạnh còn lại bằng c

a) Tìm hệ thức giữa a, b, c để tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

b) Tìm hệ thức giữa a, b, c để tứ diện có các góc nhị diện bằng nhau.

c) Tìm hệ thức giữa a, b, c để tứ diện có các tâm cầu nội ngoại tiếp trùng nhau.

Nguyễn Văn Mậu

ĐỀ TOÁN THI
TUYỂN SINH ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG — THÁNG 6-1986

(180 phút – không kể thời gian đọc và chép đề thi)

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ

§ 1. Đầu đề

Câu I: 1) Giải phương trình

$$\frac{\sin x(\sin x + \cos x) - 1}{\cos^2 x + \sin x + 1} = 0$$

2) Cho tam giác ABC, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Chứng minh rằng tam giác ABC là cân nếu: $a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = c^2\operatorname{cotg}(C/2)$.

Câu II: Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2+1)$ (1), m là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.

2) Tìm m để hàm số đã cho đạt cực đại và cực tiểu tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $1/x_1 + 1/x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

3) Có bao nhiêu đồ thị của họ hàm số (1) đi qua điểm P có hoành độ a, tung độ b cho trước.

Câu III: Tìm m để cho phương trình $(m-3)\log^2_{1/2}(x-4) - (2m+1)\log_{1/2}(x-4) + m + 2 = 0$ có hai nghiệm x', x'' thỏa mãn điều kiện $4 < x' < x'' < 6$.

Câu IV: Cho một đường tròn bán kính R, AB là đường kính cố định, C là một điểm chạy trên đường tròn. Trên đường thẳng đi qua A vuông góc với mặt phẳng của đường tròn, lấy một điểm S sao cho $SA = a < 2R$

1) Từ A kẻ $AI \perp SB$, $AK \perp SC$ (I trên SB, K trên SC). Chứng minh rằng AK vuông góc với mặt phẳng SBC. Tính sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng SBA và SBC theo a, R và $\alpha = \widehat{BAC}$.

2) Tìm vị trí của điểm C trên đường tròn sao cho đường thẳng nối hai điểm giữa E, F theo thứ tự của các đoạn thẳng AC và SB là đường vuông góc chung của hai đoạn thẳng đó.

3) Gọi M là giao điểm của BC và IK. Tìm quỹ tích của M khi C chạy trên đường tròn.

Câu V: Tìm m để cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = |-4x^2 + 2x + m|$$

ứng với $-1 \leqslant x \leqslant 2$ là nhỏ nhất.

GHI CHÚ: – Thí sinh khối B và D *không phải làm*: phần 3) Câu IV và câu V.

– Thí sinh khối cao đẳng, KVO và hợp tác xã dự thí các khối A, B, D *không phải làm*: phần 3) câu II, phần 3) câu IV, câu V.

– Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm!

§ 2. Lời giải.

Câu I: 1) Mẫu số của phương trình có thể viết là $-\sin^2 x + \sin x + 2$, nó bằng 0 khi $\sin x = -1$. Vậy phương trình có nghĩa khi $\sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\pi/2 + 2k\pi$. Với điều kiện ấy, phương trình tương đương với

$0 = \sin^2 x + \sin x\cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = \cos x(\sin x - \cos x)$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\sin x = \cos x$

$\Rightarrow x = -\pi/2 + 2k\pi$; $x = \pi/2 + 2k\pi$; $x = \pi/4 + k\pi$,

Họ nghiệm đầu phải loại, vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = \pi/2 + 2k\pi;\ x = \pi/4 + k\pi$$

2) Theo định lý hàm sin, $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, R là bán kính vòng tròn ngoại tiếp. Vậy hệ thức đã cho có thể viết

$2\sin^2 A\sin B\cos B + 2\sin^2 B\sin A\cos A =$
$= \sin^2 C\operatorname{cotg}(C/2)$.

$\Leftrightarrow 2\sin A\sin B\sin(A+B) = \sin^2 C\operatorname{cotg}(C/2)$.

Vì $C = \pi - (A+B)$ nên $\sin C = \sin(A+B)\ (\neq 0)$ do đó ta được

$2\sin A\sin B = \sin C\operatorname{cotg}(C/2) = 2\cos^2(C/2) = 1 + \cos C \Leftrightarrow \cos(A-B) - \cos(A+B) = 1 - \cos(A+B)$
$\Leftrightarrow \cos(A-B) = 1$.

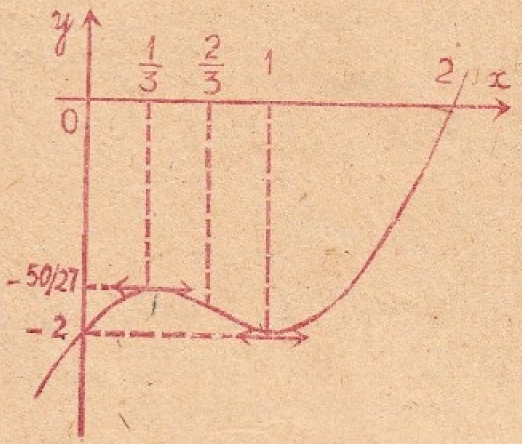
Vì A, B là các góc của một tam giác nên từ hệ thức trên suy ra $A - B = 0 \Rightarrow A = B$, ABC là tam giác cân.

Câu II. 1) Khi $m = 0$, $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ nó được xác định với mọi x.

$y' = 3x^2 - 4x + 1$, $y' = 0$ khi $x = 1/3$, $x = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$1/3$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-50/27$	↘	-2	↗	$+\infty$



$y'' = 6x - 4$. $y'' = 0$ khi $x = 2/3$ và đổi dấu khi x đi qua giá trị 2/3, đồ thị có điểm uốn tại $x = 2/3$.

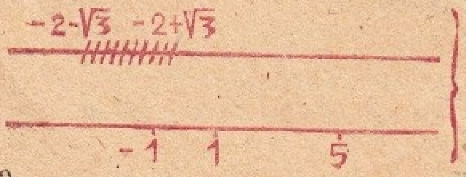
Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại $y = -2$, cắt trục hoành tại $x = 2$.

2) $y' = 3x^2 + 4(m-1)x + m^2 - 4m + 1$. Đó là một tam thức bậc hai. Do đó điều kiện cần và đủ để cho điều kiện của đầu bài được thỏa mãn là y' phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $(x_1 + x_2)/x_1x_2 = 1/2 \times (x_1 + x_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1/x_1x_2 - 1/2) = 0$

Nhưng theo định lý Viet $x_1 + x_2 = -4/3 \times (m-1)$, $x_1x_2 = 1/3 \times (m^2 - 4m + 1)$. Vậy ta phải có

$$\begin{cases} \Delta' = 4(m-1)^2 - 3(m^2 - 4m + 1) > 0 \Leftrightarrow \\ -\dfrac{4}{3}(m-1)\left(\dfrac{3}{m^2 - 4m + 1} - \dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 1 > 0 \\ \dfrac{(m-1)(-m^2 + 4m + 5)}{m^2 - 4m + 1} = 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow m = 1$ hoặc $m = 5$.

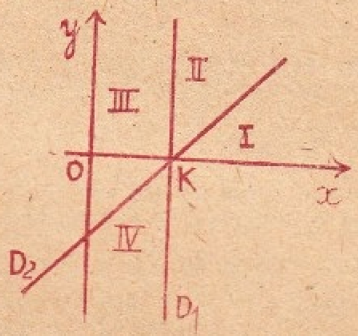
3) Đồ thị của hàm số (1) đi qua điểm $P(a, b)$ khi và chỉ khi:
$b = a^3 - 2(m-1)a^2 + (m^2 - 4m + 1)a - 2(a^2 + 1)$
$(a-2)m^2 + 2a(a-2)m + a^3 - 2a^2 + a - 2 - b = 0$ (2).

Số đồ thị của họ hàm số (1) đi qua điểm P bằng số nghiệm của phương trình (2) (xem là phương trình đối với m).

Giả sử $a = 2$. Khi ấy hai số hạng đầu của vế trái của (2) bằng 0, do đó phương trình (2) được thỏa mãn với mọi m nếu
$a^3 - 2a^2 + a - 2 - b = b = 0$, nó vô nghiệm nếu $b \neq 0$.

Giả sử $a \neq 2$. Khi ấy (2) là phương trình bậc hai, nó có 2 nghiệm, 1 nghiệm hay 0 nghiệm tùy theo biệt thức Δ' là dương, bằng 0 hay âm. Ta có
$\Delta' = a^2(a-2)^2 - (a-2)(a^3 - 2a^2 + a - 2 - b) = (a-2)(-a+2+b)$.

Nếu $b > 0$ thì $\Delta' > 0$ khi $2 < a < b+2$, $\Delta' = 0$ nếu $a = b+2$, $\Delta' < 0$ nếu $a < 2$ hoặc $a > b+2$.



Nếu $b < 0$ thì $\Delta' > 0$ khi $b + 2 < a < 2$, $\Delta' = 0$ nếu $a = b + 2$, $\Delta' < 0$ nếu $a < b + 2$ hoặc $a > 2$.

Tóm lại, hai đường thẳng D_1 (có phương trình $x = 2$), D_2 (có phương trình $y = x - 2$) chia mặt phẳng thành 4 miền I, II, III, IV (xem hình vẽ trên). D_1 và D_2 gặp nhau ở điểm $K(2, 0)$; Nếu P trùng với K thì mọi đồ thị của họ (1) đều đi qua P. Nếu P nằm trong II hoặc IV thì có 2 đồ thị của họ (1) đi qua P. Nếu P nằm trên D_2 và không trùng với K thì có 1 đồ thị của (1) đi qua P. Còn nếu P nằm trong I hoặc III hay nếu P nằm trên D_1 và không trùng với K thì không có đồ thị nào của họ (1) đi qua P.

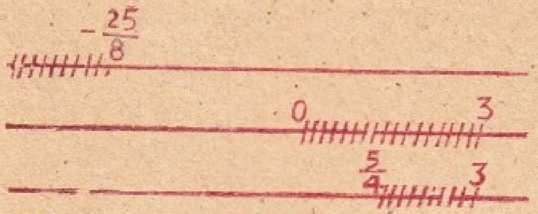
Câu III. Đặt $X = \log_{1/2}(x-4)$. Phương trình đã cho có thể viết là
$f(X) = (m-3)X^2 - (2m+1)X + m + 2 = 0$ (3)

Vì $4 < x < 6$ nên $0 < x - 4 < 2$, do đó $X = \log_{1/2}(x-4)$ có nghĩa. Hơn nữa
$X = \log_{1/2}(x-4) > \log_{1/2}2 = -1$ vì cơ số $1/2 < 1$

Cũng vì hàm số $\log_{1/2}(x-4)$ đơn điệu giảm, nên bài toán qui về tìm m để cho phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn -1. Muốn vậy ta phải có:

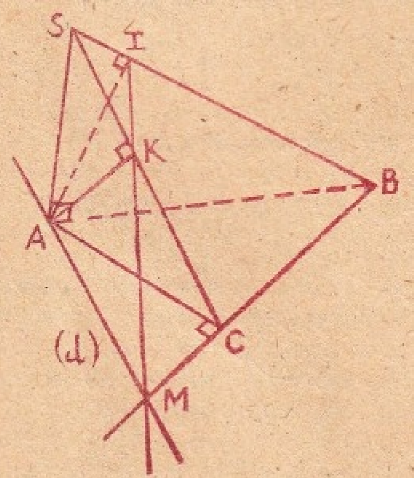
$$\begin{cases} \Delta = (2m+1)^2 - 4(m-3)(m+2) = 8m+25 > 0 \\ (m-3)f(-1) = 4m(m-3) > 0 \\ S/2 - (-1) = (2m+1)/2(m-3) + 1 = \\ \qquad = (4m-5)/2(m-3) > 0 \end{cases}$$

Vậy $-25/8 < m < 0$ hoặc $m > 3$.



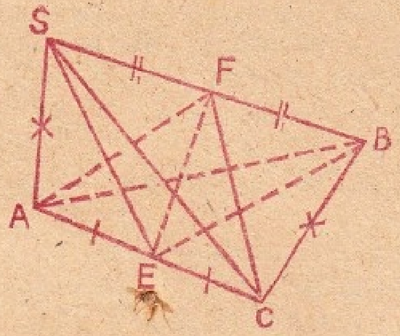
Câu IV. 1) Vì $BC \perp AC$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC)$ $\Rightarrow BC \perp AK$. Mặt khác $SC \perp AK \Rightarrow AK \perp (SBC)$. $SB \perp AK$, $SB \perp AI \Rightarrow SB \perp (AIK) \Rightarrow SB \perp IK \Rightarrow$ $\widehat{AIK}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng SBA, SBC. Ta có $\sin\widehat{AIK} = AK/AI$. Trong tam giác vuông ASC, ta có $AK = AS \cdot AC/SC$, trong tam giác vuông ASB, $AI = AS \cdot AB/SB$. Nhưng $AB = 2R$, $AC = 2R\cos\alpha$, $SB = \sqrt{a^2 + 4R^2}$, $SC = \sqrt{a^2 + 4R^2\cos^2\alpha}$

$$\sin\widehat{AIK} = \sqrt{\frac{a^2 - 4R^2}{a^2 + 4R^2\cos^2\alpha}} \times \cos\alpha.$$



2) AF là trung tuyến của tam giác SAB vuông góc ở $A \Rightarrow AF = 1/2 \cdot SB$. Cũng vậy trong tam giác SCB vuông góc ở C ta có $CF = 1/2 \cdot SB \Rightarrow AF = CF$. Trong tam giác cân AFC, trung tuyến FE cũng là đường cao $\Rightarrow FE \perp AC$.

Nếu $EF \perp SB$, thì vì F là điểm giữa của SB, tam giác SEB cân $\Rightarrow SE = EB \Rightarrow$ hai tam giác vuông SAE, BCE bằng nhau $\Rightarrow BC = SA = a$. Đảo lại nếu lấy điểm C trên đường tròn sao cho $BC = SA = a$ thì hai tam giác vuông SAE, BCE bằng nhau $\Rightarrow SE = EB \Rightarrow$ đường trung tuyến EF của tam giác cân SEB cũng là đường cao $\Rightarrow EF \perp SB$.



Tóm lại, điều kiện của đầu bài được thỏa mãn, nếu lấy điểm C trên đường tròn sao cho $BC = a$. Vì $SA = a < 2R$ nên có 2 vị trí của C như vậy trên đường tròn.

3) Điểm M vừa thuộc mặt phẳng của đường tròn, vừa thuộc mặt phẳng đi qua I vuông góc với SB, nên M nằm trên giao tuyến (d) của hai mặt phẳng ấy. Rõ ràng (d) đi qua A. Hơn nữa (d) vuông góc với SB nên nó cũng vuông góc với hình chiếu của SB lên mặt phẳng của đường tròn, tức là $(d) \perp AB \Rightarrow (d)$ chính là tiếp tuyến với đường tròn đường kính AB tại A.

Đảo lại, lấy một điểm M bất kỳ trên (d). Nối MB, nó gặp đường tròn ở C, nối SC, nó gặp đường thẳng IM ở K. Vì $BC \perp SA$, $BC \perp AC$ $\Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$. Ta lại có $SB \perp (AIM)$ $\Rightarrow SB \perp AK \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB$.

Vậy quỹ tích phải tìm là đường thẳng (d).

Câu V. Đặt $g(x) = -4x^2 + 2x + m$, nó được xác định với mọi x. $g'(x) = -8x + 2$. $g'(x) = 0$ khi $x = 1/4$. Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[-1, 2]$, ta phải tính $g(-1)$, $g(1/4)$, $g(2)$. Ta có $g(-1) = -6 + m$, $g(1/4) = 1/4 + m$, $g(2) = -12 + m$. Nếu ta thay đổi m thì đồ thị của hàm $g(x)$ sẽ tịnh tiến theo một vectơ song song với trục Oy. Do đó muốn cho giá trị lớn nhất của hàm $g(x)$ trên đoạn $[-1, 2]$ là nhỏ nhất, chỉ việc chọn m sao cho hai giá trị $1/4 + m$ và $-12 + m$ là đối nhau, tức là

$$-12 + 1/4 + 2m = 0 \Rightarrow m = 47/8.$$

Trao đổi với bạn đọc

SỬ DỤNG GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ BÉ NHẤT TRONG CHỨNG MINH

LÊ ĐÌNH THỊNH

TRONG các kỳ thi vào Đại học thường gặp các bài toán mà nếu dùng giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số y (gọi tắt là y_{max} và y_{min}) thì cách giải bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn nhiều.

Thí dụ 1. (Đề thi Đại học A – B – D/1985).

Tìm m để cho hàm số

$$y = 2mx - 2\cos^2 x - m\sin x\cos x + 1/4 \times \cos^2 2x$$

luôn luôn đồng biến.

Giải. Hàm số xác định với mọi x

$$y' = 2m + 2\sin 2x - m\cos 2x - 1/2\ \sin 4x$$
$$= (m + \sin 2x)(2 - \cos 2x).$$

Để hàm số luôn luôn đồng biến, cần và đủ là $y' \geqslant 0\ \forall x$. Vì $2 - \cos 2x > 0\ \forall x$, nên chỉ cần tìm m để $g(x) = m + \sin 2x \geqslant 0\ \forall x$ là đủ. Muốn vậy $g_{min} = m - 1 \geqslant 0$ hay $m \geqslant 1$.

Thí dụ 2. (Đề thi Đại học A/1978). Hãy tìm tất cả các giá trị của m để

$$\cos 2x + m\cos x + 4 \geqslant 0 \quad \forall x$$

Giải. Gọi vế trái là y và đặt $t = \cos x$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, ta được hàm số xác định với mọi t: $-1 \leqslant t \leqslant 1$; $y = 2t^2 + mt + 2$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$; $y' = 4t + m = 0$ khi $t = -m/4$. Vậy để $y \geqslant 0\ \forall x$ chỉ cần $y_{min} \geqslant 0\ \forall t$: $-1 \leqslant t \leqslant 1$ là đủ. Ta có:

1) $-m/4 < -1$, $m > 4$ thì $y_{min} = y(-1) = 4 - m \geqslant 0 \Leftrightarrow m \leqslant 4$, mâu thuẫn với $m > 4$.

2) $-m/4 > 1$, $m < -4$ thì $y_{min} = y(1) = 4 + m \geqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant -4$, mâu thuẫn với $m < -4$.

3) $-1 \leqslant -m/4 \leqslant 1$, $-4 \leqslant m \leqslant 4$ thì $y_{min} = y(-m/4) = 2 - m^2/8 \geqslant 0 \Rightarrow m^2 \leqslant 16 \Rightarrow -4 \leqslant m \leqslant 4$.

Vậy để $y \geqslant 0\ \forall x$ thì $-4 \leqslant m \leqslant 4$.

Thí dụ 3. Chứng minh rằng

$$4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x \geqslant -7 \quad \forall x$$

Giải. Xét $y = 4\cos 8x + 8\cos 4x$. Đặt $t = \cos 4x$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Khi đó $y = 8t^2 + 8t - 4$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Đây là parabôn quay bề lõm về phía trên, có đỉnh $t = -1/2$, nên $y_{min} = y(-1/2) = -6$

Vậy $y = 4\cos 8x + 8\cos 4x \geqslant y_{min} = -6 \quad \forall x$, và $4\cos 8x + 8\cos 4x + \cos x \geqslant -6 - 1 = -7\ \forall x$

Thí dụ 4. Với m nào thì hàm số

$$y = 1/3x^3 + m(x + 1)$$

đồng biến khi $x > 5$.

Giải. Ta có $y' = x^2 + m$. Để hàm số đồng biến khi $x > 5$, cần và đủ là $y' \geqslant 0\ \forall x > 5$. Muốn vậy $y'_{min} \geqslant 0$ khi $x > 5$ là đủ. Vì y' là parapôn quay bề lõm về phía trên, có đỉnh tại điểm $x = 0$, nên y' đồng biến khi $x > 5$ và $y'_{min} = y'(5) = 25 + m \geqslant 0 \Rightarrow m \geqslant -25$.

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$(2 + \sin x)(6 - \sin x) = 16 \cdot 10^{|y|}$$

Giải. Gọi vế trái là g và đặt $t = \sin x$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ ta được $g = (2 + t)(6 - t) = -t^2 + 4t + 12$. Đây là một parapôn quay bề lõm về phía dưới, có đỉnh tại điểm $t = 2$, nên trên đoạn $-1 \leqslant t \leqslant 1$ hàm g đồng biến, do đó $g_{max} = g(1) = 15$. Vậy $g \leqslant g_{max} = 15\ \forall x$. Còn vế phải là hàm đồng biến, đạt giá trị bé nhất là 16 khi $|y| = 0$.

Vậy $16 \cdot 10^{|y|} \geqslant 16$. Bởi vậy phương trình vô nghiệm.

Thí dụ 6. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$$

trong đó a, b, c là các cạnh, S là diện tích tam giác. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

Giải. Theo công thức $S = 1/2 \times ab\sin C$ và công thức hàm số côsin: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ ta được

$$2(a^2 + b^2) - 2ab\cos C \geqslant 2ab\sin C \cdot \sqrt{3}$$

hay

$$a^2 + b^2 - 2ab(1/2 \cdot \cos C + \sqrt{3}/2\ \sin C) \geqslant 0$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(C - 60^\circ) \geqslant 0.$$

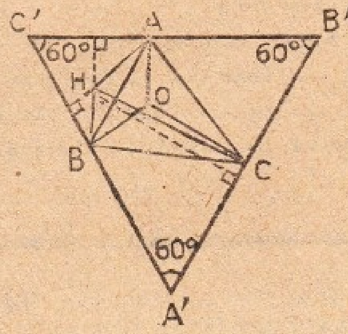
Muốn vậy giá trị bé nhất của vế trái phải $\geqslant 0$. Giá trị bé nhất đạt được khi $\cos(C - 60^\circ) = 1$, tức là

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqslant 0 \text{ đúng.}$$

Dấu đẳng thức đạt được khi $a = b$ và $\cos(C - 60^\circ) = 1$, $C - 60^\circ = 0$, $C = 60^\circ$. Vậy dấu đẳng thức đạt được khi tam giác là tam giác đều.

Thí dụ 7. ABC là tam giác có các góc đều bé hơn 120°. Xét tất cả các hình chóp tam giác $SABC$ nó chung đáy ABC và có cùng thể tích. Hãy xác định hình chóp có tổng các cạnh bé nhất.

Giải. Vì các hình chóp chung đáy, nên chỉ cần xác định hình chóp có tổng các cạnh $SA + SB + SC$ bé nhất là đủ. Gọi H là chân đường cao SH, khi đó ta chỉ cần tìm hình chóp có tổng các hình chiếu $HA + HB + HC$ bé nhất là đủ.



Vì các góc của tam giác ABC đều bé hơn $120°$, nên tồn tại duy nhất một điểm O trong tam giác, nhìn các cạnh đều dưới một góc bằng $120°$ (Bạn đọc tự chứng minh). Hình chóp cần tìm là hình chóp có chân đường cao H trùng với điểm O.

Thật vậy, qua A, B, C kẻ các đường thẳng tương ứng $\perp OA, OB, OC$ tạo thành $\Delta A'B'C'$, khi đó tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều.

Nếu $H \equiv O$ thì

$$HA + HB + HC = OA + OB + OC = h;$$

h là đường cao tam giác đều $A'B'C'$. Nếu H khác O thì

$$HA + HB + HC > HP + HQ + HR = h$$

(vì tổng khoảng cách từ một điểm trong tam giác đều đến các cạnh không đổi, bằng chiều cao của tam giác, còn khoảng cách từ một điểm ngoài tam giác đều đến các cạnh lớn hơn chiều cao tam giác đều. Bạn đọc tự chứng minh bằng phương pháp diện tích)

Cuối cùng, mời các bạn tự giải một số bài tập sau đây:

1. Chứng minh rằng hàm số

$$y = 7x + 1/2.\sin 8x + 2\sin 4x + \sin x$$

luôn luôn đồng biến.

2. Hãy tìm tất cả các giá trị của m để

$$1/3\sin 3x + m\sin 2x + \sin x \geqslant 0$$

khi $0 < x < \pi$.

3. Giải phương trình

$$(8 - \cos x)(2 + \cos x) = 21.5^{|y|}$$

4. Chứng minh rằng, trong mọi tam giác ta đều có

$$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$$

trong đó a, b, c là các cạnh, S là diện tích tam giác. Khi nào xảy ra dấu đẳng thức.

5. Trong các tam giác có cùng diện tích, hãy tìm tam giác có tổng bình phương các cạnh bé nhất.

TOÁN HỌC và ĐỜI SỐNG

ỨNG DỤNG CÁC PHƯƠNG PHÁP TOÁN XÁC ĐỊNH HỆ THỐNG SINH THÁI CỦA BIỂN

GẦN đây các nhà toán học thuộc trung tâm khoa học Bắc Capcado đã chuyển những tư liệu về cuộc sống đa dạng của biển Adốp và giới động, thực vật giàu có của nó sang ngôn ngữ toán học và đã xác định được trạng thái hoạt động sống bình thường của biển Adốp.

Từ xưa biển Adốp đã nổi tiếng là giàu cá. Song trong 30 năm trở lại đây diện tích cá sống và trữ lượng cá chiên, cá chép giảm đi nhiều do sự phát triển mạnh mẽ của các ngành trồng trọt, hàng hải, hồ chứa nước ở Cuban... Việc đó đã làm ảnh hưởng nghiêm trọng đến hoạt động sống bình thường, phá vỡ sự cân bằng sinh thái của biển, gây nhiều thiệt hại về kinh tế ở những vùng lân cận.

Để khắc phục những thiệt hại đó, vấn đề quan trọng là phải xác định được trạng thái hoạt động sống bình thường của biển Adốp và đưa ra các biện pháp hiệu quả để tái lập lại sự cân bằng sinh thái của nó. Sử dụng các phương pháp toán học, các nhà toán học đã phân tích và đưa ra "chân dung" của toàn bộ sinh thái của biển A dốp. Mô phỏng một cách tỷ mỷ những quá trình thủy địa, vật lý, hóa học và sinh học, mẫu này cho phép đưa ra dự án trên cơ sở khoa học 120 thành phần chính của hệ thống sinh thái biển như trữ lượng cá, các chất gây nhiễm bẩn, khối lượng sinh học... Trên máy tính điện tử xử lý tổ hợp các tình huống có thể xảy ra, các nhà toán học Bắc Capcado đã nghiên cứu thành công vấn đề trên. Nhà nước chi phí nhiều phương tiện để thực hiện các chỉ dẫn của các nhà toán học trên thực tiễn: 8 cơ sở nuôi cá chuyên môn hóa được xây dựng; nhiều công trình tháo cá và các trạm thủy lợi ở lưu vực sông Đôn cũng được xây dựng...

Phương pháp do các nhà toán học đưa ra đối với biển Adốp đã mang lại nhiều lợi ích trên thực tế và đang được áp dụng để lập mẫu hệ thống sinh thái của biển Đen và hồ Khanca. Nhóm các nhà toán học đề xuất phương pháp độc đáo này đã được tặng phần thưởng quốc gia Liên Xô.

TẠ VINH THÔNG

Theo «Khoa học và Đời sống» (Liên Xô)

VÔ CÙNG THƯƠNG TIẾC GIÁO SƯ TẠ QUANG BỬU

Giáo sư Tạ Quang Bửu, sinh ngày 23 tháng 7 năm 1910, đã từ trần hồi 11 giờ 30 phút ngày 21 tháng 8 năm 1986, tại Hà Nội. Sinh thời, giáo sư Tạ Quang Bửu rất quan tâm tới việc xây dựng và phát triển ngành toán học Việt Nam.

Với lòng ưu ái đặc biệt đối với những năng khiếu toán học trẻ, Giáo sư đã có đóng góp quan trọng trong việc sáng lập và xây dựng báo Toán học và Tuổi trẻ.

Thay mặt Hội đồng biên tập, Tòa soạn, Cộng tác viên và Bạn đọc của báo Toán học và Tuổi trẻ, chúng tôi xin gửi tới thân quyến giáo sư lời chia buồn sâu sắc nhất.

BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

BA VỊ THẦN

ĐỀN kia ba vị thần ngồi
Một thần *Dối Trá* suốt đời nói sai
Khôn Ngoan thần nữa, thứ hai
Nói năng khi đúng, khi sai khó lường
Một người mộ đạo xa phương
Tìm thần *Công Lý* dâng hương giãi bày,
Phân minh, chính trực thần này
Cất lời là đúng, lòng ngay, dạ hiền
Khách vào vái lạy ba bên,
Bỗng thần ngồi giữa ngẩng lên cả cười
« Ta đây Dối Trá nuốt lời »
Khấn chi cho nhọc hỡi người phương xa. »
Vội quay sang phải lân la
Hỏi: « Thần Công Lý bên tòa cạnh ông? »
Lắc đầu, thần đáp rằng « Không »
« Khôn Ngoan thần ấy chẳng mong đâu mà! »
Hoang mang người khách phương xa
Biết ai Công Lý giữa ba vị thần?

Xuân Huy

Giải đáp bài

ĐƯỢC HỎI 4 CÂU

Bốn câu hỏi của Tám có thể là như sau:

1. Đây là trại của lớp 9A hoặc 9B phải không?
2. Đây là trại của lớp 9C phải không?
3. Bạn là người của lớp 9C phải không?
4. Đây là trại của lớp 9A phải không?

Thật vậy. Nếu hai câu đáp cho hai câu hỏi 1 và 2 đều là *gật* hoặc đều là *lắc*. Tám biết ngay rằng người trả lời Tám là người của lớp 9C. Khi đó nếu câu đáp cho câu hỏi 3 là *lắc* nghĩa là câu đó nói dối, suy ra câu đáp cho câu hỏi 2 là nói thật. Vậy nếu câu đáp câu hỏi 2 là *gật* thì Tám không cần hỏi câu thứ tư nữa. Nếu là *lắc* thì Tám phải hỏi câu 4 và biết chắc rằng câu đáp là nói thật. Nếu câu đáp cho câu hỏi 3 là *gật* nghĩa là câu đó nói thật, suy ra câu đáp cho câu hỏi 2 là nói dối. Nếu câu đáp cho câu hỏi 2 là *lắc* thì Tám không cần hỏi câu 4 nữa. Nếu là *gật* thì Tám phải hỏi câu 4 và biết rằng câu đáp cho câu hỏi này là nói dối.

Nếu hai câu đáp cho 2 câu hỏi 1 và 2 là một *gật* một *lắc* thì Tám biết ngay người Tám hỏi là người của lớp 9A hoặc 9B. Nếu câu đáp cho câu hỏi 3 là *lắc* thì người trả lời Tám là người lớp 9A và Tám sẽ phải hỏi câu 4 nếu câu đáp cho câu hỏi 2 là *lắc*. Nếu câu đáp cho câu hỏi 3 là *gật* thì người trả lời Tám là người lớp 9B và Tám sẽ phải hỏi câu 4 nếu câu đáp cho câu hỏi 2 là *gật*.

Bình Phương

Giải đáp bài

SẮP ĐŨA

Bốc chẵn có thể
Lẻ cả hai màu
Lấy tròn mười chiếc
Không bảo đảm đâu
Bốc lẻ ắt sẽ
Lẻ một màu thôi
Muốn đẹp năm đôi
Chỉ cần mười một.

Phạm Quang Giám

In 6200 bản tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ — Hà Nội.
Số in 174/86 In xong và gửi lưu chiểu tháng 10/1986
Chỉ số: 12884

Giá: 2đ00