TOÁN HỌC TUỔI TRẺ

VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

6
1985

Số 146

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói: 52825

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH NGOÀI HAI VECTƠ TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

NGUYỄN THÚC HÀO

Trong số 2 – 1985, tôi đã giới thiệu với bạn đọc tích ngoài của hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$ như là một hàm tuyến tính, phản xứng của chúng. Đặc biệt một tính chất quan trọng là: với $\vec{x}$ và $\vec{y}$ là hai vectơ khác không, thì chúng là *đồng phương* nếu và chỉ nếu

$$[\vec{x}, \vec{y}] = 0.$$

Trong bài này, xin giới thiệu một số vấn đề hoặc bài toán là những ứng dụng của tích ngoài.

I. Điều kiện thẳng hàng cho 3 điểm.

Trong mặt phẳng, ta hãy chọn một điểm O tùy ý. Mỗi điểm M của mặt phẳng sẽ xác định một vectơ $\vec{r} = \vec{OM}$. Ngược lại, nếu cho sẵn điểm O và vectơ $\vec{r}$, thì điểm M là hoàn toàn xác định. Vectơ $\vec{OM}$, có gốc O định sẵn, gọi là *vectơ bán kính* của điểm M. Nó là một *vectơ buộc*. Để đơn giản cách viết, ta đặt:

$$\vec{OM} = \vec{M}$$

Để cho gọn hơn nữa, ta qui ước *bỏ cả dấu mũi tên* và đặt

$$\vec{OM} = M \quad (1)$$

Bây giờ cho 3 điểm bất kỳ A, B, C. Chúng sẽ thẳng hàng nếu và chỉ nếu $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ là đồng phương, tức là tích ngoài của chúng bằng 0:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = 0 \quad (2)$$

nhưng:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = B - A$$
$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = C - A$$

Vậy:

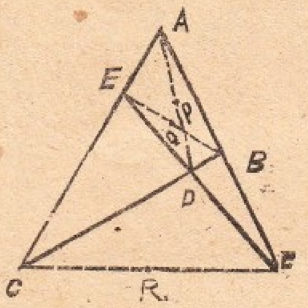
$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = [B - A, C - A]$$
$$= [B, C] + [C, A] + [A, B]$$

Kết quả là: *Ba điểm A, B, C là thẳng hàng nếu và chỉ nếu:*

$$[A, B] + [B, C] + [C, A] = 0 \quad (3)$$

Tất nhiên, khi áp dụng (3), ta được chọn tùy ý gốc O của các vectơ bán kính của A, B, C.

2. Hình tứ giác hoàn toàn. Cho 4 đường thẳng bất kỳ. Chúng giao nhau từng cặp tại 6 điểm A, B, C, D, E, F (xem hình 1). Một hình như thế được gọi là một *tứ giác hoàn toàn*. Nó có 4 *cạnh* là 4 đường thẳng đã cho và 6 *đỉnh* là các giao điểm của 4 cạnh kết hợp từng đôi một. Hai đỉnh gọi là *đối diện* nếu chúng thuộc hai cặp cạnh khác nhau. Trong hình, các cặp (A, D), (B, E), (C, F) là những cặp đỉnh đối diện. Các đoạn thẳng nối các cặp đỉnh đối diện gọi là *đường chéo*. Ta có định lý: *Trong một tứ giác hoàn toàn, trung điểm của các đường chéo là 3 điểm thẳng hàng.*



Chứng minh.

Ta gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AD, BE, CF thì:

$$P = 1/2.\,(A + D), \qquad Q = 1/2.\,(B + E),$$
$$R = 1/2.\,(C + F).$$

Theo (3), điều kiện thẳng hàng cho P, Q, R là:

$$[A + D,\ B + E] + [B + E,\ C + F] + [C + F,\ A + D] = 0.$$

Khai triển các tích ngoài, ta có:

$$[A, B] + [A, E] + [D, B] + [D, E] + [B, C] + [B, F] + [E, C] + [E, F] + [C, A] + [C, D] + [F, A], [F, D)] = 0 \qquad (4)$$

Nhưng các bộ ba điểm sau đây là thẳng hàng:

(A, B, F), (A, E, C), (D, E, F), (D, B, C)

Cho nên ta có:

$$\left.\begin{aligned} &[A, B] + [B, F] + [F, A] = 0\\ &[A, E] + [E, C] + [C, A] = 0\\ &[D, E] + [E, F] + [F, D] = 0\\ &[D, B] + [B, C] + [C, D] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Các đẳng thức (5) kéo theo điều kiện (4) và như thế là chứng minh cho định lý.

3. Định lý Menelaus. Cho tam giác ABC. Trên mỗi cạnh (kéo dài) BC, CA, AB lần lượt cho các điểm A', B', C'. Ta hãy viết điều kiện thẳng hàng cho 3 điểm A', B', C'. Ta gọi α, β, γ các tỷ số mà A', B', C' lần lượt chia các đoạn BC, CA, AB:

$$\alpha = \left(\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\right),\ \beta = \left(\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}\right),\ \gamma = \left(\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}\right),$$

Ta suy ra chẳng hạn

$$\alpha(C - A') = B - A' \Rightarrow (1 - \alpha)A' = B - \alpha C$$
$$\Rightarrow A' = 1/(1 - \alpha)\,.\,(B - \alpha C).$$

Cũng làm như vậy đối với B' và C', cuối cùng ta được

$$A' = \frac{B - \alpha C}{1 - \alpha},\ B' = \frac{C - \beta A}{1 - \beta},\ C' = \frac{A - \gamma B}{1 - \gamma}. \qquad (6).$$

Điều kiện cần và đủ cho A', B', C' thẳng hàng là:

$$[A', B'] + [B', C'] + [C', A'] = 0.$$

Thay các giá trị (6) vào, ta sẽ được:

$$([A, B] + [B, C] + [C, A])(1 - \alpha\beta\gamma) = 0$$

Nhưng A, B, C không thẳng hàng, cho nên:

$$[A, B] + [B, C] + [C, A] \neq 0$$

Vậy điều kiện cần và đủ cho A', B', C' thẳng hàng là

$$\alpha.\beta.\gamma = 1 \qquad (7)$$

4. Tỷ số đơn, tỷ số kép, hàng và chùm điều hòa.

a) Tỷ số đơn của ba điểm A, B, C thẳng hàng, theo thứ tự, là một số thực ρ sao cho:

$$\rho\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \qquad (8)$$

Ta ký hiệu ρ bằng cách viết:

$$\rho = (A, B, C) \qquad (9)$$

Từ (8) suy ra:

$$\rho(B - C) = (A - C).$$

Với gốc O *không nằm trên đường thẳng* A, B, C ta hãy lấy tích *ngoài của C với hai vế*, sẽ được

$$\rho[C, B] = [C, A]$$
$$\Rightarrow \rho = (A, B, C) = [C, A]/[C, B] \qquad (10)$$

b) Tỷ số kép của 4 điểm thẳng hàng A, B, C, D, theo thứ tự, ký hiệu là (A, B, C, D), định nghĩa là một số thực xác định bởi hệ thức:

$$(A, B, C, D) = (A, B, C) : (A, B, D)$$

tức là:

$$(A, B, C, D) = [C, A]/[C, B] : [D, A]/[D, B] \qquad (11).$$

Gốc O phải ở *ngoài* đường thẳng.

Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng, được gọi là một *hàng điểm điều hòa* nếu

$$(A, B, C, D) = -1 \qquad (12)$$

tức là

$$[C, A]/[C, B] : [D, A]/[D, B] = -1 \qquad (13)$$

c) Tỷ số kép của một chùm đường thẳng gồm 4 tia OA, OB, OC, OD, ký hiệu là (OA, OB, OC, OD), là số thực

$$(OA, OB, OC, OD) = [C, A]/[C, B] : [D, A]/[D, B] \qquad (14).$$

Điều cần chứng minh ngay để cho định nghĩa trên đứng vững là nó *không phụ thuộc cách chọn các điểm A, B, C, D* trên mỗi tia (tia ở đây là đường thẳng). Thực vậy, nếu ta lần lượt thay các vectơ A, B, C, D bằng αA, βB, γC, δD (với

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là những số thực tùy ý) thì biểu thức (14) vẫn giữ nguyên giá trị của nó. Bạn đọc có thể tự chứng minh điều đó.

Một nhận xét quan trọng là nếu ta chọn A, B, C, D trên một đường thẳng cát tuyến của chùm, thì ta thấy rằng: *tỷ số kép của 4 đường thẳng đồng qui cũng là tỷ số kép của 4 điểm giao mà chúng xác định trên một cát tuyến bất kỳ.*

Chùm $\{OA, AB, OC, OD\}$ được gọi là một *chùm điều hòa* nếu tỷ số kép của nó bằng -1:

$$(OA, OB, OC, OD) = -1$$

Theo nhận xét trên, nếu một chùm 4 đường thẳng là điều hòa, thì nó giao với mọi cát tuyến thành 4 điểm của một hàng điều hòa. Ngược lại, nếu ta nối điểm O với 4 điểm của một hàng điều hòa trên một đường thẳng không qua O, thì ta được một chùm điều hòa.

5. Đường thẳng song song.

Hai đường thẳng *phân biệt*, AB và CD, là song song khi và chỉ khi tích ngoài:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = 0$$

Chẳng hạn cho tam giác OAB, và hai điểm A' trên OA, B' trên OB. Với O là gốc thì có thể đặt:

$$A' = \alpha A, \quad B' = \beta B$$

Tích ngoài $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}]$ viết được là:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}] = [B - A, \beta B - \alpha A] = (\alpha - \beta)\,[A, B].$$

Do $[A, B] \neq 0$ cho nên tích ngoài $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}] = 0$ nếu và chỉ nếu $\alpha = \beta$. Đó chính là định lý Thales dưới dạng thu gọn.

6. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Chẳng hạn, muốn có khoảng cách δ từ điểm M đến đường thẳng AB thì chỉ có việc chia diện tích tam giác MAB cho AB rồi nhân 2:

$$\delta = \frac{2S_{MAB}}{AB}$$

Hay là
$$\delta = \frac{[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}]}{AB} \qquad (15)$$

trong đó tích ngoài phải lấy theo chiều quay *dương* (ngược chiều kim đồng hồ).

7. Một bài toán thi vào Đại học 1984.

Đề bài. Trong mặt phẳng cho hai đoạn thẳng cố định AB, CD, theo thứ tự, nằm trên hai đường thẳng giao nhau d và d' (giao nhau tại O). Tìm quỹ tích điểm M trong mặt phẳng sao cho tổng diện tích hai tam giác MAB, MCD không đổi (bằng S).

Giải. Ta có thể cho đoạn AB trượt trên d, CD trượt trên d' mà diện tích MAB và diện tích MCD đều giữ nguyên. Vậy ta hãy thay đoạn AB bằng đoạn OP trên d, thay đoạn CD bằng đoạn OQ trên d', sao cho $OP = AB$, $OQ = CD$. Ta sẽ tìm quỹ tích trong *miền trong* góc $\widehat{POQ}$. Ta chọn O làm gốc. Với hai điểm bất kỳ M và M' thuộc quỹ tích trong góc $\widehat{POQ}$, ta phải có:

$$1/2\,.\,[P, M] + 1/2\,.\,[M, Q] = 1/2\,.\,[P, M'] + 1/2\,.\,[M', Q].$$

Ta suy ra

$$[M, Q - P] = [M', Q - P]$$
$$\Rightarrow [M', Q - P] - [M, Q - P] = 0$$
$$\Rightarrow [M' - M, Q - P] = 0$$

tức là $[\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{PQ}] = 0 \qquad (16).$

Điều kiện này chứng tỏ rằng $MM' // PQ$ với M và M' là một cặp điểm bất kỳ thuộc quỹ tích. Vậy quỹ tích là một đường thẳng song song với PQ, tất nhiên là hạn chế trong góc $\widehat{POQ}$. Do đó, quỹ tích là đoạn thẳng M_1M_2 (Xem hình vẽ 2).

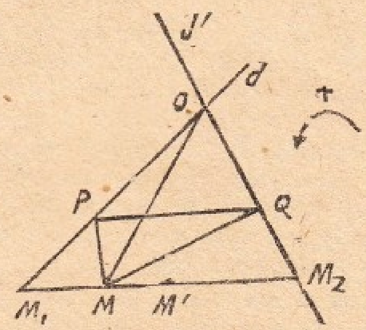
Với
$$S_{M_1OQ} = S_{M_2OP} = S.$$

Phần còn lại của bài toán suy ra dễ dàng.

8. Một bài toán thi vô địch quốc tế 1984

Đề bài. Giả sử $ABCD$ là một tứ giác lồi, sao cho đường thẳng CD tiếp xúc vòng tròn đường kính AB. Chứng minh rằng đường thẳng AB tiếp xúc vòng tròn đường kính CD nếu và chỉ nếu $BC // AD$.

Giải.



Theo giả thiết, trung điểm O của AB phải cách đường thẳng CD bằng $1/2.\ AB$. Vậy:

$$[\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}]/CD = 1/2.AB$$
$$\Rightarrow [\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}] = 1/2.AB.CD \qquad (17).$$

Còn muốn cho vòng tròn đường kính CD tiếp xúc với AB thì cần và đủ là:

$$[\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'A}]/AB = 1/2.CD$$
$$\rightarrow [\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'A}] = 1/2.CD.AB.$$

Vậy, theo (17), ta có:

$$[\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'A}] = [\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}] \quad (18).$$

Lấy O làm gốc các vectơ buộc, ta sẽ có:

$B = -A$, $\overrightarrow{O'B} = -A - O'$, $\overrightarrow{O'A} = A - O'$, $O' = 1/2.(C + D)$.

Do đó: $[\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'A}] = [-A - O', A - O']$

$= [A, 2O'] = [A, C + D]$.

Điều kiện (18) trở nên:

$$[A, C + D] = [D, C] \quad (19).$$

Còn điều kiện song song cho AD và BC là:

$$[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}] = 0 \Rightarrow [A - D, C - B] = 0$$

$$\Rightarrow [A - D, C + A] = 0.$$

Cuối cùng ta cũng có:

$$[A, C + D] = [D, C]$$

đúng là (19). Mệnh đề của bài toán đã được chứng minh.

MẠN ĐÀM VỚI VIỆN SĨ TOÁN HỌC LIÊN XÔ A.N.KÔNMÔGÔRÔP

VIỆN sĩ A.N.Kônmôgôrôp sinh năm 1904, năm nay 81 tuổi, năm 16 tuổi đã là sinh viên trường Đại học Tổng hợp Lômônôxôp Maxcơva (1920), là giáo sư, chủ nhiệm khoa và hiện là chủ nhiệm bộ môn toán lôgic của Khoa toán – cơ trường ĐHTH Lômônôxôp Maxcơva.

Viện sĩ Kônmôgôrôp là một trong số các nhà toán học đầu đàn hiện đại, công trình của ông thuộc đủ loại – từ các công trình lý thuyết rất trừu tượng đến các công trình ứng dụng toán học cụ thể trong cơ học thủy khí, cơ học đàn hồi. Trong thời gian chiến tranh chống phát xít Đức ông nghiên cứu lý thuyết đường đạn. Nhưng phần lớn các công trình của ông là về lý thuyết sác xuất – ở đây ông đã xây dựng các tiên đề cơ bản mở rộng nhiều định lý, phát hiện nhiều quá trình...

Viện sĩ giảng dạy ở trường đại học tổng hợp và cả ở các trường phổ thông, sáng lập trường phổ thông chuyên toán ở trường Đại học Tổng hợp Maxcơva, là chủ tịch Hội đồng cải cách phương pháp giảng dạy toán phổ thông, viết nhiều sách giáo khoa toán học cho học sinh... Viện sĩ là người sáng lập báo Lượng tử (báo toán học và vật lý học dành cho tuổi trẻ) và là Phó Tổng biên tập của tòa báo...

Dưới đây là nội dung cuộc mạn đàm của Viện sĩ với tòa soạn báo «Lượng tử» nói trên.

Hỏi. Người ta thường nói về sự chuyên môn hóa trong khoa học, trong khi đó Viện sĩ lại nghiên cứu những vấn đề rất xa nhau – từ lý thuyết sác xuất, tôpô đại số, tới lôgic toán, lý thuyết các hệ động lực... Vậy, theo viện sĩ tương lai của khoa học là gì – vạn năng hay chuyên môn hóa?

Trả lời. Toán học rất rộng lớn, một người không thể nghiên cứu được tất cả các bộ môn toán học. Về mặt này cần có sự chuyên môn hóa. Nhưng đồng thời toán học là khoa học thống nhất ngày càng có nhiều mối liên hệ giữa các bộ môn, bộ môn này trở thành công cụ của bộ môn khác... Do đó sự bó mình trong những lĩnh vực hẹp sẽ làm thui chột cả ngành khoa học lớn. Đối với toán học, tình hình đơn giản hơn, vì các công trình toán học có tính tập thể: có một số nhà toán học nghiên cứu những vấn đề rất hẹp, nhưng cũng có những người nghiên cứu các vấn đề liên ngành và tuy nghiên cứu hẹp nhưng vẫn hiểu công trình toán học là công trình tập thể.

Hỏi. Viện sĩ cho biết mối quan hệ giữa toán học ứng dụng và toán học lý thuyết.

Đáp. Trước hết cần lưu ý rằng việc phân chia ra toán ứng dụng và toán lý thuyết chỉ là sự qui ước hoàn toàn. Các vấn đề tưởng như rất lý thuyết, rất xa với ứng dụng nhiều khi lại bất ngờ trở thành công cụ quan trọng của nhiều ứng dụng thực tế, mặt khác khi nghiên cứu các vấn đề ứng dụng nhà toán học lại thường xuyên phải giải quyết các bài toán rất đẹp nhưng chẳng có ứng dụng trực tiếp nào. Do đó nghiên cứu ứng dụng cũng phải nghiên cứu rộng. Lẽ đương nhiên giải quyết các đòi hỏi của thực tế là nghĩa vụ của các nhà toán học, nhưng cũng cần nghiên cứu cả các vấn đề có thể chưa có ứng dụng ngay, nhưng hấp dẫn và cần cho sự phát triển của toán học.

Hỏi. Vine viết rằng ông ta bỏ nghiên cứu giải tích hàm vì vướng Kônmôgôrôp. Xin Viện sĩ cho biết ý kiến về sự ganh đua trong toán học.

Đáp. Tôi không hiểu lắm về ý của Vine. Tôi không nghiên cứu nhiều về giải tích hàm. Công trình lý thú nhất của tôi trong lĩnh vực này là «Đường xoắn Vine và một số đường cong lý thú khác trong không gian Hinbe».

Về ganh đua – nếu là đua tài hữu nghị thì nó không khác gì sự cộng tác. Sự cộng tác giữa hai nhà toán học cùng đồng thời suy nghĩ về cùng một vấn đề nhiều khi rất có hiệu quả. Nhưng có khi xảy ra trường hợp là sự tham gia của một người nào đó thực sự là thừa, thì người ấy nên vui vẻ tránh sang bên.

Hỏi. Có phải lúc nào toán học cũng là đối tượng hấp dẫn của Viện sĩ không? Viện sĩ chọn nghề làm toán từ khi nào?

Đáp. Không phải như thế, con đường yêu thích toán học của tôi rất ngoằn ngoèo. Hồi bé tôi làm tính giỏi và thích các bài toán số học, tôi học đại số khá sớm. Ở các lớp trung học tôi thích các môn khác, trong đó có môn lịch sử. Tôi trở lại thích toán học ở mấy lớp cuối của trung học. Khi tốt nghiệp phổ thông tôi còn đắn đo trong việc chọn nghề. Trong mấy năm đầu ở trường đại học tôi nghiên cứu rất nghiêm túc môn Lịch sử Nga cổ đại ở Xêmina của Giáo sư Bakhrusin. Không từ bỏ được các ý đồ kỹ thuật, nên vừa học ở đại học tổng hợp tôi còn học cả ở bộ môn luyện kim của trường Hóa kỹ thuật Menđêlêep. Tôi thực sự chọn nghề làm toán chỉ sau khi thu được các kết quả đầu tiên, lúc đó 18–19 tuổi.

Hỏi. Khả năng toán học thường xuất hiện vào lúc nào? Phải chăng bao giờ cũng từ thuở nhỏ, như ở Viện sĩ chẳng hạn?

Đáp. Giảng dạy nhiều ở các trường phổ thông tôi nhận thấy sự say mê toán học ở vào lứa tuổi 12 – 13 thường chỉ là tạm thời, lên lớp trên sẽ hết, nhất là ở các em gái. Sự say mê ở vào lứa tuổi 13 – 15 theo tôi đáng chú ý hơn. Khi đó, nếu khéo chăm sóc và bồi dưỡng có thể phát triển và duy trì được khả năng của các em. Tất nhiên cũng có nhiều ngoại lệ. Sự say mê toán học có thể xuất hiện ở tuổi cao hơn.

Hỏi. Viện sĩ chịu ảnh hưởng lớn nhất ở thế hệ toán học nào?

Đáp. Hồi sinh viên tôi là học trò của Ludin, ngoài Ludin, tôi chịu ảnh hưởng của Xtêpanôp, Khinsin, Alêcxanđrôp và nhiều nhà toán học cùng thế hệ đó.

Hỏi. Viện sĩ có ý kiến gì về các học trò của mình và ai là người Viện sĩ nhớ nhất?

Đáp. Tôi gặp may vì có nhiều học trò giỏi. Nhiều người sau khi làm việc với tôi trong một lĩnh vực nào đó, đã chuyển đề tài và thu được những kết quả tuyệt vời. Rất khó tách được ai là người đáng nhớ nhất. Tôi chỉ nói có người hiện đang điều khiển khí quyển có người đang điều khiển biển cả. (Ý nói về Viện sĩ Obukhôp, giám đốc Viện nghiên cứu vật lý khí quyển Viện Hàn lâm khoa học Liên Xô, và viện sĩ Mônin-viện trưởng viện hải dương học).

Hỏi. Xin cho biết về chế độ làm việc hàng ngày của Viện sĩ.

Đáp. Chế độ làm việc của tôi thay đổi theo thời kỳ. Tôi chỉ giới thiệu chế độ thời biểu được thống nhất với Viện sĩ Alêcxanđrôp. Thức vào 7 giờ sáng. Giờ đầu tập thể dục, chạy. Ăn sáng vào 8 giờ. Sau đó làm việc. Ăn trưa vào lúc 13 – 14 giờ, gồm sữa và bánh mỳ. Sau bữa trưa thường đi dạo xa – cuốc bộ hoặc trượt tuyết – đến 16 giờ. Sau đó ngủ khoảng nửa giờ. Ăn tối vào 17 giờ. Sau bữa tối làm các việc phụ như chép lại bản thảo. Buổi tối – đọc sách, nghe nhạc, tiếp khách. Trước khi đi ngủ chúng tôi dạo chơi, ngủ vào lúc 22 giờ.

Tất nhiên là khi tìm được cách giải một bài toán nào đó thì mọi chế độ thời gian trở nên vô nghĩa.

Hỏi. Cũng như nhiều nhà toán học khác, Viện sĩ thích âm nhạc cổ điển. Xin giải thích vì sao?

Đáp. Nhận xét đó đúng, vì nếu vào phòng hòa nhạc nhỏ của Nhạc viện Maxcơva sẽ thấy có rất nhiều nhà toán học. Có lẽ giữa sáng tạo toán học và sự say mê âm nhạc có mối quan hệ nào đó. Nhưng tôi không thể giải thích được gì về mối quan hệ đó. Viện sĩ Alêcxanđrôp có nói với tôi rằng mỗi ý tưởng toán học, mỗi đề tài sáng tạo của ông đều quan hệ tới một bản nhạc cụ thể. Tôi thích nhất Môda, Suman và tất nhiên là cả Bắc, Bethôven.

Hỏi. Các nhà nghiên cứu ngôn ngữ và văn học nói nhiều đến các công trình của Viện sĩ về thơ ca. Viện sĩ có ý kiến gì về sự tổ hợp đó – giữa toán học và thơ ca?

Đáp. Tôi muốn tách vấn đề thành 2 phần riêng biệt, vì tôi thích thơ ca cũng giống như những nhà bình thơ bất đắc dĩ – tức là không có ý và thiếu tự giác. Tôi thích các nhà thơ như Chut chep, Puskin, Blôc. Còn về các công trình khoa học của tôi về qui tắc thơ ca Nga thì quả là được các nhà nghiên cứu thơ chú ý, nhưng đó là lĩnh vực nghiên cứu riêng, hoàn toàn không bắt buộc với mọi người.

Hỏi. Viện sĩ còn chơi thể thao. Môn nào vậy?

Đáp. Tôi chưa bao giờ tham gia thi đấu thể thao. Nếu không nhớ nhầm thì chỉ có 3 lần tham gia thi trượt tuyết 10 km. Nhưng tôi thích đi bộ và trượt tuyết, thích bơi thuyền, thích bơi sải và leo núi. Tôi thích thể thao không phải chỉ vì có lợi cho sức khỏe mà còn vì được tiếp xúc với thiên nhiên. Rất thích vờn sóng biển. Vào mùa xuân thích mặc quần ngắn trượt tuyết, rồi tắm nước băng dưới ánh nắng mới. Nhưng tôi không khuyên mọi người noi theo, nên chọn lấy một môn thể thao nào mình thích nhất.

Hỏi. Viện sĩ có gì nhắn các bạn đọc trẻ.

Đáp. Là Nhà khoa học tất nhiên tôi muốn chúc các bạn trẻ đạt nhiều thành tích trong khoa học, dù lớn, dù bé. Tất nhiên, nếu như tất cả bạn đọc đều viết công trình thì không đủ giấy in. Nên tôi chỉ chúc các bạn trẻ sao cho những say mê toán học thời học sinh mang lại lợi ích trong cuộc sống tương lai. Trong báo « Lượng tử » chúng tôi cố gắng giới thiệu nhiều ứng dụng toán học, nhưng chắc chắn là chưa đủ.

(PHẠM HUYỀN dịch và giới thiệu)

LỜI GIẢI CÁC BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ NĂM NAY

ĐOÀN QUỲNH

Bài 1 (Anh): *Cho một đường tròn tâm ở trên cạnh AB của một tứ giác lồi ABCD và tiếp xúc với 3 cạnh còn lại. Chứng minh rằng, nếu tứ giác ABCD nội tiếp, ta có AD + BC = AB.*

Đáp án: Gọi O là tâm đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của $ABCD$, r là bán kính của nó và G, I là chân các đường thẳng góc hạ từ O theo thứ tự xuống BC, DA.

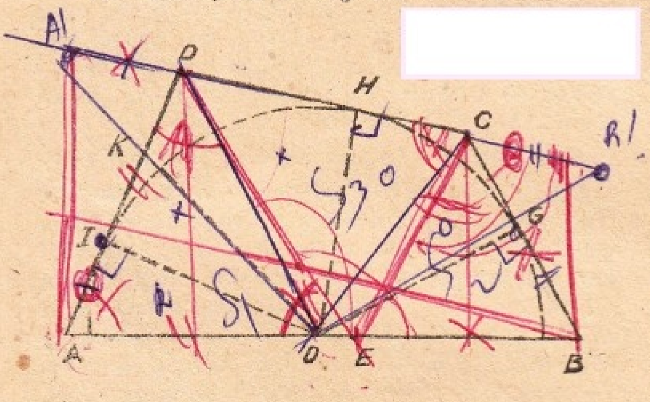
Bây giờ:

$$BG = r\cot g\ B$$
$$CG = r\cot g\ (C/2)$$
$$DI = r\cot g\ (D/2)$$
$$AI = r\cot g\ A$$
$$OB = r/\sin B$$
$$OA = r/\sin A$$

Khẳng định suy ra từ: $B + D = \pi$

$$A + C = \pi$$

$$(1 - \cos A)/\sin A = \mathrm{tg}\,(A/2) = \cot g\,(C/2)$$
$$(1 - \cos B)/\sin B = \mathrm{tg}\,(B/2) = \cot g\,(D/2).$$



— *Lời giải của bạn Dũng*: Lấy điểm K sao cho I thuộc đoạn AK và $IK = CG$, thì hai tam giác OIK và OGC bằng nhau. Ta có:

$$\widehat{AOI} = \pi/2 - \widehat{A} = \pi/2 - (\pi - \widehat{C})$$
$$= -\pi/2 + \widehat{C}/2 + \widehat{C}/2$$
$$= -\pi/2 + \widehat{C}/2 + \pi/2 - \widehat{COG}$$

nên $\widehat{AOI} + \widehat{IOK} = \widehat{C}/2 = \widehat{OKA}$, do đó tam giác AOK là tam giác cân, $AK = AO$ tức là $AI + CG = AO$. Tương tự như thế, $BG + DI = BO$. Vậy $AD + BC = AB$.

— ***Lời giải của các bạn Giang, Khánh***: lấy điểm E thuộc đoạn AB mà $AE = AD$ (dễ thấy có E như thế) thì có: $\widehat{DEA} = (\pi - \widehat{A})/2 = \widehat{C}/2$ nên tứ giác $OECD$ nội tiếp được; từ đó,

$\widehat{CEB} = \widehat{D}/2 = (\pi - \widehat{EBC})/2 = (\widehat{CEB} + \widehat{BCE})/2$ nên $\widehat{CEB} = \widehat{BCE}$, vậy $EB = BC$.

Bài 2 (Úc): *Giả sử n là một số tự nhiên, k là một số nguyên tố với n, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, M là tập hợp $\{1, 2, \dots, n - 1\}$. Mỗi phần tử của M được tô bằng một trong hai màu trắng hoặc xanh.*

Ta giả sử:

1. Với mọi i của M, i và n − i có cùng màu.

2. Với mọi i của M, $i \neq k$, i và $|i - k|$ có cùng màu.

Chứng minh tất cả các phần tử của M có cùng màu.

— *Đáp án*: Ta chứng minh rằng với mỗi $a \in M$, $a > 1$, có số $b < a$ mà a và b có cùng màu, bấy giờ mọi số của M có màu của số 1.

Nếu $n = 3$, khẳng định hiển nhiên đúng: 1 và $2 = 3 - 1$ có cùng màu do điều kiện 1).

Giả sử $n > 3$ và giả sử khẳng định đã đúng với mọi tập ít hơn n phần tử. Ta viết $a \sim b$ nếu a và b có cùng màu. Nếu k là 1 thì $a \sim a - 1$ với mọi $a > 1$.

Giả sử $k > 1$, $n = kj + r$, $0 < r < k$, $j > 0$. Bây giờ $(k, r) = 1$. Rõ ràng với mọi $a > k$, $a \sim a - k$ với điều kiện 2). Vậy, do điều kiện 1), $k \sim n - k = (j - 1)k + r \sim (j - 2)k + r \sim \dots \sim r < k$. Chúng ta hãy chứng minh rằng

$M' = \{1, 2, \dots, k\}$, với tô màu cảm sinh từ tô màu của M, cũng thỏa mãn các điều kiện 1) và 2), trong đó thay k bởi r:

1) nếu $a < k$ thì $a \sim k - a$ bởi điều kiện 2);

2) do 1), $a \sim n - a$ và do 2) $n - a = kj + r - a = (j - 1)k + k - (a - r) \sim \dots \sim k - (a - r) \sim |k - (k - (a - r))| \sim |a - r|$.

Vậy theo giả thiết qui nạp, $a \sim b < a$ với mọi $a < k$. Nhưng điều đó chứng tỏ rằng với mọi a, $1 < a < n$, có số $b < a$ mà $a \sim b$ như đòi hỏi.

— *Lời giải của cô Hoàng Xuân Sính*:

Với mỗi số nguyên a, đặt $\widehat{a}$ là số dư khi chia a cho n, và ký hiệu $Z_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ thì có thể coi phép tô màu đã cho xác định ánh xạ $f: Z_n \to Z_2 = \{$trắng, xanh$\}$.

Điều kiện 1) cho i) $f(\widehat{a}) = f(\widehat{-a})$ với mọi $a \in Z$.

Điều kiện 2) và i) cho ii) $f(\widehat{a}) = f(\widehat{a-k})$ với mọi $a \in Z$. Vậy với mọi số nguyên m, do ii), có:

$$f(\widehat{(m+1)k}) = f(\widehat{(m+1)k-k}) = f(\widehat{mk})$$

Vì $(k, n) = 1$, tập $\{\widehat{mk} \mid m \in Z\} = Z_n$; vậy $f(Z_n)$ là tập chỉ có một phần tử.

Bài 3. (Hà Lan): *Nếu P là đa thức với hệ số nguyên*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$$

ta ký hiệu bằng W(P) số các hệ số a_j sao cho a_j là một số lẻ. Với mọi i nguyên dương hay bằng 0 ta đặt $Q_1 = (1 + x)^2$. Chứng minh rằng, với mọi họ hữu hạn những số nguyên $i_1, i_2, \dots, i_n$ sao cho: $0 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n$, ta có:

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geqslant w(Q_{i_1})$$

— *Đáp án*: Nếu $k = 2^m$ thì $(1+x)^k = 1 + r(x) + x^k$, trong đó r là một đa thức với hệ số chẵn. Vậy nếu bậc của đa thức P bé hơn $k = 2^m$ thì

$$w(Q_n \cdot P) = 2w(P) \qquad (*)$$

Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức trong đề bài bằng qui nạp theo i_n.

Nếu $i_n = 0$ hay 1 thì bất đẳng thức là tầm thường.

Giả sử bất đẳng thức đúng với mọi dãy $0 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n$ mà $i_n < 2^m$ $(m \geqslant 1)$. Bây giờ xét dãy $0 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n$ mà $2^m \leqslant i_n < 2^{m+1}$. Xét hai trường hợp:

i) $i_1 \geqslant 2^m$. Bây giờ dùng (*) và giả thiết qui nạp, suy ra ngay bất đẳng thức cần chứng minh.

ii) $i_1 < 2^m$. Bây giờ, đặt $k = 2^m$ và viết

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + (1+x)^k(b_0 + b_1x + \dots + b_{k-1}x^{k-1})$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} a_ix^i + \sum_{i=0}^{k-1} b_ix^i + x^k \sum_{i=0}^{k-1} b_ix^i + R(x)$$

trong đó mọi hệ số của đa thức R là chẵn. Khi tính $w(P)$ mỗi a_i lẻ (trong tổng thứ nhất) mà có b_i tương ứng (trong tổng thứ hai) cũng lẻ thì lại có hệ số b_i lẻ trong tổng thứ ba, do đó $w(P) \geqslant w\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_ix^i\right)$. Nhưng theo giả thiết quy nạp, $w\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_ix^i\right) \geqslant w(Q_{i_1})$, nên suy ra kết luận.

Bài 4. (Mông Cổ): *Cho tập hợp M gồm 1985 số nguyên dương phân biệt, mỗi số có các ước nguyên tố nhỏ hơn 26. Chứng minh ta có thể tìm được 4 phần tử phân biệt của M sao cho tích của chúng là lũy thừa bậc 4 của một số nguyên.*

— *Đáp án*: mỗi số x_j trong M có dạng $\prod_{i=1}^{9} p_i^{a_{ij}}$, a_{ij} nguyên không âm, trong đó $p_1, p_2, \dots, p_9$ là các số nguyên tố bé hơn 26. Tích số x_jx_k là một số chính phương khi và chỉ khi $a_{ij} + a_{ik} \equiv 0 \mod 2$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 9$. Vì số các bộ 9 số modulo 2 là 2^9 nên mọi tập con của M gồm ít nhất $2^9 + 1 = 513$ số phải chứa hai số mà tích là một số chính phương. Vậy xuất phát từ M và bằng cách nhặt dần từng cặp số như thế, ta được $(1985 - 513)/2 = 736 > 513$ cặp số như vậy. Xét các căn bậc 2 của hơn 513 tích các cặp số vừa nhặt ra đó và lặp lại lý luận trên, suy ra điều cần chứng minh.

Bài 5 (Liên Xô): *Cho tam giác ABC. Một vòng tròn tâm O đi qua các điểm A và C và lại cắt các đoạn AB và BC theo thứ tự tại hai điểm phân biệt K và N. Ta giả sử các vòng tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và KBN cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt B và M. Chứng minh góc $\widehat{OMB}$ vuông.*

— *Đáp án*: Gọi P là giao điểm của các đường thẳng KN và AC (các đường thẳng này không thể song song vì các đường tròn ngoại tiếp ABC và KBN cắt nhau tại hai điểm phân biệt); có thể giả sử A thuộc đoạn PC.

Giả sử BP cắt đường tròn ngoại tiếp KBN tại B và M'. Bây giờ $CNM'P$ là một tứ giác nội tiếp vì $\widehat{NM'B} = \widehat{BKN} = \widehat{ACB}$. Từ đó M' phải thuộc đường tròn (ABC) vì $\widehat{BM'C} = \widehat{BMN} + \widehat{NM'C} = \widehat{BKN} + \widehat{NPC} = \widehat{BAC}$. Vậy $M' = M$.

Đặt $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OP| = p$ thì có:

$$|BM| \cdot |BP| = |BN| \cdot |BC| = b^2 - a^2$$

$$|PM| \cdot |PB| = |PN| \cdot |PK| = p^2 - a^2$$

Từ đó, do $|BP|^2 = |BM||BP| + |MP||BP| = b^2 + p^2 - 2a^2$

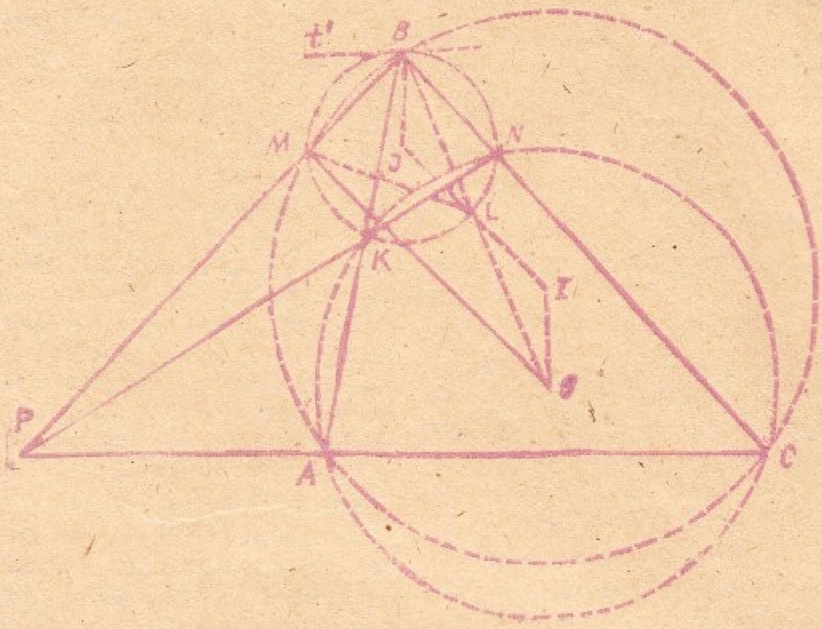
suy ra: $|BM|^2 = (b^2 - a^2)^2/(b^2 + p^2 - 2a^2)$

$|PM|^2 = (p^2 - a^2)^2/(b^2 + p^2 - 2a^2)$

Vậy $|BM|^2 - |PM|^2 = b^2 - p^2 = |OB|^2 - |OP|^2$, do đó OM thẳng góc với BP.

Chú ý: Bạn Vũ có đơn giản phần đầu của chứng minh trong đáp án bằng nhận xét: các đường thẳng AC, BM, KN đồng qui tại tâm đẳng phương P của ba đường tròn đang xét.

Lời giải của bạn Dũng: Gọi I là tâm của đường tròn γ ngoại tiếp ABC và J là tâm của đường tròn γ' ngoại tiếp $BMKN$. Gọi Bt' là tiếp tuyến của đường tròn γ' tại B thì $\widehat{t'BM}$ (xem hình vẽ) $= \widehat{BNK} = \widehat{BAC}$, do đó Bt' song song với AC mà



OI là trung trực của đoạn AC nên BJ song song với OI : xét BI là tiếp tuyến của Υ tại B thì lý luận tương tự chứng tỏ BI song song với OJ. Vậy $OIBJ$ là một hình bình hành ; giao điểm L của các đường chéo BO và IJ là trung điểm của đoạn BO. Do IJ là trung trực của đoạn BM nên $LB = LM$. Từ đó tam giác OMB vuông tại M.

Bài 6 (Thụy Điển): *Với mọi số thực x_1, dãy $(x_n)_{n \geqslant 1}$ được xác định bởi công thức qui nạp: $x_{n+1} = x_n(x_n + 1/n)$ với $n \geqslant 1$. Chứng minh có một và chỉ một số thực x_1 sao cho dãy $(x_n)_{n \geqslant 1}$ thỏa mãn: $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ với mọi $n \geqslant 1$.*

— *Đáp án*: Đặt $x_n = f_n(x_1)$ thì được hàm số $f_n(x)$ (với mỗi số nguyên $n \geqslant 1$). Khẳng định của đề bài tương đương với khẳng định: có một và chỉ một a để $1 - 1/n < f_n(a) < 1$, với mọi n.

Mỗi f_n là một hàm đa thức với hệ số dương nên là tăng và dương trên R^+. Dễ dàng chứng minh bằng qui nạp theo n rằng với $x > y > 0$ thì $f_n(x) - x > f_n(y) - y > 0$ (với mọi n nguyên $\geqslant 1$).

Với mọi n nguyên > 1, có $a_n > 0$ duy nhất mà $f_n(a_n) = 1 - 1/n$ và có $b_n > 0$ duy nhất, mà $f_n(b_n) = 1$, và rõ ràng $b_n > a_n$.

Do $f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n)\,[f_n(a_n) + 1/n] =$
$= (1 - 1/n).1 = f_n(a_n)$

còn $f_{n+1}(a_{n+1}) = 1 - 1/(n+1) > 1 - 1/n =$
$= f_n(a_n)$ nên $a_{n+1} > a_n$.

Do $f_{n+1}(b_n) = 1 + 1/n > f_{n+1}(b_{n+1})$ nên
$b_{n+1} < b_n$.

Mặt khác, $0 < b_n - a_n < f_n(b_n) - f_n(a_n) = 1/n$, nên các dãy $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ có giới hạn chung $a = \lim\limits_{k \to \infty} a_k = \lim\limits_{k \to \infty} b_k$, $a_n < a < b_n$ với mọi n

Rõ ràng a đó thỏa mãn đòi hỏi nói trên.

Mặt khác, với mọi $a' \neq a$, có một a_n hay một b_n gồm giữa a và a', do đó hoặc $f_n(a') < 1 - 1/n$ hoặc $f_n(a') > 1$. Từ đó suy ra tính duy nhất của a thỏa mãn đòi hỏi.

GIẢI BÀI *kỳ trước*

Bài 1/143. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{(x-a)^2} + \sqrt[3]{x^2 - a^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

Lời giải: (của nhiều bạn)

Đặt $u = \sqrt[3]{x+a}$, $v = \sqrt[3]{x-a}$, phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = \sqrt[3]{a^2} \\ u^3 - v^3 = 2a \end{cases}$$

Xét hai trường hợp:

a) $a \neq 0$. Chia 2 vế 2 phương trình cho nhau ta có

$$u - v = 2\sqrt[3]{a} \Rightarrow \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2} =$$
$$= u^2 + v^2 + uv \Rightarrow 3(u+v)^2 = 0 \Rightarrow u = -v.$$

Suy ra $\sqrt[3]{x+a} = -\sqrt[3]{x-a} \Rightarrow x = 0$

b) $a = 0$. Từ $u^2 + v^2 + uv = (u + v/2)^2 + 3v^2/2 = 0$

Suy ra $u = v = 0 \Rightarrow x = 0$.

Vậy trong mọi trường hợp, phương trình có một nghiệm $x = 0$.

Đ.B.K

Bài 2/143 : *Giải phương trình*

$(\log_2 x)^2 + x\log_7(3+x) = \log_2 x[x/2 + 2\log_7(3+x)]$.

Lời giải : Điều kiện đối với x : $x > 0$. Gọi (*) là phương trình đã cho ta có :

$$(*) \Leftrightarrow \log_2 x(\log_2 x - x/2) - 2\log_7(3+x).(\log_2 x - x/2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\log_2 x - x/2)[\log_2 x - 2\log_7(3+x)] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2 x - x/2 = 0 & (1) \\ \log_2 x - 2\log_7(3+x) = 0 & (2) \end{array}\right.$$

a) Giải phương trình (1). Ta có : $(1) \Leftrightarrow x^2 = 2^x$
$$\Leftrightarrow \ln x/x = \ln 2/2 \qquad (3)$$

(Dễ thấy $x=2$ và $x = 4$ là các nghiệm của (3)).

Xét hàm số $f(x) = \ln x/x$. Ta có $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$. Suy ra $f'(x) > 0$ với $0 < x < e$, $f'(x) = 0$ với $x = e$, và $f'(x) < 0$ với $e < x < +\infty$.
Như thế vế trái của (3) là hàm đồng biến trong khoảng $(0, e]$ và nghịch biến trong khoảng $[e, +\infty)$. Trong khi vế phải của (3) là hàm hằng số. Suy ra (3) chỉ có nhiều nhất là 2 nghiệm. Vì vậy ngoài các nghiệm $x=2$ và $x = 4$ ra, (3) đồng thời cũng là (1), không còn nghiệm nào khác.

b) Giải phương trình (2). Đặt $y = \log_2 x$. Khi đó $x = 2^y$ và (2) trở thành :

$$y = 2\log_7(3+2^y) \Leftrightarrow (4/7)^y + 6(2/7)^y + 9(1/7)^y = 1 \qquad (4)$$

Dễ thấy $y = 2$ là nghiệm của (4). Mặt khác, do vế trái của (4) là hàm nghịch biến trong toàn bộ miền xác định, trong khi vế phải là hàm hằng số, nên (4) chỉ có nhiều nhất là 1 nghiệm. Do đó $y = 2$ là nghiệm duy nhất của (4). Khi đó $x = 4$ là nghiệm duy nhất của (2).

Tóm lại tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$ và $x = 4$.

Nhận xét : Các bạn *Mai Văn Huỳnh* (11A, PTTH Trưng Vương, Qui Nhơn) và *Dương Tử Bích Thảo* (12A, PTTH Bùi Thị Xuân, thành phố Hồ Chí Minh) có lời giải đúng. Các bạn *Nguyễn Tất Hiếu* (11A, PTTH Tây Sơn, Hà Nội) và *Lưu Trọng Tuấn* (Đại học Y Dược thành phố Hồ Chí Minh) đã sử dụng định lý Lagrangio về giá trị trung bình của hàm số cũng cho lời giải đúng. Nhiều bạn khác có lời giải không chính xác.

N.K.M

Bài 3/143 : *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* :

$$f(x, y, z) = \frac{|ab - xy|}{(x+y)z} + \frac{|ab - yz|}{(y+z)x} + \frac{|ab - zx|}{(z+x)y}$$

khi $a \leqslant x, y, z \leqslant b$; $a > 0$.

Lời giải : (của các bạn *Nguyễn Tất Hiếu*, 11A Tây Sơn, Hà Nội ; Võ Kim Cương 11^k Lim Liên Hà Nội ;...).

Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức :

$$|ab - xy|/(x+y) \leqslant (b-a)/2 \qquad (1)$$

hay : $4(ab - xy)^2 \leqslant (x+y)^2(b-a)^2$

$$\Leftrightarrow [2ab - 2xy - (x+y)(b-a)][2ab - 2xy + (x+y)(b-a)] \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow [b(2a - x - y) + x(a - y) + y(a - x)] \times [a(2b - x - y) + x(b - y) + y(b - x)] \leqslant 0$$

Thừa số thứ nhất ở vế trái là tổng của ba số nhỏ hơn hoặc bằng 0.

Thừa số thứ hai là tổng của ba số lớn hơn hoặc bằng 0. Vậy (1) được chứng minh. Do $a > 0$ nên từ (1) suy ra :

$$\frac{|ab - xy|}{(x+y)z} \leqslant \frac{b-a}{2z} \leqslant \frac{b-a}{2a}$$

Dấu = xảy ra khi

$x = y = z = a$ hoặc $x = y = b$; $z = a$.

Từ đó suy ra :

$$f(x, y, z) \leqslant \frac{b-a}{2a} + \frac{b-a}{2a} + \frac{b-a}{2a} = \frac{3(b-a)}{2a}$$

hay $\max f(x, y, z) = 3(b-a)/2a$ khi $x = y = z = a$.

N. V. M

Bài 4/143 : *Cho số n tự nhiên. Đặt* $b(n) = \min\{k + n/k : k$ *tự nhiên*$\}$. *Chứng minh rằng* $[b(n)] = [\sqrt{4n+1}]$ *(ở đây* $[x]$ *chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá* x*).*

Lời giải : (của bạn Trần Đình Nghĩa, lớp 12/6 Phan Châu Trinh Đà Nẵng).

Xét hàm số $y = x + n/x$ với $x > 0$. Ta có $y' = 1 - n/x^2$ và bảng biến thiên sau :

x	0		$+\sqrt{n}$		∞
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖	↘		↗	

Theo bảng biến thiên ta có $\min_{k \in N} [k + n/k] =$

$= \min \{[\sqrt{n}] + n/[\sqrt{n}], [\sqrt{n}] + 1 + n/([\sqrt{n}] + 1)\}$.

Mặt khác ta luôn chọn được số tự nhiên a sao cho

$(a+1)^2 > n \geqslant a^2$ hay $[\sqrt{n}] = a$

Xét hai trường hợp:

a) Nếu $a^2 + a > n \geqslant a^2$ ta suy ra

$b(n) = \min\{a + n/a, a + 1 + n/(a+1)\}$

$= a + n/a$

nên $[b(n)] = [a + n/a] = a + [n/a] = 2a$.

Mặt khác khi đó $[\sqrt{4n+1}] = 2a$.

b) Nếu $(a+1)^2 > n \geqslant a^2 + a$ thì

$b(n) = \min\{a + n/a, a + 1 + n/(a+1)\}$

$= a + 1 + n/(a+1)$

nên $[b(n)] = [a + 1 + n/(a+1)] = 2a + 1$.

Mặt khác khi đó $[\sqrt{4n+1}] = 2a + 1$.

Vậy với mọi giá trị của n tự nhiên ta đều có

$[b(n)] = [\sqrt{4n+1}]$.

Đ. B. K

Bài 5/143: *Tập $M = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ chia làm k tập con rời nhau $M_1, M_2, \ldots, M_k$, trong đó $k^3 + k \leqslant n$. Chứng minh rằng $\exists i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (i và j có thể bằng nhau) và $k + 1$ số chẵn $2C_1, 2C_2, \ldots, 2C_{k+1} \in M_i$ sao cho $2C_1 - 1, \ldots, 2C_{k+1} - 1$ đều thuộc M_j.*

Lời giải: (Theo *Mai Văn Huỳnh*, 11A, trường PTTH Trưng Vương, Qui Nhơn): Nhận thấy rằng tập M chứa n số chẵn. Các số chẵn đó được phân vào k tập rời nhau $M_1, \ldots, M_k$ và do $n > k$ (suy ra từ điều kiện đầu bài) nên theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại tập M_i ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) chứa ít nhất: $[n/k]$ số. Mặt khác do

$[n/k] \geqslant [(k^3 + k)/k] = k^2 + 1$

Nên suy ra tập M_i chứa ít nhất $k^2 + 1$ số chẵn. Xét $k^2 + 1$ số chẵn của M_i. Giả sử các số đó là $2C_1, 2C_2, \ldots, 2C_{k^2+1}$. Xét $k^2 + 1$ số lẻ $2C_1 - 1, 2C_2 - 1, \ldots, 2C_{k^2+1} - 1$. Các số lẻ này được phân vào k tập rời nhau $M_1, \ldots, M_k$ nên theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại tập M_j ($j \in \{1, \ldots, k\}$ và có thể $j = i$) chứa ít nhất $[(k^2 + 1)/k] + 1 = k + 1$ số (đpcm).

Nhận xét: Bạn *Nguyễn Việt Trang* (11 CT, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa) cũng có lời giải đúng.

N K M.

Bài 6/143. *Cho cấp số cộng dương $a_1, a_2, \ldots a_n$; $n \geqslant 4$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a_1 + a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geqslant \frac{2}{n}\left(\sqrt[n]{\frac{a_1^3}{a_2 a_3 a_4}} + \ldots + \sqrt[n]{\frac{a_n^3}{a_1 a_2 a_3}}\right)$$

Lời giải: Với a_i, $i = 1, n$ là cấp số cộng ta có: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n/2 \cdot (a_1 + a_n)$, nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\left(\sqrt[n]{a_1^3/a_2 a_3 a_4} + \ldots + \sqrt[n]{a_n^3/a_1 a_2 a_3}\right) \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cho n số ta có:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_1^3/a_2 a_3 a_4} =$$

$$= \sqrt[n]{a_1^4 a_5 \ldots a_n} \leqslant (4a_1 + a_5 + \ldots + a_n)/n$$

. . . .

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_n^3/a_1 a_2 a_3} =$$

$$= \sqrt[n]{a_4 a_5 \ldots a_n^4} \leqslant (a_4 + a_5 + \ldots + 4a_n)/n$$

Cộng vế với vế n bất đẳng thức này, với chú ý tổng các vế phải bằng $\sum_{i=1}^{n} a_i$, nên bất đẳng thức (1) được chứng minh và do vậy bài toán đã được chứng minh xong.

Nhận xét: Các bạn *Lê Quang Vịnh* (10 CT, ĐHTH, Hà Nội) *Nguyễn Tuấn Khanh* và *Chu An Khoa* (PTTH, Trần Phú, Hà Nội) và *Đỗ Ngọc Minh Châu* (11A, PTTH Pleiku 1, Gia Lai KonTum) có lời giải tốt.

T.V.T

Bài 7/143. *Chứng minh rằng trong tam giác bất kỳ tổng bán kính các đường tròn bàng tiếp không nhỏ hơn tổng ba đường cao.*

Lời giải: Gọi S là diện tích; a, b, c là các cạnh; h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng đỉnh A, B, C; r_a, r_b, r_c là các bán kính của các đường tròn bàng tiếp tương ứng đỉnh A, B, C và p là nửa chu vi của ΔABC.

Vì a, b, c là các cạnh của tam giác nên $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ là các số dương nên, từ bất đẳng thức:

$[(p-a) + (p-b)]^2 \geqslant 4(p-a)(p-b)$ ta có:

$$\frac{(p-a)+(p-b)}{(p-a)(p-b)} \geqslant \frac{4}{p-a+p-b}$$

(chia cho các số dương).

hay gọn hơn $1/(p-a) + 1/(p-b) \geqslant 4/c$.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $1/(p-b)+1/(p-c) \geqslant 4/a$ và $1/(p-a)+1/(p-c) \geqslant 4/b$. Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức trên ta có: $2/(p-a)+2/(p-b)+2/(p-c) \geqslant 2(2/a+2/b+2/c)$ nhân 2 vế với $(S/2)$ ta đi đến:

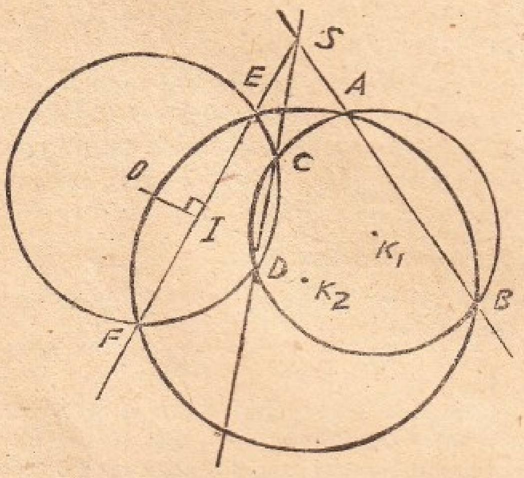
$S/(p-a)+S/(p-b)+S/(p-c) \geqslant 2S/a+2S/b+2S/c$. Vậy

$r_a+r_b+r_c \geqslant h_a+h_b+h_c$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ tức là khi tam giác ABC đều.

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Tất Hiếu* (11A, PTTH Tây Sơn, Hà Nội); *Nguyễn Tuấn Khanh* và *Chu An Khoa* (PTTH Trần Phú, Hà Nội); *Trần Đình Nghĩa* (11CT, PTTH Phan Chu Trinh, (Đà Nẵng) và *Nguyễn Trọng Tố* (11CT, Lam Sơn, Thanh Hóa) có lời giải tốt.

T.V.T

Bài 8/143. *Cho hai điểm A và B nằm ngoài đường tròn O. Dựng một đường tròn K qua A, B và cắt đường tròn O theo một dây có chiều dài d.*



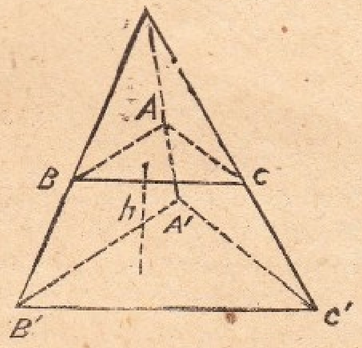
Lời giải. (Theo cách giải của nhiều bạn đọc).

Giả sử tâm O của vòng tròn (O) không nằm trên đường thẳng (AB). Vẽ hai vòng tròn (K_1) và (K_2) tùy ý, nhưng qua A, B và cắt (O) tương ứng ở C, D và E, F. Khi đó các đường thẳng AB, CD, EF phải đồng qui tại S tâm đẳng phương của (O), (K_1), (K_2). Nghĩa là các đường thẳng CD và EF luôn gặp nhau trên đường thẳng AB cố định. Điều đó chứng tỏ *S phải cố định*. (Vì nếu có (K_3) cũng qua A, B và cắt (O) tại G, H thì GH cũng gặp CD trên AB tại chính điểm S là giao của AB và CD). Do vậy S hoàn toàn xác định, bằng cách dựng 1 vòng tròn (K_1) tùy ý qua A, B cắt (O) ở C, D rồi cho đường thẳng CD cắt AB ở S. Từ S dựng 1 cát tuyến (SEF) với (O) sao cho $EF = d$ cho trước, là một bài toán quen biết. ((SEF) là tiếp tuyến vẽ từ S với vòng tròn tâm O bán kính $OI = \sqrt{R^2 - d^2/4} = 1/2 . \sqrt{4R^2 - d^2}$ với R là bán kính (O)). Cuối cùng vì $SA . SB = SC . SD = SE . SF$ nên tứ giác $ABEF$ nội tiếp và đường tròn $(ABEF)$ chính là đường tròn (K) phải dựng, thỏa mãn mọi điều kiện của bài toán. Rõ ràng là nếu $0 < d \leqslant 2R$ thì trong trường hợp đó bài toán luôn có nghiệm (đặc biệt nếu $d = 2R$ thì chỉ có 1 nghiệm).

Giả sử $O \in (AB)$ mà $OA \neq OB$ thì ta vẫn xác định được S và bài toán cũng luôn có nghiệm với điều kiện $0 < d < 2R$. Còn $OA = OB$ thì S ở vô tận (vì $CD // AB$) do đó EF cũng dựng được $// AB$, với điều kiện $0 < d < 2R$. (vì nếu $d = 2R$ thì E, F, A, B thẳng hàng vì đường tròn suy biến thành đường thẳng).

N.V.M

Bài 9/143: *Cho tứ diện ABCD có thể tích là V_1. Một điểm O tùy ý trong tứ diện đó. Trên AO, BO, CO, DO kéo dài về phía O, ra ngoài tứ diện, lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1, tương ứng, một cách tùy ý. Bốn mặt phẳng lần lượt qua A_1, B_1, C_1, D_1, và song song với các mặt BCD, CDA, DAB, ABC cắt nhau tạo thành tứ diện mới có thể tích là V_2. Lần lượt nối A_1, B_1, C_1, D_1, với các đỉnh của các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC tương ứng để được một thập nhị diện (các mặt đều là các tam giác) có thể tích là V_3. Chứng minh rằng $V_3^3 = V_1^2 \cdot V_2$.*



Hình 1

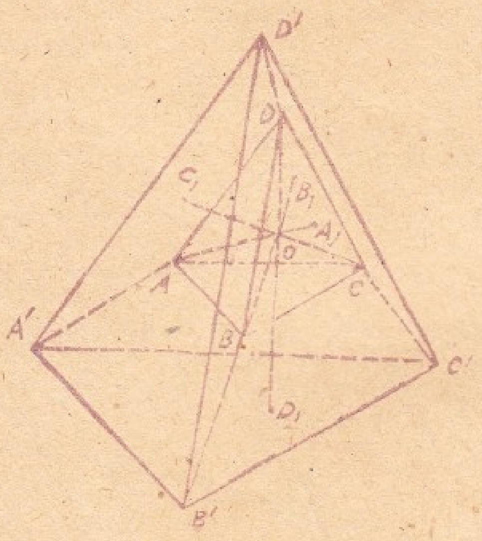
Lời giải: (của *Nguyễn Tất Hiếu*, lớp 11A, trường PTTH Tây Sơn, Hà Nội). Trước tiên ta dễ dàng chứng minh được rằng: Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng phối cảnh trong không gian thì thể tích của khối đa diện $ABCA'B'C'$ tính được theo công thức:

$$V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC} h \left(k^2 + k + 1\right)/3 \qquad (1)$$

trong đó k là tỷ số đồng dạng, h là khoảng cách giữa hai mặt phẳng qua hai tam giác, S_{ABC} là diện tích tam giác ABC (hình 1). Trở lại bài toán, ta gọi tứ diện mới tạo thành là $A'B'C'D'$: S_{BCD}, S_{ACD}, S_{ABD}, S_{ABC} lần lượt là các diện tích của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC : h_{BCD}, h_{ACD}, h_{ABD}, h_{ABC} lần lượt là các khoảng cách giữa các mặt phẳng qua các tam giác BCD và $B'C'D'$, ACD và $A'C'D'$, ABD và $A'B'D'$, ABC và $A'B'C'$. Ta nhận thấy hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là đồng dạng phối cảnh theo tỉ số k nào đấy (có các mặt tương ứng song song). Vậy $V_2 = k^3V_1$ (2)

Áp dụng công thức (1) ta có

$$V_{BCDB'C'D'} = S_{BCD}h_{BCD}\,(k^2 + k + 1)/3$$
$$V_{ADA'C'D'} = S_{ACD}h_{ACD}\,(k^2 + k + 1)/3$$
$$V_{ABDA'B'D'} = S_{ABD}h_{ABD}\,(k^2 + k + 1)/3$$
$$V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC}\,h_{ABC}(k^2 + k + 1)/3.$$



Hình 2

Từ đó ta tính được :

$$V_2 = V_1 + V_{BCDB'C'D'} + V_{ACDA'C'D'} + V_{ABDA'B'D'} + V_{ABCA'B'C'}$$
$$= V_1 + (S_{BCD}h_{BCD} + S_{ACD}h_{ACD} + S_{ABD}h_{ABD} + S_{CAB}h_{ABC})(k^2 + k + 1)/3.$$

Kết hợp với (2) ta có :

$$V_1k^3 = V_1 + (S_{BCD}h_{BCD} + S_{ACD}h_{ACD} + S_{ABD}h_{ABD} + S_{ABC}h_{ABC})(k^2 + k + 1)/3$$

Hay $V_1(k-1) = (S_{BCD}h_{BCD} + S_{ACD}h_{ACD} + S_{ABD}h_{ABD} + S_{ABC}h_{ABC})/3 = V_3 - V_1$

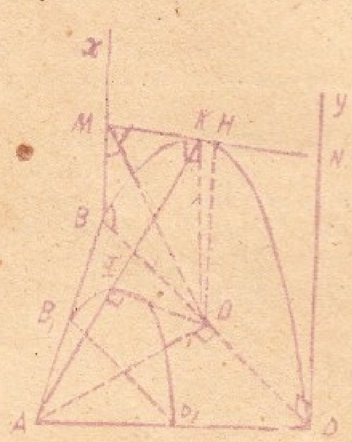
Vậy ta có $V_3 = V_1k$

Từ đây và (2) ta sẽ có công thức cần chứng minh.

Nhận xét: Bạn *Trần Đình Nghĩa* (12/6 – Phan Chu Trinh, Đà Nẵng) cũng có lời giải tốt. Phần sau lời giải của bạn Hiếu hơi khác với lời giải ở đây.

L.T.H

Bài 10/143. *Cho hình vuông $ABCD$, có tâm O nằm trong mặt phẳng $[P]$ và hai nửa đường thẳng Bx, Dy vuông góc với mặt phẳng $[P]$ và ở về cùng một phía của mặt phẳng ấy. Hai điểm M, N chuyển động trên Bx và Dy. Tìm quỹ tích các hình chiếu I và J của O trên các mặt phẳng $[AMN]$ và $[CMN]$ trong trường hợp $BM + DN = MN$.*



Lời giải : (của *Mai Văn Huỳnh*, lớp 11A, PTTH Trưng Vương, Quy Nhơn).

Hạ $OK \perp MN$, nối AK. Vì $[Bx, Dy] \perp [ABD]$ và $AO \perp BD$ nên $AO \perp [Bx, Dy] \Rightarrow MN \perp [AOK]$. Hạ $OI \perp AK$ thì I là hình chiếu của O lên $[AMN]$. Lấy H là điểm giữa của MN ta có $OH = (BM + DN)/2 = MN/2 = MN/2 = MH$

$\Rightarrow \widehat{OMK} = \widehat{OMH} = \widehat{MOH}$.

Vì OH là đường trung bình của hình thang $BMND$ nên

$$\widehat{BMO} = \widehat{MOH} = \widehat{OMK}.$$

Vậy hai tam giác vuông MBO và MKO bằng nhau $\Rightarrow OK = OB$ (không đổi). Từ đó suy ra K nằm trên nửa đường tròn đường kính BD trong mặt phẳng $[Bx, Dy]$, trừ hai điểm B và D.

Tam giác AOK có $OK = OB = OA$ nên điểm I là trung điểm của AK. Vậy I nằm trên nửa đường tròn là ảnh của nửa đường tròn quỹ tích của K qua phép vị tự tâm A tỉ số 1/2. Nửa đường tròn này có đường kính là đường trung bình B_1D_1 của tam giác ABD (hình vẽ) và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng của hình vuông $ABCD$ chứa B_1D_1.

Ngược lại, ta lấy bất kỳ điểm I' nằm trên nửa đường tròn là ảnh của nửa đường tròn đường kính BD qua phép vị tự tâm A, tỉ số 1/2. Tia AI' kéo dài gặp nửa đường tròn đường kính BD trên $[Bx, Dy]$ tại điểm K'. Qua K' vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn đường kính BD, lần lượt cắt Bx và Dy tại M' và N'. Dễ dàng thấy $M'N' = BM' + DN'$

$(BM' = M'K', DN' = K'N')$. Mặt khác $OK' = OB = OA$ và do I' là ảnh của K' qua phép vị tự tâm A, tỉ số 1/2 cho nên $AI' = I'K'$. Từ đó thấy $OI' \perp AK'$. Ta lại có $M'N' \perp OK'$, $M'N' \perp OA \Rightarrow M'N' \perp [AOK'] \Rightarrow OI' \perp M'N'$.

Vậy I' đúng là hình chiếu của O lên mặt phẳng $[AM'N']$.

Kết luận: Quỹ tích của I là nửa đường tròn, ảnh của nửa đường tròn bán kính BD (trừ hai điểm B, D) trên $[Bx, Dy]$ qua phép vị tự tâm A tỉ số 1/2.

Một cách tương tự, quỹ tích của J là nửa đường tròn đối xứng với nửa đường tròn quỹ tích của I qua $[Bx, Dy]$.

Nhận xét: Nhiều bạn làm phần đảo không tốt.

L.T.H

Bài 1/146. Cho n, p, k là ba số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng các số n^{p+4k} và n^p có chữ số hàng đơn vị giống nhau.

Ngô Đạt Tứ

Bài 2/146. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^y + x^{y+1} + x^{y+2} + x^{y+3} + x^{y+4} = 1984$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 3/146. Giải phương trình:

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 1/2.$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 4/146. Chứng minh rằng với A, B, C là các góc của một tam giác ta có:

$$1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \geqslant \sqrt{3} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

Tạ Văn Tự

Bài 5/146. Chứng minh rằng với mọi cặp đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ với hệ số thực mà ít nhất một trong hai đa thức đó có bậc lớn hơn hoặc bằng 1 thì tồn tại $x \in [0,1]$ mà $P(\sin x) \neq Q(x)$.

Nguyễn Minh Đức

Bài 6/146. Ta chia hai đường tròn bằng nhau làm n phần bằng nhau. Tại các điểm chia trên mỗi đường tròn ta gắn các số tự nhiên từ 1 đến n một cách tùy ý. Hãy chứng minh rằng:

a) Nếu n là một số chẵn thì ta có thể đặt hai đường tròn lên nhau sao cho có hai số $i \neq j$ của đường tròn thứ nhất trùng với hai số bằng chúng trên đường tròn thứ hai.

b) Nếu n là số lẻ thì luôn luôn có 1 cách gắn các số lên đường tròn thứ hai sao cho mọi cách đặt đường tròn thứ nhất lên đường tròn thứ hai đều chỉ cho ta nhiều nhất là một cặp 2 số bằng nhau trùng nhau.

Vũ Đình Hòa

Bài 7/146. Cho ΔABC $(AB < AC)$, trên AB và AC lấy M, N sao cho $BM = MN = NC$; O là giao điểm của BN và CM. Từ O kẻ một đường song song với đường phân giác góc A cắt AC tại D. Chứng minh rằng: $CD = AB$.

Đỗ Quang Đạt

Bài 8/146. Chứng minh rằng: nếu tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì 6 chân đường vuông góc chung của 3 cặp đường thẳng chứa 3 cặp cạnh đối diện của tứ diện nằm trên cùng một mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện (trọng tâm của một tứ diện là giao điểm các đường thẳng đi qua đỉnh và trọng tâm của mặt đối diện).

Đỗ Thanh Sơn

Bài 9/146. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi E là điểm giữa của B_1C_1, F là điểm chia đoạn B_1D_1 theo tỷ số 1/3 kể từ B_1. Hãy tính khoảng cách giữa đường thẳng AD_1 và đường thẳng EF.

Tạ Văn Tự

Bài 10/146. Bốn xã ở bốn đỉnh của một hình vuông cạnh 10km. Người ta muốn xây dựng một hệ thống đường liên xã sao cho từ bất cứ một xã nào có thể đến bất kỳ một xã khác.

a) Hỏi với vật liệu đủ xây dựng 28 km đường có thể đạt mục đích đã đề ra hay không?

b) Hỏi độ dài con đường ngắn nhất là bao nhiêu?

Đỗ Bá Khang

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM 1985

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ

Câu I: 1) *Giải* $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$

2) *Tìm m để cho hệ phương trình sau chỉ có một nghiệm*

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + mx \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + my. \end{cases}$$

Lời giải:

1) Phương trình có nghĩa khi $-1 \leqslant x \leqslant 4$. Viết nó dưới dạng

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x}.$$

Cả hai vế đều không âm, nên bình phương hai vế ta được phương trình tương đương

$$\sqrt{4-x} = x-2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4 - x = (x-2)^2 \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện nêu trên, ta thấy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 3$.

2) Hệ đã cho luôn luôn có nghiệm $x = y = 0$ mà ta gọi là nghiệm tầm thường, vì vậy ta phải tìm m để cho hệ không có nghiệm nào khác nghiệm tầm thường.

Hệ đã cho không đổi khi ta hoán vị x và y, do đó nếu hệ có một nghiệm là (x, y) thì (y, x) cũng là nghiệm của hệ. Giả sử hệ đã cho có một nghiệm duy nhất, ta phải có $x = y$. Thế vào hệ, ta được

$$x(x^2 - 5x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 5x + m = 0, \end{array} \right.$$

nó có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 5x + m = 0$ vô nghiệm, tức là $\Delta = 25 - 4m < 0$ hay $m > 25/4$.

Ta sẽ kiểm tra lại rằng nếu $m > 25/4$, hệ đã cho không thể có nghiệm (x, y) với $x \neq y$ được. Thật vậy, giả sử hệ có nghiệm như thế. Vì $m > 25/4$ nên tam thức $x^2 - 4x + m$ luôn dương, bởi lẽ biệt thức của nó bằng $4 - m < 4 - 25/4 = -9/16 < 0$. Do đó, vì $y^2 = x(x^2 - 4x + m)$, suy ra $x \geqslant 0$. Cũng vậy, $y \geqslant 0$. Nếu $x > y \geqslant 0$, thì vì $m > 25/4$, ta có

$x^2 - 5x + m > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + m > x$, do đó $y^2 = x(x^2 - 4x + m) > x \cdot x = x^2 > y^2$, điều này vô lý. Cũng vậy không thể xảy ra trường hợp $y > x \geqslant 0$ được.

Tóm lại hệ đã cho chỉ có một nghiệm tầm thường khi $m > 25/4$.

Câu II: *Các góc của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức*

$$\frac{(\sin B + \sin C)}{\sin A} = \frac{(\sin 2B + \sin 2C)}{\sin 2A}$$

1) *Chứng minh rằng* $\cos B + \cos C = 1$.

2) *Tính các góc B, C biết tỉ số $b/c = k$, trong đó b, c lần lượt là độ dài các cạnh đối diện với B, C.*

Lời giải: 1) Vì $A = \pi - (B + C)$ nên $2A = 2\pi - 2(B+C)$. Hệ thức đã cho tương đương với

$$\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{2\sin(B+C)\cos(B-C)}{2\sin(B+C)\cos(B+C)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{B-C}{2} - 1}{2\cos^2\frac{B+C}{2} - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) \times$$

$$\times \left(2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 1\right) = 0$$

Vì $\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \neq 0$ nên hệ thức trên tương đương với

$$2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos B + \cos C = 1.$$

2) Vì $k = b/c = \sin B/\sin C$, nên ta phải giải hệ

$$\begin{cases} \cos B + \cos C = 1 & (1) \\ \sin B = k \sin C & (2) \end{cases}$$

Với $k > 0$. Nếu $k = 1$ thì $\sin B = \sin C$ $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow 2\cos B = 1 \Rightarrow \cos B = 1/2$ $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \pi/3$. Giả sử $k \neq 1$. Vì vai trò của b và c là đối xứng, ta có thể giả thiết $b > c$, tức là $k > 1$. Vì $0 < B, C < \pi$, nên $\sin B$ và $\sin C$ đều dương, do đó (2) $\Leftrightarrow 1 - \cos^2 B = k^2(1 - \cos^2 C)$. Thế (1) vào, ta được

$$(k^2 - 1)t^2 + 2t - k^2 = 0 \qquad (3)$$

trong đó $t = \cos C$. Do (1) ta có

$$0 < t < 1 \quad (4)$$

Vì $k > 1$ nên phương trình (3) có các hệ số đầu và cuối trái dấu, do đó nó luôn luôn có hai nghiệm trái dấu. Gọi vế trái của phương trình (3) là $f(t)$, ta có $f(1) = 1$, cùng dấu với hệ số đầu, do đó 1 nằm ngoài khoảng hai nghiệm, vì vậy phương trình (3) luôn có 1 nghiệm $t_1 < 0$ và một nghiệm $t_2 \in (0, 1)$. Gọi α là góc nhọn mà $\cos\alpha = t_2$, ta có $\widehat{C} = \alpha$. Gọi β là góc nhọn mà $\cos\beta = 1 - t_2$, ta có $\widehat{B} = \beta$.

Câu III: *Tìm m để cho hàm số*

$$y = x^3/3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + m^2 + 1$$

đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$x_1 < -1 < x_2$$

2) *Tìm m để cho hàm số*

$y = 2mx - 2\cos^2 x - m\sin x\cos x + 1/4 \, . \cos^2 2x$ *luôn luôn đồng biến.*

Lời giải:

1) y được xác định với mọi x. Ta có

$$y' = x^2 + 2(m-2)x + 5m + 4$$

Cần tìm m để $y'(x) = 0$ tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$.

Vì hệ số đầu của y' là dương nên ta phải có $y'(-1) < 0 \Leftrightarrow 3m + 9 < 0 \Leftrightarrow m < -3$

2) $y = 2mx - \cos 2x - m/2 \, . \sin 2x + 1/8 \, . \cos 4x + 7/8$ được xác định với mọi x.

$y' = 2m + 2\sin 2x - m\cos 2x - 1/2 \, . \cos 4x =$
$= (m + \sin 2x)(2 - \cos 2x)$.

Cần tìm m để $y' \geq 0$ với mọi x. Vì $2 - \cos 2x > 0$ nên chỉ cần tìm m để $m + \sin 2x \geq 0$ với mọi x, Muốn vậy $m \geq 1$.

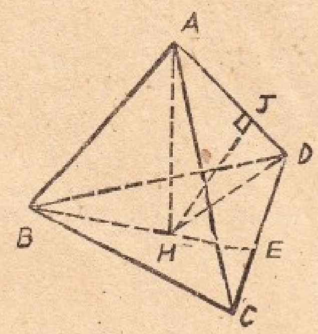
Câu IV: *) *Cho hình tứ diện ABCD*

1) *Chứng minh rằng nếu chân H của đường cao của hình tứ diện xuất phát từ A trùng với trực tâm của tam giác BCD và nếu $AB \perp AC$ thì $AC \perp AD$ và $AD \perp AB$.*

2) *Giả sử $BC = CD = DB$, $AB = AC = AD$. Gọi H là chân của đường cao của hình tứ diện xuất phát từ A, J là chân của đường vuông góc hạ từ H lên AD. Đặt $AH = h$, $HJ = d$. Tính thể tích của hình tứ diện theo d, h.*

3) *Chứng minh rằng nếu hai mặt ABC và ABD có diện tích bằng nhau thì đường vuông góc chung của AB và CD đi qua điểm giữa của CD.*

Lời giải: 1) Vì H là trực tâm của tam giác BCD nên $BH \perp CD$. Nhưng $CD \perp AH$, nên $CD \perp (ABH)$, do đó $CD \perp AB$. Theo giả thiết, $AB \perp AC$, nên $AB \perp (ACD)$, do đó $AB \perp AD$. Tương tự $AC \perp AD$.



2) Vì $BC = CD = DB$, $AB = AC = AD$, nên H là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác đều BCD. Trong tam giác vuông AHD, kẻ đường cao HJ, ta có $AD \, . \, HJ = DH \, . \, AH$,

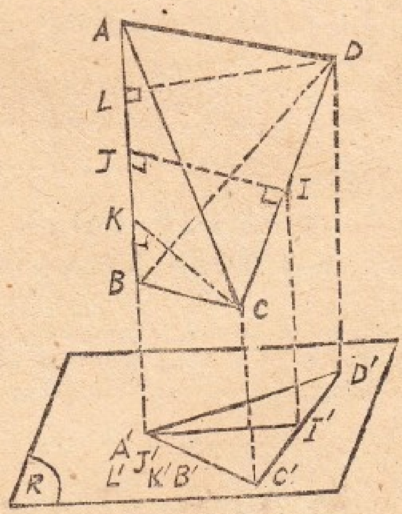
nhưng $AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} = \sqrt{h^2 + HD^2}$,

nên $d\sqrt{h^2 + HD^2} = HD \, . \, h \Rightarrow HD^2 =$
$= d^2h^2/(h^2 - d^2) \Rightarrow HD = dh/\sqrt{h^2 - d^2}$

Vì $DH = BC\sqrt{3}/3$

nên $BC = DH\sqrt{3} = \dfrac{dh\sqrt{3}}{\sqrt{h^2 - d^2}}$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}\,d^2 h^3}{4(h^2 - d^2)}$$

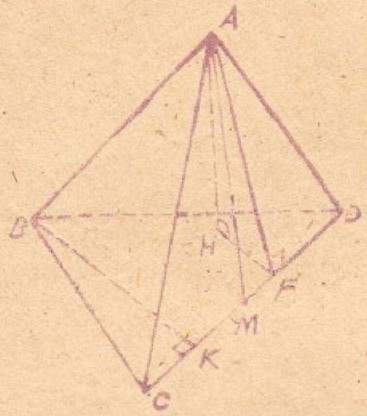


3) Hai tam giác CAB, DAB có chung đáy AB, có diện tích bằng nhau, nên các đường cao CK, DL bằng nhau. Chiếu hình vẽ lên mặt phẳng R vuông góc với AB, mặt phẳng ấy song song với CK, DL và với đường vuông góc chung IJ, do

*) *Thí sinh khối B, D và cao đẳng không phải làm phần 3) câu IV và câu V.*

đó các hình chiếu của A, B, J, K, L trùng nhau. Góc vuông $\widehat{CIJ}$ chiếu xuống thành góc vuông $C'I'J'$. Vì $CK = DL$ nên $C'K' = D'L'$. Tam giác cân $A'C'D'$ có đường cao $A'I'$ trùng với đường trung tuyến, nên $C'I' = I'D'$, do đó $CI = ID$.

Câu V: *Chứng minh rằng nếu trong một hình tứ diện chỉ có một cạnh có độ dài lớn hơn 1 thì thể tích của nó không lớn hơn 1/8.*



Lời giải: Giả sử $AB > 1$. Các cạnh của hai tam giác ACD, BCD đều $\leqslant 1$. Kẻ $AF \perp CD$, $BK \perp CD$, $AH \perp (ACD)$. Đặt $CD = x$, gọi M là điểm giữa của CD. Trong tam giác ACD, ta có:

$$AC^2 + AD^2 = 1/2 \cdot CD^2 + 2AM^2$$

Vì $AC \leqslant 1$, $AD \leqslant 1$ nên $x^2/2 + 2AM^2 \leqslant 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AM^2 \leqslant 1 - x^2/4 \Rightarrow AM \leqslant \sqrt{1 - x^2/4}.$$

Từ các tam giác vuông AFM, AFH, ta có:

$$AH \leqslant AF \leqslant AM \leqslant \sqrt{1 - x^2/4}.$$

Tương tự $BK \leqslant \sqrt{1 - x^2/4}$, do đó nếu gọi V là thể tích hình tứ diện $ABCD$, ta có

$$V = 1/3 \cdot dt(BCD) \cdot AH \leqslant 1/3 \cdot x/2 \times$$

$$\times \sqrt{1 - x^2/4} \cdot \sqrt{1 - x^2/4} = x(4 - x^2)/24$$

Đặt $h(x) = x(4 - x^2)/24 = (4x - x^3)/24$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của $h(x)$ với $0 \leqslant x \leqslant 1$. $h(x)$ xác định với mọi x, $h'(x) = (4 - 3x^2)/24 > 0$ với $0 \leqslant x \leqslant 1$, vậy $h(x)$ đồng biến với $0 \leqslant x \leqslant 1$, do đó $h(x) \leqslant h(1) = 3/24 = 1/8$. Do đó $V \leqslant 1/8$.

GIẢI ĐÁP BÀI: «BÀI TOÁN KỲ LẠ»

Lời giải: Gọi x, y là ngày, tháng sinh của Hướng. Ta có $x + y$ bằng tuổi của anh Dũng, $(x - y)^3$ bằng tuổi của chị Minh. Theo giả thiết ta có

$$x + y = (x - y)^3 \qquad (1)$$

Vì $x + y \leqslant 31 + 12 = 43$ nên $(x - y)^3$ chỉ có khả năng nhận một trong các giá trị 0, 1, 8, 27. Vì con số đó bằng tuổi của chị dâu nên chỉ có giá trị 27 là có nghĩa. Vậy ta có: $x + y = 27$, $x - y = 3$. Từ đó ta rút ra $x = 15$, $y = 12$.

Do cách đây không lâu tuổi anh trai của Hướng bằng 27 (= 15 + 12) nên năm sinh của Hướng phải có dạng 19ab.

Từ giả thiết

$$(1 + 9)^2 = a^2 + b^2 \qquad (2)$$

Với a, b là các số nguyên không âm nhỏ hơn 10 ta dễ dàng kiểm tra được phương trình (2) có hai nghiệm duy nhất là:

$$a = 6,\ b = 8 \text{ hoặc } a = 8,\ b = 6.$$

Loại bỏ nghiệm phi lý 1986 ta rút ra kết luận năm sinh của Hướng là 1968, và tuổi của chị Thảo bằng 24, tuổi của anh Dũng, chị Minh đều bằng 27 và ngày sinh của Hướng là ngày 15-12-1968.

Phương Thảo

In 11.000 số tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ – Hà Nội.
Số in 194/85. In xong và gửi lưu chiểu tháng 12-1985

Chỉ số 12884

Giá 0,3 đồng