TOÁN HỌC Tuổi trẻ

VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

4
1985
Số 144

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

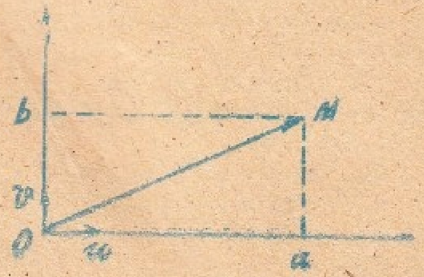
Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói: 52825

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

SỐ, LỆNH, HÌNH VÀ GÌ NỮA

NGUYỄN CẢNH TOÀN

TRONG các số 139 và 143 của báo THvTT, chúng ta đã từ cách nhìn mới về các số thực quen biết, đi đến các lệnh là những phép biến đổi trên các vectơ. Đó là những lệnh viết thành các bảng dạng $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ trong đó a, b, c, d là các số thực. Ta thấy các lệnh đó có nhiều tính chất lạ như lệnh $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ có tính chất $i^2 = -1$, lệnh $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ với tính chất $e^2 = 1$



Hình 1

mặc dù $e \neq \pm 1 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Lạ mà cũng chả có gì lạ vì i chẳng qua là lệnh: «quay góc 90° ngược chiều kim đồng hồ» và e là lệnh: «lấy hình đối xứng qua phân giác thứ nhất». Nhưng chắc các bạn muốn biết: «Lạ nhưng có ích gì?». Tốt lắm! Lòng mong muốn đó thật đáng quý. Nào, chúng ta hãy cùng nhau tiếp tục khám phá lợi ích đó.

Giả sử một vectơ $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ là a, b (hình 1). Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là các vectơ đơn vị trên trục hoành và trục tung thì ta có thể viết:

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v},$$

nhưng $\vec{v}$ là do $\vec{u}$ quay đi 90° ngược chiều kim đồng hồ, vậy $\vec{v} = i\vec{u}$, nên $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + bi\vec{u}$. Chớ hấp tấp viết về sau thành $(a + bi)\vec{u}$ vì $a + b$ đối với chúng ta hiện còn vô nghĩa: phải định nghĩa phép *cộng* hai lệnh đó:

Định nghĩa: Tổng của hai lệnh đã cho là một lệnh duy nhất có tác dụng lên mọi vectơ giống y như việc đem từng lệnh đã cho tác động lên vectơ đã cho rồi cộng (phép cộng vectơ) hai kết quả lại. Phép lấy tổng của hai lệnh đã cho gọi là phép cộng hai lệnh đó.

Với định nghĩa này, ta có thể viết :

$$\overrightarrow{OM} = (a + bi)\vec{u},$$

trong đó $a + bi$ là tổng của hai lệnh a và bi. Mỗi số thực có thể xem như một lệnh ; bây giờ ta có những lệnh dạng $a + bi$, ứng với chúng ta có các số gì ? Vốn hiểu biết của chúng ta về các số, từ số tự nhiên cho đến các số thực rõ ràng là không đủ để trả lời câu hỏi này. Vậy ắt là các bạn đang đứng trước ngưỡng cửa của một phát minh (ít ra cũng là phát minh được một cái gì mới đối với các bạn, những người chỉ mới có kiến thức toán học phổ thông) :

Định nghĩa. Ứng với mỗi lệnh dạng $a + bi$, ta nói rằng ta có một *số phức* $a + bi$ gồm hai thành phần : *phần thực* a và *phần ảo* bi.

Hai số phức $a + bi$ và $c + di$ sẽ gọi là bằng nhau nếu các lệnh tương ứng là như nhau. Các bạn có thể thấy ngay rằng $a + bi = c + di$ khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$.

Chú ý. Nếu ta viết các lệnh a, b, i dưới các dạng $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ thì lệnh $a + bi$ có dạng $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Để nghiên cứu tính chất các số phức, ta có thể quay về các lệnh tương ứng. Ví dụ để nghiên cứu tích của hai số phức $(a+bi)$ và $(c + di)$, ta sẽ thực hiện liên tiếp hai lệnh $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ lên một vectơ bất kỳ có tọa độ (x, y). Trước hết, thực hiện lệnh $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, a được vectơ có tọa độ $(ax - by, bx + ay)$; sau đó thực hiện lệnh $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ lên vectơ mới này, ta được vectơ $(c(ax - by) - d(bx + ay), d(ax-by) + c(bx + ay))$, tức là vectơ có hoành độ

$$(ac - bd)x - (bc + ad)y \text{ và tung độ}$$
$$(ad + bc)x + (ac - bd)y.$$

Ta sẽ được kết quả đó nếu dùng lệnh duy nhất

$$\begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix}$$

Vậy :

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Ta chú ý rằng hai lệnh b và i (hay d và i) là giao hoán được và nếu thực hiện phép nhân $(a + bi)(c + di)$ theo quy tắc nhân thông thường rồi thay i^2 bằng -1 thì ta cũng được kết quả như trên. Vì vậy, từ đây về sau, ta cứ nhân như thông thường rồi ở đâu có i^2 thì thay bằng -1.

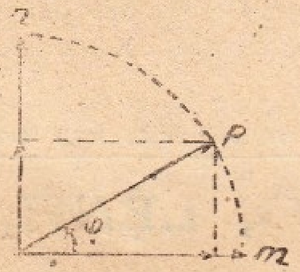
Bằng cách quay về các lệnh, các bạn sẽ thấy rằng phép cộng và phép nhân đối với các số phức có những tính chất quen biết của phép cộng và phép nhân đối với các số thực (giao hoán, kết hợp v.v...).

Bây giờ ta xét một số phức dạng $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Ta xem nó như một lệnh và đem tác động lên một vectơ $\vec{m}$ nào đó. Ta được vectơ $(\cos\varphi + i\sin\varphi)\vec{m} = \cos\varphi \cdot \vec{m} + \sin\varphi \cdot \vec{n}$, trong đó $\vec{n} = i\vec{m}$ là vectơ có được bằng cách quay $\vec{m}$ đi 90° ngược chiều kim đồng hồ (hình 2). Đó chính là vectơ $\vec{p}$ có được bằng cách quay $\vec{m}$ đi một góc φ (hình 2). Vậy $\cos\varphi + i\sin\varphi$ là lệnh : « quay đi một góc φ ».

Nếu k là một số nguyên dương thì rõ ràng ta có công thức sau đây, gọi là công thức Moivre :

$$\cos k\varphi + i\sin k\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^k$$

Vì rằng vế thứ nhất là lệnh « quay góc $k\varphi$ » còn vế thứ hai là lệnh « quay k lần liên tiếp, mỗi lần quay góc φ ». Rõ ràng hai lệnh đó có kết quả như nhau.



Hình 2

Nếu như bạn dùng công thức cộng cung để diễn tả $\cos k\varphi$, $\sin k\varphi$ theo $\cos\varphi$ và $\sin\varphi$ thì rất vất vả, nhất là với k lớn, và chẳng bạn không có được công thức tổng quát. Còn ở đây, nếu bạn nào đã biết nhị thức Newton thì bạn đó thấy ngay rằng chỉ việc khai triển vế sau theo nhị thức Newton, thay mọi i^2 bằng -1 rồi viết rằng phần thực hai vế bằng nhau là có $\cos k\varphi$ và phần ảo hai vế cũng bằng nhau là có $\sin\varphi$. Các bạn tự làm lấy. Nếu chưa biết nhị thức Newton thì có thể giải quyết khi k có một giá trị cụ thể. Chẳng hạn với $k = 7$, ta có :

$$\begin{aligned}\cos 7\varphi + i\sin 7\varphi &= \cos^7\varphi + 7\cos^6\varphi(i\sin\varphi) + \\ &+ 21\cos^5\varphi(i\sin\varphi)^2 + 35\cos^4\varphi(i\sin\varphi)^3 + \\ &+ 35\cos^3\varphi(i\sin\varphi)^4 + 21\cos^2\varphi(i\sin\varphi)^5 + \\ &+ 7\cos\varphi(i\sin\varphi)^6 + (i\sin\varphi)^7 = \\ &= (\cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - \\ &- 7\cos\varphi\sin^6\varphi) + i(7\cos^6\varphi\sin\varphi - 35\cos^4\varphi\sin^3\varphi + \\ &+ 21\cos^2\varphi\sin^5\varphi - \sin^7\varphi).\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\cos 7\varphi &= \cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - \\ &- 7\cos\varphi\sin^6\varphi \\ \sin 7\varphi &= 7\cos^6\varphi\sin\varphi - 35\cos^4\varphi\sin^3\varphi + \\ &+ 21\cos^2\varphi\sin^5\varphi - \sin^7\varphi.\end{aligned}$$

Còn rất nhiều lợi ích khác của số phức mà bạn sẽ thấy khi lên học Đại học.

CỰC TIỂU CỦA PHÂN THỨC CHÍNH QUI

PHAN HUY KHẢI

TRONG bài này xin giới thiệu một lớp hàm số đặc biệt, mà việc tìm cực tiểu của nó rất đơn giản do cấu trúc đặc biệt của chúng. Lớp hàm số ấy có tên gọi là phân thức chính qui.

1. Phân thức chính quy. Giả sử

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x^{\alpha_i}$$

là phân thức của một biến x. Ta sẽ nói rằng phân thức $g(x)$ là chính qui, nếu tổng các tích của các hệ số c_i của nó với bậc của các lũy thừa tương ứng α_i là bằng không, tức là

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i = 0 \qquad (1)$$

Thí dụ đơn giản nhất về phân thức chính qui là

$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ (ở đây $c_1 = c_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$).

Dựa vào đồng nhất thức lượng giác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ta có thể chứng minh rằng phân thức

$$h(x) = x + \frac{\sin\alpha}{x^{\sin\alpha}} + \frac{\cos\alpha}{x^{\cos\alpha}},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

là chính qui. Thật vậy $h(x)$ có thể viết dưới dạng

$$h(x) = x + (\sin\alpha)x^{-\sin\alpha} + (\cos\alpha)x^{-\cos\alpha}.$$

Do đó $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i = 1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0.$

Bây giờ giả sử

$$g(x_1,..,x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} .. x_n^{\alpha_{ni}} \qquad (2)$$

là phân thức của n biến $x_1, x_2, ...x_n$. Ta sẽ nói rằng phân thức $g(x_1,...,x_n)$ là chính qui nếu

$$\begin{aligned} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + ... + \alpha_{1m}c_m &= 0 \\ \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + ... + \alpha_{2m}c_m &= 0 \\ \alpha_{n1}c_1 + \alpha_{n2}c_2 + ... + \alpha_{nm}c_m &= 0 \end{aligned}$$

Các phân thức một biến

$$g_1(x_1) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_1^{\alpha_{1i}}, ..., g_n(x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_n^{\alpha_{ni}}$$

sẽ được gọi là các thành phần của phân thức $g(x_1,...,x_n)$.

Thí dụ, các thành phần của phân thức hai biến

$$g(x, y) = 2x^{\frac{-4}{r}} y^{\frac{-1}{s}} + 2x^{\frac{5}{r}} y^{\frac{2}{s}} + x^{\frac{-2}{r}} y^{\frac{-2}{s}}$$

$r, s \neq 0$

sẽ là các phân thức

$$g_1(x) = 2x^{\frac{-4}{r}} + 2x^{\frac{5}{r}} + x^{\frac{-2}{r}}$$

$$g_2(y) = 2y^{\frac{-1}{s}} + 2y^{\frac{2}{s}} + y^{\frac{-2}{s}}$$

Rõ ràng phân thức $g(x_1,... x_n)$ là chính qui, khi và chỉ khi tất cả các thành phần $g_i(x_i)$, $i=1,.., n$ của nó là chính qui. Trong thí dụ trên, phân thức hai biến $g(x, y)$ là chính qui vì cả hai thành phần của nó $g_1(x)$ và $g_2(y)$ đều là chính qui.

Dưới đây, chúng ta sẽ đưa ra một định lý mà nó sẽ giúp nhiều trong việc kiểm tra tính chính qui của một phân thức.

Định lý 1. Nếu các phân thức g, h là chính qui thì các phân thức λg (λ là số dương), $g + h$, $g \cdot h$ (g, h là ký hiệu hàm hợp quen thuộc) cũng là chính qui.

Chứng minh của định lý 1 suy trực tiếp từ định nghĩa.

Hệ quả. Nếu $g(x_1,..,x_n)$ là phân thức chính qui thì với mọi m nguyên dương, ta cũng có g^m là chính quy.

Thí dụ 1. Xét phân thức chính qui $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

Từ hệ quả suy ra phân thức

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \frac{1}{x^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k-n}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cũng là chính qui. Do đó ta có

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k(2k - n) = 0, \text{ tức là } 2\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n\sum_{k=0}^{n} C_n^k = n2^n$$

và như vậy ta đã chứng minh được một đồng nhất thức quen biết.

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n.2^{n-1}.$$

2. Cực tiểu phân thức chính qui

Giả sử

$$g(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k x_1^{a_{1k}} \dots x_n^{a_{nk}} \quad (3)$$

là phân thức chính qui, tức là

$q_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k = 0$ với mọi $i = 1,\dots,n$. Tính chất cực trị của phân thức chính qui biểu diễn qua định lý sau đây.

Định lý 2 Giá trị nhỏ nhất của phân thức chính qui (3) trên miền $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots x_n > 0$ bằng tổng các hệ số của nó, và đạt được khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, tức là

$$\min_{x_j > 0,\ (j=1,n)} g(x_1,\dots,x_n) = g(1,\dots,1) = \sum_{k=1}^{m} c_k$$

Định lý 2 được chứng minh dựa trên hai bổ đề sau.

Bổ đề 1 (Bất đẳng thức Cauchy suy rộng)

Giả sử $x_1,\dots,x_n$ là n số không âm tùy ý, còn $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ là n số không âm mà $\alpha_1+\dots+\alpha_n = 1$. Khi đó ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} \quad (4)$$

ngoài ra ta có dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x_1 = \dots = x_n$.

Bổ đề 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$\varphi(Z_1,\dots,Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Z_i$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} Z_1 > 0,\dots,Z_n > 0 \\ Z_1^{\gamma_1} Z_2^{\gamma_2} \dots Z_n^{\gamma_n} = A \end{cases} \quad (4)$$

trong đó $\beta_i > 0,\ \gamma_i > 0,\ A > 0,\ i = 1\dots n$ bằng

$$\mu = (\gamma_1+\dots+\gamma_n)\left(A \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\gamma_i}\right)^{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{\gamma_1+\dots+\gamma_n}}$$

Giá trị nhỏ nhất đạt được tại điểm duy nhất $(Z_1^*,\dots,Z_n^*)$, trong đó

$$Z_i^* = \frac{\gamma_i}{\beta_i}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{\gamma_i}\right)^{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{\gamma_1+\dots+\gamma_n}} = \frac{\gamma_i}{\beta_i}\,\frac{\mu}{\gamma}.$$

ở đây $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Chứng minh của bổ đề 1 bạn đọc đã biết,

Chứng minh của bổ đề 2

Đưa vào các biến dương mới $x_1,\dots,x_n$ như sau

$$Z_i = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\gamma_i}{\beta_i}\,x_i,\quad i = 1,\dots,n.$$

Khi đó hàm số $\varphi(Z_1,\dots,Z_n)$ trở thành hàm số

$$\Phi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma} x_i \quad (5)$$

và ràng buộc (4) trở thành ràng buộc sau

$$\begin{cases} x_1 > 0,\dots,x_n > 0 \\ x_1^{\frac{\gamma_1}{\gamma}} x_2^{\frac{\gamma_2}{\gamma}} \dots x_n^{\frac{\gamma_n}{\gamma}} = A_1 \end{cases} \quad (6)$$

trong đó

$$A_1 = \gamma\left(A \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{\gamma_i}\right)^{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Như vậy ta chuyển về bài toán tìm cực tiểu hàm số (5) với ràng buộc (6).

Giả sử $x_1,\dots,x_n$ là các số tùy ý thỏa mãn ràng buộc (6). Theo bổ đề 1 ta có

$$\Phi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{\gamma} x_i \geq x_1^{\frac{\gamma_1}{\gamma}} \dots x_n^{\frac{\gamma_n}{\gamma}} = A_1 \quad (7)$$

Mặt khác nếu lấy $x_i^* = A_1$ với mọi $i = 1,\dots,n$, khi đó rõ ràng $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ thỏa mãn ràng buộc (6) và ta có

$$\Phi\left(x_1^*,\dots,x_n^*\right) = A_1$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\min \Phi(x_1,\dots x_n) = A_1$. Vì dấu đẳng thức trong (7) chỉ có tại một điểm duy nhất, nên $(A_1,\dots,A_1)$ là điểm cực tiểu duy nhất của hàm số (5) với ràng buộc (6). Rõ ràng giá trị bé nhất của hàm số $\varphi(Z_1,\dots,Z_n)$ với ràng buộc (4) cũng bằng A_1. Cực tiểu đó sẽ đạt tại điểm $(Z_1^*,\dots,Z_n^*)$ duy nhất, trong đó

$$Z_i^* = (1/\gamma)(\gamma_i/\beta_i)\,A_1.$$

Bổ đề 2 được chứng minh hoàn toàn.

Chứng minh định lý 2

Trước hết để ý rằng

$$\min_{\substack{x_j > 0 \\ j = 1\dots n}} g(x_1,\dots,x_n) \leq g(1,\dots,1) = \sum_{k=1}^{m} c_k \quad (8)$$

Giả sử $(x_1,\dots,x_n)$ là một điểm tùy ý với các tọa độ dương. Đặt

$$u_k = c_k x_1^{a_{1k}} \dots x_n^{a_{nk}},\ k = 1, 2\dots m$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\prod_{k=1}^{m} u_k^{c_k} = \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k} \quad (9)$$

Thật vậy từ

$$q_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_k = 0,\ i = 1,\dots, n \text{ ta có}$$

$$\prod_{k=1}^{m} u_k^{c_k} = \prod_{k=1}^{m} \left(c_k x_1^{a_{1k}} \dots x_n^{a_{nk}}\right)^{c_k}$$

$$= \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k} \cdot \prod_{k=1}^{m} x_1^{c_k a_{1k}} \dots \prod_{k=1}^{n} x_n^{c_k a_{nk}}$$

$$= \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k} x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n} = \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k}.$$

Đặt $A = \prod_{k=1}^{m} c_k^{c_k}$ và xét bài toán sau: Tìm

$$\mu = \min\ (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m)$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} Z_1 > 0, \dots, Z_m > 0 \\ Z_1^{c_1} Z_2^{c_2} \dots Z_m^{c_m} = A \end{cases} \qquad (10)$$

Ứng dụng vào bài toán này bổ đề 2 khi $n = m$; $\beta_i = 1$, $\gamma_i = c_i$ và giá trị A, khi đó ta có $\mu = \gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m = c_1 + \dots + c_m$.

Chú ý rằng dựa vào đẳng thức (9), ta thấy các số $u_1, \dots, u_m$ xác định như trên thỏa mãn ràng buộc (10). Do đó với $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ tùy ý ta có

$$g(x_1, \dots x_n) = \sum_{k=1}^{m} u_k \geqslant \mu = \sum c_k.$$

Bất đẳng thức này cùng với bất đẳng thức (8) suy ra điều phải chứng minh.

3. Ứng dụng. Kết quả thu được trong mục trên có thể ứng dụng để giải nhiều bài toán cực trị.

1. Xét các phân thức

$$g_1(x) = x + \frac{\sin\beta}{x^{\sin\beta}} + \frac{\cos\beta}{x^{\cos\beta}}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$g_2(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$$

$$g_3(x, y) = 2x^{-\frac{4}{r}} y^{-\frac{1}{s}} + 2x^{\frac{5}{r}} y^{\frac{2}{s}} + x^{-\frac{2}{r}} y^{-\frac{2}{s}}, \qquad r, s \neq 0$$

Như trong mục 1 đã chỉ ra tất cả các phân thức đó đều là chính qui. Theo định lý 2 ta có

$$\min_{x>0} g_1(x) = g_1(1) = 1 + \sin\beta + \cos\beta$$

$$\min_{x>0} g_2(x) = g_2(1) = 2^n$$

$$\min_{x>0,\ y>0} g_3(x, y) = g_3(1, 1) = 2 + 2 + 1 = 5.$$

2. Tìm cực tiểu của phân thức

$$g(x, y) = x^{\frac{n}{n+1}} y^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k y^k \sqrt[k+1]{x}}$$

trên miền $x > 0$, $y > 0$

Có thể thấy rằng

$$1 \cdot \frac{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{k+1}\right) = 0 \text{ và}$$

$$1 \cdot n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (-k) = 0$$

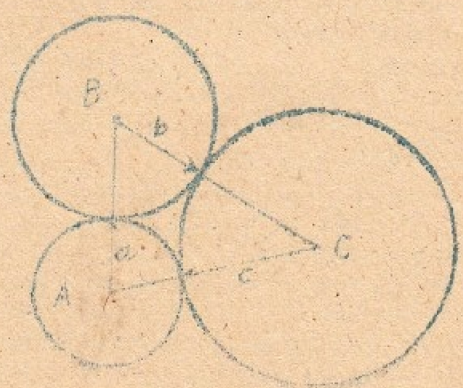
do đó phân thức $g(x, y)$ là chính qui. Vì vậy, theo định lý 2

$$\min_{\substack{x>0 \\ y>0}} g(x, y) = g(1, 1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

4. Cho 3 vòng tròn tâm A, B, C với bán kính a, b, c tương ứng, từng đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Xét $\Delta\ ABC$ và hãy chứng minh rằng

$$\cot g^2\left(\frac{A}{2}\right)\cot g^2\left(\frac{B}{2}\right) + \cot g^2\left(\frac{B}{2}\right)\cot g^2\left(\frac{C}{2}\right) + \cot g^2\left(\frac{C}{2}\right)\cot g^2\left(\frac{A}{2}\right) \geqslant 27 \qquad (11)$$

Đặt $p = a + b + c$; $u = AB = a + b$; $v = BC = b + c$; $w = AC = a + c$.



Theo định lý hàm số cosin trong ΔABC ta có

$$\cos A = \frac{(u^2 + w^2 - v^2)}{2uw}$$

Từ đó dễ dàng suy ra $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{pa}{uw}$

$$\sin^2 \left(\frac{A}{2}\right) = \frac{bc}{uw}$$

và vì thế $\operatorname{tg}^2 \left(\frac{A}{2}\right) = \frac{bc}{pa}$

Lý luận tương tự ta có

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{B}{2}\right) = \frac{ac}{pb}, \quad \operatorname{tg}^2 \left(\frac{C}{2}\right) = \frac{ab}{pc}$$

Do đó

$$\operatorname{cotg}^2 \left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{cotg}^2 \left(\frac{B}{2}\right) + \operatorname{cotg}^2 \left(\frac{B}{2}\right) \operatorname{cotg}^2 \left(\frac{C}{2}\right) + \operatorname{cotg}^2 \left(\frac{C}{2}\right) \operatorname{cotg}^2 \left(\frac{A}{2}\right) = (a+b+c)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

Dễ dàng kiểm tra rằng phân thức

$$g(a, b, c) = (a+b+c)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

là chính qui. Từ đó suy ra rằng

$$\min_{a>0,\ b>0,\ c>0} g(a, b, c) = g(1, 1, 1) = 27$$

Vậy bất đẳng thức (11) là đúng.

4. Để hiểu kỹ hơn những điều trình bày ở trên mời các bạn giải mấy bài tập sau đây.

1. Chứng minh rằng các phân thức sau đây là chính qui:

a) $g(x) = \frac{nr}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \sqrt[k+1]{x}}$

b) $g(x, y) = (x+y)^n (x^{-n} + y^{-n})$

c) $g(x) = x + \sum_{j=1}^{n} x^{-\alpha_j}$, trong đó $\alpha_j > 0$: $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$

2 Chứng minh rằng các phân thức sau đây là chính qui và tìm giá trị nhỏ nhất của chúng (trong miền các biến dương).

a) $g(x, y) = \frac{1}{p} x^{p-1} y^{-1} + \frac{1}{q} x^{-1} y^{q-1}$

trong đó $p, q > 0$, $1/p + 1/q = 1$.

b) $g(x, y) = y^n x^{-n/(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} x^{1/(k+1)} k^{-1} y^{-k}$

c) $g(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^n$

Bài 1/141. *Cho k, l, là hai số tự nhiên, $k > l$, thỏa mãn điều kiện sau:*

Với mọi số tự nhiên m đều có $(11m-1, k) = (11m-1, l)$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n sao cho $k = 11^n . l$ ((a, b) ký hiệu ước chung lớn nhất của a và b).

Lời giải: *Nguyễn Quảng Cường*, lớp 11CT Đại học Tổng hợp Hà Nội). Ta chứng minh bài toán tổng quát: $k, l, q \in N$ (N là tập hợp các số tự nhiên), p nguyên tố, $(p, q) = 1$ sao cho $\forall m \in N$ $(pm - q, k) = (pm - q, l)$ thì $\exists\, n \in N$ để $k = p^n l$. Với $p = 11$, $q = 1$ ta có bài toán của ta.

1. Trước hết ta chứng minh rằng $a, b, c, \in N$; $(a, c) = 1$ thì $(a, b) = (a, bc)$.

Quả vậy đặt $(a, b) = d$; $a = da_1$, $b = db_1$; $d, a_1, b_1 \in N$ và $(a_1, b_1) = 1$. Ta có $(a, bc) = d(a_1, b_1 c) = dd_1$ với $d_1 = (a_1, b_1 c)$. Giả sử $d_1 \neq 1$, khi đó có số nguyên tố p_1 để $d_1 \vdots p_1$. Ta suy ra $a_1 \vdots p_1$; $b_1 c \vdots p_1$, vậy $b_1 \vdots p_1$ hoặc $c \vdots p_1$.

Nếu $b_1 \vdots p_1$ thì $(a_1 b_1) \neq 1$ (vô lý). Nếu $c \vdots p_1$ thì do $a_1 \vdots p_1$ ta có $(a, c) \vdots p_1$ (vô lý). Vậy $d = 1$.

2. Thứ hai ta chứng minh rằng nếu $a \in N$ $(a, p) = 1$ thì tồn tại m để $pm - q \vdots a$.

Quả vậy với $a = 1$ thì mệnh đề đúng hiển nhiên, với $a > 1$ ta hãy xét tập hợp a số sau $\{pj - q \mid j = 1, 2, \ldots, a\}$. Nếu trong a số đó không có số nào chia hết cho a thì có hai số a_1, a_2 $(a_1 > a_2)$ để $pa_1 - q \equiv pa_2 - q \pmod{a}$. Do $(p, a) = 1$ nên $a_1 - a_2 \vdots a$. Điều này không thể xảy ra vì $1 \leqslant a_2 < a_1 \leqslant a$.

3. Bây giờ ta chứng minh bài toán. Ta có $k = p^{k_1} k_0$, $l = p^{l_1} l_0$; k_1, l_1 nguyên không âm, $k_0, l_0 \in N$ và $(p, k_0) = (p, l_0) = 1$, do đó $(k_0 l_0, p) = 1$. Theo (2) $\exists\, m \in N$: $pm - q \vdots k_0 l_0$. Do $(p, q) = 1$ nên $(pm - q, p^{k_1}) = 1$. Theo (1)

$(pm-q, p^{k_1}k_o) = (pm-q, k_o)$ hay $(pm-q, k) = k_o$. Tương tự $(pm-q, l) = l_o$. Vậy $k_o = l_o$. Do $k > l$ nên $k_1 > l_1$. Vậy $k = p^{k_1 - l_1}l$, ta lấy $n = k_1 - l_1$.

NQT.

Bài 2/141. *a, b, c, d, là bốn số dương thỏa mãn $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ và $bd \leqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$4/(1 + \sqrt[4]{abcd}) \geqslant 1/(1+a) + 1/(1+b) + $$
$$+ 1/(1+c) + 1/(1+d).$$

Lời giải. (*Cao Vi Ba, lớp 11CT Đại học Tổng Hợp Hà Nội*).

Trước hết ta chứng minh rằng với hai số dương x, y thỏa mãn $xy \leqslant 1$ thì

$$2/(1+\sqrt{xy}) \geqslant 1/(1+x) + 1/(1+y).$$

Thực vậy, bất đẳng thức trên tương đương với các bất đẳng thức sau

$$(2 + x + y)(1 + \sqrt{xy}) \leqslant 2(1+x)(1+y)$$

hay

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2(1 - \sqrt{xy}) \geqslant 0$$

đây là bất đẳng thức đúng, dấu bằng xảy ra khi $x = y$ hoặc $xy = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức trên cho ba trường hợp

$x = a$, $y = c$ $(ac \leqslant bd \leqslant 1)$; $x = b$, $y = d$; và $x = \sqrt{ac}$, $y = \sqrt{bd}$ $(\sqrt{acbd} \leqslant bd \leqslant 1)$ ta được

$$1/(1+a) + 1/(1+c) \leqslant 2/(1+\sqrt{ac})$$
$$1/(1+b) + 1/(1+d) \leqslant 2/(1+\sqrt{bd})$$
$$1/(1+\sqrt{ac}) + 1/(1+\sqrt{bd}) \leqslant 2/(1+\sqrt[4]{abcd}).$$

Suy ra

$$1/(1+a) + 1/(1+b) + 1/(1+c) +$$
$$+ 1/(1+d) \leqslant 4/(1+\sqrt[4]{abcd})$$

Có dấu « = » khi.

$$\begin{cases} a = c \text{ hoặc } ac = 1 \\ b = d \text{ hoặc } bd = 1 \\ ac = bd \text{ hoặc } abcd = 1 \end{cases}$$

Chú ý rằng $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$; $ac \leqslant bd \leqslant 1$. Do đó $abcd = 1$ thì $ac = bd = 1$. Nếu $abcd < 1$ thì $ac = bd < 1$ nên $a = c$, $b = d$ do đó $a = b = c = d$. Vậy có dấu « = » chỉ trong hai trường hợp

(1) $ac = bd = 1$ với $a = b$, $c = d$

(2) $a = b = c = d < 1$.

NQT.

Bài 3/141: *Cho dãy số thực $\{x_o, x_1, \dots, x_n\}$ với $x_o = 0$, $x_n \leqslant 1$ thỏa mãn hệ thức:*

$$x_{k+1} = x_k + 1/1191.\sqrt{1 - x_k^2}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Hỏi có thể $n = 1985$ hay không?

Lời giải: Từ điều kiện của đề bài dễ dàng chứng minh được.

$1 \geqslant x_n \geqslant x_{n-1} \geqslant \dots \geqslant x_2 \geqslant x_1 > x_o = 0$ (1). Ta xét hai trường hợp sau:

1) *Trường hợp 1*: $x_n = 1$. Ta có:

$$x_1 = x_o + 1/1191.\sqrt{1 - x_o^2} = 1/1191 < 1$$
$$x_2 = x_1 + 1/1191.\sqrt{1 - x_1^2} =$$
$$= 1/1191 + \sqrt{1191^2 - 1}/1191^2 < 1$$

Nhận xét thấy rằng x_2 nhận giá trị vô tỷ. Từ đây kết hợp với hệ thức của đề ra ta thấy: $\forall k$, $2 \leqslant k \leqslant n$, x_k nhận các giá trị vô tỷ. Mà 1 là số hữu tỷ nên x_n không thể nhận giá trị bằng 1 được. Và do vậy việc giải bài toán chỉ qui về việc xét:

2) *Trường hợp 2*: $x_n < 1$. Khi đó (1) trở nên chặt chẽ hơn:

$$1 > x_n > x_{n-1} > \dots > x_2 > x_1 > x_o = 0 \qquad (2)$$

Đặt $x_i = \sin\alpha_i$, $0 \leqslant \alpha_i < \pi/2$, $i = \overline{0, n}$. Lúc đó hệ thức của đề ra trở thành:

$$\sin\alpha_{k+1} = \sin\alpha_k + 1/1191.\cos\alpha_k$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha_{k+1} - \sin x_k = 1/1191.\cos\alpha_k$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2}\cos\frac{\alpha_{k+1} + \alpha_k}{2} =$$
$$= \frac{1}{1191}\cos\alpha_k \qquad (3).$$

Do trong khoảng $[0, \pi/2)$ hàm $\sin x$ là hàm đồng biến nên từ (2) suy ra $\pi/2 > \alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_o = 0$. Từ đây ta có:

$$\pi/2 > (\alpha_{k+1} + \alpha_k)/2 > \alpha_k \geqslant 0, \ k = \overline{0, n-1} \qquad (4)$$
$$\text{và } 0 < (\alpha_{k+1} - \alpha_k)/2 < \pi/2, \ k = \overline{0, n-1} \qquad (5).$$

Từ (4) suy ra $\cos\dfrac{\alpha_{k+1} + \alpha_k}{2} \neq 0$. Và do trong khoảng $[0, \pi/2)$ hàm $\cos x$ là hàm nghịch biến nên cũng từ (4) ta có:

$\cos\dfrac{\alpha_{k+1} + \alpha_k}{2} < \cos\alpha_k$. Bởi vậy: (3) $\Leftrightarrow$

$$2\sin\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2} > \frac{1}{1191} \qquad (6)$$

Vì $\sin x < x$ trong khoảng $(0, \pi/2)$ nên từ (5) suy ra $\sin\dfrac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2} < \dfrac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2}$. Do đó:

$$(6) \Leftrightarrow \alpha_{k+1} - \alpha_k > 1/1191 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) >$$
$$> n/1191.$$
$$\Leftrightarrow \alpha_n > n/1191 \Rightarrow \pi/2 > n/1191 \text{ (do } \alpha_n < \pi/2)$$
$$\Rightarrow n/1191 < 5/3 \text{ (do } \pi/2 < 5/3) \Leftrightarrow n < (5.1191)/3 =$$
$$= 1985.$$

Vậy n không thể bằng 1985 được!

Nhận xét: Hầu hết các bạn gửi lời giải tới đều không đặt điều kiện khác 0 cho $\cos\frac{\alpha_{k+1}+\alpha_k}{2}$ khi làm bước chuyển tiếp từ (3) sang (6). Do vậy các bạn đều bỏ sót trường hợp 1 khi giải bài. Riêng bạn *Phùng Hồ Hải* (A_0 10 ĐHTH Hà Nội) có đề cập tới trường hợp đó, nhưng cũng chưa giải quyết được trọn vẹn.

N.K M.

Bài 4/141. *Các số a, b, c phải thỏa mãn điều kiện gì để hệ phương trình sau.*

$$\begin{cases} ax^3 - bx + c = 0 \\ x^6 + x^4 + x^2 + a^2 + b^2 + ab + c = 0 \end{cases}$$

có nghiệm?

Lời giải: (của nhiều bạn). Trước hết ta tìm điều kiện cần để hệ có nghiệm. Giả sử hệ có nghiệm $x = x_0$. Bằng cách đặt $x_0^3 = y_0$ ta có thể viết:

$$x_0^6 = y_0^2;\ x_0^4 = x_0y_0;\ x_0^3 = y_0.$$

Vì vậy hệ đã cho trở thành hệ các đẳng thức:

$$\begin{cases} ay_0 - bx_0 + c = 0 \\ y_0^2 + x_0y_0 + x_0^2 + a^2 + b^2 + ab + c = 0 \end{cases}$$

Khử c ta được:

$$ay_0 - bx_0 = y_0^2 + x_0y_0 + x_0^2 + a^2 + b^2 + ab$$

hay:

$$2y_0^2 + 2x_0^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2ab + 2x_0y_0 + 2bx_0 - 2ay_0 = 0$$

hay

$$(y_0 + x_0)^2 + (a+b)^2 + (b + x_0)^2 + (a - y_0)^2 = 0.$$

Do vậy $y_0 = a = \ \ b = x_0 = -y_0$.

Từ đó suy ra $x_0 = a = b = 0$, do đó $c = 0$.

Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm là $a = b = c = 0$. Ngược lại, với điều kiện $a = b = c = 0$ ta được hệ có một nghiệm $x = 0$.

N.V.M.

Bài 5/141. *Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{C_n^k} = \frac{u_1 + u_{n+1}}{2} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$$

Ở đó C_n^k là tổ hợp chập k của n; $\{u_k\}$ là cấp số cộng.

Lời giải:

Do $\{u_k\}$ là cấp số cộng ta có: $u_{k+1} + u_{n-k+1} = u_1 + u_{n+1}$ với mọi $k = \overline{0, n}$. Lại có:

$$2\sum_{k=0}^{n} u_{k+1}/C_n^k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1}/C_n^k + u_{n-k+1}/C_n^{n-k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} + u_{n-k+1})/C_n^k = (u_1 + u_n) \sum_{k=0}^{n} 1/C_n^k.$$

nên điều phải chứng minh tương đương với:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}.$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp. Với $n = 1$ hiển nhiên đúng. Giả sử đúng với p tức là:

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{C_p^k} = \frac{p+1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{2^k}{k}$$

hay $$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{C_p^k} = \frac{u_1 + u_{p+1}}{2} \cdot \frac{p+1}{2^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^{p+1} \frac{2^k}{k}$$

ta phải chứng minh bài toán đúng với $(p+1)$. Thực vậy:

$$\sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{C_{p+1}^k} = \frac{1}{C_{p+1}^0} + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{C_{p+1}^{k+1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \frac{k+1}{C_p^k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{p+1} \cdot \frac{p+2}{2} \cdot \frac{p+1}{2^{p+1}} \cdot \sum_{k=1}^{p+1} \frac{2^k}{k} =$$

$$= \frac{p+2}{2^{p+2}} \sum_{k=1}^{p+2} \frac{2^k}{k}.$$

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Phương Tuấn*, *Nguyễn Quang Thái* (ĐHSP Hà Nội 1), *Đặng Vũ Sơn* (11 CT, ĐHTH Hà Nội), *Nguyễn Thục Văn* (11, PTTH Thăng Long, Hà Nội). *Nguyễn Ngọc Văn Khoa* (11 CT, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng và bạn *Nguyễn Gia Bảo* (11 CT, Lê Hồng Phong, HCM) có lời giải tốt.

T.V.T

Bài 6/141. *Xét các tứ giác phẳng có các cạnh a, b, c, d thỏa mãn điều kiện:*

$$\max(ab + cd,\ ac + bd,\ ad + bc) = 1.$$

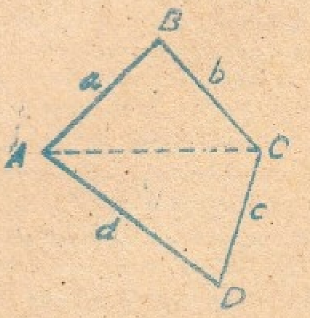
Tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

Lời giải (của nhiều bạn). Xét trường hợp khi *ABCD* là tứ giác lồi.

1) Giả sử $ab + cd = 1$. Khi đó (h.1)

$$S_{ABCD} = 1/2 \cdot ab\sin B + 1/2 \cdot cd\sin D \leqslant$$
$$\leqslant 1/2 \cdot ab + 1/2 \cdot cd = 1/2(ab + cd) = 1/2$$

Vậy max $S_{ABCD} = 1/2$ khi $\widehat{B} = \widehat{D} = 1v$.

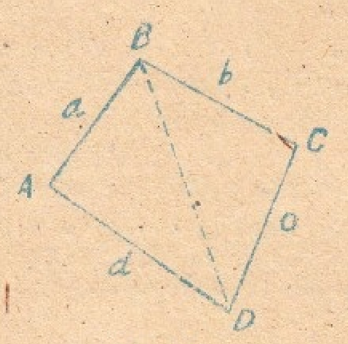


Hình 1:

2) Tương tự, nếu $ad + bc = 1$ thì (xem hình 2)

$$S_{ABDC} = 1/2 \cdot ad \sin A + 1/2 \cdot bc \sin C \leqslant$$
$$\leqslant 1/2 \cdot ad + 1/2 \cdot bc = 1/2(ad + bc) = 1/2$$

Vậy max $S_{ABCD} = 1/2$ khi $\widehat{A} = \widehat{C} = 1v$.

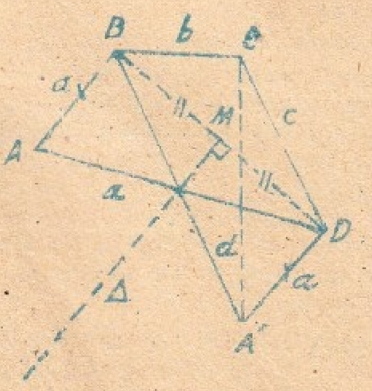


Hình 2:

3) Xét các tứ giác thỏa mãn điều kiện:

$$ac + bd = 1 \qquad \text{(xem hình 3)}$$

Gọi M là điểm giữa của BD. Qua M dựng đường thẳng Δ vuông góc với BD. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ. Khi đó
$S_{ABCD} = S_{A'BCD} =$



Hình 3

$$= 1/2 \cdot ac \sin \widehat{A'DC} + 1/2 \cdot bd \sin \widehat{A'BC} \leqslant$$
$$\leqslant 1/2(ac + bd) = 1/2.$$

Vậy trong trường hợp này max $S_{ABCD} = 1/2$ khi $\widehat{A'DC} = \widehat{A'BC} = 1v$.

Nhận xét rằng khi $ABCD$ là tứ giác lõm thì $S_{ABCD} < 1/2$. Vậy max $S_{ABCD} = 1/2$ đạt được, chẳng hạn khi $ABCD$ là hình vuông có cạnh $= \sqrt{2}/2$.

Nhận xét: Rất nhiều bạn giải trường hợp 3 bằng cách sử dụng bất đẳng thức Ptôlêmê và không chỉ ra được trường hợp xảy ra đẳng thức.

N.V.M

Bài 7/141. *Tìm các giá trị của k để tồn tại một hàm số liên tục $f(x)$ sao cho $f(f(x)) = k.x^{25}$ với mọi giá trị thực của x.*

Lời giải: +) Điều kiện cần: Vì với $k = 0$ ta luôn có thể chọn $f(x) \equiv 0$ nên ta chỉ cần xét $k \neq 0$.

Vì $f(f(x)) = k.x^{25}$ với $k \neq 0$ nên ta suy ra $f(x) \neq f(y)$ khi $x \neq y$. Nhưng hàm f liên tục nên f phải là hàm đơn điệu $\Rightarrow f.f$ là hàm đơn điệu tăng chặt $\Rightarrow k > 0$.

+) Điều kiện đủ: Đảo lại, nếu $k > 0$ ta có thể lấy.

$$f(x) = \sqrt[6]{k} \cdot x^5.$$

Nhận xét: Đa số các bạn tham gia đều gửi lời giải đúng, tuy vậy do không nhận xét về tính đơn điệu tăng của hàm $f.f$ nên lời giải dài dòng.

Đ.B.K.

Bài 8/141: *Cho 6 điểm trên mặt phẳng. Chứng minh rằng tỷ số giữa khoảng cách lớn nhất với khoảng cách bé nhất giữa các điểm đó không nhỏ hơn 3.*

Lời giải: Nếu có 3 điểm nào thẳng hàng thì dễ dàng thấy tỷ số phải xét $\geqslant 2 > \sqrt{3}$.

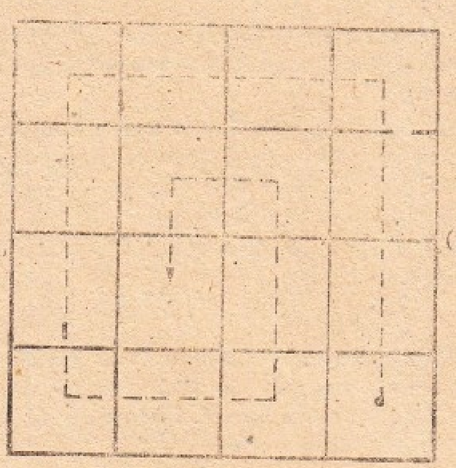
Giả sử không có 3 điểm nào thẳng hàng, ta sẽ chứng minh tồn tại 3 điểm là đỉnh 1 tam giác có một góc $\geqslant 120°$. Khi đó gọi a, b, c là 3 cạnh tam giác ($a \geqslant b \geqslant c$) ta có
$a^2 \geqslant b^2 + c^2 + bc \geqslant 3c^2 \Rightarrow a/c \geqslant \sqrt{3}$ và tỷ số phải xét $\geqslant a/c \geqslant \sqrt{3}$.

Nếu 6 điểm đã cho là 6 đỉnh 1 lục giác lồi thì phải có 1 trong 6 góc ở đỉnh lục giác $\geqslant 120°$. Nếu không trong số 6 điểm có thể chọn ra 3, 4 hoặc 5 điểm là đỉnh của 1 tam giác, tứ giác hay ngũ giác lồi chứa tất cả các điểm còn lại. Trong cả 3 trường hợp đều chọn được 4 điểm A, B, C, D sao cho D nằm trong tam giác ABC. Khi đó trong 3 tam giác ABD, BCD, CAD, phải có 1 tam giác có góc (ở D) $\geqslant 120°$. Bài toán được chứng minh.

Đ.B.K.

Bài 9/141, *Trong hình vuông cạnh 1 cho 1985 điểm. Chứng minh rằng từ mỗi điểm trong số các điểm đã cho có một con đường đi qua tất cả các điểm còn lại rồi trở về điểm xuất phát với độ dài nhỏ hơn 100.*

Lời giải : Ta chia mỗi cạnh hình vuông thành k phần bằng nhau (số k sẽ chọn sau), rồi từ các điểm chia vẽ các đường song song với các cạnh của hình vuông. Kết quả, hình vuông đã cho được chia thành k^2 hình vuông nhỏ cạnh $1/k$. Tiếp theo, đánh số các hình vuông nhỏ theo chiều như hình vẽ.


(k=4)

bằng các số từ 1 đến k^2. Đặt tên hình vuông thứ i là P_i. Nhận xét rằng chứng minh sẽ kết thúc nếu ta chỉ ra một đường gấp khúc khép kín đi qua các điểm đã cho với độ dài nhỏ hơn 100.

1985 điểm đã cho được phân bố trọn vẹn vào k^2 hình vuông con (với mỗi điểm nằm trên cạnh chung của 2 hình vuông con ta qui định nó thuộc vào 1 trong 2 hình vuông đó). Khi đó, ta ký hiệu số điểm có trong P_i là n_i (có thể xảy ra $n_i = 0$). Ta xây dựng đường gấp khúc như sau :

1) Nếu $n_1 \geqslant 1$ ta chọn một điểm bất kỳ trong số đó, rồi từ đó dựng đường gấp khúc nối $(n_1 - 1)$ điểm còn lại. Vì đường chéo của P_1 có độ dài $\sqrt{2}/k$ và số cạnh của đường gấp khúc là $(n_1 - 1)$ nên độ dài của đường gấp khúc vừa dựng không vượt quá $(n_1 - 1).\sqrt{2}/k$. Nếu $n_1 = 0$ ta chọn một điểm tùy ý của P_1 làm điểm đầu của đường gấp khúc.

2) Nối điểm cuối của đoạn gấp khúc vừa dựng được với một điểm đã cho nằm trong P_2 (đoạn thẳng này có độ dài không vượt quá $\sqrt{5}/k$ – là độ dài đường chéo của hình chữ nhật tạo bởi 2 hình vuông con). Tiếp theo, xây dựng đoạn gấp khúc nối các điểm đã cho nằm trong P_2. Nếu $n_2 = 0$ ta nối điểm cuối của đoạn gấp khúc đã dựng trong P_1 với một điểm tùy ý của P_2 và chuyển sang bước sau.

3) Ta lại nối điểm cuối của đường gấp khúc vừa dựng với một điểm của P_3,...

Cứ như thế quá trình trên sẽ kết thúc ở một điểm của P_{k^2}. Nối điểm đó với điểm đầu nằm trong P_1. Đoạn nối này có độ dài không vượt quá $\sqrt{2}$ là độ dài của đường chéo hình vuông $ABCD$.

Kết quả ta nhận được một đường gấp khúc khép kín đi qua 1985 điểm đã cho có độ dài l thỏa mãn :

$$l \leqslant \sum_{i=1}^{k^2} (n_i - 1)\sqrt{2}/k + k^2\sqrt{5}/k + \sqrt{2}$$
$$= (1985 - k^2).\sqrt{2}/k + k\sqrt{5} + \sqrt{2}$$
$$= 1985\sqrt{2}/k + k(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$$
$$< 1985 . 1,42/k + 0,9k + 1,42$$

Từ đây suy ra, nếu chọn $k = 50$ thì
$l < 1985 . 1,42/50 + 0,9 . 50 + 1,42 < 100$ (đpcm).

Nhận xét : Không bạn nào có lời giải hoàn chỉnh. Bạn Cao Vi Ba ($A_0$11 ĐHTH Hà Nội) có lời giải tương đối tốt hơn cả.

N.K.M.

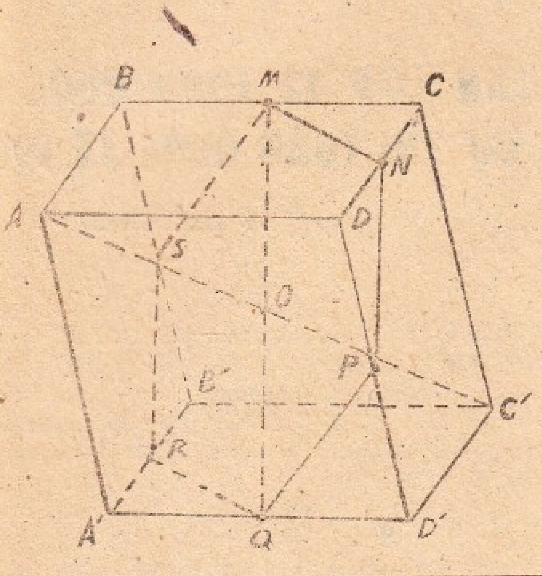
Bài 10/141. *a) Chứng minh rằng trong một hình hộp trung điểm các cạnh không xuất phát từ hai đầu mút của một đường chéo cho trước là các đỉnh của một lục giác phẳng có tâm đối xứng.*

b) Tìm tất cả những hình hộp có tính chất là tất cả các lục giác phẳng ứng với tất cả các đường chéo là lục giác đều.

Lời giải :

a) Ta có $BD // B'D'$; $BA' // C'D'$ nên mặt phẳng $(BDA') //$ mặt phẳng $(B'CD')$. Theo định lý Talét mặt phẳng song song cách đều hai mặt phẳng (BDA') và $(B'CD')$ sẽ chứa 6 trung điểm M, N, P, Q, R, S (xem hình vẽ). Vậy lục giác $MNQRS$ là phẳng. Với chú ý O là tâm đối xứng của hình hộp (O – giao điểm của 4 đường chéo của hình hộp) nên M và Q ; R và N ; S và P đối xứng với nhau qua O. Từ đó suy ra lục giác $MNPQRS$ có tâm đối xứng là O.

b) Sử dụng tính chất đường trung bình trong tam giác ta dễ dàng có lục giác phẳng ứng với đường chéo AC' là đều $\Leftrightarrow A'B = A'D = BD$; lục giác phẳng ứng với đường chéo $A'C$ là đều



$\Leftrightarrow AB' = AD' = B'D' = BD$, lục giác phẳng ứng với đường chéo BD' là đều $\Leftrightarrow AB' = B'C = AC$. Từ đó suy ra: $AB' = A'B$; $AD' = A'D$; $AC = BD$. Vậy hình hộp thỏa mãn đề bài là *hình hộp chữ nhật*. Gọi $x = AB$; $y = AD$; $z = AA'$ từ $A'D = BD = A'B$ ta có $x^2 + y^2 = y^2 + z^2 = z^2 + x^2$ $\Leftrightarrow x = y = z$. Tóm lại hình hộp thỏa mãn yêu cầu của đề bài là *hình lập phương*.

Nhận xét: Đa số các lời giải gửi tới tòa soạn là dườm dà. Bạn *Lâm Tùng Giang* (11CT, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) có lời giải tốt hơn cả. Đặc biệt, có rất nhiều bạn, thậm chí học ở các lớp chuyên toán, đã tỏ ra nắm không chắc các kiến thức về các mặt phẳng song song, về đường thẳng và mặt phẳng song song khi chứng minh lục giác phẳng.

T.V.T

ĐỀ RA kỳ này

Bài 1/144. Tìm ba chữ số khác nhau x, y, z sao cho tổng của tất cả các số ba chữ số tạo bởi x, y và z lớn gấp ba lần số có ba chữ số tạo bởi x.

Nguyễn Xuân Huy

Bài 2/144. Chứng minh rằng:

a) Có vô hạn bộ ba số nguyên dương m, n, p sao cho
$$4mn - m - n = p^2 - 1.$$

b) Không có có 3 số nguyên dương m, n, p nào thỏa mãn
$$4mn - m - n = p^2.$$

Đỗ Đức Thái

Bài 3/144. Cho x, y là hai số thực. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$\frac{|x + y| + |x - y| + |xy + 1| + |xy - 1|}{\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}}.$$

Đào Phú Hùng

Bài 4/144. Xét dãy số
$$u_k = \frac{\cos 1 - \cos k \cos(k + 1)}{\cos k \cos(k+1)} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Gọi α_n và β_n lần lượt là các số hạng lớn hơn 0 và nhỏ hơn 0 trong dãy $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

1) Chứng minh rằng $\alpha_n > \beta_n \ \forall n$.

2) Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n/\beta_n$ và tìm giới hạn đó.

Nguyễn Văn Mậu

Bài 5/144. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ΔABC đều là
$$\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 3\cot g A \cot g B \cot g C.$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 6/144. Cho a, b là 2 số thực và k là số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng ta luôn có
$$|(\cos kb . \cos a - \cos ka . \cos b)/(\cos b - \cos a)| \leqslant k^2 - 1$$
nếu biểu thức ở vế trái có nghĩa.

Đỗ Bá Khang

Bài 7/144. Trong đường tròn dựng 2 dây cung AB và CD cắt nhau tại M. Qua điểm giữa S của BD, dựng đường thẳng SM cắt AC ở K. Chứng minh rằng $AK/KC = AM^2/CM^2$.

Đỗ Hồng Anh

Bài 8/144. Gọi R_1, R_2, R_3, R_4 là các bán kính của các mặt cầu (tương ứng với các đỉnh A, B, C, D) của tứ diện $ABCD$ ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính r cho trước. Hãy xác định tứ diện để tổng $R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ có giá trị nhỏ nhất.

Tạ Văn Tự

Bài 9/144. Trong không gian cho 4000 điểm sao cho không có 4 điểm nào đồng phẳng. Chứng minh rằng có thể tạo nên 1000 tứ diện có đỉnh là các điểm đã cho và không có điểm chung.

Đỗ Bá Khôi

Bài 10/144. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 75^\circ$, $AB = 1$. Hai điểm chuyển động vòng quanh theo đường chu vi của tam giác với vận tốc bằng nhau. Điểm xuất phát từ A đi theo hướng đến B, điểm xuất phát từ B đi theo hướng đến C. Hãy tính khoảng cách cực tiểu giữa hai điểm trong suốt quá trình chuyển động.

Nguyễn Đông Yên

THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 TOÀN QUỐC VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI TOÁN QUỐC TẾ 1985

LÊ HẢI CHÂU

I. THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 TOÀN QUỐC 1985

Cuối tháng 2 năm 1985 Bộ giáo dục đã tổ chức kỳ thi chọn học sinh giỏi toán lớp 12 toàn quốc.

Theo thường lệ, mỗi tỉnh được cử một đội tuyển gồm 5 học sinh tham dự. Các khối chuyên toán của hai trường đại học Tổng hợp Hà Nội và đại học Sư phạm Hà Nội I cũng được cử đội tuyển tham gia. Một đặc điểm của các đội tuyển dự thi năm nay là số học sinh đang học lớp 11 được chọn đông hơn. Có đội tuyển tỉnh, số học sinh lớp 11 chiếm trên 50%.

1. Đề thi

Đề thi gồm 6 bài toán, làm trong hai ngày. Mỗi ngày làm ba bài trong thời gian 180 phút. Tất cả bài làm của học sinh được niêm phong ngay cuối mỗi buổi thi và gửi về Bộ Giáo dục để chấm.

Ngày thi thứ nhất (25-2-1985).

Bài 1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $x^3 - y^3 = 2xy + 8$.

Bài 2. Gọi M là tập hợp tất cả các hàm số f xác định với mọi số nguyên và nhận những giá trị thực, thỏa mãn các tính chất sau đây:

(1) Với mọi số nguyên x và y thì

$$f(x).f(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

(2) $f(0) \neq 0$.

Tìm tất cả các hàm số $f \in M$ sao cho $f(1) = 5/2$

Bài 3: Một hình hộp chữ nhật với kích thước a, b, c bị cắt bởi một mặt phẳng đi qua giao điểm các đường chéo của hình hộp và vuông góc với một trong các đường chéo của hình hộp đó. Hãy tính diện tích thiết diện nhận được.

Ngày thi thứ hai (26-2-1985).

Bài 4. Ký hiệu ƯSCLN của hai số tự nhiên a và b là (a, b). Chứng minh rằng với ba số tự nhiên a, b và m, điều kiện cần và đủ để tồn tại số tự nhiên n sao cho $(a^n - 1)b$ chia hết cho m là $(ab, m) = (b, m)$.

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị thực của thông số a để phương trình

$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$$

có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân.

Bài 6. Một hình chóp tam giác $O.ABC$ có diện tích đáy ABC bằng S. Tính thể tích của hình chóp, biết rằng mỗi đường cao theo thứ tự hạ từ các điểm A, B, C không bé hơn trung bình cộng của hai cạnh bên thuộc mặt đối diện với các đỉnh đó.

2. Kết quả

Theo thường lệ, các giải thưởng gồm giải cá nhân và giải đồng đội. Những đội tuyển mà số lượng học sinh không đủ 5 người thì không được dự xét giải đồng đội.

A. Giải cá nhân (tổng số: 29 giải).

Giải nhất Nguyễn Tiến Dũng, Trường đại học Tổng hợp Hà Nội (lớp 11).

Giải nhì.

1. Lâm Tùng Giang, trường Phan Châu Trinh, Quảng Nam Đà Nẵng (lớp 11).
2. Đinh Thành Pháp, trường Phan Châu Trinh, Quảng Nam Đà Nẵng (Lớp 11).

Giải ba.

1. Huỳnh Minh Vũ, trường Chu Văn An, Hà Nội (lớp 11).
2. Chế Quang Quyền trường Long Thành, Đồng Nai.
3. Võ đại Hoài Đức, trường Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh.
4. Trang Lâm Bằng, trường Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh.
5. Bùi Thế Vũ, trường Chu Văn An Hà Nội
6. Đỗ Duy Khánh, trường Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang, Phú Khánh, (lớp 11).
7. Nguyễn Anh Tuấn, trường Phan Bội Châu, Nghệ Tĩnh.
8. Trần Thị Ngọc Bích, trường Quốc học Huế, Bình Trị Thiên.
9. Nguyễn Tân Hưng, trường Đại học sư phạm Hà Nội I.
10. Vũ Hoàng Linh, trường đại học tổng hợp Hà Nội.

Giải khuyến khích.

1. Lê Phước Lâm, trường Châu Thành, Long An.
2. Nguyễn Minh Tiến, trường Hàm Tân, Thuận Hải.

3. Vương Văn Hưởng, phổ thông chuyên toán, Hải Hưng
4. Nguyễn Anh Việt, trường Chu Văn An, Hà Nội
5. Phan Đạt Phúc, trường Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh
6. Nguyễn Quảng Cường, trường đại học tổng hợp Hà Nội
7. Võ Thanh Hùng, trường Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh
8. Huỳnh Văn Thành, trường Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang, Phú Khánh (lớp 11)
9. Phan Quốc Thanh, trường Lam Sơn, Thanh Hóa
10. Nguyễn Hồ Anh Nguyên, trường Duy Xuyên, Quảng Nam Đà Nẵng.
11. Nguyễn Khánh An, trường Quốc học Huế, Bình Trị Thiên
12. Đoàn An Hải, trường Phan Bội Châu, Nghệ Tĩnh.
13. Lê Trần Hải, trường Thái Phiên, Hải Phòng
14. Trần Duy Hinh, Trường Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình
15. Nguyễn Minh Tuấn, trường Thái Phiên, Hải Phòng.
16. Ngô Hoàng Huy, trường đại học Sư phạm Hà Nội I.

B. Giải đồng đội (tổng số: 9 giải)

Giải nhất: Đội tuyển Quảng Nam – Đà Nẵng
Giải nhì: « thành phố Hồ Chí Minh
Giải ba: « thành phố Hà Nội, Trường đại học Tổng hợp Hà Nội

Giải khuyến khích: Đội tuyển của các tỉnh ình – Trị – Thiên, Hải Hưng, Thanh Hóa, Nghệ ĩnh và của trường đại học Sư phạm Hà Nội I.

I – THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI TOÁN QUỐC TẾ 1985

Sau kỳ thi chọn học sinh giỏi toán lớp 12 toàn uốc, Bộ giáo dục đã tổ chức thi tuyển chọn đội ọc sinh đi dự thi toán quốc tế lần thứ 26 tại hần Lan cho tất cả những học sinh đã đoạt ải cá nhân (giải chính thức và giải khuyến hích) trong toàn quốc. Những học sinh này ược tập trung tại Hà Nội và làm bài thi tuyển ong hai ngày, mỗi ngày làm 3 bài toán trong ạm vi 180 phút. Số lượng đội tuyển là 6 người.

1. Đề thi

Ngày thi thứ nhất

Bài 1 Cho dãy số thực $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ được c định theo qui luật:

$$= 2{,}9;\ x_{n+1} = \sqrt{3} + x_n/\sqrt{x_n^2 - 1},\ n = 1,2,3,\dots,$$

Hãy tìm một số thực nằm bên trái dãy con $\{x_1, x_3, \dots x_{2k+1} \dots\}$ và nằm bên phải dãy con $\{x_2, x_4, \dots, x_{2k} \dots\}$ của dãy số này.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân ở A. Vẽ tia Ax sao cho ba góc của tam diện $ABCx$ là bằng nhau. Điểm S chạy trên Ax, tìm quỹ tích tâm đường tròn nội tiếp tam giác SBC.

Bài 3. Tồn tại hay không một tam giác ABC đồng thời thỏa mãn hai điều kiện:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C \quad (1)$$

$$S \geqslant a^2 - (b - c)^2 \quad (2)$$

trong đó a, b, c là các cạnh tương ứng đối diện với các góc A, B, C và S là diện tích tam giác ABC?

Ngày thi thứ hai

Bài 4. Cho đa giác lồi n cạnh $A_1A_2 \dots A_n$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R và tâm O nằm trong đa giác này. Nối đỉnh A_1 với các đỉnh còn lại của đa giác ta được $(n-2)$ tam giác $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4, \dots A_1A_{n-1}A_n$ mà các bán kính đường tròn nội tiếp tương ứng là $r_1, r_2, \dots r_{n-2}$.

Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n-2} r_i \leqslant R(n\cos(\pi/n) - n + 2).$$

Bài 5. Tìm a để phương trình

$$(a - 3x^2 + \cos(9\pi/2)\, x)\sqrt{3 - ax} = 0$$

trên đoạn $[-1; 5]$ có một số lẻ nghiệm

Bài 6. Giả sử f là một hàm số trên đường thẳng thực sao cho với mọi số thực x,

$$f(f(x)) = -x.$$

Chứng minh rằng f có vô số điểm không liên tục.

2. Danh sách đội tuyển học sinh Việt Nam dự cuộc thi toán quốc tế lần thứ 26 tại Henxanhky Phần Lan, năm 1985

(sắp xếp theo thứ tự điểm tuyển chọn)

1 — Nguyễn Tiến Dũng, lớp 11CT, Đại học Tổng hợp, Hà Nội.

2 — Lâm Tùng Giang, lớp 11 CT, Trường PTTH Phan Châu Trinh Đà Nẵng.

3 — Huỳnh Minh Vũ, lớp 11 CT, trường PTTH Chu Văn An, Hà Nội.

4 — Đỗ Duy Khánh, lớp 11CT, Trường PTTH Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang.

5 — Huỳnh Văn Thành, lớp 11CT, Trường PTTH Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang.

6 — Chế Quang Quyền, lớp 12, Trường PTTH Long Thành, Đồng Nai.

Lịch sử Toán học

VỀ VIỆC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

TẠ VĂN TỰ

PHƯƠNG trình đại số bậc n là phương trình có dạng:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,\ a_0 \neq 0.$$

Đối với các phương trình đại số bậc nhất và bậc 2, việc giải chúng đã được trình bày rất kỹ trong chương trình toán học phổ thông. Có điều đáng chú ý là, các cách giải các phương trình này người Babilon cách đây khoảng 4000 năm đã biết mặc dù khi đó người Babilon chưa biết dùng các ký hiệu bằng chữ như ta hiện nay mà phải diễn đạt bằng lời, phải mãi tới giữa thế kỷ 17, nhờ nhà bác học người Pháp là Đề Các (1596 – 1650) các ký hiệu đại số mới có dạng gần giống như ngày nay. Do nhu cầu, thực tế đòi hỏi, sau khi biết cách giải phương trình bậc 2 người ta lại tập trung ngay vào nghiên cứu giải phương trình bậc 3. Khác với việc giải phương trình bậc 1 và bậc 2, việc tìm cách giải phương trình bậc 3 gặp phải khó khăn rất lớn và đã thu hút hầu hết các nhà toán học có tên tuổi thời đó. Phải mãi tới năm 1545, lần đầu tiên người ta mới được biết cách giải do Cacđanô (1501 – 1576) công bố. Các nhà nghiên cứu lịch sử toán học đã đi sâu tìm hiểu nguồn gốc người phát minh ra cách giải đặc sắc của phương trình bậc 3 này. Công lao chính của Cacđanô là đã chứng minh được mọi phương trình bậc 3 tổng quát $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,\ A \neq 0$ (1)
đều được đưa về phương trình bậc 3 thu gọn dạng:

$$z^3 + pz + q = 0 \qquad (2)$$

(bằng phép đổi biến $z = x + \dfrac{B}{3A}$), còn vấn đề cơ bản của việc giải phương trình bậc 3 là giải phương trình (2) thì lại thuộc về hai nhà toán học PhêRô (1465 – 1526) phát minh vào khoảng năm 1515 và nhà toán học TaTalia (1500 – 1557) phát minh vào khoảng năm 1535 độc lập với PhêRô. Như vậy từ khi tìm ra cách giải phương trình bậc 2 cho đến khi tìm ra cách giải phương trình bậc 3, loài người đã phải mất khoảng 3535 năm. Cách giải của Phê Rô và TaTalia đối với phương trình (2) cơ bản như sau: Đặt $z = u + v$, từ (2) ta có phương trình:

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0 \qquad (3).$$

Phương trình (3) có 2 biến, nên để nghiệm của phương trình (3) được xác định ta đưa vào điều kiện là $3uv + p = 0$ hay $uv = -\dfrac{p}{3}$. Vậy để xác định u, v ta giải hệ 2 phương trình 2 biến:

$$\begin{cases} uv = -p/3 \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Giải hệ này, dùng định lý Viét ta đi đến giải phương trình bậc hai:

$$y^2 + qy - p^3/27 = 0 \ (\text{với } u^3 = y) \text{ và có}$$

$$u^3 = -q/2 \pm \sqrt{q^2/4 + p^3/27}$$

$$v^3 = -q/2 \mp \sqrt{q^2/4 + p^3/27}$$

nếu $\Delta = q^2/4 + p^3/27 \geqslant 0$.

Vậy phương trình (2) có một nghiệm:

$$z_1 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} \qquad (4)$$

Khi đã biết một nghiệm, phương trình bậc 3 coi như đã được giải xong. Nhìn lại cách giải này ta thấy, việc nảy ra ý định đưa việc giải phương trình (2) về phương trình bậc 2 không khó bởi vì thời đó người ta mới chỉ biết giải phương trình bậc hai trở xuống, nên để giải phương trình bậc 3 không còn cách nào khác là đưa về các phương trình đã giải được. Điều đặc sắc ở cách giải này là cách biểu diễn một biến z qua hai biến u, v để chuyển từ phương trình một biến thành phương trình hai biến có nghiệm bất định rồi từ đó đưa ý định sáng tạo vào thể hiện qua điều kiện phụ của các biến u, v.

Việc hoàn thiện cách giải phương trình bậc 3 tức là ta luôn có (4) là nghiệm của phương trình (2) thì không thể thiếu được vai trò của số phức. Nếu không có số phức, có nhiều phương trình bậc 3, ví dụ: phương trình $x^3 - 19x + 30 = 0$ có 3 nghiệm -5, 2, 3 nhưng công thức (4) không biểu diễn được bởi vì $q^2/3 + p^3/27 < 0$ tức là với phương pháp ở trên không giải được phương trình: $x^3 - 19x + 30 = 0$. Với sự tham gia của số phức, các nghiệm của phương trình bậc 3 dạng (2) được suy ra từ công thức (4) là:

$$z_1 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/57}}$$

$$z_2 = \rho_1\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/26}} + \rho_2\sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

$$z_3 = \rho_2\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \rho_1\sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

ở đó ρ_1, ρ_2, ρ_3 là các căn bậc 3 của số 1 cụ thể :

$\rho_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$; $\rho_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$; $\rho_3 = 1$.

Sau khi biết cách giải phương trình bậc 3, người ta lại đi tìm cách giải phương trình bậc 4. Vinh dự tìm ra cách giải phương trình bậc 4 thuộc về Phêrari nhà đại số người Ý và là học trò của Cacđanô. Khoảng thời gian sau khi tìm ra cách giải phương trình bậc 3 (tính là năm 1515) đến khi công bố cách giải phương trình bậc 4 năm 1545 khoảng 30 năm. Khoảng thời gian này đối với một công trình nghiên cứu trong thời gian hiện nay là tương đối nhiều nhưng so với khoảng thời gian tìm ra cách giải phương trình bậc 3 thì lại rất ít. Bước vào giai đoạn tìm cách giải phương trình bậc 5, loài người đã có một lực lượng đông đảo các nhà toán học tài ba. Sau khoảng thời gian khá dài nghiên cứu phương pháp đại số giải phương trình bậc 5, không thành công, đến năm 1799 nhà toán học Rubini (1765 — 1822) người Ý đã công bố một công trình gây xúc động mạnh giới toán học lúc bấy giờ. Công trình của Rubini chỉ ra rằng: phương trình bậc 5 tổng quát không thể biểu diễn nghiệm của nó qua các hệ số của phương trình bằng sáu phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa và phép khai căn, tức là không giải được phương trình bậc 5 tổng quát bằng phương pháp đại số. Rất tiếc trong cách chứng minh của Rufini còn phạm sai lầm và phải đến năm 1824 nhà toán học A-Ben (1802 — 1829) người Nauy mới chứng minh kết luận của Rubini một cách chặt chẽ. Một vấn đề nảy ra sau đó là nghiên cứu khả năng áp dụng phương pháp đại số vào giải các phương trình đại số bậc cao hơn 5 dạng tổng quát. Về vấn đề này, nhà toán học Galoa (1811 — 1832) người Pháp bằng phương pháp đặc biệt của mình đã chứng minh được rằng : mọi phương trình đại số bậc lớn hơn 4 tổng quát đều không giải được bằng phương pháp đại số và công bố vào năm 1830. Công trình này của Galoa phải gần 60 năm sau khi công bố và nhờ nhà toán học xuất chúng là Gooc Đăng viết giải thích lại, loài người mới hiểu được. Phương pháp của Ga Loa đóng vai trò quan trọng vào sự phát triển của môn đại số và đặc biệt là lý thuyết nhóm.

Với công trình của GaLoa và nhu cầu cấp thiết của thực tế đòi hỏi tìm được nghiệm của phương trình đại số bậc tùy ý, trong thế kỷ thứ 19 hàng loạt các phương pháp giải gần đúng được ra đời và hoàn thiện như phương pháp dây cung, phương pháp Niutơn, phương pháp xấp xỉ liên tiếp... Các phương pháp gần đúng cho phép tìm được nghiệm của phương trình đại số bậc lớn tùy ý. Hơn thế, chúng còn giải được các phương trình không phải đại số. Với sự ra đời và phát triển của các lý thuyết thuật toán và các thế hệ máy tính điện tử hiện đại, các phương pháp giải gần đúng ngày càng có ưu điểm và vấn đề giải phương trình đại số được giải quyết trọn vẹn và thuận tiện.

GIẢI ĐÁP BÀI LỊCH VĨNH CỬU

LẤY một khối lập phương A. Ghi 6 số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ trên 6 mặt của nó. Trên khối thứ hai B ta ghi các số 6, 7, 8 trên 3 mặt. Nếu các ngày từ mùng 1 đến mùng 9 ta thể hiện trên hai khối từ 01 đến 09 thì ta thấy số 0 phải có mặt trên cả hai khối. Trong tháng có hai ngày 11 và 22 nên số 1 và 2 cũng phải có mặt trong cả hai khối. Vậy ta ghi ba số 0, 1, 2 vào ba mặt còn lại của khối B. Để ý rằng lộn ngược số 6 ta được số 9. Vậy các số ghi trên hai khối sẽ là

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \; ; \; B = \{0, 1, 2, 6, 7, 8\}$$

Ghép hai khối A và B với các mặt cần thiết và thứ tự thích hợp ta có thể thể hiện được đủ 31 ngày trong tháng.

Chú ý. Ở đây ta không xét trường hợp chỉ dùng một khối để thể hiện các ngày có 1 chữ số

NGUYỄN XUÂN HUY

NHỮNG GIẤC MƠ

CÁC bạn đã từng được đọc hoặc được nghe kể về lai lịch của một số phát minh kỳ diệu trong lịch sử khoa học, như việc Niu Tơn tìm ra định luật vạn vật hấp dẫn hay việc nhà bác học Acsimet tìm ra lực đẩy của nước.... Nhưng các bạn có biết rằng, có những phát minh vĩ đại đã được hoàn thành trong những giấc mơ hay không? Quả khó tin mà lại có thật một trăm phần trăm!

Nhà bác học Nga Đimitri Menđêlêev, trong lúc tỉnh táo đã không thể nào diễn tả nổi bằng bảng ý tưởng của mình về hệ tuần hoàn của các nguyên tố. Một lần, sau khi làm việc căng thẳng và liên tục không nghỉ ngơi, ông thiếp đi, và trong mơ ông đã nhìn thấy điều đã làm cho tên ông trở thành bất tử. Chính Menđêlêev kể về sự kiện đó như sau: « Trong mơ tôi nhìn thấy tấm bảng mà ở đó các nguyên tố được sắp đặt theo một trình tự cần thiết. tôi tỉnh dậy và ngay lập tức ghi lại vào một mảnh giấy con. Sau này chỉ có một chỗ trong tấm bảng đó là cần phải sửa lại mà thôi ».

Nhà toán học Pháp Hanri Poăngcarê một lần đã phải đi ngủ trong tâm trạng băn khoăn day dứt vì không tài nào giải nổi một phương trình. Tới gần sáng, ông mơ thấy mình đang giảng bài cho sinh viên và giải một cách trôi chảy trên bảng phương trình đã phải gác lại trước khi đi ngủ. Poăngcarê tỉnh dậy và đã ghi lại lời giải của phương trình đó.

Nhà toán học nổi tiếng Karlơ Phrichđrich Gauxơ trong một giấc mơ đã giải được bài toán mà ông đã phải vật lộn với nó trong suốt 19 năm trời!

Còn các bạn? Chân thành chúc các bạn cũng có được những giấc mơ kỳ diệu như vậy!

KHẮC MINH

DANH SÁCH CÁC BẠN THAM GIA CUỘC THI GIẢI TOÁN «CHÀO MỪNG CÁC NGÀY LỄ LỚN TRONG NĂM 1985»

(Tiếp theo)

Phạm Trọng Đăng Sơn (11A, PTTH Điện Bàn 1 Quảng Nam-Đà Nẵng); Nguyễn Đăng Minh Viên, Phạm Hữu Trung (10 CT và 11/1 PTTH Thái Phiên Đà Nẵng); Châu Minh Trí, Trần Xuân Nhân, Đỗ Duy Khánh, Võ Trí, Huỳnh Văn Thành, Nguyễn Minh Ngân (10 CT và 11CT PTTH Nguyễn Văn Trỗi Nha Trang); Lê Thiện Thanh, Hàn Hùng Định, Lý Văn Thành, Nguyễn Đức Nguyên, Nguyễn Ngọc Hùng (11E, 11B, $11C_2$, 11C PTTH An Nhơn 1 Nghĩa Bình); Nguyễn Bá Tùng, Ngô Thanh Sơn, Đinh Văn Dũng, Đặng Quốc Anh (11P, PTTH Quang Trung, Qui Nhơn Nghĩa Bình); Hoàng Ngọc Phúc, Thạch Lê Khiêm ($11B_4$ và $10A_1$ PTTH Trần Quốc Tuấn, Quảng Ngãi, Nghĩa Bình); Phạm Thị Minh Tâm (11A, PTTH Sơn Tịnh 1 Nghĩa Bình); Lê Duy (10G PTTH Hoài Nhơn 1, Nghĩa Bình); Nguyễn Hoàng Nhân (9E, PTCT Quy Nhơn, Nghĩa Bình); Trần Duy Hinh (12G PTTH Trưng Vương, Quy Nhơn Nghĩa Bình); Phạm Thiện Ngôn (11P, PTTH Quang Trung, Quy Nhơn Nghĩa Bình); Nguyễn Gia Bảo, Trang Lâm Bằng (11CT và 12CT, PTTH Lê Hồng Phong thành phố Hồ Chí Minh) Nguyễn Thành Úc, Nguyễn Hoàng Nhân, Nguyễn Văn Hà ($12A_5$ và 11P, PTTH Nguyễn Thượng Hiền thành phố Hồ Chí Minh; Trần Minh Nhứt ($12P_3$, PTTH Marie Curie thành phố Hồ Chí Minh); Phạm Văn Thụy (Lý 1B, cao đẳng sư phạm thành phố Hồ Chí Minh); Phan Thanh Bình, Nguyễn Khánh An và Trần thị Ngọc Bích (11CT và 12CT, PTTH Quốc Học Huế, Bình Trị Thiên); Tạ Đình Hùng và Trần Hưng (10CT và 12CT, PTTH Ngô Sĩ Liên, Hà Bắc); Nguyễn Văn Quyết (10CT, Lê Hồng Phong, Nam Định) Dư Văn Toản (12E, PTTH Nguyễn Huệ, Hà Sơn Bình); Nguyễn Cẩm Anh (11CT, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ Tĩnh); Nguyễn thị Lan Hương ($10A_1$, PTTH Thủ Thừa Long An); Trần Minh Khánh 11CT, PTTH Long Xuyên Lê Bá Tường (21 Lương Văn Cù, Long Xuyên); Nguyễn Văn Thuận (12B, PTTH Lưu Văn Liệt, Vĩnh Long, Cửu Long); Trần thị Thủy Tiên (11CT, PTTH Đồng Tháp, Sa Đéc Đồng Tháp); Nguyễn Ngọc Thái (12G, PTTH Mỏ Cày, Bến Tre); Nguyễn Minh Tiến (11B, PTTH Hàn Tân Thuận Hải); Phạm Chí Thiện (11A, PTTH Ngô Quyền), Đồng Nai); Đỗ Ngọc Minh Châu (10A, PTTH Pleiku 1, Gia Lai Kon Tum); Vũ Ngọc Phách (7H, PTCS Trần Đăng Ninh, Nam Định); Nguyễn Hoàng Long ($11B_2$, PTTH Nguyễn Huệ Tuy Hòa, Phú Khánh); Nguyễn Trọng Bảo (11E, PTTH An Khê, Gia Lai Kon Tum).

(Còn nữa)

In 15.000 số tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ — Hà Nội. Số in 140/85.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 9-1985.
Chỉ số: 11.884
Giá: 0,3 đồng
(Tiền ngân hàng mới)