TOÁN HỌC Tuổi trẻ

VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

3
1985

Số 143

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập : Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập : Ngô Đạt Tứ

Trụ sở : 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói : 52825

«Non sông Việt Nam có trở nên vẻ vang hay không, dân tộc Việt Nam có được vẻ vang sánh vai các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các cháu»

Trích thư của Bác Hồ gửi học sinh nhân ngày khai trường năm 1945

95 NĂM NGÀY SINH CHỦ TỊCH HỒ CHÍ MINH VĨ ĐẠI
1890 – 1985

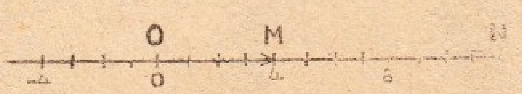
Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

SỐ, LỆNH VÀ HÌNH

NGUYỄN CẢNH TOÀN

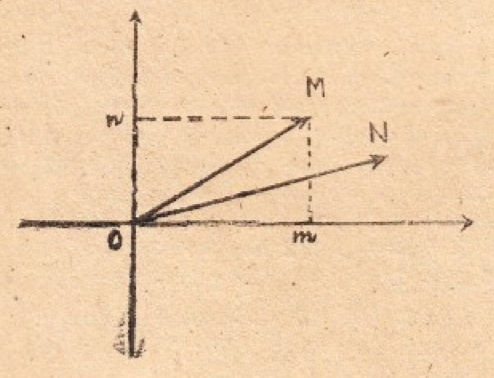
Ở báo Toán học và tuổi trẻ, số 5 (139), năm 1984 trong bài: «Số và lệnh», tôi đã giới thiệu với các bạn một cách nhìn mới về tích hai số thực, ví dụ như tích $3.4 = 12$ thì nhìn «3» là một lệnh L, «4» là vật chịu lệnh V và «12» kết quả Q sau khi lệnh đã thi hành. Với cách nhìn đó thì tích của hai lệnh lấy theo một thứ tự nào đó là một lệnh duy nhất cho kết quả giống y như khi thực hiện hai lệnh đã cho theo thứ tự đã cho, như tích của hai lệnh «3» và «5» là lệnh «15». Sau đó, chúng ta đã mở rộng L, V, Q ra ngoài phạm vi các số thực, đến các cặp số thực để có những lệnh L gồm hai cặp số thực sắp thành một bảng $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Đem lệnh $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ áp dụng vào cặp số thực (x, y) thì được cặp số thực $(ax + by, cx + dy)$. Trong phạm vi các lệnh dạng $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, chúng ta đã thấy xuất hiện nhiều điều kỳ lạ. Đọc bài báo trên, chắc các bạn thấy những điều kỳ lạ ấy cũng rất dễ hiểu. Nếu dò theo các đẳng thức đã dẫn đến các điều kỳ lạ đó, thì bản thân mỗi đẳng thức và việc chuyển từ đẳng thức này qua đẳng thức sau là rất rõ ràng. Nhưng nếu ta tự đặt câu hỏi: «Tại sao lại mở rộng từ số sang cặp số mà không mở rộng theo hướng khác? Bản chất của các phần tử kỳ lạ như lũy linh, lũy đẳng là gì? thì thấy rằng còn nhiều điều chưa «dễ hiểu» và chưa «thỏa mãn». «Dễ hiểu»; «dễ thỏa mãn» là một bệnh tối kỵ đối với những nhà khoa học nói chung, toán học nói riêng. Trong lịch sử toán học, đã có nhiều phát minh quan trọng nảy sinh từ những vấn đề tưởng chừng như đã quá rõ ràng, quá đầy đủ, tưởng chừng như mọi màn bí mật đã được vén lên. Có được những phát minh như vậy là nhờ những bộ óc rất «khó tính», rất không «dễ thỏa mãn». Rèn luyện cho mình một bộ óc như vậy thật là cần nếu như bạn muốn sau này trở thành một nhà toán học. Chính vì vậy mà sau bài: «Số và lệnh» chúng ta còn phải tiếp tục trao đổi.

Nào, bây giờ chúng ta hãy cố trả lời hai câu hỏi đặt ra trên kia. Chúng ta đều biết nếu cho một trục số thì có một sự tương ứng một đối một giữa các số thực và các điểm trên trục số đó. Nếu O là gốc tọa độ trên trục số đó thì ta cũng có thể nói có một tương ứng một đối một giữa các số thực và các vectơ gốc O trên trục số đó. Bây giờ thì ta có thể nhìn tích $3.4 = 12$ khác đi một chút: «3» là lệnh L, vectơ $\overrightarrow{OM}$ là vật V và vectơ $\overrightarrow{ON}$ là kết quả Q (hình 1).



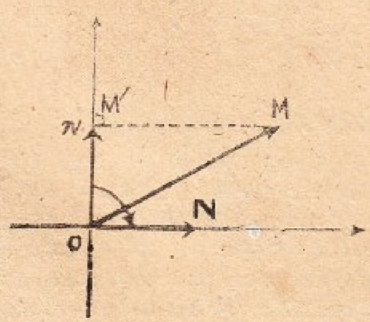
Hình 1: $(3.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON})$

Một điều cũng khá tự nhiên là từ các vectơ trên trục số, ta mở rộng ra các vectơ trong mặt phẳng (hình 2); Khi đó ứng với mỗi vectơ trong mặt phẳng ta có một cặp hai số thực như vectơ $\overrightarrow{OM}$ ở (hình 2) ứng với hai số thực (m, n). Cho nên việc mở rộng từ số thực sang cặp số thực ứng với việc làm khá tự nhiên là từ vectơ trên trục số chuyển sang vectơ trong mặt phẳng. Mỗi lệnh dạng $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ biến vectơ $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ (m, n) thành vectơ $\overrightarrow{ON}$ có tọa độ $(am + bn,\ cm + dn)$. Nếu $b = c = 0$ và $a = d$ thì $\overrightarrow{ON}$ có tọa độ là $(am,\ an)$, tức $\overrightarrow{ON} = a \cdot \overrightarrow{OM}$ cho nên lệnh $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ đồng nhất với lệnh a. Bản chất của những điều kỳ lạ cũng rất rõ ràng. Lệnh $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ biến vectơ $\overrightarrow{OM}$ thành vectơ có tọa độ (n, o) (hình 3) Đó là vectơ $\overrightarrow{ON}$ mà ta có được bằng cách chiếu vuông



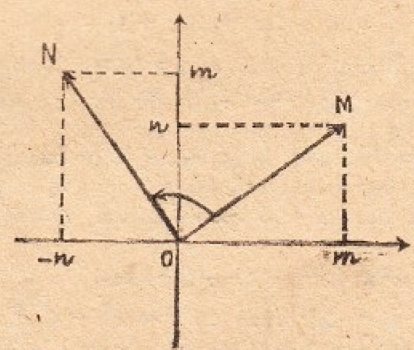
Hình 2

góc $\overrightarrow{OM}$ xuống trục tung để có vectơ $\overrightarrow{OM'}$ rồi quay $\overrightarrow{OM'}$ đi 90° theo chiều kim đồng hồ (hình 3). Vậy lệnh $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ là tích của hai lệnh: « chiếu xuống trục tung » và « quay đi 90° theo chiều kim đồng hồ », lấy theo thứ tự đó. Áp dụng lệnh $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ vào $\overrightarrow{OM}$ tức là áp dụng lệnh $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



Hình 3

vào $\overrightarrow{ON}$ (hình 3) và hiển nhiên là được vectơ $\overrightarrow{O}$. Tiếp tục áp dụng lệnh $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vào cho vectơ $\overrightarrow{O}$ thì dĩ nhiên vẫn có kết quả là vectơ $\overrightarrow{O}$. Vì vậy $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ với mọi số tự nhiên $n \geqslant 2$. Lệnh $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ biến vectơ $\overrightarrow{OM}$ thành hình chiếu vuông góc của nó xuống trục hoành; lại áp dụng tiếp lệnh đó vào hình chiếu này thì ta vẫn được hình chiếu đó. Chính vì vậy mà $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ với mọi số tự nhiên $n \geqslant 1$. Lệnh $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ biến vectơ $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ (m, n) thành vectơ $\overrightarrow{ON}$ có tọa độ $(-n;\ m)$; Vậy $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ chính là lệnh « quay vectơ $\overrightarrow{OM}$ đi 90° ngược chiều kim đồng hồ » (hình 4). Thực hiện liên tiếp hai lệnh đó chính là quay 180° cho nên $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -1$. Vậy $i^2 = -1$ có nghĩa là quay 90° liên tiếp hai lần thì cũng như quay 180°. Lệnh $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ biến vectơ $\overrightarrow{OM}$ $(m,\ n)$ thành vectơ $\overrightarrow{ON}$ $(n,\ m)$ là vectơ đối xứng với $\overrightarrow{OM}$ qua phân giác thứ nhất. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng đó vào $\overrightarrow{OM}$ thì dĩ nhiên lại được $\overrightarrow{OM}$ nên $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 1$.



Hình 4

Bản chất mọi sự việc kỳ lạ lại trở thành rõ ràng. Bạn có thể dựa theo những ý kiến trên đây mà tự mình phát triển đi xa hơn.

PHƯƠNG TRÌNH LÙI VÀ LÙI BẬC PHƯƠNG TRÌNH

LÊ ĐÌNH THỊNH

Nhiều bài toán bậc cao ta có thể giải được bằng cách đưa về phương trình bậc hai. Sau đây là một số phương pháp thường dùng.

I. Nếu ta có phương trình bậc 4 dạng

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0$$

mà tồn tại một số $\lambda \neq 0$, sao cho $d = b\lambda$, $e = a\lambda^2$ thì ta có thể dẫn về phương trình bậc hai. Phương trình này gọi là *phương trình lùi*, vì nếu đổi biến $x = \lambda/y$ thì phương trình theo y hoàn toàn giống phương trình theo x.

Ta giải phương trình lùi như sau:

Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (nếu trái lại ta có $e = 0$ mất), nên chia 2 vế cho $x^2 \neq 0$ ta được:

$$ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + \frac{e}{x^2} = 0$$

Thay $d = b\lambda$, $e = a\lambda^2$ và nhóm các số hạng chung:

$$a(x^2 + \lambda^2/x^2) + b(x + \lambda/x) + c = 0$$

Đặt $t = x + \lambda/x$, khi đó $t^2 = x^2 + \lambda^2/x^2 + 2\lambda$, ta có $at^2 + bt + c - 2a\lambda = 0$.

Chú ý: Nếu phương trình có dạng $f(x^2 + \lambda^2 x^2,\ x \pm \lambda/x) = 0$, thì đổi biến $t = x \pm \lambda/x$ ta dẫn phương trình về dạng phương trình bậc hai.

Thí dụ 1: Giải phương trình $x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2)$.

Giải: Mở dấu ngoặc và chuyển vế ta được

$$x^4 - 5x^3 + 10x + 4 = 0$$

Đây là phương trình lùi, vì $d = 10 = -2(-5) = -2b$, $e = 4 = (-2)^2 \cdot 1 = (-2)^2 a$. Do vậy ta giải như sau:

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho (nếu trái lại ta có $4 = 0$ vô lý), nên chia hai vế cho x^2 và nhóm các số hạng ta được

$$x^2 + 4/x^2 - 5(x - 2/x) = 0$$

Đặt $t = x - 2/x$, khi đó $t^2 = x^2 + 4/x^2 - 4$ và ta có $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $t = 1, t = 4$. Nếu $t = 1$, ta có $x - 2/x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Vì $a - b + c = 0$, nên phương trình có nghiệm $x = -1$, $x = 2$. Nếu $t = 4$, ta có $x - 2/x = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Thí dụ 2. (Đề thi vào đại học khối A năm 1976). Tìm tất cả các góc α sao cho với mọi $x \neq 0$, ta có

$$(x^2 + 1/x^2) + (1 - 3\sin\alpha)(x + 1/x) + 3\sin\alpha > 0$$

Giải: Đặt $t = x + 1/x$, khi đó vì $x.1/x > 0$ nên $|t| = |x + 1/x| = |x| + 1/|x| \geqslant 2\sqrt{|x|.1/|x|} = 2$. Dấu đẳng thức nhận được khi và chỉ khi $|x| = 1$ hay $x = \pm 1$; $t^2 = x^2 + 1/x^2 + 2$. Thay vào bất đẳng thức ta được

$$t^2 + (1 - 3\sin\alpha)t + 3\sin\alpha - 2 > 0 \ \forall\ |t| \geqslant 2.$$

Vế trái là tam thức bậc hai theo t, lại có $a + b + c = 0$, nên tam thức có nghiệm là $t = 1$, $t = 3\sin\alpha - 2$. Bất phương trình đúng với mọi giá trị t nằm ngoài hai nghiệm, nhưng vì $|t| \geqslant 2$, nên $t = 1$ và $t = 3\sin\alpha - 2$ phải nằm trong khoảng $(-2,2)$. Hiển nhiên $t = 1$ thuộc khoảng $(-2,2)$; nghiệm $t = 3\sin\alpha - 2$ thuộc khoảng này, nếu $-2 < 3\sin\alpha - 2 < 2$ hay $0 < 3\sin\alpha < 4$, suy ra $\sin\alpha > 0$, $2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi$.

Thí dụ 3. (Đề thi khối A, Đại học giáo dục, miền Nam năm học 1975–1976). Chứng minh rằng biểu thức

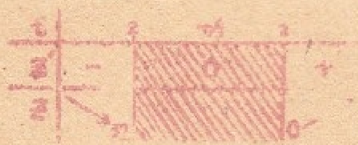
$$3(x^2/y^2 + y^2/x^2) - 8(x/y + y/x) + 10$$

không âm với mọi giá trị thực của x và y khác giá trị 0.

Giải. Đặt $Z = 3(x^2/y^2 + y^2/x^2) - 8(x/y + y/x) + 10$. Ta phải chứng minh rằng $Z \geqslant 0 \ \forall\ x, y \neq 0$. Đặt $t = x/y + y/x$, ta có $|t| \geqslant 2$, dấu bằng xảy ra khi $x/y = y/x = \pm 1$, tức là $x = \pm y$.

Ta có $Z = 3t^2 - 8t + 4 \geqslant 0 \ \forall\ |t| \geqslant 2$.

$Z' = 6t - 8 = 0$ khi $t = \frac{4}{3}$. Lập bảng biến thiên



Do vậy $Z \geqslant Z_{\min} = 0 \ \forall\ |t| \geqslant 2$.

II. Nếu phương trình có dạng $(f(x) + a)^4 + (f(x) - b)^4 = c$ thì đặt $f(x) + a = t + \alpha$, $f(x) - b = t - \alpha \Rightarrow \alpha = (a+b)/2$, để đưa về dạng đối xứng $(t + \alpha)^4 + (t - \alpha)^4 = c$ hay $2t^4 + 12\alpha^2 t^2 + 2\alpha^4 - c = 0$ (phương trình trùng phương), rồi đưa về phương trình bậc hai $2X^2 + 12\alpha^2 X + 2\alpha^4 - c = 0$, trong đó $X = t^2 \geqslant 0$.

Thí dụ 4. Giải phương trình $\cos^4 x + (1 - \cos x)^4 = 1$

Giải. Vì $(1 - \cos x)^4 = (\cos x - 1)^4$, nên ta có

$$\cos^4 x + (\cos x - 1)^4 = 1.$$

Đặt $\cos x = t + 1/2$, $\cos x - 1 = t - 1/2$, ta được

$$(t + 1/2)^4 + (t - 1/2)^4 = 1 \text{ hay } 2t^4 + 3t^2 + 1/8 = 1$$

Đặt $t^2 = X$, khi đó $0 \leqslant X \leqslant 9/4$ và ta có

$$2X^2 + 3X - 7/8 = 0.$$

Phương trình có nghiệm $X = 1/4$, $X = -7/4 < 0$ (loại) $\Rightarrow t = \pm 1/2$.

Nếu $t = 1/2$, $\cos x = 1$, $x = 2m\pi$, m nguyên.

Nếu $t = -1/2$, $\cos x = 0$, $x = \pi/2 + k\pi$, k nguyên.

III. Nhiều khi ta đoán một số nghiệm hữu tỷ rồi lùi bậc phương trình về bậc hai. Chú ý rằng nếu tổng các hệ số của phương trình bằng 0 thì phương trình có một nghiệm $x = 1$, còn nếu tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì phương trình có nghiệm $x = -1$. Nếu không thỏa mãn hai điều kiện trên thì ta đoán nghiệm hữu tỷ như sau :

Tìm x dưới dạng $x = p/q$, $(p, q) = 1$.

Thay vào phương trình $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ và qui đồng mẫu số ta được $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0$.

Vì n số hạng đầu chứa p, nên chia hết cho p, 0 cũng chia hết cho p, do vậy $a_n q^n \,\vdots\, p$. Do $(p, q) = 1$, suy ra $a_n \,\vdots\, p$. Tương tự ta suy ra $a_0 \,\vdots\, q$. Vậy nếu phương trình $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$, với $a_0, a_1, \dots, a_n$ nguyên, có nghiệm hữu tỷ $x = p/q$, $(p, q) = 1$ thì p là ước của a_n, còn q là ước của a_0. Đặc biệt nếu $a_0 = \pm 1$, thì nghiệm hữu tỷ là nghiệm nguyên và là ước của hệ số tự do a_n.

Trong thí dụ 1, vì tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ bằng 5, nên phương trình có nghiệm $x = -1$, và có thể viết

$$(x + 1)(x^3 - 6x^2 + 6x + 4) = 0$$

Vì $x^3 - 6x^2 + 6x + 4$ không có nghiệm $x = \pm 1$ nên ta xét các nghiệm hữu tỷ là các nghiệm nguyên (vì $a_0 = 1$) và là các ước của 4, tức là $x = \pm 2, \pm 4$. Do $x = 2$ là nghiệm : $8 - 24 + 12 + 4 = 0$, nên có thể viết

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 4x - 2) = 0,$$

do vậy phương trình còn có nghiệm $x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Thí dụ 5. (Đề thi năm 1984) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Giải. Nếu các bạn giải bằng phương pháp thế, tức là rút $y = -x - 1$ thay vào phương trình đầu, thì được $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$. Do $a + b + c + d = 0$, nên phương trình có nghiệm $x = 1$, và có thể viết

$$(x - 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$$

Do vậy phương trình còn có 2 nghiệm $x = -1/2$ và $x = -2$.

Nếu $x = -1/2$, ta có $y = -1/2$ và hệ có nghiệm $(-1/2, -1/2)$

$x = +1$, ta có $y = -2$ và hệ có nghiệm $(1, -2)$

$x = -2$, ta có $y = 1$ và hệ có nghiệm $(-2, 1)$.

Thí dụ 6. (Đề thi vào Đại học sư phạm thành phố Hồ Chí Minh năm học 1976 – 1977).

Giải phương trình $4x^3 - 3x + 1 = 0$.

Giải. Ta lùi bậc phương trình bằng cách tìm 1 nghiệm hữu tỷ $x = p/q$, $(p, q) = 1$; ước của p là ± 1, của q là ± 1, ± 2, ± 4, nên nếu phương trình có nghiệm hữu tỷ, thì chỉ có thể là $x = \pm 1$, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$. Phương trình không có nghiệm $x = 1$, vì tổng các hệ số bằng $2 \neq 0$, còn tổng các hệ số bậc chẵn là 1, bằng tổng các hệ số bậc lẻ là 1, nên phương trình có nghiệm $x = -1$ và có thể viết

$$(x + 1)(4x^2 - 4x + 1) = 0 \text{ hay}$$

$$(x + 1)(2x - 1)^2 = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$, $x = 1/2$ (kép).

Thí dụ 7. Giải phương trình

$$\cos^2 x + \cos^2 3x = 3\cos^2 2x.$$

Giải. Theo công thức $\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ và $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, ta có

$$(1 + \cos 2x)/2 + (1 + \cos 6x)/2 = 3\cos^2 2x$$

$$1 + (1/2)\cos 2x + (1/2)\cos 3 \cdot 2x = 3\cos^2 2x$$

$$2\cos^3 2x - 3\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0.$$

Đặt $\cos 2x = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, ta được

$$2t^3 - 3t^2 - t + 1 = 0.$$

Vì ước của 1 là ± 1, của 2 là ± 1, ± 2 nên nếu phương trình có nghiệm hữu tỷ, thì chỉ có thể là ± 1, $\pm 1/2$. Khi $t = 1/2$ ta có $1/4 - 3/4 - 1/2 + 1 = 0$, nên phương trình có nghiệm $t = 1/2$ và có thể viết

$$2(t - 1/2)(t^2 - t - 1) = 0$$

và phương trình còn có nghiệm $t = (1 - \sqrt{5})/2$, $t = (1 + \sqrt{5})/2$ (loại)

Nếu $t = 1/2$, $\cos 2x = 1/2 = \cos\pi/3$; $2x = \pm\pi/3 + 2k\pi$

$$x = \pm\pi/6 + k\pi, \ k \text{ nguyên.}$$

Nếu $t = (1-\sqrt{5})/2$, $\cos 2x = (1-\sqrt{5})/2 = \cos\alpha$ $\Rightarrow 2x = \pm\alpha + 2k\pi$

$x = \pm\alpha/2 + l\pi$, l nguyên, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, mà $\cos\alpha = (1-\sqrt{5})/2$

Cuối cùng mời các bạn tự giải một số bài sau đây:

1. Giải phương trình

a) $x^4 + 9 = 5x(x^2 - 3)$.

b) $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 12x + 4 = 0$

2. $\text{Cos}^2 x + 1/\cos^2 x = \cos x - 1/\cos x$.

3. $x^2/y^2 + y^2/x^2 - 3(x/y + y/x) + 4 \geqslant 0 \ \forall x, y \neq 0$

4. $\sin^4 x + (1 - \sin x)^4 = 17$

5. $\sin^2 x + \sin^2 3x = 5\sin^2 2x$.

6. Cho hàm số $y = (1/3)x^3 - mx^2 - x + 2/3 + m$

Với m nào đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm khác nhau.

7. Giải phương trình $-4x^3 + 3x + 1 = 0$.

Bài 1/140. *Với mỗi số tự nhiên n ký hiệu $f(n)$ là tổng các chữ số của nó và đặt $f_1(n) = f(n)$, $f_2(n) = f(f_1(n)), \ldots, f_{k+1}(n) = f(f_k(n))$ với $k = 1, 2, 3 \ldots$*

1) Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n cho trước tồn tại một số tự nhiên d sao cho đẳng thức $f_k(n) = f_d(n)$ thỏa mãn với mọi $k \geqslant d$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất (nếu có) của n sao cho số d nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên bằng 3.

Lời giải của Nguyễn quang Thái, lớp 11CT ĐHSPHN).

1) Xét $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ với $a_1 \neq 0$ ta có $n = a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = f(n)$ và chỉ có dấu bằng khi $k = 1$.

Do đó dãy số n, $f_1(n)$, $f_2(n), \ldots$ giảm (thực sự) cho đến khi nó là một số có một chữ số thì dừng. Vậy có d để nếu $k \geqslant d$ thì $f_k(n) = f_d(n)$.

2) Ký hiệu $S_k = \{x \mid f(x) = k\}$ là tập hợp các số x mà $f(x) = k$. Dễ thấy rằng số có k chữ số 1 liên tiếp là thuộc S_k. Trong mỗi S_k đều có một số nhỏ nhất. Ta sẽ chứng minh rằng nếu $k < l$ thì $\min S_k < \min S_l$. Quả vậy, nếu $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_m}$ thuộc S_l (nghĩa là $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = l$) thì giảm một số các chữ số $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ta được số $\overline{b_1 b_2 \ldots b_m}$ thuộc S_k (nghĩa là $b_1 + b_2 + \ldots + b_m = k$).

Những số n có số d nhỏ nhất tương ứng (trong câu 1) bằng 0 là 1, 2, 3, ..., 9. Do đó những số n có số d tương ứng bằng 1 là những số trong các số thuộc $S_1, S_2, S_3, \ldots S_9$. Do đó số n nhỏ nhất có số d tương ứng bằng 1 là $\min S_1 = 10$, số n nhỏ nhất có số d tương ứng bằng 2 là $\min S_{10} = 19$, số n nhỏ nhất có số d tương ứng bằng 3 là $\min S_{19} = 199\ldots$.

Do số 1990...0 cũng có số d tương ứng bằng 3 nên không có số n nào lớn nhất để số d nhỏ nhất tương ứng bằng 3.

Như vậy có thể xét cho các số d bất kỳ.

N.Q.T

Bài 2/140. *Cho dãy số $x_0 = 65$, $x_{k+1} = x_k + \dfrac{1}{x_k}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng:*

$$1985 < x_{1968000} < 1985,01.$$

Lời giải. (Dựa theo *Vũ Quý Dương*, lớp H2 khoa Đông Âu ĐHNN Hà Nội và *Lê Thanh Nam*, lớp 10 CT ĐHTH Hà Nội).

Từ điều kiện của đề bài dễ dàng suy ra:

$$0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots \quad (1)$$

Do đó ta có $\forall k \geqslant 0$ $x_{k+1} - x_k = 1/x_k > 0$

$$\Rightarrow (x_{k+1} + x_k)(x_{k+1} - x_k) > 2x_k \cdot 1/x_k = 2$$

hay $x_{k+1}^2 - x_k^2 > 2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) > 2n$

hay $x_n^2 - x_0^2 > 2n \Rightarrow x_n^2 > x_0^2 + 2n$

$\Rightarrow x_n > \sqrt{x_0^2 + 2n}$. Do vậy, với $n = 1968.000$ và $x_0 = 65$.

ta có: $x_{1968000} > \sqrt{65^2 + 2.1968000} = \sqrt{3940225} = 1985$ (2)

Từ (1) ta cũng có $\forall k \geqslant 0$

$x_{k+1} - x_k = 1/x_k \leqslant 1/x_0 \Rightarrow x_{k+1} + x_k - 1/x_0 \leqslant 2x_k$

Để ý rằng: $2 = 2x_k \cdot 1/x_k$, ta được:

$$2 \geqslant (x_{k+1} + x_k - 1/x_0)(x_{k+1} - x_k)$$

hay $2 \geqslant (x_{k+1}^2 - x_k^2) - 1/x_0 \cdot (x_{k+1} - x_k)$

$$\Rightarrow 2n \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) - 1/x_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = (x_n^2 - x_0^2) - 1/x_0 \cdot (x_n - x_0)$$

$$\Rightarrow x_n^2 - 1/x_0 \cdot x_n - (x_0^2 + 2n - 1) \leqslant 0$$

Từ đó suy ra:

$$x_n \leqslant 1/2x_0 + 1/2 \cdot \sqrt{1/x_0^2 + 4(x_0^2 + 2n - 1)} <$$
$$< 1/2x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2n}$$

Do vậy với $n = 1968.000$ và $x_0 = 65$ ta có:

$$x_{1968000} < 1/130 + \sqrt{65^2 + 2.1968.000} =$$
$$= 1/130 + 1985 < 1985{,}01 \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3) ta được: $1985 < x_{1968000} < 1985{,}01$. (đpcm)

Nhận xét: Đại đa số các bạn không hề nhắc tới hoặc chứng minh bất đẳng thức (1) trong lời giải của mình – một điều làm mất tính chặt chẽ của lời giải. Một số bạn sử dụng bất đẳng thức Côsi – Bunhiacốpxki cũng cho lời giải tốt.

N.K.M.

Bài 3/140. *Tìm số dương lớn nhất trong ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} x = 1 - |1 - 2y| \\ y = 1 - |1 - 2z| \\ z = 1 - |1 - 2x| \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải: Do vai trò của x, y, z bình đẳng nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$ và để tìm số dương lớn nhất theo đề bài, ta chỉ cần xét các trường hợp sau:

Nếu $1/2 \geqslant x \geqslant y \geqslant z > 0$ thì hệ (1) $\Leftrightarrow x = 2y$; $y = 2z$; $z = 2x \Leftrightarrow x = y = z = 0$ (vô nghiệm).

Nếu $x \geqslant 1/2 \geqslant y \geqslant z > 0$ thì hệ (1) $\Leftrightarrow x = 2y$; $y = 2z$; $z = 2 - 2x$.

$\Leftrightarrow x = 8/9$; $y = 4/9$; $z = 2/9$.

Nếu $x \geqslant y \geqslant 1/2 \geqslant z > 0$ thì hệ (1) tương đương với $x = 2 - 2y$; $y = 2z$; $z = 2 - 2x \Leftrightarrow x = 6/7$; $y = 4/7$; $z = 2/7$.

Nếu $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1/2$ thì hệ (1) $\Leftrightarrow x = 2 - 2y$; $y = 2 - 2z$; $z = 2 - 2x \Leftrightarrow x = y = z = 2/3$.

Vậy số dương lớn nhất thỏa mãn hệ đã cho là $8/9$.

Nhận xét. Nhiều bạn giải bài này thiếu chính xác hoặc dài. Bạn *Nguyễn Ngọc Văn Khoa* (11 CT, Phan Chu Trinh, Đà Nẵng) có lời giải gần giống trên. Các bạn *Nguyễn Xuân Hà, Nguyễn Phương Tuấn, Hà Anh Vũ* (11 CT, ĐHSP, Hà Nội 1) và *Phạm Triều Dương* (10 I, Chu Văn An, Hà Nội) giải bằng phương pháp hình học cũng cho lời giải tốt.

T. V. T.

Bài 4/140. *Cho số nguyên dương bất kỳ k. Chứng minh rằng luôn tồn tại số $r > 1$ không nguyên sao cho với mọi n tự nhiên ta có $[r^n] \vdots k$ ($[r^n]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá r^n).*

Lời giải.

Cách 1 (của nhiều bạn). Xét phương trình $X^2 - (2k+1)X + k = 0$ có 2 nghiệm là

$$X_1 = k + 1/2 + \sqrt{k^2 + 1/4};$$
$$X_2 = k + 1/2 - \sqrt{k^2 + 1/4};$$

Ta nhận thấy $0 < X_2 < 1$. Đặt $u_n = X_1^n + X_2^n$, ta dễ dàng kiểm tra được rằng:

$$u_{n+2} = (2k+1)u_{n+1} - ku_n.$$

Nhưng $u_0 = 2$ và $u_1 = 2k + 1$ nên theo quy nạp toán học ta suy ra với mọi n tự nhiên. u_n nguyên dương và $\equiv 1 \pmod k$. Nhưng vì $0 < X_2^n < 1$ nên $[X_1^n] = u_n - 1 \vdots k$ với mọi n.

Vậy số $r = X_1 = k + 1/2 + \sqrt{k^2 + 1/4}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2 (của bạn *Nguyễn Tiến Dũng*, lớp 11 CT, ĐHTH Hà Nội và bạn *Trương Quỳnh Hòa*, lớp 11 I Chu Văn An Hà Nội).

Đặt $x_1 = 2k$, $y_1 = 2k + 1$. Vì $y_1^2 - x_1^2 = 4k + 1 > k + 1 \Rightarrow \exists t_1 \in N : t_1 \vdots k$

và $$x_1^2 < t_1 < y_1^2 - 1.$$

Đặt $x_2 = \sqrt{t_1}$, $y_2 = \sqrt{t_1 + 1} \Rightarrow x_1 < x_2 < y_2 < y_1$; $x_2^2 \vdots k$.

.....

Giả sử ta đã có $2n - 2$ số $2k = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < y_{n-2} < \ldots < y_1 = 2k + 1$ thỏa mãn 1) x_i^i là nguyên và chia hết cho k

$$(i = \overline{1, n-1})$$

$$2)\ y_i^i = x_i^i + 1\ (i = \overline{1, n-1})$$

Khi đó, vì $y_{n-1}^n - x_{n-1}^n > y_{n-1}^n - x_{n-1}^{n-1}y_{n-1} = y_{n-1} > 2k > k + 1 \Rightarrow \exists t_{n-1} \in N : t_{n-1} \vdots k$ và $x_{n-1}^n < t_{n-1} < y_{n-1}^n - 1$. Đặt $x_n = \sqrt[n]{t_{n-1}}$, $y_n = \sqrt[n]{t_{n-1} + 1}$, ta lại có

$x_n^n \vdots k$ và $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < y_n < \ldots < y_1$.

Tiếp tục như vậy, ta được hai dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ thỏa mãn: 1) x_i^i là nguyên và chia hết cho k.

2) $y_i^i = x_i^i + 1$.

3) $2k = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$

4) $2k + 1 = y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots$

5) $\forall i, j \in N : x_i < y_j$.

Vì $x_i < y_1 = 2k + 1\ \forall i$ nên từ (3) $\Rightarrow \exists r = \lim\limits_{i \to \infty} x_i$

Từ (3) và (5) suy ra $\forall\ n \in N:\ x_n < r < y_n$

$$\Rightarrow x_n^n < r^n < y_n^n = x_n^n + 1 \text{ (theo (2))}$$

$$\Rightarrow [r^n] = x_n^n \ \vdots\ k \text{ (theo (1))}$$

vậy r là số thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Đ. B. K.

Bài 5/140. *A, B, C là ba góc của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{\mathrm{tg}^2A\,\mathrm{tg}^2B\,\mathrm{tg}^2C}{\mathrm{tg}^2A+\mathrm{tg}^2B+\mathrm{tg}^2C}$$

khi Δ ABC biến thiên

Lời giải (của các bạn : *Nguyễn Quảng Cường, Nguyễn Hữu Tuấn, Nguyễn Tuấn Trung, Phùng Hồ Hải, Nguyễn Xuân Hà, Nguyễn Bá Tùng...*)

Trước hết ta chứng minh

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C \qquad (1)$$

Thật vậy, $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C =$

$$= \mathrm{tg}(A+B)(1-\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B) + \mathrm{tg}C =$$

$$= -\mathrm{tg}C\,(1-\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B) + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C.$$

Mặt khác :

$$(\mathrm{tg}A-\mathrm{tg}B)^2 + (\mathrm{tg}B-\mathrm{tg}C)^2 + (\mathrm{tg}C-\mathrm{tg}A)^2 \geqslant 0$$

Hay $\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B + \mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C + \mathrm{tg}C\,\mathrm{tg}A \leqslant$

$$\leqslant \mathrm{tg}^2A + \mathrm{tg}^2B + \mathrm{tg}^2C. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\mathrm{tg}^2A + \mathrm{tg}^2B + \mathrm{tg}^2C = (\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C)^2 -$$

$$-2(\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}B + \mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C + \mathrm{tg}C\,\mathrm{tg}A) \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{tg}^2A\,\mathrm{tg}^2B\,\mathrm{tg}^2C - 2(\mathrm{tg}^2A + \mathrm{tg}^2B + \mathrm{tg}^2C)$$

hay $3(\mathrm{tg}^2A + \mathrm{tg}^2B + \mathrm{tg}^2C) \geqslant \mathrm{tg}^2A\,\mathrm{tg}^2B\,\mathrm{tg}^2C$

hay $$\frac{\mathrm{tg}^2A\,\mathrm{tg}^2B\,\mathrm{tg}^2C}{\mathrm{tg}^2A+\mathrm{tg}^2B+\mathrm{tg}^2C} \leqslant 3$$

Suy ra giá trị lớn nhất bằng 3 khi $A = B = C$.

Nhận xét : Các bạn *Lê Thành Nam* A_0 11 ĐHTH Hà Nội, *Nguyễn Thành Úc* 12A5 Trường PTTH Nguyễn Thượng Hiền, Quận Tân Bình TP. HCM... đã mở rộng bài toán như sau : Tìm giá trị lớn nhất của $\mathrm{tg}^nA\,\mathrm{tg}^nB\,\mathrm{tg}^nC\,/\,(\mathrm{tg}^nA + \mathrm{tg}^nB + \mathrm{tg}^nC)$ khi Δ ABC biến thiên ($n \in N$)

N. V. M.

Bài 6/140. *Xét bảng số gồm n dòng, n cột :*

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

trong đó a_{ij} nhận một trong các giá trị $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Hãy xác định các giá trị của n sao cho tồn tại bảng A_n có tính chất như sau :

1) Ở mỗi dòng, mỗi cột đều có một số 1 (hoặc -1), một số 2 (hoặc -2), một số 3 (hoặc -3), các số còn lại bằng 0.

2) Ứng với mỗi bộ, (i, j, k) sao cho $a_{ik}a_{jk} \neq 0$, tồn tại duy nhất một cột m sao cho $a_{im}a_{jm} = -a_{ik}a_{jk}$.

3) Ứng với mỗi bộ $(i j, k)$ sao cho $a_{ki}\,a_{kj} \neq 0$ tồn tại duy nhất một dòng m sao cho $a_{mi}\,a_{mj} = -a_{ki}.a_{kj}$

Lời giải : (của các bạn *Phùng Hồ Hải, Nguyễn Tuấn Trung, Nguyễn Khánh An, Cao Vi Ba, Nguyễn Xuân Hà...*).

Trước hết, nhận xét rằng với $n = 1, 2, 3$ thì không thể sắp xếp các số của A_n thỏa mãn 1), 2), và 3).

Khi $n = 4$ thì có thể sắp xếp A_4 như sau :

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Khi $n = 4k$ thì tồn tại cách sắp xếp :

$$A_{4k} = \begin{vmatrix} A_4 & O \ldots & O \\ O & A_4 \ldots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O \ldots & A_4 \end{vmatrix} \quad \text{trong đó } O = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Giả sử $n = 4k + r$; $0 < r < 4$. Trước hết, nhận xét rằng nếu bảng A_n thỏa mãn các điều kiện 1), 2), và 3) thì khi đổi vị trí hai dòng, hai cột tùy ý thì các tính chất trên vẫn đúng. Vì vậy, ta có thể đổi vị trí để các số 1 (hoặc -1), 2 (hoặc -2), 3 (hoặc -3) vào các vị trí a_{11}, a_{12}, a_{13}; cũng vậy, đối với các dòng $(\pm 1, \ldots)$, $(\pm 2, \ldots)$, $(\pm 3, \ldots)$ được xếp theo thứ tự dòng 1, dòng 2, dòng 3 của bảng A_n. Tiếp theo, sắp xếp cột có phần tử thứ 2 (từ trên xuống) khác 0 ở cột thứ 4 và dòng có phần tử thứ 2 (từ trái qua phải) khác 0 ở dòng thứ 4. Vậy tất cả các phần tử còn lại ở 4 dòng và 4 cột trên đều bằng 0. Nếu bảng 4×4 thu được theo cách trên không thỏa mãn 1), 2), 3) thì không tồn tại bảng A_n. Giả sử bảng đó thỏa mãn 1), 2) và 3). Sau khi gạch bỏ 4 dòng đầu và 4 cột đầu, ta được một bảng mới cũng có các tính chất 1), 2), 3) như bảng A_n. Đối với bảng mới này, ta tiếp tục thực hiện quá trình như trên, sau k bước ta được bảng $r \times r$ có các tính chất 1), 2), 3). Điều đó không thể xảy ra (do nhận xét ở đầu bài giải).

Vậy khi n không chia hết cho 4 thì không tồn tại bảng A_n có các tính chất 1), 2), và 3).

Suy ra, điều kiện cần và đủ để tồn tại bảng A_n có các tính chất 1), 2) và 3) là n chia hết cho 4.

N. V. M

Bài 7/140. *Cho dãy số y_0, $y_1, \dots, y_n, \dots$ xác định theo công thức:*

$$y_p = (1-x)\, y_{p-1} + Ax / y_{p-1}^{(1-x)/x}$$

với $A > 0$, $0 < x < 1$ và $y_0 > 0$.

Hãy chứng minh dãy số trên có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải: Xét hàm số $f(y) = (1-x)y + Ax/y^{(1-x)/x}$ với $y > 0$; $A > 0$; $0 < x < 1$.

Đạo hàm theo y ta có $f'(y) = (1-x)\left(1 - A.y^{-\frac{1}{x}}\right)$ và $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = A^x$. Dùng bảng biến thiên ta có $f(y) \geqslant A^x$ với $\forall y > 0$. Theo công thức của y_p, từ $y_0 > 0$ ta có $y_p > 0$ với $\forall p$. Mặt khác, $y_p = f(y_{p-1})$ với mọi $p \geqslant 1$ nên ta có $y_p \geqslant A^x$ với mọi $p \geqslant 1$.

Lại có $y_p - y_{p-1} = x.y_{p-1}^{\frac{(x-1)}{x}}\left(A - y_{p-1}^{\frac{1}{x}}\right) \leqslant 0$ với mọi $p \geqslant 2$.

Vậy dãy số $\{y_p\}$ giảm kể từ y_1 và bị chặn dưới bởi A^x nên tồn tại giới hạn. Gọi $a = \lim\limits_{p\to\infty} y_p$.

Qua giới hạn hai vế $y_p = (1-x)y_{p-1} + A.x \times y_{p-1}^{\frac{(x-1)}{x}}$ ta có $a = (1-x)a + A.x.a^{\frac{(x-1)}{x}}$ từ đó ta có $a = A^x$

Nhận xét: Đa số các bạn dùng bất đẳng thức Côsi tổng quát để chứng minh $y_p \geqslant A^x$ và cho lời giải khá ngắn gọn. Các bạn *Nguyễn Tiến Dũng* (A), *Phùng Hồ Hải* (CT, ĐHTH, Hà Nội), *Nguyễn Quang Thát*, *Ngô Hoàng Huy* (11 CT, ĐHSP Hà Nội 1), *Hoàng Như Hợi* (11 I, Chu Văn An, Hà Nội), *Nguyễn Khánh An* (11 CT, Quốc Học Huế), và *Trang Cầm Bằng*, *Nguyễn Gia Bảo* (11 CT, PTTH Lê Hồng Phong, T.P. Hồ Chí Minh) có lời giải tốt.

T. V. T.

Bài 8/140. *Cho một mặt phẳng P cố định một hình chóp đều $SA_1A_2 \dots A_{84}$ biến thiên, biết đỉnh S luôn luôn nằm ở một phía của mặt phẳng P, đáy nằm trên P, A_1 cố định và luôn luôn thỏa mãn hệ thức:*

$$a \operatorname{tg}(\alpha/2) = 1 \text{ (đơn vị độ dài)},$$

ở đây a là ký hiệu độ dài cạnh đáy, α là góc nhị diện kề cạnh đáy.

Chứng minh rằng mỗi mặt phẳng chứa một bên của hình chóp mà không qua A_1 đều tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Lời giải. (*Dựa theo* ***Đặng Vũ Sơn***, *11 CT, ĐHTH Hà Nội*):

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp 84 – giác đều. Xét mặt bên SA_iA_{i+1} bất kỳ ($i = 2, 83$). Từ A_1 hạ $A_1K \perp A_iA_{i+1}$. Ta có:

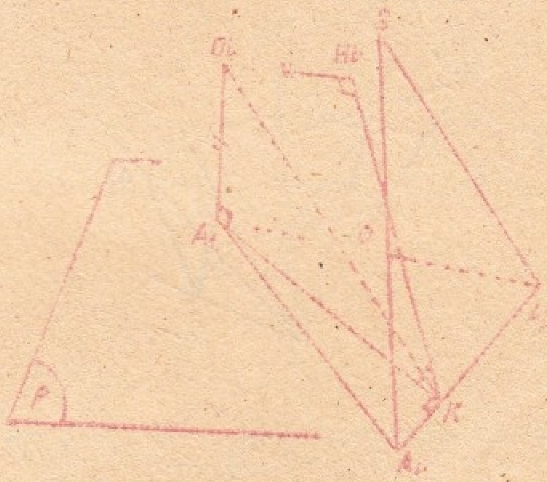
$\widehat{A_1A_{i+1}A_i} = (i-1)\pi/84$; $\widehat{A_1A_iA_{i+1}} = (84-i)\pi/48$;

$\widehat{A_iOA_{i+1}} = (2 - 2i/84)\pi$ và $OA_i = \dfrac{a}{2\sin(\pi/84)}$

Từ đó suy ra:

$$A_1K = A_1A_{i+1} \sin\widehat{A_1A_{i+1}A_i} =$$
$$= 2OA_i \sin\widehat{A_1A_iA_{i+1}} \sin\widehat{A_1A_{i+1}A_i}$$
$$= a\sin\frac{(84-i)\pi}{84}\sin\frac{(i-1)\pi}{84} \Big/ \sin\left(\frac{\pi}{84}\right)$$
$$= a\sin\frac{i\pi}{84}\sin\frac{(i-1)\pi}{84} \Big/ \sin\left(\frac{\pi}{84}\right) \qquad (1)$$

Từ A_1 dựng $A_1x \perp (P)$. Gọi O_i là giao điểm của Ax và mặt phẳng phân giác góc nhị diện cạnh A_iA_{i+1}. Khi đó, do $O_iA_1 \perp A_iA_{i+1}$ và $A_1K \perp A_iA_{i+1}$ nên suy ra $IK \perp A_iA_{i+1}$. Bởi vậy $\widehat{A_1KO_i} = \alpha/2$. Suy ra $O_iA_1 = A_1K \operatorname{tg}(\alpha/2)$ (2)



Thay (1) vào (2) với lưu ý $a\operatorname{tg}(\alpha/2) = 1$ ta được:

$$O_iA_1 = \sin\frac{i\pi}{84}\sin\frac{(i-1)\pi}{84} \Big/ \sin\left(\frac{\pi}{84}\right) = R_i = \text{const} \qquad (3)$$

Từ O_i hạ $O_iH_i \perp (SA_iA_{i+1})$ ta có: $O_iA_1 = O_iH_i = R_i = \text{const}$ (4)

Từ (3) suy ra khi mặt SA_iA_{i+1} biến thiên và A_1 cố định thì điểm O_i cũng cố định; và do (4) nên ta có mặt phẳng đó luôn tiếp xúc với mặt cầu cố định tâm O_i, bán kính

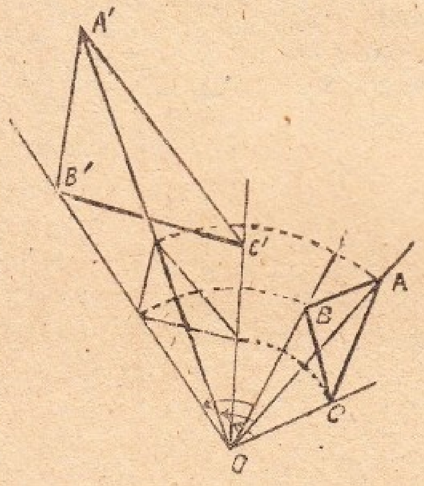
$$R_i = \sin\frac{i\pi}{84}\sin\frac{(i-1)\pi}{84} \Big/ \sin\left(\frac{\pi}{84}\right) \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét : Bạn *Nguyễn Xuân Hà* (12 CT ĐHSP Hà Nội 1) cũng có cách giải tương tự lời giải trên, song rất đáng tiếc do trình bày thiếu cẩn thận nên lời giải không hoàn chỉnh.

Bài 9/140. *Cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ đồng dạng với tỷ số $k \neq 1$ và có cùng hướng. Chứng minh rằng*

$$AA'.BC \leqslant BB'.CA + CC'.AB$$
$$BB'.CA \leqslant CC'.AB + AA'.BC$$
$$CC'.AB \leqslant AA'.BC + BB'.CA.$$

Lời giải. (*Cao Vi Ba* (nữ), lớp 11 CT, ĐHTH Hà Nội và *Nguyễn Ngọc Văn Khoa* lớp 11 CT, Phan Châu Trinh Đà Nẵng). Do hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng với tỷ số $k \neq 1$ và có cùng hướng nên tam giác $A'B'C'$ là ảnh của tam giác ABC sau một phép quay vị tự tâm O, góc α, tỷ số k.



Khi đó các tam giác OAA', OBB', OCC' đồng dạng và ta có $AA'/BB' = OA/OB$; $AA'/CC' = OA/OC$. Vậy $BB'.CA + CC'.AB = (AA'/OA)(OB.CA + OC.AB)$. Do bất đẳng thức Ptôlêmê $OB.CA + OC.AB \geqslant OA.BC$ nên ta có $BB'.CA + CC'.AB \geqslant AA'.BC$. Tương tự ta có hai bất đẳng thức kia.

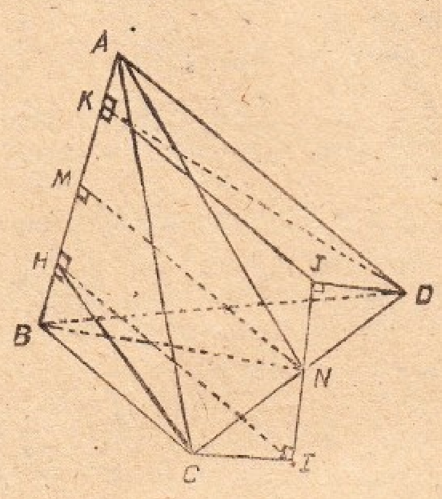
Ta có đẳng thức chỉ khi $OABC$ là tứ giác nội tiếp được.

N.Q.T

Bài 10/140. *Mặt phẳng đi qua một cạnh và chia đôi cạnh đối diện của 1 hình tứ diện gọi là một mặt trung diện của hình tứ diện đó. Mặt phẳng đi qua một cạnh và chia đôi góc nhị diện thuộc cạnh đó gọi là một mặt phân giác (trong) của hình tứ diện đó.*

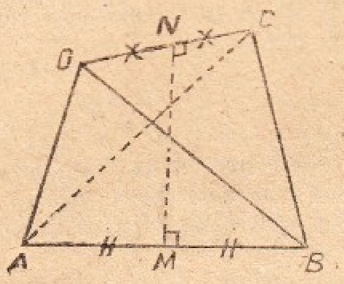
Hãy tìm tất cả các hình tứ diện đặc trưng bởi tính chất là mỗi mặt phân giác của một nhị diện trùng với mặt trung diện xuất phát từ cạnh của nhị diện đó.

Lời giải (của nhiều bạn).



Xét một tứ diện $ABCD$ có các mặt phân giác trùng với các mặt trung diện. Giả sử P là mặt phân giác qua cạnh AB. Khi đó P đi qua trung điểm N của CD. Gọi I, J là hình chiếu của C, D trên P ; H, K, M là hình chiếu của I, J, N trên AB. Vì N là trung điểm $CD \Rightarrow N$ là trung điểm IJ và $CI = DJ$. Vì P là mặt phân giác của tứ diện nên $\widehat{JKD} = \widehat{IHC} \Rightarrow CI/HI = DJ/KJ \Rightarrow HI = KJ \Rightarrow IJKH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IH \perp IJ$.

Vì $IH \perp IJ$ và $IH \perp CI \Rightarrow IH \perp mp(CIJ) \Rightarrow IH \perp CD$. Vì $IH \perp CD$ mà $MN // IH$ (do cùng nằm trên P và cùng vuông góc với AB) nên $MN \perp CD \Rightarrow MN$ là đường vuông góc chung của AB và $CD \Rightarrow$ đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm N của CD. Chứng minh tương tự, ta có M là trung điểm AB.



Xét phép đối xứng qua trục MN. Qua phép đối xứng đó thì $C \to D$, $A \to B$, đoạn $AC \to$ đoạn $BD \Rightarrow AC = BD$. Chứng minh tương tự, $AB = CD$ và $AD = BC$. Như vậy tứ diện có các mặt trung diện trùng với các mặt phân giác là tứ diện gần đều. Ngược lại, giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều. Xét một mặt trung diện nào đó của tứ diện, chẳng hạn mặt ABN (M, N là trung điểm AB, CD). Do $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC \Rightarrow \Delta BCD = \Delta ADC \Rightarrow AN = BN \Rightarrow MN \perp AB$. Tương tự $MN \perp CD \Rightarrow$ tứ diện $ABDN$ là ảnh của tứ diện $BACN$ qua phép đối xứng qua trục MN $\Rightarrow ((ABN), (ABD)) = ((ABN), (ABC)) \Rightarrow ABN$ cũng chính là mặt phân giác của tứ diện.

Vậy những tứ diện gần đều và chỉ những tứ diện đó có các mặt trung diện trùng với các mặt phân giác.

Nhận xét: Nhiều bạn giải được đúng bài này, tuy vậy còn một số bạn không xét phần đảo nên lời giải chưa đầy đủ. Bạn *Phùng Hồ Hải* 10 CT. ĐHTH Hà Nội có lời giải lượng giác tốt.

Đ.B.K

Bài 1/143. Giải phương trình.

$$\sqrt[5]{(x+a)^2} + \sqrt[5]{(x-a)^2} + \sqrt[5]{x^2-a^2} = \sqrt[5]{a^2}$$

Thái Viết Thảo và Trọng Vũ

Bài 2/143. Giải phương trình.

$$(\log_2 x)^2 + x\log_7(x+3) = \log_2 x\,[x/2 + 2\log_7(x+3)]$$

Đào Phú Hùng

Bài 3/143. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$f(x, y, z) = \frac{|ab - xy|}{(x+y)z} + \frac{|ab - yz|}{(y+z)x} + \frac{|ab - zx|}{(z+x)y}$$

khi $a \leqslant x, y, z \leqslant b$; $a > 0$.

Nguyễn Văn Mậu

Bài 4/143. Cho số n tự nhiên. Đặt $b(n) = \min\limits_{k \in N} \{k + n/k\}$.

Chứng minh rằng $[b(n)] = [\sqrt{4n+1}]$ (ở đây $[x]$ chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Đỗ Bá Khang

Bài 5/143. Tập $M = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ chia làm k tập con rời nhau $M_1, M_2, \ldots M_k$ trong đó $k^3 + k \leqslant n$. Chứng minh rằng tồn tại $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (i và j có thể bằng nhau) và $k+1$ số chẵn $2C_1, \ldots, 2C_{k+1} \in M_i$ sao cho $2C_1 - 1, \ldots, 2C_{k+1} - 1$ đều thuộc M_j.

Đỗ Đức Thái

Bài 6/143. Cho cấp số cộng dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n \geqslant 4$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1 + a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geqslant \frac{2}{n} \times \left(\sqrt[n]{\frac{a_1^3}{a_2 a_3 a_4}} + \ldots + \sqrt[n]{\frac{a_n^3}{a_1 a_2 a_3}}\right)$$

Tạ Văn Tự

Bài 7/143. Chứng minh rằng trong tam giác bất kỳ tổng bán kính ba đường tròn bàng tiếp không nhỏ hơn tổng ba đường cao.

Bùi Duy Hưng

Bài 8/143. Cho hai điểm A và B nằm ngoài đường tròn O. Dựng một đường tròn K qua A, B và cắt đường tròn O theo một dây có độ dài d cho trước.

Nguyễn Xuân Huy

Bài 9/143. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V_1. Một điểm O tùy ý trong tứ diện đó. Trên AO, BO, CO, DO kéo dài về phía O, ra ngoài tứ diện, lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng, một cách tùy ý. Bốn mặt phẳng lần lượt qua A_1, B_1, C_1, D_1 và song song với các mặt BCD, CDA, DAB, ABC cắt nhau tạo thành tứ diện mới có thể tích là V_2. Lần lượt nối A_1, B_1, C_1, D_1, với các đỉnh của các tam giác BCD, CDA, DAB và ABC tương ứng để được một thập nhị diện (các mặt đều là các tam giác) có thể tích là V_3. Chứng minh rằng $V_3^3 = V_1^2 \cdot V_2$

Phạm Đăng Long

Bài 10/143. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O nằm trong mặt phẳng $[P]$ và hai nửa đường thẳng Bx, Dy vuông góc với mặt phẳng $[P]$ và ở về cùng một phía của mặt phẳng ấy. Hai điểm M, N chuyển động trên Bx và Dy. Tìm quỹ tích các hình chiếu I và J của O trên các mặt phẳng $[AMN]$ và $[CMN]$ trong trường hợp $BM + DN = MN$.

Lê Quốc Hán

TOÁN HỌC và ĐỜI SỐNG

PHƯƠNG ÁN NÀO LÀ TỐT NHẤT

TRẦN VŨ THIỆU

TOÁN học có nhiều ứng dụng thiết thực trong đời sống, cũng như trong các ngành kinh tế, kỹ thuật. Nhờ các công thức và phương trình toán học mà nhiều bài toán kinh tế kỹ thuật được phát biểu dưới dạng một bài toán toán học và có thể sử dụng các phương pháp toán học để giải quyết, nhiều khi khá nhanh chóng và thuận tiện. Dưới đây xin nêu một ví dụ nảy sinh khi lập kế hoạch sản xuất trong ngành thủy điện, một ngành kinh tế kỹ thuật khá quen thuộc với cuộc sống hàng ngày của chúng ta.

Giả sử có một trạm phát thủy điện phục vụ nhu cầu tiêu thụ điện cho một vùng nào đó. Nhu cầu này thay đổi theo giờ trong ngày. Cho biết q_i là nhu cầu tiêu thụ điện ở giờ thứ i ($i=1, 2, \ldots, n=24$), không mất tính tổng quát ta có thể xem như

$$q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n > 0$$

(nếu cần thì đánh số lại các mốc thời gian). Cho biết P là công suất tối đa mà trạm có thể phát tại mỗi thời điểm. Vấn đề, đặt ra là: hãy xác định chế độ làm việc cho trạm phát, nghĩa là xác định lượng điện phát ra y_i ở giờ thứ i sao cho thỏa mãn các yêu cầu sau đây:

1) $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = Q$: tổng lượng điện phát ra trong ngày là không đổi (tương ứng chẳng hạn với chi phí sản xuất từng ngày là cố định).

2) $0 \leqslant y_i \leqslant \min\{q_i, P\}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$: lượng điện phát ra mỗi giờ không vượt quá nhu cầu tiêu thụ và công suất tối đa của trạm phát.

3) $q_1 - y_1 \geqslant q_2 - y_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n - y_n$

giờ nào có nhu cầu tiêu thụ điện năng lớn hơn phải chịu sự thiếu hụt về điện nhiều hơn.

4) $(q_1 - y_1) - (q_n - y_n) \to \min$: làm cực tiểu chênh lệch về sự thiếu hụt điện ở giờ cao điểm và giờ thấp điểm (san đều sự thiếu hụt điện).

Nói chung công suất phát tối đa $P < \max\{q_i\}$ và đại lượng Q không đủ lớn, do đó lượng điện phát ra y_i không đáp ứng đủ nhu cầu. Sự thiếu hụt này sẽ được bổ sung bằng các máy phát nhiệt điện (chạy máy nổ đi-ê-zen chẳng hạn). Các yêu cầu (3)−(4) chính là nhằm bảo đảm sự thiếu hụt điện diễn ra tương đối đồng đều ở các giờ, tạo điều kiện cho các máy phát nhiệt điện hoạt động được bình ổn hơn.

Bằng cách đổi biến số $x_i = q_i - y_i$, vấn đề nêu trên tương đương với bài toán: tìm các biến số $x_1, x_2, \ldots x_n$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 - x_n \to \min & (1) \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A & (2) \\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n & (3) \\ p_i \leqslant x_i \leqslant q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. & (4) \end{cases}$$

trong đó $A = q_1 + q_2 + \ldots + q_n - Q$, $p_i = \max\{0, q_i - P\}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sự tương đương ở đây hiểu theo nghĩa: y_i là lời giải cần tìm khi và chỉ khi $x_i = q_i - y_i$ là lời giải của bài toán (1)−(4). (bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra lại điều khẳng định này).

Bài toán (1)−(4) có dạng khá đặc biệt, nhờ đó ta có thể tìm được nhanh chóng lời giải của nó bằng một phương pháp riêng, rất đơn giản và độc đáo. Nội dung đại thể của phương pháp như sau:

Ta sẽ xác định từng bước giá trị cho các biến số bằng cách lúc đầu cho chúng ở mức nhỏ nhất, nghĩa là cho mỗi biến bằng cận dưới p_i của nó, sau đó lần lượt tăng dần giá trị của chúng sao cho vẫn bảo đảm thỏa mãn các điều kiện ràng buộc của bài toán, biến nào đã có giá trị bằng cận trên q_i của nó thì không cần tăng nữa. Do mục tiêu của ta là làm cực tiểu hiệu $x_1 - x_n$, nghĩa là ta muốn x_n nhận giá trị càng lớn càng tốt và x_1 nhận giá trị càng nhỏ càng tốt, và do có điều kiện (3) nên ta sẽ ưu tiên tăng trước cho biến x_n (và cho cả các biến đã có giá trị bằng nó), rồi lần lượt đến các biến khác có chỉ số nhỏ dần. Mỗi lần tăng thêm một lượng tối đa có thể được, lượng này do các điều kiện (2)−(4) qui định. Làm như vậy cho đến khi nào điều kiện (2) được thỏa mãn. Khi đó ta sẽ thu được lời giải của bài toán (1)−(4).

Để minh họa phương pháp vừa nêu, ta hãy xét một ví dụ bằng số đơn giản.

Ví dụ: Giải bài toán với $n=8$, $P=10$, $Q=36$ và các q_i như sau:

$$q_i = 15, 12, 11, 10, 7, 6, 3, 2.$$

Bài toán tương đương (1) – (4) có $A = \sum q_i - Q = 66 - 36 = 30$ và các $p_i = \max\{0, q_i - P\}$ như sau:

$$p_i = 5,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Quá trình giải bài toán (1) – (4) được trình bày tóm tắt trong bảng sau đây (bảng 1):

Bảng 1.

Bước k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$A-\sum x_i$	Mức tăng
1	5	2	1	0	0	0	0	0	22	1
2	5	2	1	1	1	1	1	1	17	1
3	5	2	2	2	2	2	2	2	11	1
4	5	3	3	3	3	3	3	2	5	1
5	5	4	4	4	4	4	3	2	0	Dừng

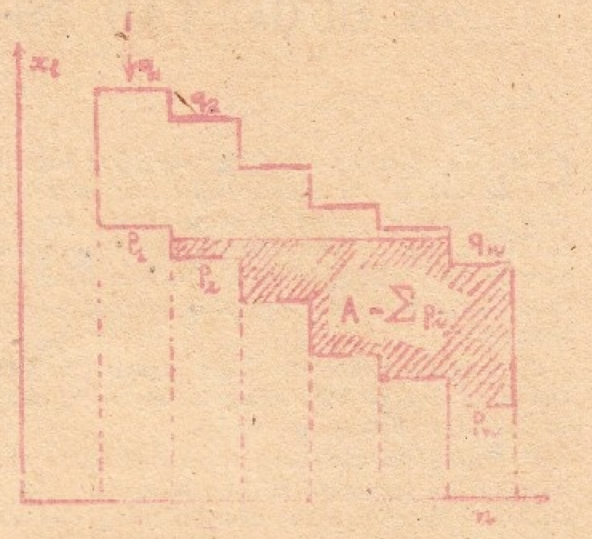
Lời giải của bài toán (1) – (4) là:

$$x_i = 5,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 3,\ 2.$$

Trở lại biến y_i ta thu được lời giải:

$$y_i = q_i - x_i = 10,\ 8,\ 7,\ 6,\ 3,\ 2,\ 0,\ 0.$$

Phương pháp giải nêu trên đây có thể minh họa một cách hình ảnh như sau: ta hãy tưởng tượng có một chiếc «thùng» đựng nước hình bậc thang gồm n khoang thông với nhau. Mỗi khoang có tiết diện đáy là một đơn vị diện tích đáy dưới cao p_i đáy trên cao q_i đơn vị dài. Hình 1 vẽ tiết diện bổ đứng của thùng. Thực chất của cách làm trên đây là ta đổ vào thùng một lượng nước bằng $A - \sum p_i$ qua khoang đầu (chỗ vẽ mũi tên), nước sẽ dồn về khoang cuối trước, theo nguyên tắc «nước chảy chỗ trũng». Khi đổ xong, mực nước ở các khoang sẽ cho ta lời giải của bài toán.



Hình 1. Tiết diện đứng của thùng

Trên đây đã nêu ra một ví dụ thực tế đơn giản nhằm minh họa một lớp bài toán có tên gọi là bài toán *qui hoạch tuyến tính*. Tất nhiên, trong thực tiễn các bài toán gặp phải sẽ phức tạp hơn nhiều, lúc đó để giải chúng ta có thể vận dụng *lý thuyết qui hoạch*, một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

THÔNG BÁO

Bắt đầu từ số 4 năm 1985 trở đi giá mỗi số báo THVTT là 3 đồng

Giải đáp bài BẢNG NHẢY *M* BẬC *K*

Nếu $n \leqslant k$ thì ta viết bình thường.

Nếu $n > k$ thì ta viết dãy số nguyên liên tiếp bắt đầu bằng số $1-m$, kết thúc bằng số n và nhớ bỏ qua (không viết) m số là $n-k-m+1$, $n-k-m+2, \ldots, n-k$. Cụ thể là sau khi viết dãy $1-m, 1-m+1, \ldots, 0, \ldots n-k-m, n-k+1, \ldots, n$ ta sẽ nhận được dãy $1, 2, \ldots, n$. Vì kể từ số $k-m+1$ trở đi, các số $1-m, 1-m+1, \ldots, n-k-m$ sẽ lần lượt tự động nhảy thêm m đơn vị để trở thành dãy con $1, 2, \ldots, n-k$. Còn các số $n-k+1, \ldots, n$ thì vẫn chưa kịp nhảy vì $n-(n-k+1) = k-1 < k$.

Thí dụ, với $k=4$, $m=3$, $n=13$ thì sau khi viết dãy:

$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13$$

ta sẽ thấy trên bảng xuất hiện dãy:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13.$$

N. X. H.

CÁC BẢNG LOGARIT ĐẦU TIÊN ĐÃ ĐƯỢC TẠO THÀNH NHƯ THẾ NÀO?

PHẠM VĂN HOÀN

CHÚNG ta thường sử dụng các bảng logarit để tính giá trị của các biểu thức phức tạp. Chắc rằng chúng ta cũng có lúc tự hỏi các bảng logarit đầu tiên đã được tạo thành như thế nào, những ai đã làm ra các bảng đó, bằng con đường nào và phải vượt qua khó khăn gì?

Lịch sử tạo thành các bảng logarit đầu tiên khá lý thú và bổ ích. Chúng ta hãy cùng nhau ôn lại chặng đường lịch sử đó.

Tư tưởng của các bảng logarit đã được nhà toán học lỗi lạc người Hi Lạp là Acsimet (287 – 212 trước Công nguyên) nêu lên trong việc xét mối quan hệ giữa cấp số nhân có số hạng đầu là 1, công bội là 10, và cấp số cộng có số hạng đầu là là 0, công sai là 1:

$$\div\ 1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10.000 \quad 100.000 \quad 1.000.000$$
$$\div\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

Acsimet đã nhận xét rằng muốn tìm tích của hai số hạng của cấp số nhân, thí dụ 100×1000, thì có thể tính tổng hai số hạng tương ứng của cấp số cộng, $2 + 3 = 5$, rồi lấy số hạng của cấp số nhân tương ứng với số hạng của cấp số cộng là 5, tức là lấy số 100000. Cũng vậy, muốn tìm thương của hai số hạng của cấp số nhân, thí dụ 1000000 : 10000, thì có thể tính hiệu hai số hạng tương ứng của cấp số cộng, $6 - 4 = 2$, rồi lấy số hạng của cấp số nhân tương ứng với số hạng của cấp số cộng là 2, tức là lấy số 100. Như vậy, có thể sử dụng mối quan hệ đã nêu giữa cấp số nhân và cấp số cộng để đơn giản hóa việc tính toán bằng cách thay thế phép nhân bằng phép cộng, phép chia bằng phép trừ. Tuy nhiên từ nhận xét đó đến việc tạo thành các bảng tính Acsimet đã không thực hiện, và trong hơn 1700 năm sau Acsimet cũng không một nhà toán học nào thực hiện.

Vào năm 1544, cuốn sách «Số học đại cương» của nhà toán học người Đức là Mikhailin Stiphen (1486 – 1567) ra đời, trong đó Stiphen đã phát triển tư tưởng của Acsimet. Stiphen đã xét mối quan hệ giữa cấp số nhân có số hạng chính là 1, công bội là 2, và cấp số cộng có số hạng chính tương ứng là 0 và công sai là 1, hai cấp số này được kéo dài ở cả hai phía bên phải và bên trái:

$$\div\ \ldots\ \frac{1}{8}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{2}\quad 1\quad 2\quad 4\quad 8\quad 16\quad 32\quad 64\ \ldots$$
$$\div\ \ldots\ -3\quad -2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\ \ldots$$

Như vậy, các phép nhân, chia lấy lũy thừa, khai căn các số hạng của cấp số nhân có thể thay thế bởi các phép cộng, trừ, nhân, chia các số hạng tương ứng của cấp số cộng. Thí dụ: Việc tính tích $\frac{1}{8} \cdot 32$ có thể thay bởi việc tính tổng $-3 + 5 = 2$ (số hạng của cấp số nhân, tương ứng với số hạng 2 trong cấp số cộng, là 4, ta thấy $\frac{1}{8} \cdot 32 = 4$); việc tính thương $16 : \frac{1}{4}$ có thể thay bởi việc tính hiệu $4 - (-2) = 6$ (số hạng của cấp số nhân, tương ứng với số hạng 6 trong cấp số cộng, là 64, ta thấy $16 : \frac{1}{4} = 64$); tương tự, việc tính lũy thừa 4^3 có thể thay bởi việc tính tích $2 \times 3 = 6$, và ta thấy $4^3 = 64$; việc tính căn $\sqrt[3]{64}$ có thể thay bởi việc tính thương $6 : 3 = 2$, và ta thấy $\sqrt[3]{64} = 4$. Tuy nhiên. Stiphen cũng không tiến thêm nữa để xây dựng các bảng tính. Trong cuốn sách «Số học đại cương» sau khi xét mối quan hệ giữa cấp số nhân và cấp số cộng đã nêu Stiphen kết luận: «Có thể viết cả một cuốn sách về các tính chất đáng chú ý của các dãy số, nhưng tôi chỉ xin dừng ở đây và nhắm mắt đi qua».

Nhưng yêu cầu của thực tiễn cuộc sống và của các khoa học đang phát triển nhanh như thiên văn học, cơ học đã đòi hỏi các nhà bác học, các nhà tính toán phải tìm tòi các con đường đơn giản hóa quá trình tính toán phức tạp để tiết kiệm thời gian và sức lực con người. Vài chục năm sau sự ra đời của cuốn «Số học đại cương», một kỹ sư người Hà Lan Ximông Xtêvin (1548 – 1620), người đầu tiên ở Châu Âu sử dụng số thập phân, đã cho xuất bản bảng lãi kép, tức là bảng giá trị của biểu thức $(1 + r)^n$ với các giá trị tự nhiên khác nhau của n và các giá trị khác nhau của r : $r = 0{,}01$; $0{,}02$; $0{,}03$; $0{,}04$,... Để có khái niệm về lãi kép, ta giả sử rằng chúng ta gửi vào quỹ tiết kiệm 1 đồng trong n năm, với lãi suất hàng năm là p%. Cuối năm thứ nhất, vốn 1 đồng và lãi $p/100$ đồng, cộng lại là $(1 + p/100)$ đồng. Cứ mỗi đầu năm, gửi 1 đồng thì cuối năm có $(1 + p/100)$ đồng, và gửi a đồng thì cuối năm có $a(1 + p/100)$ đồng. Như vậy, số tiền $(1 + p/100)$ đồng trong quỹ tiết kiệm gửi vào đầu năm thứ hai thì đến cuối năm thứ hai thành $(1+p/100).(1+p/100)$ đồng, tức là $(1+p/100)^2$ đồng. Tiếp tục lý luận như vậy, đến cuối năm thứ n, trong quỹ tiết kiệm chúng ta sẽ có $(1+p/100)$ đồng, hay $(1+r)^n$ đồng với $r = \frac{p}{100}$. Ta thấy xuất hiện cấp số nhân sau đây:

$$\div 1 \quad (1+r) \quad (1+r)^2 \quad (1+r)^3 \quad \ldots \quad (1+r)^n$$

Rất có thể là việc biết các bảng như vậy đã thúc đẩy một nhà tính toán xuất sắc là Iốpxta Buốcghi người Thụy Sĩ sáng tạo ra các bảng tính có thể sử dụng được trong nhiều lĩnh vực chứ không chỉ trong lĩnh vực thương mại — tài chính như bảng tính của Xtêvin. Iốpxta Buốcghi (1552–1632) là một người thợ đồng hồ tinh xảo, một người thợ khéo về các dụng cụ thiên văn. Buốcghi tuy không có một học vấn toán học cao, nhưng là một người có tài năng độc đáo, rất kiên trì và nhiều nghị lực trong lao động sáng tạo. Trong việc làm các dụng cụ thiên văn và giúp các nhà thiên văn, Buốcghi phải thực hiện nhiều tính toán phức tạp. Các khó khăn gặp phải trong tính toán đã dẫn Buốcghi đến chỗ tìm cách thực hiện những tư tưởng do Stiphen đề xuất.

Các cấp số Stiphen nêu lên có dạng:

$$\div 1 \quad 1+a \quad (1+a)^2 \quad (1+a)^3 \quad (1+a)^4 \qquad (1)$$
$$\div 0 \quad a \quad 2a \quad 3a \quad 4a \qquad (2)$$

với $a = 1$. Để có thể sử dụng các cấp số đó vào việc đơn giản hóa sự tính toán cần phải thu hẹp các khoảng giữa hai số hạng liên tiếp của chúng. Việc này có thể thực hiện bằng cách bổ sung vào cấp số nhân những số trung bình nhân của hai số hạng liên tiếp và vào cấp số cộng những số trung bình cộng của hai số hạng liên tiếp tương ứng. Thí dụ trong các cấp số của Stiphen ta bổ sung như sau:

$$\div 1 \quad \sqrt{1.2} \quad 2 \quad \sqrt{2.4} \quad 4 \quad \sqrt{4.8} \quad 8 \quad \sqrt{8.16} \quad 16$$
$$\div 0 \quad (0+1)/2 \quad 1 \quad (1+2)/2 \quad 2 \quad (2+3)/2 \quad 3 \quad (3+4)/2 \quad 4$$

Việc bổ sung như trên có thể kéo dài mãi nếu cần thiết. Để cho hai số hạng liên tiếp của các cấp số gần nhau Buốcghi chọn công bội q không phải là 2 như trong cấp số nhân (1) của Stiphen mà là $q = 1 + 0{,}0001 = 1{,}0001$. Như vậy, công sai a của cấp số cộng (1) không phải là 1 nữa mà là $a = 0{,}0001$. Thay a bởi 0,0001 vào các cấp số (1), (2) thì được cấp số nhân và cấp số cộng có các số hạng rất gần nhau sau đây:

Biết số hạng a_n của cấp số nhân ta tính số hạng a_{n+1} của cấp số nhân bằng cách lấy a_n nhân với công bội 1,0001 và làm như sau:

$$a_{n+1} = a_n \times 1{,}0001 = a_n + 0{,}0001a_n$$

Thí dụ: $a_1 = 1{,}00010000$
$a_2 = 1{,}00010000 + 0{,}00010001 = 1{,}00020001$
$a_3 = 1{,}00020001 + 0{,}00010002 = 1{,}00030003$ v.v...

Cấp số nhân		Cấp số cộng
1	= 1,000 000 00	0,0000
1 + 0,0001	= 1,000 100 00	0,0001
$(1+0{,}0001)^2$	= 1,000 200 01	0,0002
$(1+0{,}0001)^3$	= 1,000 300 03	0,0003
$(1+1{,}0001)^*$	= 1,000 400 06	0,0004
....	....	....
$(1+0{,}0001)^{500}$	= 1,051 261 07	0,0500
$(1+0{,}0001)^{1000}$	= 2,718 145 93	1,0000

Trên nguyên tắc đó Buốcghi đã thành lập bảng tính được xuất bản năm 1620 dưới đầu đề: «Bảng các cấp số cộng và nhân» vì trong thời kỳ đó ở Châu Âu các nhà toán học mới bắt đầu sử dụng số thập phân cho nên để tránh số thập phân trong «bảng các cấp số cộng và nhân» Buốcghi đã tăng các số hạng của cấp số nhân lên 100000000 lần và của cấp số cộng lên 100000 lần như sau:

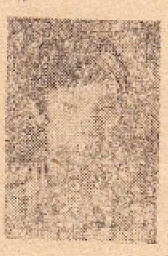
Cấp số nhân	Cấp số cộng
100 000 000	0
100 010 000	10
100 020 010	20
....	....

Để tạo nên bảng tính của mình Buốcghi đã phải lao động trong 8 năm. Tại sao phải một thời gian dài như vậy? Vì để tính các số hạng của cấp số nhân trong bảng Buốcghi đã phải thực hiện hơn 230000000 phép tính!

Đồng thời với Buốcghi và độc lập với Buốcghi nhà toán học Nêpơ (1550 – 1617) ở Écốt, cũng phát triển tư tưởng của Stiphen, đã xét mối quan hệ giữa các số hạng của một cấp số nhân với các số hạng tương ứng của một cấp số cộng. Số hạng của cấp số cộng Nêpơ gọi là *lôgarit* của số hạng tương ứng trong cấp số nhân. Như vậy, trong bảng của Stiphen lôgarit của 2 là 1 của 8 là 3, của 1/4 là –2 còn trong bảng của Buốcghi lôgarit của 271.814.593 là 100000. Thuật ngữ «lôgarit» đã được các nhà toán học sau này sử dụng và vẫn giữ ý nghĩa đó cho đến ngày nay. Nêpơ đã lấy công bội của cấp số nhân là $(1 + 0{,}0000001)$. Nêpơ đã tính toán trong 20 năm và cho ra đời vào năm 1614 bảng tính của mình dưới đầu đề «Mô tả bảng lôgarit kỳ lạ» với những điều giải thích tỉ mỉ về cách sử dụng cơ số của lôgarit là số hạng của cấp số nhân có lôgarit bằng 1. Như vậy, cơ số của lôgarit trong bảng của Stiphen là 2, trong bảng của Nêpơ là $(1 + 0{,}0000001)^{10000000}$.

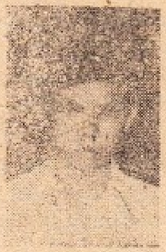
Bảng lôgarit thập phân với cơ số 10 xuất hiện năm 1620, do một nhà toán học người Anh là Hăngri Bơrích (1556 – 1630), bạn của Nêpơ lập nên. Đó là bảng lôgarit thập phân 14 chữ số của các số từ 1 đến 20000 và từ 90000 đến 100000. Công trình do Bơrich bắt đầu được một nhà toán học người Hà Lan là Anđrian Blắc tiếp tục và hoàn thiện. Bơrich cho ra đời vào năm 1628 bảng lôgarit thập phân 10 chữ số của các số từ 1 đến 100000.

Như vậy trong khoảng thời gian một vài chục năm ở các nước khác nhau các nhà toán học, kỹ thuật khác nhau đã sáng tạo ra một phương tiện tính toán mới có hiệu quả dưới dạng các bảng lôgarit. Sự lao động kiên trì trong nhiều năm để sáng tạo ra các bảng lôgarit đã được các nhà toán học đánh giá rất cao. Nhà toán học kiêm thiên văn học nổi tiếng Laplaxơ người Pháp nêu rằng sự phát minh ra lôgarit đã kéo dài đời sống của con người, với ý nghĩa là đời sống này không phải tính bằng số năm đã sống, mà tính bằng số công trình đã làm được trong đời sống đó!


1


2


3


4


5

Ảnh trên: Các bạn đoạt giải ba

Lớp 10: **1. Nguyễn Thiều Dương**, **2. Trần Quân**; **3. Lâm Tùng Giang**;
Lớp 11: **4. Lê Đức Tuấn**; Lớp 12: **5. Nguyễn Tiến Nam**

DANH SÁCH CÁC BẠN THAM GIA CUỘC THI GIẢI TOÁN «CHÀO MỪNG CÁC NGÀY LỄ LỚN TRONG NĂM 1985»

NGUYỄN Tiến Dũng (A), Lê Thành Nam, Đặng Vũ Sơn, Phùng Hồ Hải, Nguyễn Thế Cường, Nguyễn Tuấn Trung, Hoàng Đình Chí, Nguyễn Tuấn Minh, Đặng Khánh Toàn, Nguyễn chí Thành, Trần Kim Hoa, Vũ Ngọc Phan, Trần Nhật Lệ, Vũ Ngọc Vinh, Lương Việt Hà, Nguyễn Hữu Tuấn, Vũ Trọng Quế, Nguyễn Quảng Cường, Cao Vi Ba, Bùi Nhật Quang (11 và 10 CT đại học Tổng hợp Hà Nội); Trần Hoàng Sơn, Nguyễn Xuân Hà, Ngô Hoàng Huy, Nguyễn Quang Thái, Nguyễn Phương Tuấn, Hà Anh Vũ, Phạm Việt Dũng (11 và 12 CT đại học sư phạm Hà Nội I). Quang Phú, Trần Đức Trọng, Nguyễn Hữu Tuấn, Lê Bá Toàn, Mai Huy Khôi, Nguyễn Trọng Tộ, Lê Văn Dục, Nguyễn Tuấn Nam, Lê Văn Thành, Trần thị Bích Thủy, Lê Quang Khọa, Trần Văn Thắng, Nguyễn Văn Quang (10T Trường phổ thông trung học Lam Sơn Thanh Hóa); Nguyễn Ngọc Văn Khoa, Lâm Tùng Giang, Nguyễn Lê Tuấn, Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Thanh Sơn, Trần Đình Nghĩa, Trần Quân, Nguyễn Đình Nguyên (10, 11 và 12 PTTH Phan Châu Trinh, Đà Nẵng); Nguyễn Quang Tiến, Hồ Thăng Thu (11/1 PTTH Hoàng Hoa Thám, Đà Nẵng): Phạm Triều Dương, Huỳnh Minh Vũ, Hoàng Hương Tiến, Trương Quỳnh Hòa, Hoàng Như Hợi (10 I và 11 I Chu Văn An, Hà Nội); Nguyễn Hải Vinh (10A, PTTH Tây Sơn Hà Nội); Vũ Quý Dương (H_2 Khoa Đông-Âu ĐH NN Hà Nội) (*còn nữa*).

NHIỆT LIỆT CHÀO MỪNG NGÀY NHÀ BÁO VIỆT NAM 21 THÁNG 6

In 15.000 số tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ – Hà Nội
Số in 114/85. In xong và gửi lưu chiểu tháng 7-1985

Chỉ số 11884 **Giá: 2đồng**