TOÁN HỌC Tuổi trẻ

VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

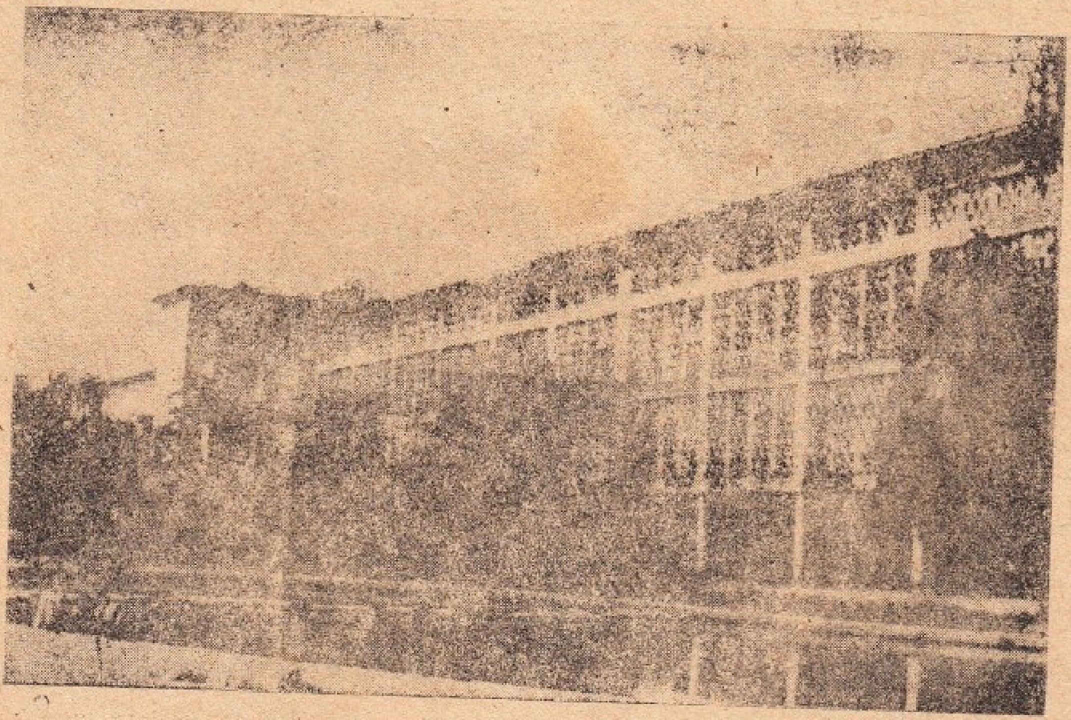
2
1985

Số 142

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội
Dây nói: 52825



Ảnh CẦM PHONG

10 NĂM VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
1975 — 1985

Nói chuyện với bạn trẻ yêu toán

TÍCH NGOÀI CỦA HAI VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG

NGUYỄN THÚC HÀO

1. Trong nhiều số của báo Toán học và Tuổi trẻ, các bạn đọc đã được giới thiệu về tích vô hướng của hai vectơ. Đó là một hàm số thực của hai vectơ, tuyến tính và đối xứng, còn gọi là một dạng song tuyến tính đối xứng. Cụ thể là với hai vectơ tùy ý $\vec{x}, \vec{y}$, người ta cho tương ứng một số thực, ký hiệu là $(\vec{x}, \vec{y})$ và được gọi là *tích vô hướng*, với các tính chất sau đây, được thỏa mãn với mọi vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ và mọi số thực α:

$$\left.\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) &= (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z}) \\ (\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) &= (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{z}, \vec{y}) \\ (\alpha \vec{x}, \vec{y}) &= (\vec{x}, \alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}) \quad (2)$$

$$\vec{x}^2 = (\vec{x}, \vec{x}) > 0, \ \forall \ \vec{x} \neq 0 \quad (3)$$

Với tích vô hướng và với giả thiết (3), người ta định nghĩa *độ dài, góc* và xây dựng hình học ơclit hoàn toàn chỉ bằng phép toán đại số vectơ.

2. Về phương diện thuần túy đại số, thì một dạng song tuyến đối xứng được xác định nếu ta cho trước giá trị của nó với hai vectơ khác không và không đồng phương $\vec{u}, \vec{v}$. Cụ thể là nếu ta cho trước các giá trị:

$$\vec{u}^2 = (\vec{u}, \vec{u}) = a > 0, \ (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u}) = b,$$
$$\vec{v}^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = c > 0$$

Quả vậy, mọi cặp vectơ khác $\vec{x}, \vec{y}$ có thể phân tích theo $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{x} = x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}$$
$$\vec{y} = y_1 \vec{u} + y_2 \vec{v}$$

và khi đó:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v}, \ y_1 \vec{u} + y_2 \vec{v})$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 (\vec{u}, \vec{u}) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)(\vec{u}, \vec{v}) + x_2 y_2 (\vec{v}, \vec{v})$$

tức:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 a + (x_1 y_2 + x_2 y_1) b + x_2 y_2 c \quad (4)$$

Như vậy là muốn xác định tích vô hướng, phải cho 3 số thực là $a > 0$, $c > 0$ và b.

Do điều kiện (3) và biểu thức sau đây suy ra từ (4):

$$\vec{x}^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 > 0. \quad (5)$$

Cho nên ta phải có điều kiện

$$ac - b^2 > 0. \quad (6)$$

3. Để có được ý nghĩa hình học của tích vô hướng, ta lấy quy ước rằng nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ đơn vị (tức $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$) và *vuông góc với nhau* thì:

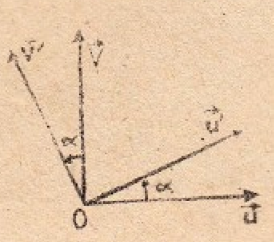
$$\vec{u}^2 = (\vec{u}, \vec{u}) = 1, \ (\vec{u}, \vec{v}) = 0, \ \vec{v}^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 1$$

Để chứng minh rằng quy ước như trên có hiệu lực với mọi cặp vectơ đơn vị vuông góc, ta hãy lấy thêm cặp $\vec{u'}, \vec{v'}$ đơn vị và vuông góc với nhau. Ta dễ dàng thấy rằng (hình 1):

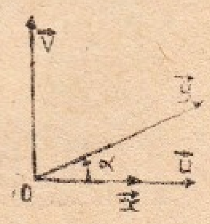
$$\left.\begin{aligned} \vec{u'} &= \cos\alpha \cdot \vec{u} + \sin\alpha \cdot \vec{v} \\ \vec{v'} &= -\sin\alpha \cdot \vec{u} + \cos\alpha \cdot \vec{v} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

trong đó α là góc của hai vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$. Ta tính dễ dàng và thấy rằng nếu $\vec{u}^2 = 1$, $\vec{v}^2 = 1$, $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, thì ta cũng có:

$$\vec{u'}^2 = 1, \ \vec{v'}^2 = 1, \ (\vec{u'}, \vec{v'}) = 0$$



Hình 1



Hình 2

Bây giờ ta hãy lấy hai vectơ tùy ý $\vec{x}, \vec{y}$. Ta chọn vectơ đơn vị $\vec{u}$, cùng hướng với $\vec{x}$, còn vectơ đơn vị $\vec{v}$ thì vuông góc với $\vec{u}$, sao cho góc của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bằng $+\pi/2$

Ta có:

$$\vec{x} = |\vec{x}| \cdot \vec{u}$$

$$\vec{y} = |\vec{y}|\cos\alpha \cdot \vec{u} + |\vec{y}|\sin\alpha \cdot \vec{v}$$

Do đó

$$(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}| . |\vec{y}|\cos\alpha$$

Đẳng thức trên cho ta ý nghĩa hình học của tích vô hướng. Và cũng chính đẳng thức ấy, ngược lại, có thể lấy làm định nghĩa cho góc hình học α của hai vectơ (tức của hai tia).

Cũng theo (7), điều kiện cần và đủ cho hai vectơ khác không $\vec{x}, \vec{y}$ vuông góc với nhau là:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

4. Bây giờ xin giới thiệu với bạn đọc một hàm số tuyến tính khác của 2 vectơ tùy ý, không đối xứng như tích vô hướng, mà lại là *phản xứng*, tức là giá trị của nó đổi dấu (không đổi giá trị tuyệt đối) khi ta hoán vị hai vectơ. Hàm số này được gọi là một *dạng ngoài* của hai vectơ. Ta sẽ gọi nó là *tích ngoài* của hai vectơ, ký hiệu $[\vec{x}, \vec{y}]$, với $\vec{x}, \vec{y}$ là những vectơ tùy ý. Với mọi vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ và với mọi số thực α, ta sẽ có như với tích vô hướng:

$$\left.\begin{array}{l} [\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{x}, \vec{z}] \\ [\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}] = [\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{z}, \vec{y}] \\ [\alpha\vec{x}, \vec{y}] = [\vec{x}, \alpha\vec{y}] = \alpha[\vec{x}, \vec{y}] \end{array}\right\} \quad (9)$$

Nhưng, khác với tích vô hướng:

$$[\vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{y}, \vec{x}] \quad (10)$$

và tất nhiên là

$$[\vec{x}, \vec{x}] = 0 \quad (11)$$

Tích ngoài, định nghĩa như trên, còn gọi là *tích lệch*, hoặc *tích thay dấu*.

5. Cũng như với tích vô hướng, ta hãy chọn hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ nào đó, khác không và không đồng phương. Tất nhiên:

$$[\vec{u}, \vec{u}] = 0, \ [\vec{v}, \vec{v}] = 0$$

Còn $[\vec{u}, \vec{v}]$, ta đặt

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \delta \neq 0$$

δ là một số thực *khác không*, chọn tùy ý, ứng với cặp $[\vec{u}, \vec{v}]$. Khi đó, hàm $[\vec{x}, \vec{y}]$ là hoàn toàn xác định. Quả vậy, từ:

$$\vec{x} = x_1\vec{u} + x_2\vec{v}$$

$$\vec{y} = y_1\vec{u} + y_2\vec{v}$$

và (9), (10), (11) ta suy ra:

$$[\vec{x}, \vec{y}] = [x_1\vec{u} + x_2\vec{v}, y_1\vec{u} + y_2\vec{v}]$$

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (x_1y_2 - x_2y_1)[\vec{u}, \vec{v}]$$

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (x_1y_2 - x_2y_1)\delta \quad (12)$$

Thế là đối với tích ngoài của hai vectơ trong mặt phẳng, chỉ cần cho giá trị $\delta \neq 0$ của nó với hai vectơ chọn tùy ý, khác không và không đồng phương, là đủ để xác định nó.

Một tính chất cơ bản của tích ngoài là:

Điều kiện cần và đủ cho hai vectơ $\vec{x} \neq 0$, $\vec{y} \neq 0$ đồng phương với nhau là:

$$[\vec{x}, \vec{y}] = 0$$

Mệnh đề trên suy ra dễ dàng từ (12).

6. Bây giờ để có được ý nghĩa hình học, ta qui ước rằng $\delta = +1$ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ là đơn vị và tạo thành một góc vuông theo chiều thuận, tức góc của $\vec{u}$ và $\vec{v} = +\pi/2$. Qui ước này có hiệu lực với mọi cặp vectơ như vậy.

Thực thế, mọi cặp vectơ $\vec{u'}, \vec{v'}$ đơn vị và vuông góc thuận có thể phân tích theo cặp $\vec{u}, \vec{v}$ như đã làm ở trên (7). Và ta thấy rằng

$$[\vec{u}, \vec{v}] = +1 \Rightarrow [\vec{u'}, \vec{v'}] = +1$$

Với hai vectơ bất kỳ $\vec{x}, \vec{y}$, ta chọn $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{x}$ (xem hình 2), thì ta có

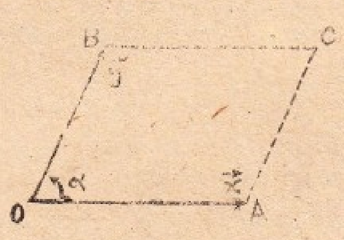
$$\vec{x} = |\vec{x}|\, \vec{u}$$

$$\vec{y} = |\vec{y}|\cos\alpha . \vec{u} + |\vec{y}|\sin\alpha . \vec{v}$$

Vậy:

$$[\vec{x}, \vec{y}] = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\sin\alpha$$

Đó là ý nghĩa hình học của $[\vec{x}, \vec{y}]$. Nếu chỉ lấy giá trị tuyệt đối, thì $[\vec{x}, \vec{y}]$ bằng diện tích của hình bình hành vẽ với 2 vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ làm cạnh.



Hình 3

Nếu ta quy ước rằng diện tích mang dấu + nếu góc $\alpha = (\vec{x}, \vec{y}) > 0$ và mang dấu − nếu $\alpha < 0$ thì khi đó $[\vec{x}, \vec{y}]$ là *diện tích có hướng* của hình bình hành.

7. Tóm lại, trong hình học phẳng, với hai vectơ tùy ý $\vec{x}$, $\vec{y}$, ta xác định tích vô hướng và tích ngoài là:

$$\left.\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{y}) &= |\vec{x}|\,|\vec{y}| \cos\alpha \\ [\vec{x}, \vec{y}] &= |\vec{x}|\,|\vec{y}| \sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

và từ hai biểu thức trên, ta suy ra:

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 + [\vec{x}, \vec{y}]^2 = \vec{x}^2 \cdot \vec{y}^2 \qquad (15)$$

Đẳng thức này cho thấy quan hệ giữa tích ngoài và tích vô hướng.

Hai tích vô hướng và tích ngoài đều có ứng dụng rộng rãi trong hình học vectơ phẳng. Nói chung, khi người ta chỉ xét đến những tính chất như điểm thẳng hàng, đường thẳng đồng qui, đường thẳng song song, đoạn thẳng chia theo tỷ lệ, tỷ số diện tích, tức là những tính chất gọi là tính chất afin, thì người ta chỉ cần dùng đến tích ngoài mà thôi. Còn khi người ta xét cả đến những tính chất có liên quan đến *độ dài* và *góc* thì người ta cần dùng đến tích vô hướng, mà đôi khi cũng nên dùng cả tích ngoài nữa.

DÙNG TRẬT TỰ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN CÓ CÁC YẾU TỐ BÌNH ĐẲNG

VŨ QUANG SỬU

Khi làm toán, chắc các bạn gặp không ít những bài toán mà các yếu tố tham gia trong đó bình đẳng với nhau, nghĩa là nếu ta trao đổi các yếu tố đó cho nhau thì không làm thay đổi bài toán. Chẳng hạn các bài toán: « Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$ », hay là « Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho $xyz = 9 + x + y + z$ »... là những bài toán có tính chất vừa nêu.

Để giải những bài toán dạng như thế có thể có nhiều cách khác nhau, tùy thuộc vào từng bài cụ thể. Trong bài báo nhỏ này tôi muốn giới thiệu với các bạn một phương pháp giải các bài toán trên.

Ta biết rằng, nếu cho n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$, thì bao giờ ta cũng có thể sắp chúng theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần. Cho nên nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tham gia vào một bài toán bình đẳng với nhau, thì bao giờ ta cũng có thể giải bài toán với giả thiết $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ hoặc $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$.

Trước hết ta giải hai bài toán vừa nêu ở trên.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c sao cho $abc < ab + bc + ca$.*

Giải: Vì các số a, b, c bình đẳng với nhau nên không mất tính tổng quát ta giả thiết $a \leqslant b \leqslant c$.

Suy ra $ab + bc + ca \leqslant 3bc$.

Nếu $a \geqslant 3 \Rightarrow 3bc \leqslant abc \Rightarrow ab + bc + ca \leqslant acb$, mâu thuẫn với bài ra. Vậy $a = 2$ (vì a nguyên tố). Do đó:

$2bc < 2b + bc + 2c \Rightarrow 1/c + 1/b > 1/2 \Rightarrow b < 5$

* $b = 2 \Rightarrow c$ nguyên tố bất kỳ.

* $b = 3 \Rightarrow c = 3$ hoặc $c = 5$.

Tóm lại nghiệm của bài toán là:

$a = 2$, $b = 2$, $c = p$ nguyên tố và các hoán vị, hoặc $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$ và các hoán vị.

Bài toán 2. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z sao cho $xyz = 9 + x + y + z$.*

Giải: Do x, y, z tham gia vào bài toán bình đẳng với nhau nên, không mất tính tổng quát ta giả thiết $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$. Ta có các khả năng sau:

1. Cả ba số bằng 1: không thỏa mãn phương trình.

2. $x > 1$, $y = z = 1 \Rightarrow x = 11 + x$: vô lý.

3. $x \geqslant y > 1$, $z = 1 \Rightarrow xy = 10 + x + y$ hay $11 = (x - 1)(y - 1)$, vì $x - 1 \geqslant y - 1$ nên $x - 1 = 11$, $y - 1 = 1$ và $x = 12$, $y = 2$, $z = 1$.

4. $x \geqslant y \geqslant z > 1$.

Đặt $u = x - 2$, $v = y - 2$, $w = z - 2$

$\Rightarrow u \geqslant v \geqslant w \geqslant 0$ và ta có:

$15 + u + v + w = (u + 2)(v + 2)(w + 2) =$

$= uvw + 2(uv + wv + wu) + 4(u + v + w) + 8$

Suy ra: $7 = uvw + 2(uv + vw + wu) + 3(u + v + w)$ (*)

Nếu $w > 0$ thì vế phải của (*) lớn hơn hoặc bằng 16, nên đẳng thức (*) không xảy ra. Nếu $w = 0 \Rightarrow 7 = 2uv + 3(u + v)$ và ta lại xét 2 trường hợp:

$v = 0 \Rightarrow 7 = 3u$ không thể xảy ra.

$v > 0 \Rightarrow u \geqslant v \geqslant 1 \Rightarrow 2uv + 3(u + v) \geqslant 8$: vô lý.

Tóm lại nghiệm của phương trình là:

$x = 12$, $y = 2$, $z = 1$ và các hoán vị.

Bài toán 3. *Tìm 12 số nguyên dương, sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.*

Giải: Gọi các số phải tìm là $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$. Rõ ràng $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ bình đẳng với nhau nên ta giả thiết $x_1 \geqslant x_2 \ldots \geqslant x_{12} \geqslant 1$ (1)

Ta giải phương trình

$$x_1 x_2 \ldots x_{12} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} \quad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow x_1 x_2 \ldots x_{12} \leqslant 12 x_1$

hay $$x_2 \ldots x_{12} \leqslant 12 \quad (3)$$

Vì $2^4 = 16 > 12$ nên từ (3) ta thấy trong 11 số $x_2, x_3, \ldots, x_{12}$ không thể có hơn 3 số lớn hơn 1. Vậy trong 12 số $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ không thể có hơn 4 số lớn hơn 1. Do đó chỉ có thể xảy ra 5 trường hợp:

1. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{12} = 1$, không thỏa mãn phương trình (2).

2. $x_1 > x_2 = x_3 = \ldots = x_{12} = 1$, từ (2) suy ra: $x_1 = 11 + x_1 \Rightarrow 11 = 0$ nên chúng không thể thỏa mãn (2).

3. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 = x_4 = \ldots = x_{12} = 1$, suy ra: $x_1 x_2 = 10 + x_1 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 11 = 11.1$

Vì $x_1 - 1 \geqslant x_2 - 1 \Rightarrow x_1 - 1 = 11$, $x_2 - 1 = 1$. Từ đó suy ra

$$x_1 = 12,\ x_2 = 2 \text{ và } x_3 = x_4 = \ldots = x_{12} = 1.$$

4. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 > x_4 = \ldots = x_{12} = 1$, từ (2) suy ra $x_1 x_2 x_3 = 9 + x_1 + x_2 + x_3$.

Theo bài toán 2, ta có $x_1 = 12$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$: không thỏa mãn vì $x_3 > 1$.

5. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 > x_5 = \ldots = x_{12} = 1$. Từ (2) suy ra $x_1 x_2 x_3 x_4 = 8 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ (4)

Đặt $y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 - 2$, suy ra $y_i \geqslant 0$ $\forall i = 1, 2, 3, 4$ và ta có (4) tương đương với

$$16 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = (y_1+2)(y_2+2)(y_3+2)(y_4+2)$$
$$= 16 + 8(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \ldots$$

hay

$$0 = 7(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \ldots$$

Suy ra

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$$

Tóm lại các số cần tìm là

$x_1 = 12$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = x_5 = \ldots = x_{12} = 1$

hoặc

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$; $x_5 = x_6 = \ldots = x_{12} = 1$

Bài toán 4. *Cho a_1, a_2, a_3, a_4 là 4 số thực đôi một khác nhau. Giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} |a_1 - a_2| x_2 + |a_1 - a_3| x_3 + |a_1 - a_4| x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1| x_1 + |a_2 - a_3| x_3 + |a_2 - a_4| x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1| x_1 + |a_3 - a_2| x_2 + |a_3 - a_4| x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1| x_1 + |a_4 - a_2| x_2 + |a_4 - a_3| x_3 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải: Ta thấy rằng 4 số đôi một khác nhau a_1, a_2, a_3, a_4 tham gia vào bài toán bình đẳng với nhau, nên không mất tính tổng quát, ta giả thiết

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

Khi đó hệ (1) tương đương với:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2) x_2 + (a_1 - a_3) x_3 + (a_1 - a_4) x_4 = 1 \ (a) \\ (a_1 - a_2) x_1 + (a_2 - a_3) x_3 + (a_2 - a_4) x_4 = 1 \ (b) \\ (a_1 - a_3) x_1 + (a_2 - a_3) x_2 + (a_3 - a_4) x_4 = 1 \ (c) \\ (a_1 - a_4) x_1 + (a_2 - a_4) x_2 + (a_3 - a_4) x_3 = 1 \ (d) \end{cases} \quad (2)$$

Từ hệ (2), thực hiện các phép tính (a) − (b); (b) − (c); (c) − (d) ta được hệ tương đương:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0 \\ (a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0 \\ (a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0 \\ (a_1 - a_4) x_1 + (a_2 - a_4) x_2 + (a_3 - a_4) x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ (a') \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \ (b') \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \ (c') \\ (a_1 - a_4) x_1 + (a_2 - a_4) x_2 + (a_3 - a_4) x_3 = 1 \ (d') \end{cases}$$

Lấy $(a') + (c')$ được $x_1 = x_4$; $(a') + (b')$ được $x_1 = x_3 + x_4$ suy ra $x_3 = 0$ $(b') + (c')$ được $x_1 + x_2 = x_4$ suy ra $x_2 = 0$.

Thay $x_2 = x_3 = 0$ vào phương trình (d') suy ra

$$x_1 = x_4 = 1/(a_1 - a_4)$$

Vậy với $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ thì nghiệm của hệ là:

$$x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = x_4 = 1/(a_1 - a_4)$$

Chú ý rằng nếu a_1, a_2, a_3, a_4 có một thứ tự khác thì nghiệm cũng có một thứ tự tương ứng. Chẳng hạn nếu $a_2 > a_4 > a_1 > a_3$

thì: $x_1 = x_4 = 0$ và $x_2 = x_3 = 1/(a_2 - a_3)$

Trên đây, ta đã xét một số bài toán về giải phương trình. Bây giờ ta xét một số bài toán loại khác.

Bài toán 5. *Các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện gì, để với mọi số tự nhiên n, các số a^n, b^n, c^n là độ dài các cạnh của một tam giác?*

Giải: Không mất tính chất tổng quát, ta giả thiết rằng $a \geqslant c \geqslant 0$

1) Nếu $a > b \geqslant c > 0$ thì $1 > b/a \geqslant c/a$. Vì các số b/a, c/a đều nhỏ hơn 1 nên tồn tại số tự nhiên n đủ lớn sao cho $(b/a)^n + (c/a)^n < 1$ khi đó $b^n + c^n < a^n$ nên với n đó, a^n, b^n, c^n không phải là 3 cạnh của một tam giác.

2) Nếu $a = b \geqslant c > 0$ thì $a^n = b^n \geqslant c^n > 0$ với mọi n số tự nhiên và rõ ràng chúng là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Vì vậy điều kiện cần tìm của a, b, c là hai số lớn nhất phải bằng nhau.

Bài toán 6. *Chứng minh rằng trong 7 đoạn thẳng, mỗi đoạn có độ dài l tùy ý, với $1 \leqslant l < 13$, có thể chọn ra 3 đoạn để làm 3 cạnh của một tam giác. Chứng tỏ rằng bài toán không đúng nếu chỉ dùng 6 đoạn thẳng.*

Giải: Dễ chứng minh tính chất sau đây: nếu các số dương a, b, c thỏa mãn $a \geqslant b \geqslant c$ thì chúng là độ dài 3 cạnh của tam giác khi và chỉ khi $a < b + c$.

Ta áp dụng tính chất trên để giải bài toán 6. Giả sử 7 đoạn đã cho có độ dài tương ứng là $l_1, l_2, \ldots l_7$. Không mất tính chất tổng quát ta giả thiết

$$1 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_7 < 13$$

Nếu không chọn ra được 3 đoạn nào làm 3 cạnh của một tam giác thì:

$l_3 \geqslant l_1 + l_2 \geqslant 1 + 1 = 2$; $l_4 \geqslant l_2 + l_3 \geqslant 1 + 2 = 3$, $l_5 \geqslant l_3 + l_4 \geqslant 2 + 3 = 5$; $l_6 \geqslant l_4 + l_5 \geqslant 3 + 5 = 8$, $l_7 \geqslant l_5 + l_6 \geqslant 5 + 8 = 13$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $l_7 < 13$.

Nếu chỉ dùng 6 đoạn thẳng thì bài toán không đúng, ví dụ lấy 6 đoạn có độ dài tương ứng là $l_1 = 1$, $l_2 = 1$, $l_3 = 2$, $l_4 = 3$, $l_5 = 5$, $l_6 = 8$.

Bài toán 7. *Biết rằng* $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1$

Chứng minh rằng, giá trị nhỏ nhất của $(a_i - a_j)^2$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant 5)$ *không thể vượt quá 1/10.*

Giải: Không mất tính tổng quát, ta giả thiết rằng $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_5$

Ta ký hiệu $\min\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant 5} |a_i - a_j| = x$, rõ ràng khi đó $\min\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant 5} (a_i - a_j)^2 = x^2$

Ta suy ra $a_{i+1} - a_i \geqslant x > 0$ (vì nếu $x = 0$ thì bài toán hiển nhiên đúng) với $i = 1, 2, 3, 4$.

Ta có $(a_j - a_i) = (a_j - a_{j-1}) + (a_{j-1} - a_{j-2}) + \ldots + (a_{i+1} - a_i) \geqslant (j - i)x$ với $j > i$, từ đó suy ra

$$(a_j - a_i)^2 \geqslant (j - i)^2 x^2$$

Lấy tổng cả hai vế theo i, j ta có

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (j - i)^2 x^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (a_j - a_i)^2$$

Nhưng

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (j - i)^2 x^2 = x^2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (j - i)^2 = 50 x^2$$

và $$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} (a_j - a_i)^2 = 5 \sum_{i=1}^{5} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{5} a_i\right)^2 =$$

$$= 5 - \left(\sum_{i=1}^{5} a_i\right)^2 \leqslant 5$$

Vậy $50x^2 \leqslant 5$. Suy ra $x^2 \leqslant 1/10$ (đpcm)

Bài toán 8. *Cho 4 số thực khác nhau a, b, c, d. Biểu thức* $n(x, y, z, t) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - t)^2 + (t - x)^2$ *có thể nhận bao nhiêu giá trị khác nhau, nếu các biến số x, y, z, t biến thiên và là hoán vị của các số a, b, c, d? Với giá trị nào của x, y, z, t thì n nhận giá trị lớn nhất, nhỏ nhất?*

Giải: Các số a, b, c, d ở đây có vai trò bình đẳng nên ta giả thiết $a < b < c < d$.

Xét $n(x, y, z, t) + (x - z)^2 + (y - t)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - t)^2 + (t - x)^2 + (x - z)^2 + (y - t)^2$. biểu thức này bình đẳng đối với x, y, z, t nên nó là hằng số và bằng tổng bình phương tất cả các hiệu trong 4 số a, b, c, d: Cho nên $n(x, y, z, t) + (x - z)^2 + (y - t)^2 = k$ (không đổi)

hay $n(x, y, z, t) + (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2(xz + yt) = k$.

Mà $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ nên giá trị của $n(x, y, z, t)$ phụ thuộc vào giá trị của $xz + yt$. Giá trị $V = xz + yt$ phụ thuộc vào sự phân chia thành các cặp của 4 số: a, b, c, d. Rõ ràng chỉ có 3 cách sau:

$V_1 = ab + cd$, $V_2 = ac + bd$, $V_3 = ad + bc$.

Ta có $V_1 - V_2 = ab + cd - ac - bd = (b - c)(a - d) > 0$

$V_2 - V_3 = ac + bd - ad - bc = (a - b)(c - d) > 0$

Vậy $V_1 > V_2 > V_3$.

Cho nên $n(x, y, z, t)$ chỉ nhận 3 giá trị khác nhau.

$n(x, y, z, t)$ nhận giá trị lớn nhất khi $V = xz + yt$ nhận giá trị lớn nhất, mà V lớn nhất là $V_1 = ab + cd$.

Khi đó: $x = a$, $z = b$, $y = c$, $t = d$;

hoặc $x = c$, $z = d$, $y = a$, $t = b$;

hoặc $x = a$, $z = b$, $y = d$, $t = c$;

hoặc $x = d$, $z = c$, $y = a$, $t = b$;

hoặc $x = b$, $z = a$, $y = c$, $t = d$;

hoặc $x = c$, $z = d$, $y = b$, $t = a$;

hoặc $x = b$, $z = a$, $y = d$, $t = c$;

hoặc $x = d$, $z = c$, $y = b$, $t = a$.

Tóm lại có 8 hoán vị khác nhau làm cho $n(x, y, z, t)$ đạt giá trị lớn nhất. Với giá trị nhỏ nhất xét tương tự.

Cuối cùng xin gửi tới các bạn một số bài toán sau đây:

9. a) Tìm các số nguyên dương x, y, z sao cho

$$x + y + z = xyz$$

b) Tìm các số nguyên dương x, y, z, t sao cho $x + y + z + t = xyzt$.

10. Ba số dương x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1x_2x_3 > 1$ và $x_1 + x_2 + x_3 < 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$

Chứng minh rằng:

a) $x_i \neq 1$ với mọi $i = 1, 2, 3$

b) Trong 3 số x_1, x_2, x_3 có đúng 1 số bé hơn 1

11. a) Với giá trị nguyên nào của k thì tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$.

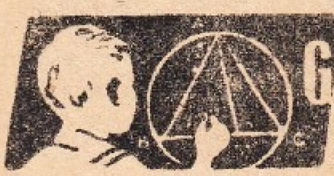
b) Tìm trong 1000 số đầu tiên tất cả các bộ ba số sao cho tổng các bình phương của chúng chia hết cho tích của chúng.

12. Chứng minh rằng, từ 25 số dương khác nhau có thể chọn ra hai số, sao cho các số còn lại không thể bằng tổng hoặc hiệu của hai số vừa chọn.

13. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_5) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_5) + \ldots + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2) \ldots (a_5 - a_4) \geqslant 0$$

Trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_5$ là các số thực bất kỳ



GIẢI BÀI kỳ trước

Bài 1/139. *Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho 1984 phân số sau đây là tối giản:*

$$1/(n^{1984} + 1984n + 3); \quad 2/(n^{1984} + 1984n + 4); \ldots$$
$$\ldots; 1984/(n^{1984} + 1984n + 1986).$$

Lời giải: Các phân số đã cho có dạng:
$k/(n^{1984} + 1984n + k + 2)$ với $k = \overline{1,1984}$.

Các phân số đó là tối giản khi và chỉ khi:
$(k, n^{1984} + 1984n + k + 2) = 1 \quad \forall k = \overline{1,1984}$
tương đương với

$$(k, n^{1984} + 1984n + 2) = 1 \quad \forall k = \overline{1,1984}.$$

Ta nhận thấy ngay rằng, với $n = 1$ thì $n^{1984} + 1984n + 2 = 1987$ là số nguyên tố, nên $(k, 1987) = 1$, $\forall k = \overline{1,1984}$. Như vậy giá trị $n = 1$ làm cho các phân số đã cho là tối giản và hơn nữa do 1 là số tự nhiên nhỏ nhất trong tập số tự nhiên nên $n = 1$ chính là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Các bạn Cao Vi Ba, Đặng Vũ Sơn (11 CT, ĐHTH Hà Nội); Đỗ Duy Khánh (11 CT, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang), Lâm Tùng Giang, Nguyễn Hồ Anh Nguyên, Trần Quân, Nguyễn Hùng Sơn (11 CT, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng); Hải Vinh (10A, Tây Sơn – Hà Nội); Nguyễn Hoài Vũ, Trần Duy Hinh (11B, 12C Trưng Vương, Qui Nhơn) và Phùng Xuân Anh (11 CT, Lam Sơn, Thanh Hóa) có lời giải tốt. Bạn Nguyễn Văn Quang (10CT, Lam Sơn, Thanh Hóa) còn chứng minh được điều khẳng định mạnh hơn: « $n = 1$ là số tự nhiên nhỏ nhất làm cho m phân số sau là tối giản:

$t/(n^m + m.n + (t-1) + k)$, $t = \overline{1,m}$, với $p = m + k$ là số nguyên tố ».

N.K.M.

Bài 2/139. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $x + y + z$, biết rằng x, y, z thỏa mãn phương trình.*

$$y^2 + yz + z^2 = 1 - 3x^2/2$$

Lời giải:

(Hải Vinh, 10A, PTTH Tây Sơn, Hà Nội)

$$y^2 + yz + z^2 = 1 - 3x^2/2 \Leftrightarrow 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 3x^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 + (x - z)^2 + (x - y)^2 = 2$$

Bởi vậy $(x + y + z)^2 \leqslant 2$ và đạt giá trị $(x + y + z)^2 = 2$ khi $x - z = 0$ và $x - y = 0$.

Vậy $x + y + z$ có giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ khi $x = y = z = \sqrt{2/3}$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\sqrt{2}$ khi $x = y = z = -\sqrt{2/3}$.

Nhận xét: Tất cả các lời giải gửi về đều đúng.

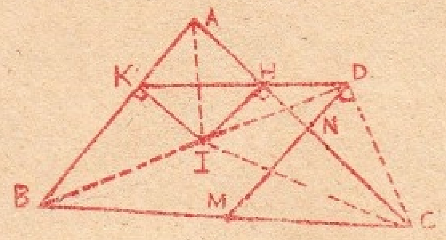
N.Q.T.

Bài 3/139: *Chứng minh rằng trong ΔABC giao điểm của đường phân giác $\widehat{ABC}$ với đường trung bình song song với AB, và các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp ΔABC với AB và AC nằm trên một đường thẳng.*

Lời giải: của Lâm Tùng Giang, 11CT, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng. Ta phân thành 2 trường hợp:

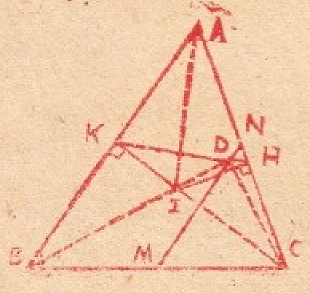
1) Phân giác của $\widehat{B}$ cắt đường trung bình MN tại D ngoài đoạn MN. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, H và K là các điểm tiếp xúc của

đường tròn nội tiếp với AC và AB. Khi đó $IH \perp AC$, $IK \perp AB$. Ta có: $\widehat{MDB} = \widehat{DBA} = \widehat{DBC}$ $\Rightarrow MD = BC/2$. Vậy ΔBDC vuông tại $D \Rightarrow$ Tứ giác $IHDC$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{DHC} = \widehat{DIC} = (\widehat{B} + \widehat{C})/2$ (1)



Ta cũng có $AH = AK \Rightarrow \widehat{AHK} = (\widehat{B} + \widehat{C})/2$ (2)
(1) và (2) cho ta thấy $\widehat{DHC} = \widehat{AHK}$. Vậy D, H, K thẳng hàng.

2) Điểm cắt D nằm trong đoạn MN;



Ta cũng có tam giác BDC vuông góc tại $D \Rightarrow IHDC$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó $\widehat{AHD} = \widehat{CID} = (\widehat{B} + \widehat{C})/2 = \widehat{AHK}$

Vậy D, H, K thẳng hàng.

Nhận xét. Bạn Trần An Việt, 11CT, Phan Bội Châu, Nghệ Tĩnh có lời giải tốt. Nhiều bài xét thiếu trường hợp. Đặc biệt hai bạn Phan Phương Đạt, 8H, PTCS Trưng Vương, Hà Nội và Đỗ Thanh Sơn, 8A, PTCS Bế Văn Đàn, Hà Nội có gửi lời giải.

N.Q.T.

Bài 4/139. *Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh BC, CA, AB. Giả sử: d_a là đường thẳng qua điểm giữa của PN và vuông góc với BC, d_b là đường thẳng qua điểm giữa của PM và vuông góc với CA, d_c là đường thẳng qua điểm giữa của MN và vuông góc với AB. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng qui.*

Lời giải: *Cách 1 (của Nguyễn Hồ Anh Nguyên, 11 Phan Châu Trinh Đà Nẵng).* Gọi D, E, F lần lượt là điểm giữa của NP, PM và MN. Dễ dàng chứng minh được $\Delta MNP \sim \Delta DEF$.

Từ đó $DE/MN = FD/PM$, $\widehat{EDF} = \widehat{NMP}$ (1)

Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Khi đó:

$OM \perp BC$, $ON \perp CA$ và $OP \perp AB$

Đồng thời do $d_a \perp BC$, $d_b \perp CA$ và $d_c \perp AB$ nên suy ra $OM // d_a$, $ON // d_b$ và $OP // d_c$.

Gọi K là giao điểm của d_a và d_b. Xét hai tam giác KDE và OMN ta thấy.

$DE // MN$

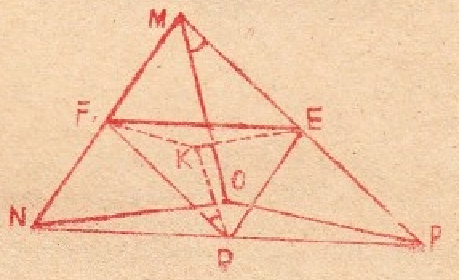
$EK // NO$ (do EK nằm trên d_b)

$KD // OM$ (do KD nằm trên d_a)

Suy ra: $\Delta KDE \sim \Delta OMN \Rightarrow DE/MN = KD/OM$, $\widehat{KDE} = \widehat{OMN}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $FD/PM = KD/OM$; $\widehat{KDF} = \widehat{OMP} \Rightarrow \Delta KDF \sim \Delta OMP$ (3)

Mặt khác, do $DF // MP$ và $KD // OM$ nên từ (3) suy ra $FK // PO$. Mà d_c là đường thẳng đi qua F và song song với OP nên suy ra FK nằm trên d_c. Điều này chứng tỏ d_a, d_b, d_c đồng qui. (đpcm).



Cách 2: (của Nguyễn Huy Toàn, Nguyễn Hoài Vũ, 10A và 11B Trưng Vương Quy Nhơn, Lâm Tùng Giang, 11CT Phan Chu Trinh Đà Nẵng).

Gọi O, G, Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, trọng tâm ΔMNP và điểm giữa của NP. Dễ thấy Q là ảnh của M qua phép vị tự tâm G, tỉ số $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Đồng thời do Q nằm trên d_a và $d_a // OM$ (vì cùng vuông góc với BC) nên suy ra d_a chính là ảnh của đường thẳng OM qua phép vị tự vừa nêu. Hoàn toàn tương tự ta cũng có d_b và d_c lần lượt là ảnh của các đường thẳng ON và OP qua phép vị tự tâm G tỉ số $(-1/2)$. Mà các đường thẳng OM, ON, OP đồng quy tại O nên suy ra các đường thẳng d_a, d_b, d_c cũng đồng qui tại O' — ảnh của O qua phép vị tự tâm G tỉ số $(-1/2)$ (đpcm).

Nhận xét: Các bạn Nguyễn Bình An, Trần Quân (10CT, 11CT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), Phạm Xuân Lộc ($11B_{10}$, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang), Đỗ Ngọc Minh Châu (10A, PTTH Pleiku I, Gia Lai – KonTum) cũng có lời giải tốt. Nhiều bạn khác có lời giải đúng nhưng rườm rà, phức tạp. Bạn Đỗ Duy Khánh (11CT, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang) có ý hay nhưng do vội vã nên lời giải thiếu chính xác.

N.K.M.

Bài 5/139. *a) Tìm phương trình bậc 3 có nghiệm là* $\cos(\pi/7)$, $\cos(3\pi/7)$ *và* $\cos(5\pi/7)$.

b) Từ đó hãy tính tổng $1/\cos(\pi/7) + 1/\cos(3\pi/7) + 1/\cos(5\pi/7)$.

Lời giải: *a) Cách* 1 (của bạn Đỗ Duy Khánh, 11 CT, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang). Ta thấy $\pi/7$, $3\pi/7$, $5\pi/7$ là các nghiệm của phương trình $3x + 4x = (2k+1)\pi$ (k nguyên) nên $\cos 3x + \cos 4x = 0$. Mà ta có

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\cos 4x = 2(2\cos x - 1)^2 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

Suy ra $8\cos^4 x + 4\cos^3 x - 8\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

hay $(\cos x + 1)(8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0$

Nhưng $\cos x + 1 \neq 0$ nên $\cos(\pi/7)$, $\cos(3\pi/7)$, $\cos(5\pi/7)$ là 3 nghiệm của phương trình $8y^3 - 4y^2 - 4y + 1 = 0$.

Cách 2 (của nhiều bạn). Ta có:

$$\cos(\pi/7) + \cos(3\pi/7) + \cos(5\pi/7) = [\sin(2\pi/7) - \sin 0 + \sin(4\pi/7) - \sin(2\pi/7) + \sin(6\pi/7) - \sin(4\pi/7)]/2\sin(\pi/7) = \sin(6\pi/7)/2\sin(\pi/7) = 1/2$$

$$\cos(\pi/7).\cos(3\pi/7) + \cos(3\pi/7).\cos(5\pi/7) + \cos(5\pi/7)\cos(\pi/7) = [(\cos(\pi/7) + \cos(3\pi/7) + \cos(5\pi/7))^2 - \cos^2(\pi/7) - \cos^2(3\pi/7) - \cos^2(5\pi/7)]/2 = 1/8 - (\cos(2\pi/7) + 1 + \cos(6\pi/7) + 1 + \cos(10\pi/7) + 1)/4 = 1/8 - (3 - \cos(\pi/7) - \cos(3\pi/7) - \cos(5\pi/7))/4 = -1/2$$

$$\cos(\pi/7)\cos(3\pi/7)\cos(5\pi/7) = \cos(\pi/7)[\cos(8\pi/7) + \cos(2\pi/7)]/2 = [\cos(\pi/7) - \cos(2\pi/7) + \cos(3\pi/7)]/4 = (1/2 - 1)/4 = -1/8$$

Vậy $\cos(\pi/7)$, $\cos(3\pi/7)$, $\cos(5\pi/7)$ là ba nghiệm của phương trình.

$$x^3 - x^2/2 - x/2 + 1/8 = 0$$

b) Ta có theo định lý Viet:

$$1/\cos(\pi/7) + 1/\cos(3\pi/7) + 1/\cos(5\pi/7) = \frac{\cos(\pi/7)\cos(3\pi/7) + \cos(3\pi/7)\cos(5\pi/7) + \cos(5\pi/7)\cos(\pi/7)}{\cos(\pi/7)\cos(3\pi/7)\cos(5\pi/7)} = -(1/2)/(-1/8) = 4$$

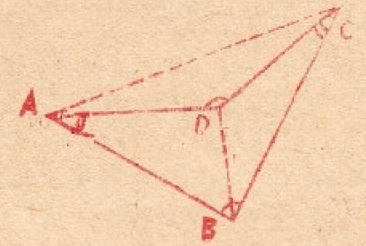
Đ.B.K.

Bài 6/139. *Một tứ giác ghềnh có các góc đối diện bằng nhau. Chứng minh rằng các cạnh đối của tứ giác bằng nhau.*

Giải: *Cách* 1 (của Đặng Vũ Sơn, 11CT, ĐHTH Hà Nội, Trần Duy Hinh, 12G, Trưng Vương, Quy Nhơn và một số bạn khác)

Xét tứ giác ghềnh $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ và $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$.

Giả sử $AB < CD$. Vì 2 đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và BCD bằng nhau (do BD chung và $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$) nên từ $AB < CD$ ta suy ra $AD > BC$. Lại xét 2 đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và ABD, chúng cũng bằng nhau (do AC chung và $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$), từ $AD > BC$ ta suy ra $CD < AB$, vô lý. Tương tự nếu $AB > CD$ ta cũng suy ra mâu thuẫn. Vậy $AB = CD$, tương tự ta cũng có $AD = BC$.



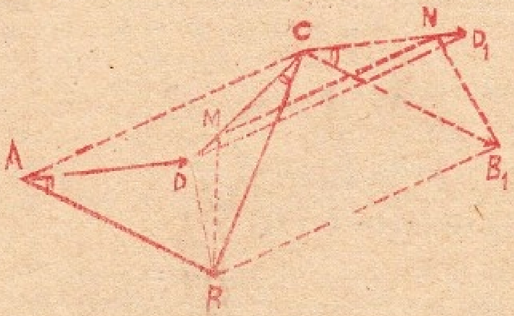
Cách 2: (của Phạm Hải 11/2 Phan Châu Trinh, Đà Nẵng).

Dựng $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AD}$. Khi đó $\widehat{B_1CD_1} = \widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ và $\widehat{DCD_1} = \widehat{CDA} = \widehat{CBA} = \widehat{BCB_1}$. Trên các đường thẳng CD và CD_1 đặt các đoạn $CM = AB$, $CN = CB$. Ta suy ra

$\Delta CMN = \Delta CB_1B$ (c. g. c) $\Rightarrow MN = BB_1$

$\Delta CBM = \Delta CNB_1$ (c. g. c) $\Rightarrow BM = B_1N$

Vậy $BMNB_1$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DD_1} \Rightarrow M \equiv D$, $N \equiv D_1 \Rightarrow AB = CD$, $AD = CD_1 = CB$ (đpcm)



Đ.B.K.

Bài 7/139. *Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu m, n, k là ba số nguyên đôi một khác nhau thì*

$$\max \{|f(m)|, |f(n)|, |f(k)|\} \geqslant \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Lời giải. *Cách 1* (của Đặng Vũ Sơn, Cao Vi Ba, Đỗ Duy Khánh, Nguyễn Hoài Vũ, Lâm Tùng Giang).

Giả sử $m < n < k$ thì $k - m \geqslant 2$. (2)

Nếu $|f(m)| < 1/2$; $|f(n)| < 1/2$; $|f(k)| < 1/2$ thì $|f(k) - f(n)| \leqslant |f(k)| + |f(n)| < 1$

hay $|(k - n)(k + n + b)| < 1$

Suy ra $|k + n + b| < 1$ (vì $k - n > 1$)

Tương tự, ta có $|m + n + b| < 1$. Do đó, $k - m = (k+n+b) - (m+n+b) < 1 + 1 = 2$, mâu thuẫn với (2). Vậy (1) đúng.

Cách 2 (của Hoàng Văn Ngôn, Nguyễn Văn Hà,...)

Giả sử $m < n < k$. Xét hàm $g(x) = (x - n)(x - k)/2 + (x - m)(x - n)/2 - 1/2$

thì $g(m) = (m - n)(m - k)/2 - 1/2 \geqslant 1/2$;

$g(n) = -1/2$; $g(k) = (k - m)(k - n)/2 - 1/2 \geqslant 1/2$.

Giả sử $\max \{|f(m)|, |f(n)|, |f(k)|\} < 1/2$.

Xét hàm bậc nhất $h(x) = f(x) - g(x)$ thì

$h(m) = f(m) - g(m) \leqslant f(m) - 1/2 < 0$

$h(n) = f(n) - g(n) = f(n) + 1/2 > 0$

$h(k) = f(k) - g(k) \leqslant f(k) - 1/2 < 0$

Từ đó suy ra $h(x)$ có ít nhất hai nghiệm, do vậy, $h(x) \equiv 0$ hay $f(x) \equiv g(x)$, mâu thuẫn với giả thiết. Ta được đpcm.

Tổng quát hóa bài toán (của các bạn Đặng Vũ Sơn, Cao Vi Ba, Đỗ Duy Khánh):

Cho đa thức bậc n: $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Chứng minh rằng nếu $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ là $n + 1$ số nguyên đôi một khác nhau thì

$$\max \{|f(x_0)|, |f(x_1)|, \ldots, |f(x_n)|\} \geqslant n!/2^n$$

Các bạn đều chứng minh được dựa vào công thức nội suy Lagrăngiơ.

Nhận xét: Do sơ xuất nên trong đề ra thiếu dấu trị tuyệt đối, tuy vậy, tất cả các bạn gửi bài giải đều phát hiện ra điều đó và giải theo các phương pháp đã trình bày ở trên.

Bài 8/139. *Cho $p = \overline{a_0 a_1 a_2 \ldots a_k}$ ($k \geqslant 3$) là một số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_k = 0$ (1) không có nghiệm hữu tỷ.*

Lời giải: (của các bạn Trần Quân, Phạm Hải, Nguyễn Bình An, Trần Duy Hinh, Đỗ Duy Khánh, Đặng Vũ Sơn, Nguyễn Quảng Cường...)

Nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $x_0 < 0$. Giả sử $x = -m/n$ là nghiệm của (1) ($m, n \in N$, $(m, n) = 1$) thì ta có

$$n^k[a_0(-m/n)^k + a_1(-m/n)^{k-1} + \ldots + a_k] = 0$$

hay

$$a_0(-m)^k + a_1(-m)^{k-1}.n + \ldots + a_k.n^k = 0$$

Từ đây suy ra $a_0 \vdots n$; $a_k \vdots m$, do vậy $1 \leqslant m \leqslant 9$; $1 \leqslant n \leqslant 9$.

Ký hiệu vế trái của (1) là $P(x)$ thì $p = P(10)$ và:

$$n^kP(x) = n^k[P(x) - P(-m/n)] = (nx + m)g(x)$$

trong đó $g(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Thay $x = 10$ vào hệ thức này, ta được

$$n^kp = (10n + m)g(10).$$

Để ý rằng $(n^k, 10n + m) = 1$ nên $p \vdots 10n + m$ (2). Theo giả thiết thì $p > 1000$, do vậy

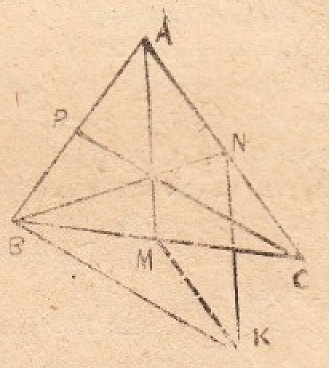
$$1 < 10n + m < p.$$

Vậy (2) mâu thuẫn với giả thiết p là số nguyên tố. Bài toán được chứng minh.

N.V-M

Bài 9/139. *Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác có 3 cạnh là 3 đường trung tuyến của ΔABC; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh rằng:*

$$R_1/R \geqslant (4/3)\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2).$$



Lời giải: Gọi AM, BN, CP là các đường trung tuyến của ΔABC. Vẽ $MK \parallel AC$ và lấy $MK = AN = NC$ (hình vẽ) thì có $\square ANKM$ là hình bình hành, suy ra $NK = AM$. Ta lại có $\Delta PNC = \Delta BMK$ (c.g.c) suy ra $BK = CP$. Vậy có ΔBNK là tam giác có 3 cạnh là 3 đường trung tuyến của ΔABC. Từ cách dựng ta có:

$$S_{\Delta BNK} = S_{\Delta BMK} + S_{\Delta MKN} + S_{\Delta BMN}$$
$$= 3S_{\Delta BMN} = 3/4\, S_{\Delta ABC}$$

Gọi a, b, c là 3 cạnh tương ứng đỉnh A, B, C của ΔABC. Ta có:

$$AM = \sqrt{2b^2+2c^2-a^2}/2 = \sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}/2$$

(định lý hàm cosin) $\geqslant \sqrt{2bc\,(1+\cos A)} =$

$$= \cos(A/2) . \sqrt{bc}$$

Tương tự ta cũng có $BN \geqslant \cos(B/2) . \sqrt{ac}$;
$CP \geqslant \cos(C/2) . \sqrt{ab}$

Vậy có

$$R_1 = AM . BN . CP / 4 S_{\Delta BMN} =$$

$$= AM . BN . CP / 3 S_{\Delta ABC}$$

$$\geqslant (4/3)R . (\cos(A/2) . \sqrt{bc} . \cos(B/2) . \sqrt{ac} . \cos(C/2) . \sqrt{ab}) / abc$$

$$\geqslant (4/3)R \cos(A/2) \cos(B/2) \cos(C/2). \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét: Các bạn Nguyễn Hồ Anh Nguyên (11CT, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) Nguyễn Hoài Vũ (11B, Trưng Vương, Quy Nhơn) có lời giải gần giống ở trên. Ngoài ra các bạn Lâm Tùng Giang, Trần Quân, Nguyễn Hùng Sơn, (11CT, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng); Lã Hồng Hạnh (PTTH. Nguyễn Trãi, Hà Nội) cũng có lời giải tương đối tốt.

T.V.T

Bài 10/139: *Cho hàm số $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$. Chứng minh rằng hai khẳng định sau tương đương:*

a) $f(x(f(y)) = y f(x) \quad \forall x, y > 0$

b) $f(xy) = f(x) . f(y)$

$f(f(x)) = x \quad \forall x, y > 0$

Lời giải:

Từ a) ⇒ b): Thay x và y bằng 1 thì $f(f(1)) = f(1)$ (1)

Thay $y = 1$ thì $f(xf(1)) = f(x)$ (2)

Thay $y = f(1)$ thì $f(xf(f(1)) = f(1) . f(x)$ (3)

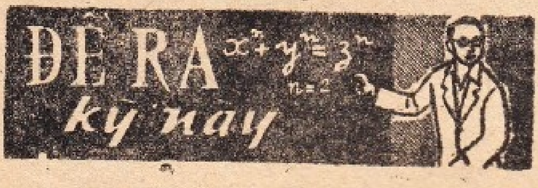
Từ (1), (2), (3) ta có $f(x) = f(1) . (x))$ mà $f(x) > 0$ nên $f(1) = 1$. Thành thử $f(f(x)) =$
$f(1.f(x)) = x . f(1) = x$. Từ đó $f(x) f(y) =$
$= f(yf(f(x))) = f(xy)$
$\forall x, y > 0$

Từ b) ⇒ a): Có $f(x . f(y)) = f(x) f(f(y)) = y f(x)$
$\forall x, y > 0$.

Tóm lại có: a) và b) là tương đương.

Nhận xét: Các bạn Trần Quân, Nguyễn Hồ Anh Nguyên, Lâm Tùng Giang, Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Bình An (Phan Châu Trinh, Đà Nẵng); Trần Duy Hinh (12 G, Trưng Vương, Quy Nhơn), Đặng Vũ Sơn, Cao Vi Ba (lớp 11 A_0, ĐHTH Hà Nội) có lời giải tốt.

T.V.T



Bài 1/140. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên lẻ thì $n^3 + 1$ không thể là số chính phương.

Đỗ Đức Thái

Bài 2/140. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình:

$$2^x - 5^y + 1960^z = 0$$

Phương Thảo

Bài 3/140. Chứng minh rằng nếu phương trình

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

có nghiệm thì

$$a^2 + (b-2)^2 > 3.$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 4/140. Giải và biện luận hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}} = a \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = b \end{cases}$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 5/140. Giải phương trình

$$x^3 - 3a^2x - 2a^3\cos 3A = 0$$

với a là tham số dương, A là góc cho trước.

Đỗ Bá Khang

Bài 6/140. Tìm tất cả các bộ đa thức của một biến số thực f, g, h, thỏa mãn hệ

$$-f(x^2) + g(x) + h(x) = x^2$$
$$f(x) - g(x^2) + h(x) = -x$$
$$f(x) + g(x) - h(x^2) = -x$$

với mọi x.

Nguyễn Minh Đức

Bài 7/140. Trên các cạnh của tứ giác lồi có diện tích S, về phía ngoài, dựng các hình vuông. Tâm các hình vuông đó tạo thành một tứ giác có diện tích S_1. Hãy chứng minh rằng

a) $S_1 \geqslant 2S$.

b) $S_1 = 2S$ khi và chỉ khi các đường chéo của tứ giác ban đầu bằng nhau và vuông góc với nhau.

Thái Văn Hội

Bài 8/140. Trên mặt phẳng cho m đường thẳng song song và n đường thẳng cát tuyến đôi một cắt nhau. Biết rằng không có ba đường thẳng nào đồng quy. Hỏi mặt phẳng được chia thành mấy phần ?

Đỗ Bá Khang

***Bài 9/140.** Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc trong với nhau. Giả sử $R > R'$. Từ các đỉnh của đa giác đều $A_1 A_2 \ldots A_{1984}$ nội tiếp trong đường tròn O ta kẻ các tiếp tuyến $A_i B_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 1984)$ với đường tròn O'. Chứng minh các hệ thức :

$$A_1B_1^2 + A_{993}B_{993}^2 = A_2B_2^2 + A_{994}B_{994}^2 = \ldots = A_{992}B_{992}^2 + A_{1984}B_{1984}^2.$$

Lê Quốc Hán

Bài 10/140. Cho 4 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 đồng quy tại O. Từ một điểm B_1 trên d_1 thỏa mãn $OB_1 = 1$, ta kẻ đường thẳng song song với d_4 cắt d_2 ở B_2, từ B_2 kẻ đường thẳng song song với d_1 cắt d_3 ở B_3, từ B_3 kẻ đường thẳng song song với d_2 cắt d_4 ở B_4, từ B_4 kẻ đường thẳng song song với d_3 cắt d_1 ở B_5, từ B_5 kẻ đường thẳng song song với d_4, cắt d_2 ở B_6, ...

Tiếp tục quá trình ta có một dãy các đoạn thẳng OB_1, OB_2, OB_3...

Gọi $\alpha_1 = \widehat{B_1OB_2}$; $\alpha_2 = \widehat{B_2OB_3}$; $\alpha_3 = \widehat{B_3OB_4}$.

$$S = OB_1 + OB_2 + \ldots + OB_{4n}$$

$$A = 1 + \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)} \times \left[1 + \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}\right]$$

Chứng minh rằng

$$S \leqslant \frac{(4^n - 1)}{3 \cdot 4^{n-1}} A$$

Tạ Văn Tự

TOÁN HỌC VÀ CƠ HỌC ĐỐI VỚI NGÀNH HÀNG KHÔNG VÀ DU HÀNH VŨ TRỤ

PHẠM HUYỀN

Kỹ thuật hàng không và du hành vũ trụ có quan hệ mật thiết với toán học và cơ học. Đó là công cụ có hiệu quả để giải quyết các vấn đề cốt yếu trong lý thuyết bay, trong tính toán và thiết kế các máy bay, tên lửa...

Thực vậy, vấn đề lớn của thế kỷ 19 và đầu thế kỷ 20 là có thể đưa các thiết bị nặng hơn không khí bay lên không trung được không, đã được nhà cơ học Nga là Giucôpxki giải quyết. Ông đã áp dụng phương pháp hàm biến phức giải bài toán cơ học về dòng chảy bao quanh và tìm được công thức xác định lực nâng của cánh $F = \rho v G$, trong đó ρ — mật độ không khí, v — vận tốc bay, G — hệ số phụ thuộc vào hình dáng của prôfin cánh gọi là lưu số. Ngành hàng không lý thuyết ra đời đã giải quyết được nhiều bài toán kỹ thuật quan trọng và cũng cung cấp cho toán học và cơ học nhiều phương hướng nghiên cứu mới, tên tuổi của nhiều nhà toán học và cơ học gắn với những thành tựu to lớn của ngành hàng không và du hành vũ trụ.

Vào những năm 30 của thế kỷ này, viện sĩ Kenđusơ (sau này là chủ tịch Viện hàn lâm khoa học Liên Xô) đã dùng mô hình toán – cơ tìm được nguyên nhân và biện pháp xử lý hiện tượng rung flate ở các cánh máy bay bằng kim loại. Xiôncôpxki đã chứng minh khả năng con người có thể bay tới các hành tinh xa xôi bằng các con tầu vũ trụ mang các tên lửa nhiều tầng và ước mơ đó của con người đã trở thành hiện thực. Các nhà cơ học và toán học vẫn tiếp tục phục vụ những chuyến bay bằng các tính toán xử lý các số liệu về quĩ đạo con tàu.

Hiện nay các máy bay tiêm kích đã có vận tốc trên 1200 mét/giây tức nhanh gấp 4 lần tiếng động, người lái phải có sức khỏe và hệ thần kinh đảm bảo. Tuy nhiên, vì tốc độ phản ứng của con người là 0.1 giây nên trước khi kịp phản ứng máy bay đã vượt qua quãng đường

120m, do đó tình huống có thể đã thay đổi. Các con tàu vũ trụ còn có vận tốc lớn hơn gấp 20 lần, nên các phi công vũ trụ không đủ khả năng điều khiển con tàu trong một số tình huống phức tạp. Để khắc phục khó khăn đó, người ta phải dùng các máy tính điện tử vi tính, có khả năng «nghĩ» nhanh hơn người, kịp điều khiển các con tàu bay nhanh nhất. Người ta xem sự xuất hiện các máy vi tính như một cuộc cách mạng kỹ thuật.

Máy vi tính còn dùng rộng rãi trong kỹ thuật phòng không như để điều khiển các tên lửa chống tên lửa, tên lửa chống máy bay... Nếu máy bay của đối phương cũng trang bị các máy tính thì đó là cuộc chiến đấu giữa hai máy tính bay. Bài toán điều khiển các thiết bị bay có mục tiêu đã được viện sĩ Liên Xô Pôntriagyn trình bày trong chuyên khảo « Lý thuyết điều khiển tối ưu ».

Việc chế tạo và tổ chức sản xuất các thiết bị bay hiện đại cũng là những bí mật quốc gia được thực hiện theo các phương án có các tính toán toán học và cơ học chính xác. Ở đây những máy tính điều khiển các máy công cụ và dây chuyền sản xuất, các máy tính kiểm tra chất lượng...

Các vòi phun phản lực không thể làm bằng kim loại vì đắt tiền và không có kim loại nào chịu được nhiệt độ 4000° (vonfram nóng chảy ở nhiệt độ 3400°). Các nghiên cứu cơ-lý-hóa-toán cho ta giải pháp là dùng bột kim loại pha đồng ép thành vòi phun. Khi cháy, các bột đồng nóng chảy trước, bay hơi và làm nguội khung ngoài của vòi phun, giống như mồ hôi giữ cho cơ thể có nhiệt độ không đổi.

Các thùng chứa nhiên liệu có yêu cầu kỹ thuật rất cao — phải có độ bền lớn mà trọng lượng phải cực nhỏ. Tất cả các kim loại có độ bền hạn chế (đối với mỗi đơn vị khối lượng). Các nghiên cứu cơ học cho biết có thể dùng loại vật liệu gọi là compazit, có độ bền gấp 3 — 5 lần độ bền của titan cùng khối lượng. Trong công nghệ chế tạo loại vật liệu này, phải cuốn các sợi theo qui trình nhất định, nên phải giải các bài toán tối ưu thực sự phức tạp để đạt độ bền tối đa mà trọng lượng lại tối thiểu. Đó là bài toán biến phân và hình học vi phân trong toán học cao cấp. Trong thực tế các máy tính điện tử điều khiển quá trình này.

Qua đây ta thấy, hàng không và du hành vũ trụ là kết quả lao động của hàng vạn nhà bác học và chuyên gia của nhiều lĩnh vực, trong đó có các nhà toán học, cơ học, vật lý học. Ở đây cơ học và toán học đóng vai trò quan trọng. Lao động của họ đã biến các thành tựu mới nhất của khoa học và kỹ thuật thành hiện thực — đó là các máy bay hiện đại, các con tàu vũ trụ chắp cánh cho con người rút ngắn khoảng cách tới các vì sao xa xôi...

Trao đổi với bạn đọc

NHÂN CÂU HỎI HÌNH HỌC TRONG ĐỀ THI TOÁN KHỐI A KỲ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC 1984 — 1985

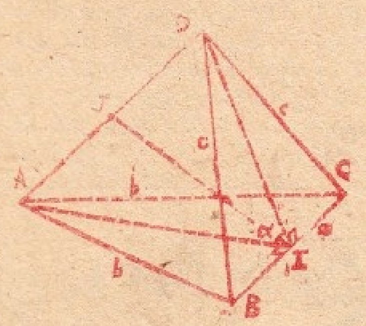
TẠ VĂN ĐĨNH

QUA những bài tôi gặp trong dịp chấm thi tuyển sinh môn toán tôi có một vài nhận xét muốn trao đổi với các bạn trẻ yêu toán.

Trước hết, xin trích ra đây phần đầu bài có liên quan :

« Cho một hình tứ diện ABCD trong đó $BC = a$, $AB = AC = b$, $DB = DC = c$, α là góc phẳng nhị diện có cạnh là BC ($\alpha < \pi/2$).

Câu hỏi 1 — Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Với điều kiện nào đối với b, c đường thẳng nối điểm giữa I của BC với điểm giữa J của AD là đường vuông góc chung (sau này sẽ viết tắt là « đvgc ») của BC và AD ».



Tôi xem như các bạn đã chứng minh được $AD \perp BC$ và trong quá trình đó chứng minh được $BC \perp$ mặt phẳng (ADI) và do đó $BC \perp IJ$

Bây giờ xét tiếp câu hỏi 1. Các bài giải thường làm theo một trong hai cách sau:

Cách thứ nhất: Vì đã có $IJ \perp BC$ nên muốn IJ là đvgc của BC và AD thì chỉ cần $IJ \perp AD$ nữa. Lúc đó tam giác IAD có IJ vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên là tam giác cân và do đó $IA = ID$. Sau đó hai tam giác AIB và DIB vuông ở I, lại có IB chung và $IA = IB$ nên chúng bằng nhau. Do đó $AB = DB$ hay $b = c$.

Tới đây có bài dừng lại, có bài viết thêm: Vậy IJ là đvgc của BC và AD khi $b = c$.

Cách thứ hai: Trước hết nhận xét: Khi $b = c$ thì IJ là đvgc của BC và AD rồi chứng minh. Giả sử $b = c$ thì $AB = DB$, suy ra hai tam giác vuông AIB và DIB bằng nhau (vì có cạnh huyền bằng nhau và IB chung), do đó $IA = IB$, suy ra tam giác AID cân. Vậy trung tuyến IJ cũng là đường cao, nghĩa là $IJ \perp AD$. Kết hợp với điều đã chứng minh ở trên $IJ \perp BC$ ta suy ra IJ là đvgc BC và AD.

Vậy làm theo cách nào là đúng?

Bây giờ đã xong kỳ thi. Bình tĩnh một chút các bạn sẽ thấy rằng:

a) Làm theo cách thứ nhất tức là chứng minh được rằng nếu IJ là đvgc của BC và AD thì $b = c$, tức là mới chứng minh được điều kiện *ắt có* để IJ là đvgc của BC và AD là $b = c$ mà chưa hề đả động đến mệnh đề « Khi $b = c$ thì IJ là đvgc của BC và AD ». Cho nên chưa đủ.

b) Làm theo cách thứ hai tức là chứng minh được rằng nếu $b = c$ thì IJ là đvgc của BC và AD, tức là tìm được *một* điều kiện *đủ* để IJ là đvgc của BC và AD. Dừng lại ở đây cũng chưa đủ vì chưa thể biết rằng ngoài điều kiện $b = c$ ra có còn điều kiện nào khác về b, c làm cho IJ là đvgc của BC và AD nữa không.

Vậy phải làm cả hai cách, và nên làm cách thứ nhất trước để xác định ***điều kiện ắt có*** để IJ là đvgc của BC và CD là $b = c$, rồi cách thứ hai chứng minh tiếp rằng chính $b = c$ cũng là ***điều kiện đủ*** để IJ là đvgc của BC và AD. Làm như vậy tức là chứng minh rằng điều kiện ***ắt có và đủ*** để IJ là đvgc của BC và AD là $b = c$ tức là $b = c$ là điều kiện đủ để IJ là đvgc của BC và AD và ngoài điều kiện $b = c$ ra *không còn* điều kiện nào khác về b, c làm cho IJ là đvgc của BC và AD nữa.

Tại sao lại phải lôi thôi như vậy? Phân tích trên đã chứng tỏ điều đó. Tuy nhiên, tôi muốn đề nghị các bạn suy nghĩ thêm về hai thí dụ sau:

Thí dụ 1. Hãy tìm điều kiện để hai tam giác có diện tích bằng nhau. Nếu trả lời: « Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau », rõ ràng là còn để sót rất nhiều trường hợp hai tam giác có diện tích bằng nhau.

Thí dụ 2. Tìm điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng. Hiển nhiên là muốn đường thẳng D vuông góc với mặt phẳng (P) thì D phải vuông góc với ít nhất một đường thẳng của mặt phẳng (P). Nếu từ đó ta kết luận rằng điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng là nó vuông góc với ít nhất một đường thẳng của mặt phẳng thì rõ ràng không đúng.

Tóm lại câu hỏi « Tìm ***điều kiện về*** b và c để IJ là đvgc của BC và AD » các bạn phải hiểu nó có nghĩa là: Tìm điều kiện về b và c cần và ***đủ*** để IJ là đvgc của BC và AD. Khi làm nếu các bạn chỉ tìm ra *một* điều kiện *đủ* thì cũng chưa xong mà phải làm thế nào tìm được *hết* các điều kiện đủ. Vậy ta rút ra nhận xét sau: Câu hỏi « ***Tìm điều kiện về ... để ...*** » thực chất là một câu hỏi về ***điều kiện ắt có và đủ***.

Cũng có nhận xét tương tự đối với *câu hỏi 3* tiếp sau của bài hình học: « Giả sử $b = c = a\sqrt{3}/2$. Tính góc α để hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với đường thẳng CD ». Đây cũng là một câu hỏi về điều kiện ắt có và đủ. Nhưng thường tôi chỉ thấy các bài làm phần ắt có: xem như hình cầu đường kính IJ đã tiếp xúc với CD rồi từ đó tính được $\sin(\alpha/2) = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$. Trong số những bài tôi chấm tôi chưa thấy bài nào xuất phát từ giả thiết $\sin(\alpha/2)$ có giá trị như vậy rồi chứng minh rằng hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với CD. Xin nói nhỏ thêm: nếu làm việc đó thì các bạn còn phát hiện ra rằng hình cầu nói trên không những chỉ tiếp xúc với CD mà còn tiếp xúc với BD, CA, BA và hiển nhiên hình cầu này tiếp xúc với AD và BC, nghĩa là nó tiếp xúc với cả sáu cạnh của tứ diện $ABCD$.

Các bạn ***cần đọc kỹ câu hỏi*** trước khi làm ***để hiểu thật rõ nội dung*** của câu hỏi.

SĂN BẮT NGHIỆM MỘT BÀI TOÁN

Dù mười năm đã trôi qua, có một bài toán tôi vẫn còn nhớ mãi. Bạn hãy *lấy các chữ số từ 1 đến 9 để tạo thành bốn số: một số có 3* *chữ số và ba số có 2 chữ số sao cho tích của hai số này bằng tích của hai số kia.*

Ngày ấy, tôi còn trẻ như các bạn. Và bài toán đã hấp dẫn tôi với một sức mạnh ghê gớm. Xuất hiện từ lâu nhưng chưa được giải quyết trọn vẹn, nó thực sự đã trở thành một thách thức! Trong cuộc chạy đua tìm nghiệm cho tích lớn hơn khi chưa có cách gì để tìm được toàn bộ các nghiệm, người ta đã phát hiện được chín nghiệm sau đây:

$158 \times 23 = 79 \times 46 \quad (= 3634)$

$138 \times 27 = 69 \times 54 \quad (= 3726)$

$134 \times 29 = 67 \times 58 \quad (= 3886)$

$174 \times 23 = 69 \times 58 \quad (= 4002)$

$146 \times 29 = 58 \times 73 \quad (= 4234)$

$186 \times 27 = 54 \times 93 \quad (= 5022)$

$158 \times 32 = 64 \times 79 \quad (= 5056)$

$174 \times 32 = 96 \times 58 \quad (= 5568)$

$584 \times 12 = 73 \times 96 \quad (= 7008)$

Năm 1971, tại Nhật, người ta tìm được nghiệm cho tích lớn hơn nữa. Tạp chí « Lượng tử » của Liên Xô công bố tin đó vào năm 1973, nhưng giữ bí mật các con số. Bài toán sang tới Việt Nam. Đầu năm 1974, bạn Tạ Hồng Quảng (lớp 10 chuyên Toán, Đại học sư phạm II, Hà Nội nay là Đại học sư phạm Hà Nội I) tìm thêm được nghiệm $532 \times 14 = 98 \times 76 = 7448$, và bạn Vũ Đình Hòa (cùng lớp) đã chứng minh nghiệm đó cho tích *lớn nhất* trong tất cả các nghiệm có thể có của bài toán. « Giải quyết trọn vẹn là điều chúng ta mong muốn. Nhưng trong khi chưa làm được việc đó, một điều rất tự nhiên là đi tìm nghiệm bé nhất ». Đó là lời kêu gọi của các bạn lớp 10 CT, ĐHSP II, Hà Nội, đăng trên báo Toán học và tuổi trẻ số 76 (1-2/1974).

Theo lời gợi ý đó, tôi bắt tay vào tìm nghiệm bé nhất, nhưng ngay từ những phút đầu, tôi chợt thấy le lói con đường dẫn tới cách giải toàn bộ bài toán. Bỏ ý định tìm nghiệm bé nhất, tôi hy vọng làm được điều lớn hơn. Thế là bài toán đã biến các buổi tối và từng lúc giải lao trong thời kỳ tôi đi lao động thành những giờ phút say mê. Tôi không còn biết trời đất gì nữa, và các nghiệm số lần lượt hiện lên như trong mơ. Tới ngày thứ chín, tôi tìm được nghiệm mới:

$$259 \times 18 = 63 \times 74 = 4662.$$

Tin rằng mình sẽ tìm được tất cả, tôi ước sao bài toán có vài chục nghiệm, thậm chí, hàng trăm nghiệm. Tiếc thay, đó là nghiệm cuối cùng. Thế là sau 14 ngày kể từ lúc biết bài toán, tôi đã chinh phục được nó. Sung sướng biết bao khi dừng bút mà có thể nói rằng: « Bài toán *chỉ có* ngần ấy nghiệm », và thêm một niềm vui: « trong đó có một nghiệm của mình ».

Đứng trước bài toán có diện rất rộng, lại có thể có nhiều nghiệm, việc tìm được một hay hai nghiệm là đáng quí; nhưng đặt được cơ sở lý luận để từ đó quét sạch mọi ngóc ngách, bắt được toàn bộ các nghiệm còn quí hơn. Bởi vì nó đòi hỏi phải có một bản lĩnh vững vàng, một cách nhìn vừa bao quát, vừa sâu sắc. Đấy chính là điều tôi muốn nói với các bạn.

Hôm nay, tôi lại gặp một bài toán: « *Người ta xếp lẫn một vật khác trọng lượng vào cùng mười một vật có trọng lượng bằng nhau. Hãy dùng cân hai đĩa, không có quả cân và chỉ bằng ba lần cân; tìm ra vật khác đó và cho biết nó nặng hay nhẹ hơn* ».

Nếu bạn đã đọc báo Toán học tuổi trẻ nhiều, bạn sẽ thấy bài toán này có họ hàng với các bài « Bằng ba lần cân », « Chỉ một lần cân » trong mục Toán học giải trí, và là anh em sinh đôi với bài « 13 hòn bi » trong mục Đề ra kỳ này

Tôi sẽ không trình bày về lời giải của bài toán. Bạn hãy thử tìm một vài qui trình cân để phát hiện ra « thủ phạm » thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Và hơn nữa, *có tất cả bao nhiêu cách*? (Xin tiết lộ, tôi đã tìm ra 11 cách). Phải chăng bài toán chỉ có 11 « nghiệm »? Mời các bạn tham gia cuộc săn bắt nghiệm của bài toán!

BÙI QUANG TRƯỜNG

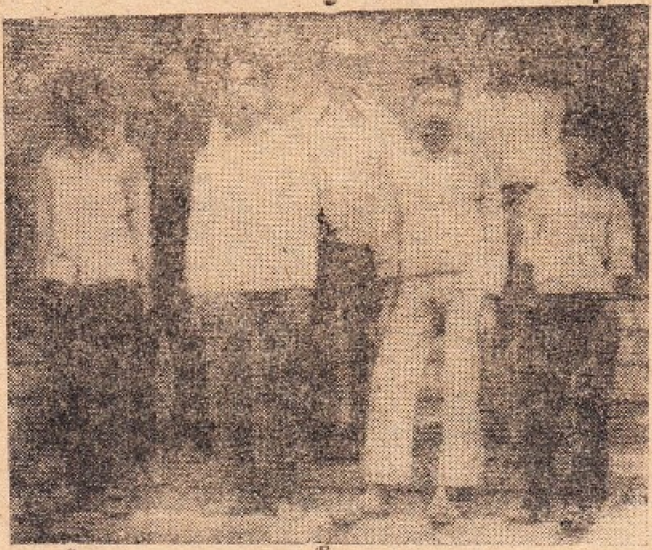
Giải đáp bài CHỈ HỎI MỘT CÂU

Câu hỏi Tí phải đề ra là: « *Bạn là người của trại này phải không?* ». Khi đó, các câu đáp sẽ như trong bảng.

Câu đáp		Gặp người lớp	
		10A	10B
Đến trại	10A	GẬT	GẬT
	10B	LẮC	LẮC

Vậy bất kỳ gặp ai hễ câu trả lời là GẬT tức là Tí đến trại lớp 10A và LẮC là Tí đến trại lớp 10B.

BÌNH PHƯƠNG



1

2

3

1

5

6

Ảnh trên : Một số bạn đoạt giải và các thầy giáo khối chuyên toán trường Đại học Tổng hợp Hà Nội.

Ảnh dưới : Các bạn đoạt giải và các thầy cô giáo trường Phổ thông trung học Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình.

Ảnh trên : Các bạn đoạt giải nhì.

Lớp 10 : 1. Nguyễn Quảng Cường
2. Đặng Vũ Sơn
3. Nguyễn Ngọc Văn Khoa

Lớp 11 : 4. Huỳnh Đức Thắng
5. Đỗ Trọng Vinh

Lớp 12 : 6. Nguyễn Hoành Cường

TÍCH CỰC THAM GIA CUỘC THI GIẢI TOÁN
CHÀO MỪNG CÁC NGÀY LỄ LỚN TRONG NĂM 1985

In 15.000 số tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ — Hà Nội. Số in 74/85. In xong và gửi lưu chiểu tháng 5-1985
Chỉ số : 11884
Giá : 2 đồng