

h

TOÁN HỌC

Tuổi trẻ

VIỆN KHOA HỌC
VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

1
1985

Số 141

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỶ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn

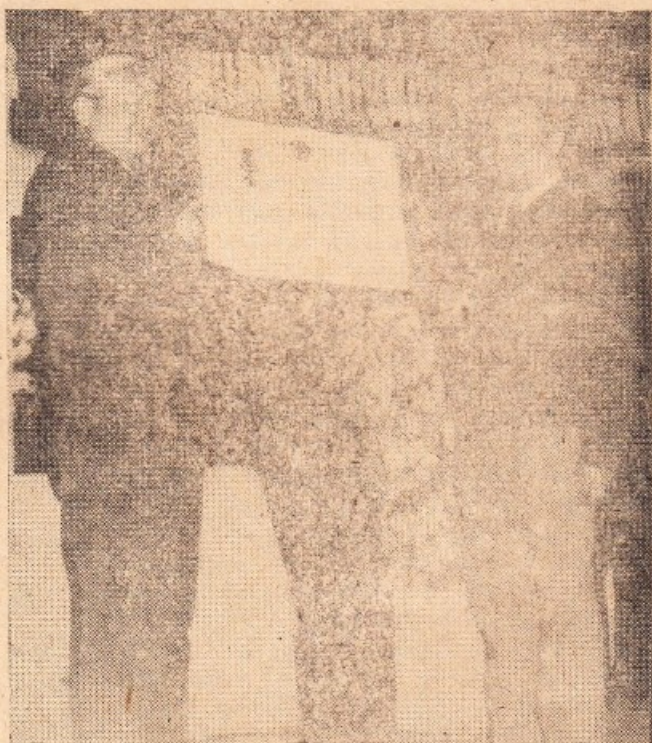
Phó Tổng biên tập: Ngô Đạt Từ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo - Hà Nội

Dây nói: 52825

**LỄ KỶ NIỆM 20 NĂM THÀNH LẬP, LỄ
ĐÓN NHẬN HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG
HẠNG NHÌ CỦA BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI
TRẺ ĐÃ ĐƯỢC TIẾN HÀNH TRỌNG THÈ
TẠI THỦ ĐÔ HÀ NỘI.**

Ngày 19 tháng 12 năm 1984 Lễ kỷ niệm 20 năm Thành lập Báo; Lễ đón nhận Huân chương Lao động hạng nhì của Báo Toán học và Tuổi trẻ đã được tiến hành trọng thể tại Thủ đô Hà Nội. Trên 200 các cán bộ lãnh đạo, các đại biểu các cơ quan khoa học và văn hóa, các cán bộ toán học và các em học sinh giỏi toán của Thủ đô và một số tỉnh, thành phố đã về dự. Sau bản báo cáo về 20 năm hoạt động của báo, giáo sư tiến sĩ Nguyễn Văn Hiệu, Viện trưởng Viện Khoa học Việt Nam, đã trao huân chương cho báo và phát biểu ý kiến chúc mừng thành tích của báo. Đồng chí Vũ Quốc Hùng, Bí thư Trung ương Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh, trao tặng giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn, Tổng biên tập của báo, Huy chương Vì thế hệ trẻ. Tiến sĩ Nguyễn Tổ Như, người đoạt giải đầu tiên của báo, phát biểu cảm tưởng nói lên tác dụng của báo đối với việc học tập, và bước đường nghiên cứu toán học của mình. Lễ phát thưởng cho các học sinh đoạt giải trong cuộc thi «Giải toán chào mừng Báo Toán học và tuổi trẻ 20 tuổi» cũng đã được tiến hành đồng thời trong niềm hân hoan và phấn khởi.



Ảnh: Nam Hải

Giáo sư tiến sĩ Nguyễn Văn Hiệu (bên phải) trao huân chương cho giáo sư tiến sĩ Nguyễn Cảnh Toàn (bên trái).

Nói chuyện với bạn trẻ yêu toán.

SỐ HỌC MÃI MÃI TRẺ TRUNG

HÀ HUY KHOÀI

CÓ không ít bạn học sinh nghĩ rằng Số học là lĩnh vực cổ điển của Toán học, đã hoàn thiện từ lâu. Trong lâu đài Toán học ngày nay Số học giữ một vai trò như là một gian phòng trưng bày những dấu tích huy hoàng của những năm tháng xa xưa. Thực ra, Số học - Khoa học về các con số - một trong những lĩnh vực cổ xưa nhất của Toán học, là lĩnh vực mãi mãi trẻ trung. Việc giải những bài toán nổi tiếng của Số học luôn luôn là động lực thúc đẩy các nhà Toán học sáng tạo ra những công cụ mới, những lý thuyết mới. Ngược lại, nhiều kết quả mới nhất của các lĩnh vực khác nhau đã được áp dụng để giải quyết các vấn đề tồn tại của Số học. Trong một bài viết ngắn cho những người không chuyên về Số học, thật khó trình bày những ví dụ điển hình để minh họa những điều vừa nói ở trên. Tuy nhiên, chúng ta cũng sẽ cố gắng tìm hiểu xem một trong những phương hướng hiện đại của Toán học - Giải tích không Asimet đã xuất hiện như thế nào từ những bài toán Số học đơn giản.

Trong Số học, ta thường hay gặp bài toán xét tính chất chia hết. Vì mỗi số nguyên đều viết được thành tích các lũy thừa của các số nguyên tố nào đó nên ta chỉ cần xét tính chất chia hết cho lũy thừa của các số nguyên tố. Giả sử lấy p là một số nguyên tố cố định. Hiển nhiên số 0 chia hết cho p^n với mọi số tự nhiên n lớn tùy ý. Vì vậy sẽ không quá vô lý nếu ta xem một số a là «nhỏ» khi nó chia hết cho lũy thừa «đủ lớn» của số p (Vì lúc đó số a có tính chất «khá gần» số 0!). Nói cách khác, nếu a chia hết cho p^n và không chia hết cho p^{n+1} với $m > n$ còn b chia hết cho p^m thì b có «trị tuyệt đối» nhỏ hơn «trị tuyệt đối» của a (vì lúc đó, b «gần số 0» hơn a). Cách quan niệm như vậy dẫn đến định nghĩa sau đây về «trị tuyệt đối» của một số. Có thể thấy rằng một số nguyên a tùy ý luôn luôn biểu diễn được dưới dạng:

$$a = \alpha p^n$$

trong đó n là số nguyên, α không chia hết cho p . Khi đó ta định nghĩa «trị tuyệt đối» của a như sau:

$$|a|_p = p^{-n}$$

(chỉ số p ở dưới dấu | | dùng để phân biệt với trị tuyệt đối thông thường). Theo định nghĩa này có thể xem $|0|_p = 0$, và một số a là «nhỏ» (gần với 0) nếu trị tuyệt đối của nó bé. Điều này hoàn toàn tương tự như đối với trị tuyệt đối thông thường. Để làm ví dụ, ta lấy $p = 5$. Khi đó ta có:

$$|5|_5 = 1/5; \quad |10|_5 = 1/5; \quad |125|_5 = 1/125$$

$$|49|_5 = 1; \quad |50|_5 = 1/25; \quad |51|_5 = 1.$$

Với quan niệm «trị tuyệt đối» như vậy, ta có thể xây dựng các «số p -adic» như sau. Ta biết rằng, các số dương, nguyên hay phân số, trong hệ đếm thập phân có thể viết dưới dạng:

$$s = \dots + a_{-n}10^{-n} + \dots + a_{-1}10^{-1} + a_0 + a_110 + \dots + a_m10^m, \quad 0 \leq a_i \leq 9.$$

$$\text{Ví dụ: } 1984 = 1 + 8 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3$$

$$6752/317 = 21,2996\dots = \dots + 6 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-1} + 1 + 2 \cdot 10$$

Tuy nhiên, một tổng dạng $a_0 + a_110 + \dots + a_n10^n + \dots$ không xác định một số nào, vì khi n tăng vô hạn thì số $S_n = a_0 + \dots + a_n10^n$ cũng tăng ra vô hạn, và các số S_{n+1} và S_n khác nhau rất nhiều (khi $a_{n+1} \neq 0$). Tình hình sẽ khác đi nếu ta xét các số với «trị tuyệt đối p -adic». Thật vậy, xét tổng có dạng:

$$a_0 + a_1p + \dots + a_np^n + \dots, \quad 0 \leq a_i < p.$$

$$\text{Đặt } S_n = a_0 + \dots + a_np^n. \text{ Khi đó ta có:}$$

$$|S_{n+1} - S_n|_p = |a_{n+1}p^{n+1}|_p =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{nếu } a_{n+1} = 0 \\ p^{-n-1} & \text{nếu } a_{n+1} \neq 0 \end{cases}$$

Như vậy, với n càng lớn thì các số S_{n+1} và S_n «càng gần nhau» theo trị tuyệt đối p -adic, và do đó có thể xem rằng tổng $a_0 + a_1p + \dots + a_np^n + \dots$ xác định một «số p -adic» (là giới hạn của S_n khi n tăng lên vô hạn). Đối với tập hợp các số p -adic, ta có thể xây dựng các phép tính cộng, trừ, nhân, chia như là đối với các số hữu tỷ. Hơn nữa, có thể thấy rằng mọi số hữu tỷ đều là «số p -adic». Thật vậy, nếu S là một số tự nhiên thì luôn luôn có thể viết dưới dạng: $S = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n, \quad 0 \leq a_i < p$

(Viết S dưới dạng «số p »).

Ví dụ: $p=5: 1984 = 4 + 15 + 15^2 + 0.5^3 + 3.5^4$.

Như vậy S là một «Số p -adic». Mọi số hữu tỉ là thương của hai số nguyên nên cũng là «Số p -adic».

Môn giải tích toán học xây dựng trên tập hợp các số p -adic gọi là «Giải tích p -adic», hay là «Giải tích không Asimet». Do đâu mà có tên gọi là «Giải tích không Asimet»? Chắc nhiều bạn đã nghe có môn «Hình học phi Oclit», trong đó không có tiên đề về đường thẳng song song. Cũng tương tự như vậy, trong «Giải tích không Asimet» không có tiên đề Asimet. Tiên đề Asimet nói rằng nếu ta có một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng khác ngắn hơn thì đến lúc nào đấy sẽ vừa vặn hết, hoặc còn dư lại một đoạn ngắn hơn đoạn dùng để đo. Đối với tập hợp các số, điều nói trên thể hiện qua tính chất sau: cho α, β là các số sao cho $|\alpha| > |\beta|$.

Khi đó có thể biểu diễn α dưới dạng:

$$\alpha = n\beta + \gamma \quad (*)$$

trong đó n là số nguyên, $0 \leq |\gamma| < |\beta|$.

Tuy nhiên trong tập hợp các số p -adic thì điều nói trên không đúng. Thật vậy, lấy ví dụ đơn giản: $\alpha = 2.p^5$, $\beta = p^7$ (với $p \neq 2$). Khi đó $|\alpha|_p > |\beta|_p$.

Nếu α có biểu diễn dạng (*) thì

$$\gamma = \alpha - n\beta = 2p^5 - np^7 = p^5(2 - np^2) \text{ và } |\gamma|_p = p^{-5} > |\beta|_p = p^{-7}.$$

— Không thỏa mãn yêu cầu của «tiên đề Asimet» đòi hỏi: $|\gamma|_p < |\beta|_p$.

Hiện tượng trên có thể xem là một tính chất hơi «kỳ quặc» của tập hợp các số p -adic. Những tính chất «kỳ quặc» như vậy có nhiều, và vì thế, trong một thời gian dài, người ta ít để ý đến các số p -adic. Tình hình thay đổi hẳn trong khoảng 20 năm gần đây khi giải tích không Asimet xâm nhập vào các lĩnh vực mà thoạt nhìn tưởng như không có gì liên quan. Trước tiên là các vấn đề của *Hình học đại số*, mà ở đây không có điều kiện trình bày.

Sự kiện giải tích không Asimet chiếm vị trí xứng đáng trong Toán học vào những thập kỷ gần đây không phải là hiện tượng cá biệt của Số học. Có thể nói trong những năm gần đây, Toán học chứng kiến một thời kỳ «Phục hưng» của các tư tưởng cổ điển, từ Diophant, Oclit đến Gaucho, Poängearê.... Nhờ những công cụ hiện đại, người ta nhìn rõ hơn vẻ đẹp của các tư tưởng, các kết quả của Toán học cổ điển và xét chúng không phải như các sự kiện riêng rẽ, mà là trong mối liên hệ sâu sắc với các khái niệm, cấu trúc của Toán học hiện đại. Trong bối cảnh như thế, Số học — một trong những lĩnh vực cổ xưa nhất của toán học — đã có những thay đổi cực kỳ lớn lao. Ngày nay, khó có thể tìm thấy một lĩnh vực nào của Toán học không có ít nhiều liên quan đến Số học, từ những vấn đề lý thuyết trừu tượng nhất đến những vấn đề gần thực tiễn như lý thuyết mật mã, thông tin.

Câu nói của K. Gaucho (1777—1855), nhà toán học Đức vĩ đại mà người đương thời gọi là «Ông vua của các nhà Toán học», ngày nay vẫn còn đúng, «Số học là bà hoàng của Toán học».

15 năm ngày mất

ALFRÉD RÉNYI (1921 — 1970)

BÙI VĂN THANH

SINH ngày 20 tháng 5 năm 1921, Alfréd Rényi là con một của kỹ sư cơ khí Artur Rényi và Barbara Alexander. Ông ngoại của Rényi là một nhà nghiên cứu triết học và phê bình văn học nổi tiếng. Chính ông ngoại và mẹ đã truyền cho cậu bé Rényi lòng say mê và những kiến thức vỡ lòng về văn học và triết học, những kiến thức sẽ giúp Rényi rất nhiều về sau này trong quá trình sáng tạo toán học của ông. Năm 1939 tốt nghiệp phổ thông trung học với điểm

số cao nhất ông vẫn không được nhận vào trường Đại học Tổng hợp, nơi ông ngoại mình là giáo sư. Đất nước Hungary thời kỳ đó đang chìm đắm trong bầu không khí căng thẳng của chiến tranh và những chính sách phân biệt giai cấp mới được ban hành đã ngăn cản con đường học tập đầy hứa hẹn của ông. Song đức tính kiên trì đã đưa lại cho ông giải nhất trong cuộc thi toán hàng năm do Hội toán học tổ chức. Mặc dầu đã lao động ở nhà máy đóng tàu được mộ,

năm, với thành tích này ông được nhận vào học tại Khoa Toán - Lý trường Đại học Tổng hợp Budapest.

Rényi tốt nghiệp đại học tháng 5 năm 1944. Chỉ trong một thời gian ngắn và phải vật lộn với bao nhiêu khó khăn dưới chế độ phát xít ông vẫn đạt được nhiều kết quả nghiên cứu mà nổi bật là luận án phó tiến sĩ toán, bảo vệ tháng 3 năm 1945.

Thời kỳ gặt hái những thành công rực rỡ đầu tiên của ông là giai đoạn ông được cử đi Leningrad từ tháng 10-1946 đến tháng 7-1947. Với nỗ lực phi thường ông đã tập trung sức lực và thời gian để trong 10 tháng ngắn ngủi có thể đạt được sự tiến bộ tuyệt vời. Dưới sự hướng dẫn của viện sĩ Linnik ông đã nghiên cứu kỹ lưỡng các công trình của các nhà lý thuyết số xô-viết, chủ yếu là các công trình của Vinogradov và Linnik, viết và bảo vệ thành công luận án tiến sĩ nổi tiếng của mình. Ngoài ra ông còn công bố hai công trình khác và bước đầu làm quen với lý thuyết xác suất, một ngành toán học sau này là lĩnh vực nghiên cứu chính của ông.

Trở lại Budapest ông được phong Phó giáo sư (10-1947). Năm 1949 được phong Giáo sư, được bầu là Viện sĩ thông tấn Viện Hàn lâm Khoa học Hungari và đảm đương chức vụ Viện trưởng Viện Toán học ứng dụng (sau này đổi tên là Viện Toán) thuộc Viện Hàn lâm. Ngoài ra ông còn trực tiếp giảng dạy và từ năm 1952 là giáo sư lãnh đạo Bộ môn xác suất thống kê Trường Đại học Tổng hợp Budapest.

Nói đến sức sáng tạo phi thường của Alfred Rényi trước hết phải nhắc tới con số những công trình đã xuất bản của ông. Từ năm 1944 cho đến khi mất đột ngột do bệnh tim (ngày 1 tháng 2 năm 1970) ông đã để lại tất cả 365 công trình lớn nhỏ trong đó có những sách chuyên khảo dày tới 5-6 trăm trang. Trung bình cứ hai tháng ông đã cho xuất bản 3 công trình. Có một điều không ai ngờ tới là khi mất đi, trong phòng làm việc của ông không còn lại một công trình, bản thảo hoặc một dự án nào còn dở dang. Bàn bè và đồng nghiệp của ông hết sức khâm phục và gọi ông là *« người sáng tạo cực nhanh »*: hề có điều gì xảy ra trong óc là ông lao vào thực hiện luôn và thực hiện bằng được. Tuy vậy, ông không phải là người làm việc đơn độc. Ông sẵn sàng và thường xuyên trao đổi đề tài nghiên cứu với đồng nghiệp và học trò. Trong cuộc đời nghiên cứu của mình ông đã xuất bản công trình chung với 36 tác giả khác.

Ngoài thời gian nghiên cứu và giảng dạy ông còn đảm nhiệm nhiều chức vụ lãnh đạo quan trọng ở Viện Hàn lâm cũng như ở Hội Toán học Hungari. Trong thời gian 20 năm làm Viện

trưởng (1950 - 1970) ông đã đưa Viện Toán học Hungari trở thành một trung tâm nghiên cứu nổi tiếng trên thế giới. Ông còn là thành viên trong Ban biên tập của tất cả các tạp chí toán trong nước và một số tạp chí toán học nổi tiếng của Liên Xô, Anh, Mỹ, Pháp, Tây Đức...

Tên tuổi của Alfred Rényi gắn liền với trường phái nghiên cứu lý thuyết xác suất và thống kê của Hungari và thực sự ông là cha đẻ của nó. Khi bắt đầu làm quen với lý thuyết xác suất trong thời gian ở Leningrad, được làm việc với các viện sĩ Kolmogorov và Linnik ông đã nhanh chóng đi sâu vào chuyên ngành này. Trở về nước, với tài năng tuyệt vời và sức thu hút mạnh mẽ ông đã xây dựng được một đội ngũ đông đảo những nhà nghiên cứu trẻ đầy triển vọng, đặt nền móng và xây dựng trường phái xác suất thống kê Hungari. Trong số các nhà bác học được ông dìu dắt có thể kể tên các viện sĩ Pál Révész, András Prékopa, Imre Csiszár...

Tuy Alfred Rényi nghiên cứu nhiều lĩnh vực toán học khác nhau (lý thuyết số, lý thuyết đồ thị, tổ hợp, giải tích...) song các công trình chủ yếu của ông là về lý thuyết xác suất và lý thuyết thông tin. Thực ra mà nói, mọi công trình toán học về sau này của ông đều ăn sâu các tư tưởng chính của lý thuyết xác suất. Điều này có thể thấy rõ qua hai bài báo nổi tiếng của ông *« Các phương pháp xác suất trong giải tích »*, trong đó ông đã tóm lược và đưa ra nhiều kết quả đặc sắc của giải tích và chỉ ra *« bản chất xác suất »* của chúng. Đồng nghiệp và học trò đều hết sức khâm phục tài năng của Rényi trong việc ứng dụng lý thuyết xác suất để giải quyết các vấn đề thực tế rất khác nhau, từ các quá trình công nghiệp, hóa học, sinh vật, giao thông đến điều chỉnh giá cả thị trường v.v... Khó khăn chủ yếu ở đây là tìm được một mô hình toán học (xác suất thống kê) thích hợp phản ánh được thực tế và tính toán cụ thể được. Hơn hẳn những người khác ông đã nhanh chóng hiểu được bản chất toán học của vấn đề và cũng rất nhanh chóng tìm ra được mô hình toán học thích hợp cho nó.

Phần đặc sắc trong các công trình của Rényi là những bài báo đề cập đến những khía cạnh triết học của toán học và vai trò của toán học trong đời sống. Phần lớn các bài báo này được tập hợp trong *« Ars Mathematica »*. Trong cuốn *« Đối thoại về toán học »*, quyền sách được nhiều người quen biết, ông đã phân tích một cách sâu sắc vai trò của toán học ứng dụng và mối liên hệ giữa nó với lý thuyết thuần túy. Cùng với *« Đối thoại về toán học »*, một quyền sách khác ông viết về Galilè là những kết quả của một tư duy triết học tuyệt vời.

Do những kết quả rực rỡ trên lĩnh vực nghiên cứu và những cống hiến của mình trong công tác lãnh đạo và đào tạo đội ngũ khoa học, Rényi đã hai lần được tặng giải Kossuth (1949 và 1954) (giải thưởng cao nhất dành cho các nhà nghiên cứu khoa học, văn học và hoạt động nghệ thuật). Năm 1951 ông được Nhà nước Hungari trao tặng Huân chương của Nước Cộng hòa Nhân dân.

Không phải ngẫu nhiên mà viện sĩ quá cố Pál Turán đã nói về Alfréd Rényi bằng những lời tốt đẹp sau đây: "Nhìn vào con số những công trình đồ sộ mà ông đã sáng tạo trong quãng đời ngắn ngủi của mình, đội ngũ đồng nghiệp và học trò được ông bồi dưỡng và dìu dắt, người

ta chỉ có thể tin rằng chỉ có một con người hiến dâng cả cuộc đời mình cho khoa học và làm việc hết sức mình mới có thể để lại cho đời một con số đẹp đẽ như thế".

Sự phong phú và phát triển mạnh mẽ của khoa học (trong đó có toán học) ở thế kỷ 20 đã làm cho người ta khó tìm được những nhà bác học nghiên cứu nhiều lĩnh vực của toán học như Gaxơ hay Ôle ở các thế kỷ trước. Càng ngày càng ít người có khả năng nghiên cứu đồng thời trên nhiều lĩnh vực chuyên môn và kết hợp được các kết quả của nhiều chuyên ngành rất khác biệt nhau. Nhà Toán học Hungari, viện sĩ Alfred Rényi là một trong số những người hiếm hoi đó.



Bài 1/138. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có $9^A \times 661^{2A} + 1983^A + 1$ chia hết cho $(3^2 \cdot 661^2 + 26 \cdot 31)$. Ở đó:

$$A = 19^5 \cdot \underbrace{\quad}_{n \text{ số}}$$

Lời giải: (của Lâm Tùng Giang 11 CT Phan Châu Trinh Đà Nẵng và nhiều bạn khác). Đề ý rằng $3 \cdot 661 = 1983$ và $2^6 \cdot 31 = 1984 = 1983 + 1$, do đó bài toán tương đương với việc chứng minh.

$$1983^{2A} + 1983^A + 1 : 1983^2 + 1983 + 1$$

Với $A = 19^5 \cdot \underbrace{\quad}_{n \text{ số}}$. Khi đó A có dạng $A = 3k+1$ (k nguyên).

Đặt $B = 1983^2 + 1983 + 1$ ta có:

$$\begin{aligned} 1983^3 - 1 : B &\Rightarrow 1983^{3(2k)} \equiv 1 \pmod{B} \\ \Rightarrow 1983^{2A} &= 1983^{6k+2} = 1983^2 \cdot 1983^{6k} \equiv 1983^2 \pmod{B} \end{aligned}$$

$$1983^A = 1983^{3k} \cdot 1983 \equiv 1983 \pmod{B}$$

$$\text{Do đó } 1983^{2A} + 1983^A + 1 \equiv 1983^2 + 1983 + 1 \equiv 0 \pmod{B} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét: Một số bạn đã đưa ra và chứng minh bài toán tổng quát sau: Với mọi số nguyên x và số tự nhiên $A \geq 3$, số $x^{2A} + x^A + 1$ chia hết cho số $x^2 + x + 1$.

DBK.

Bài 2/138. Cho các số $x, y, z \geq 0$ và $x+y+z=1$

Chứng minh rằng:

$$x + 2y + z \geq 4(1-x)(1-y)(1-z)$$

Lời giải. Cách 1. (Nguyễn Quảng Cường, Đặng Vũ Sơn, Trần Quân, Nguyễn Phú Quý, Huỳnh Đức Thắng, Nguyễn Ngọc Văn Khoa, Nguyễn Hùng Sơn, Mai Huy Khôi, Nguyễn Hồ Anh Nguyên, và nhiều bạn khác).

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$, ta được:

$$\begin{aligned} 4(1-x)(1-y)(1-z) &= \\ &= [4(y+z)(1-z)](1-y) \leq (1+y)^2(1-y) = \\ &= (1+y)(1-y^2) \leq 1+y = x+y+z+y = \\ &= x+2y+z. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1/2$; $y=0$; $z=1/2$.

Cách 2. (Hải Vinh, Nguyễn Phúc Hiệp, Lê Hoan Quyền, Cáo Việt Đông, Phạm Xuân Lộc, Nguyễn Quang Thái, Nguyễn Mai Thanh, Nguyễn Hoài Vũ,...)

Đặt

$$\begin{cases} x+y=2a \\ y+z=2b \\ z+x=2c \end{cases} \text{ thì } a+b+c=1, a, b, c \geq 0$$

và bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$a+b \geq 16abc \quad (1)$$

$$\text{Ta có } 1 = (a+b) + c \geq 2\sqrt{(a+b)c}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 4(a+b)c$$

$$\Leftrightarrow a+b \geq 4(a+b)^2c \geq 4.4abc = 16abc.$$

Vậy (1) được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $c=2a=2b$ hay $x=z=1/2$; $y=0$.

N.V.M

Bài 3/138. Hãy tìm mọi đa thức $P(x)$ sao cho $P(0)=0$ và $P(x^2+1)=[P(x)]^2+1$

Lời giải. (của nhiều bạn) Lập dãy $\{\alpha_n\}$ theo công thức quy nạp $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 1$ và $\alpha_0 = 0$. Khi đó $\{\alpha_n\}$ là dãy tăng.

Mặt khác bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh rằng:

$P(\alpha_n) = \alpha_n$ với mọi n . Do đó đa thức $Q(x) = P(x) - x$ bằng 0 tại vô số điểm α_n . Vậy $Q(x) = 0$ hay $P(x) = x$.

Nhận xét: Một số bạn dùng đạo hàm để giải nhưng lập luận còn chưa chặt chẽ.

ĐBK.

Bài 4/138. Cho đường cong $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và một đường thẳng Δ cắt đường cong tại 4 điểm lần lượt là A, B, C, D . Chứng minh rằng nếu $AB = CD$ thì tồn tại một đường thẳng song song với Δ , tiếp xúc với đường cong tại 2 điểm phân biệt.

Lời giải: Gọi phương trình của đường thẳng Δ là $y = mx + n$. Hoành độ các giao điểm A, B, C, D lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 khi đó x_1, x_2, x_3, x_4 là bốn nghiệm của phương trình.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + n,$$

$$\text{hay } x^4 + ax^3 + bx^2 + (c-m)x + d-n = 0.$$

Vậy ta có

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + (c-m)x + d-n = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

$$\text{Vì } AB = CD \text{ nên } x_2 - x_1 = x_4 - x_3$$

$$\text{hay } x_1 + x_4 = x_2 + x_3.$$

Đặt $x = X + (x_1 + x_4)/2$ ta có

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + (c-m)x + d-n = [X^4 - (x_1 - x_4)^2][X^2 - (x_2 - x_3)^2]$$

$$\text{Ký hiệu } p = (x_1 - x_4)^2, q = (x_2 - x_3)^2,$$

Khi đó

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + (c-m)x + d-n = X^4 - (p+q)X^2 + pq$$

$$= (X^2 - (p+q)/2)^2 - (p-q)/2^2$$

$$\text{Vậy, phương trình } x^4 + ax^3 + bx^2 + (c-m)x + d-n + ((p-q)/2)^2 = 0 \text{ có hai nghiệm kép là}$$

$$\sqrt{(p+q)/2} + (x_1 + x_4)/2$$

$$\text{và } -\sqrt{(p+q)/2} + (x_1 + x_4)/2$$

Vậy đường thẳng $y = mx + u - ((p+q)/2)^2$ tiếp xúc với đồ thị đã cho tại hai điểm.

Nhận xét: Các bạn Lâm Tùng Giang, Nguyễn Phú Quý (cùng 11 CT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) và Nguyễn Quảng Cường (11CT, ĐHTH Hà Nội) có lời giải tốt.

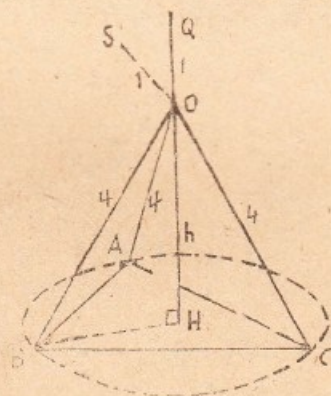
N. Q. T.

Bài 5/138. Gọi V là thể tích hình chóp tam giác $SABC$. Chứng minh rằng nếu tồn tại một điểm O

sao cho $OS = 1, OA = OB = OC = 4$ thì có bất đẳng thức $V \leq 9\sqrt{3}$.

Lời giải. (của Trần Quân 11 CT Phan Châu Trinh Đà Nẵng) Hạ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Do $OA = OB = OC = 4$ nên $HA = HB = HC = \sqrt{16 - h^2}$ với $h = OH$. Ta biết rằng trong các tam giác có cùng đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đều có diện tích lớn nhất. Gọi DEF là một tam giác đều có cùng đường tròn ngoại tiếp với tam giác ABC . Gọi Q là điểm trên OH kéo dài sao cho $HQ = HO + OS$. Khi đó chiều cao của chóp $QDEF$ là $1+h$ và không bé hơn chiều cao của chóp $SABC$. Vậy thể tích V của $SABC$ không lớn hơn thể tích $QDEF$ tức là

$$\begin{aligned} V &\leq \frac{1}{3}(1+h)\frac{3\sqrt{3}}{4}(16-h^2) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(-h^3 - h^2 + 16h + 16) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(-h(h-2)^2 \cdot 5(h-2)^2 + 36) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

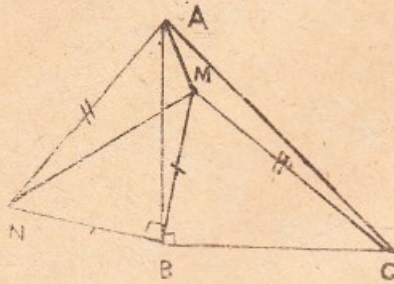


Chú ý rằng nếu $h = 2$ thì ta có thể tích $QDEF$ bằng $9\sqrt{3}$ và do đó thể tích $SABC$ bằng $9\sqrt{3}$ khi ABC là tam giác đều có bán kính ngoại tiếp là $\sqrt{12}$, hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là tâm ngoại tiếp ABC và cách ABC một khoảng là 3. (Nguyễn Ngọc Văn Khoa, Nguyễn Hồ Anh Nguyễn, Lâm Tùng Giang, Nguyễn Phú Quý (cùng 11CT Phan Châu Trinh Đà Nẵng) Phạm Ngọc Anh Kiên, Cao Vi Ba, Đặng Vũ Sơn, Nguyễn Mai Thành, Nguyễn Quảng Cường (cùng 11CT ĐHTH Hà Nội), Đỗ Duy Khánh, Lê Hoàn Quyền Phạm Xuân Lộc (cùng 11CT Nguyễn Văn Trỗi Nha Trang) Nguyễn Quang Thái (11CT ĐHTH HN) Trang Lâm Bằng (11CT Lê Hồng Phong thành

phổ Hồ Chí Minh) và Nguyễn Hoài Vũ (11 CT Trưng Vương Quy Nhơn) đều có lời giải tốt.

Bài 6/138: Giả sử M là điểm nằm trong tam giác vuông cân ABC ($B = 90^\circ$) sao cho $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$. Tính góc AMB .

Lời giải của Nguyễn Ngọc Văn Khoa (11 CT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) và Đặng Vũ Sơn (11 CT ĐHTH Hà Nội).



Lấy B làm tâm, quay $\triangle MBC$ một góc 90° theo chiều từ $C \rightarrow A$. Gọi N là ảnh của M qua phép quay trên. Do $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên A là ảnh của C qua phép quay đó. Đặt $MA = x$. Khi đó $MB = 2x$ và $MC = 3x$. Xét tam giác vuông cân MBN ta có: $MN^2 = 2MB^2 = 8x^2$. Do AN là ảnh của MC qua phép quay nên: $AN = MC$. Vì vậy:

$$AN^2 = MC^2 = 9x^2 = 8x^2 + x^2 = MN^2 + MA^2.$$

Suy ra $\triangle AMN$ vuông tại M . Do vậy:

$$\angle AMB = \angle AMN + \angle NMB = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ \text{ (dpt)}.$$

Nhận xét: Các bạn Nguyễn Bình An, Lâm Tùng Giang, Nguyễn Hồ Anh Nguyên, Trần Quân, Nguyễn Hùng Sơn (10 CT và 11 CT, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) và Lê Hoàn Quyền (11 CT, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang - Phú Khánh) cũng có lời giải tốt.

N.K.M

Bài 7/138. Tìm cặp hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x) - f(y) = (x+y)g(x-y)$ với mọi x, y (1)

Lời giải. (của các bạn Nguyễn Hùng Sơn, Lâm Tùng Giang, Trần Quân, Nguyễn Ngọc Văn Khoa, Đặng Vũ Sơn, Nguyễn Quảng Cường, Võ Văn Đức, Nguyễn Quang Thái, Đỗ Duy Khánh, Lê Hoàn Quyền, Nguyễn Hoàng Nhân...)

Thay y bằng $-x$ trong (1) ta được:

$$f(x) - f(-x) = 0 \text{ vậy } f(-x) = f(x) \text{ (2)}$$

Cũng từ (1) ta có:

$$f(x+1) - f(x) = (2x+1)g(1) \text{ (thay } x \text{ bằng } x+1; y \text{ bằng } x)$$

$$f(x+1) - f(-x) = 1 \cdot g(2x+1) \text{ (thay } x \text{ bằng } x+1; y \text{ bằng } -x)$$

Kết hợp với (2) ta suy ra:

$$(2x+1)g(1) = g(2x+1) \quad \forall x$$

Do vậy $g(x) = ax$, a - tùy ý ($a = g(1)$).

Thay $y = 0$ trong (1) thì

$$f(x) - f(0) = xg(x) = ax^2$$

Vậy $f(x) = ax^2 + b$, b - tùy ý ($b = f(0)$).

Thử lại, ta thấy cặp hàm $g(x) = ax; f(x) = ax^2 + b$ (a, b - tùy ý) thỏa mãn điều kiện (1).

Nhận xét: Một số các bạn còn dùng phương pháp tách biến để giải, tuy nhiên, phương pháp đó hơi dài dòng so với phương pháp trên đây.

N.V.M

Bài 8/138. Cho $2n$ số dương $m_1, m_2, \dots, m_n, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Hãy chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^n m_i^k / a_i^m \geq \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^k / n^{k-m-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^m$$

với mọi m, k nguyên và $0 \leq m \leq k-1$.

Lời giải: Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki suy rộng (xem báo TH và TT số 6 năm 1983), ta có: với m, n số dương $a_{ij}, i=1, m; j=1, n$ và m, n là các số nguyên không âm thì:

$$\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \right)^m \leq \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức này ta được:

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^k = \left(\sum_{i=1}^n \underbrace{1 \dots 1}_{k-m-1} \underbrace{\sqrt[m]{a_i} \dots \sqrt[m]{a_i}}_m \underbrace{\sqrt[m]{m_i^k/a_i^k}}_1 \right)^k$$

$$\leq \left(1^k + \dots + 1^k \right)^{k-m-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m \times$$

$$\times \left(\frac{m_1^k}{a_1^m} + \dots + \frac{m_n^k}{a_n^m} \right) = n^{k-m-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^m \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^n m_i^k / a_i^m \right).$$

Vậy có:

$$\sum_{i=1}^n m_i^k / a_i^m \geq \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^k / n^{k-m-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^m \text{ (dpcm)}.$$

Nhận xét: Các bạn: Hồ thị Hà (12CT, ĐHTH HN), Nguyễn Ngọc Văn Khoa, Nguyễn Hùng Sơn,

Trần Quốc, Nguyễn Hồ Anh Nguyễn (Phan Chu Trinh, Đà Nẵng) có lời giải gần giống trên. Các bạn Nguyễn Quang Thái (11 CT, ĐHSPT Hà Nội), Trang Lâm Bằng (12 CT, Lê Hồng Phong, Hồ Chí Minh) dùng kiến thức hàm lẻ cũng cho lời giải tương đối tốt.

T.V.T.

Bài 9/138: Trên một phẳng có n điểm $P_1, P_2, \dots, P_n$. Người ta nối một số điểm với nhau bằng m màu khác nhau, sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

- (1) Mỗi điểm P có số chẵn $v(P)$ cạnh xuất phát.
- (2) Từ điểm P tùy ý ta có thể đi theo các cạnh để đến một điểm Q tùy ý khác.
- (3) Với mỗi điểm P và mỗi màu thứ s ($1 \leq s \leq m$), gọi $v_s(P)$ là số cạnh xuất phát từ P và được tô màu thứ s thì: $v_s(P) \leq (1/2)v(P)$.

Chứng minh rằng toàn bộ hệ thống điểm $P_1, P_2, \dots, P_n$ và các cạnh được tô bởi m màu này lập thành 1 hình mà ta có thể vẽ bởi một nét sao cho nét vào và nét ra tại 1 đỉnh của hình được tô bởi 2 màu khác nhau.

Lời giải: Từ các điều kiện (1) và (2) của bài toán suy ra hình tạo thành có thể vẽ bởi một nét kín (bài toán Ơle). Ta gọi mỗi nét vào và nét ra tại 1 đỉnh của hình là một đoạn đôi và đoạn đôi có nét vào và nét ra cùng màu được gọi là đoạn đôi hồng.

Xét tập hợp A tất cả các đường một nét kín sinh ra bởi tất cả các cách vẽ hình đã cho bằng một nét kín. Giả sử tất cả các phần tử của A đều có ít nhất một đoạn đôi hồng.

Theo lập luận ở trên ta thấy A không rỗng và hơn nữa do n hữu hạn nên tập A chỉ có hữu hạn phần tử. Do vậy ta có thể chỉ ra một phần tử của A có số đoạn đôi hồng nhỏ nhất. Gọi phần tử đó là K :

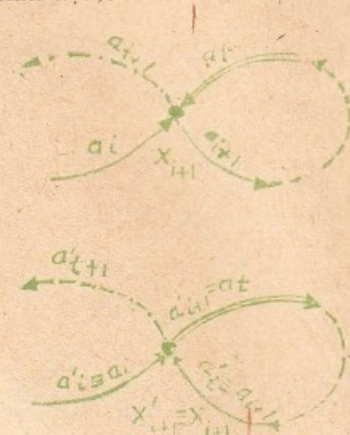
$K = (X_1, a_1, X_2, a_2, \dots, X_q, a_q, X_{q+1} = X_1)$ trong đó: $X_1, X_2, \dots, X_n$ là các đỉnh $P_1, P_2, \dots, P_n$ (lẽ dĩ nhiên các X_i khác nhau có thể cùng ký hiệu 1 đỉnh P_j), còn $a_1, a_2, \dots, a_q$ là các cạnh của hình đã cho.

Giả sử K chứa đoạn đôi hồng (a_i, X_{i+1}, a_{i+1}) bởi màu s nào đó. Từ điều kiện (3) suy ra tồn tại một đoạn đôi khác $(a_t, X_{t+1} = X_{t+1}, a_{t+1})$ của K cũng đi qua X_{i+1} mà các cạnh a_t và a_{t+1} được tô bởi màu khác s . Không mất tổng quát, giả sử $t > i$. Khi đó xét đường một nét kín K' như sau:

$K' = (X'_1 = X_1, a'_1 = a_1, X'_2 = X_2, \dots, X'_i = X_i, a'_i = a_i, X'_{i+1} = X_{i+1}, a'_{i+1} = a_t, X'_{i+2} = X_t, a'_{i+2} = a_{t-1}, X'_{i+3} = X_{t-1}, \dots,$

$X'_i = X_{i+2}, a'_i = a_{i+1}, X'_{i+1} = X_{i+1}, a'_{i+1} = a_{t+1}, X'_{i+2} = X_{t+2}, \dots, X'_q = X_q, a'_q = a_q, X'_{q+1} = X_{q+1} = X_1 = X'_1)$

Ta thấy $K' \in A$ và K' có số đoạn đôi hồng ít hơn số đoạn đôi hồng của K ít nhất là 1. (Xem hình minh họa).



Điều này trái với giả thiết K là phần tử của A có số đoạn đôi hồng nhỏ nhất. Mâu thuẫn này chứng tỏ tồn tại ít nhất một phần tử của A có số đoạn đôi hồng bằng 0. Nói một cách khác: hình tạo thành có thể vẽ bởi một nét kín sao cho nét vào và nét ra tại 1 đỉnh được tô bởi 2 màu khác nhau (dpem).

N.K.M.

Bài 10/138. Gọi MN là đường kính tùy ý của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC và AA_1, BB_1, CC_1 là các dây cung của đường tròn đó và cùng vuông góc với MN . Chứng minh:

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = NA^4 + NB^4 + NC^4 = A_1A^4 + B_1B^4 + C_1C^4.$$

Lời giải: Dựa theo Cao Vĩ Ba, (11CT, Đại học Tổng hợp, Hà Nội).



Trước hết ta chứng minh rằng $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$ (1). Thật vậy, không mất tổng quát ta giả sử $M \in AB$. Đặt $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Trên CM lấy điểm D sao cho $CD = MA$, dễ dàng chứng minh được tam giác MDB là đều.

Từ đó ta có: $c = a + b$ và $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + ab) = 2(a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ)$.

nên $a^2 + b^2 + c^2 = 2AB^2 = 6R^2$ Từ đó suy ra:
 $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2a^2b^2 - 2c^2(a^2 + b^2)$
 $= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2[3R^2 - (a^2 + b^2)]^2 - 2c^2(a^2 + b^2)$
 $= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 18R^4 + 12R^2(a^2 + b^2) - 2(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)$
 $= 36R^4 - 18R^4 + 12R^2(a^2 + b^2) - 2(a^2 + b^2)6R^2 = 18R^4$

Vậy (1) được chứng minh.

Mặt khác do B_1, C_1 là điểm đối xứng qua MN của B, C nên giao điểm I của B_1C và C_1B nằm trên MN . Ta có

$B_1BC_1 = BB_1C = BAC = 60^\circ \Rightarrow B_1IB = AC_1B = 60^\circ \Rightarrow AC_1 \parallel B_1C$. Từ đó suy ra $B_1A = C_1C$ (2). Từ

$BB_1 \parallel AA_1$ suy ra $\widehat{A_1B_1} = \widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{A_1A} = \widehat{B_1C}$ hay $A_1A = B_1C$ (3). Từ (2) và (3) ta có

$$A_1A^4 + B_1B^4 + C_1C^4 = B_1C^4 + B_1B^4 + B_1A^4 \quad (4)$$

Cuối cùng, ta thấy (1) vẫn đúng nếu ta thay M bởi N hoặc B_1 . Nghĩa là ta cũng có.

$$NA^4 + NB^4 + NC^4 = B_1A^4 + B_1B^4 + B_1C^4 = 18R^4 \quad (5)$$

(1), (4) và (5) cho ta đẳng thức kép cần chứng minh.

Nhận xét: Các bạn Trần Quân, Nguyễn Hồ Anh Nguyên, Nguyễn Ngọc Văn Khoa (11CT, Phan Chu Trinh, Đà Nẵng), Đỗ Duy Khánh (11CT, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang), Nguyễn Quang Thái (11CT, Đại học Sư phạm Hà Nội 1) có lời giải tốt. Các bạn Lê Hoan Quyền (Nha Trang) giải bằng phương pháp tọa độ, Trần Duy Hình (Quy Nhơn) giải bằng phương pháp vectơ cũng cho lời giải tương đối tốt. Bạn Lâm Tùng Giang dùng phương pháp lượng giác khá độc đáo song đáng tiếc là thiếu chính xác.

T.V.T



ĐỀ THI CHÀO MỪNG CÁC NGÀY LỄ LỚN TRONG NĂM 1985

Bài 1/141. Cho k, l là hai số tự nhiên, $k > l$, thỏa mãn điều kiện sau: Với mọi số tự nhiên m : $(11m - 1, k) = (11m - 1, l)$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n sao cho $k = 11^n \cdot l$ ((a, b) ký hiệu ước chung lớn nhất của a và b).

Đỗ Đức Thái

Bài 2/141. a, b, c, d là bốn số dương thỏa mãn $a \leq b \leq c \leq d$ và $bd \leq 1$. Chứng minh rằng $4/(1 + \sqrt[4]{abcd}) \geq 1/(1+a) + 1/(1+b) + 1/(1+c) + 1/(1+d)$.

Nguyễn Minh Đức

Bài 3/141. Cho dãy số thực $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ với $x_0 = 0, x_n \leq 1$ thỏa mãn hệ thức $x_{k+1} = x_k + \sqrt{1 - x_k^2}/1991, k = 0, 1, \dots, n-1$. Hỏi có thể $n = 1985$ hay không?

Lê Đình Thịnh

Bài 4/141. Các số a, b, c phải thỏa mãn điều kiện gì để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} ax^3 - bx + c = 0 \\ x^6 + x^4 + x^2 + a^2 + b^2 + ab + c = 0. \end{cases}$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 5/141. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1}/C_n^k) = (u_1 + u_{n+1})/2 \cdot (n+1)/2^{n+1}.$$

$\sum_{k=1}^{n+1} (2^k/k)$ trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n ; $\{u_k\}$ là cấp số cộng.

Tạ Văn Tư

Bài 6/141. Xét các tứ giác phẳng có các cạnh a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $\max \{ab + cd, ac + bd, ad + bc\} = 1$. Tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

Nguyễn Văn Mậu

Bài 7/141. Tìm các giá trị của k để tồn tại một hàm số liên tục $f(x)$ sao cho $f(f(x)) = kx^{25}$ với mọi giá trị thực của x .

Đỗ Bá Khang

Bài 8/141. Cho 6 điểm trên mặt phẳng. Chứng minh rằng tỷ số giữa khoảng cách lớn nhất với khoảng cách bé nhất giữa các điểm đó không nhỏ hơn $\sqrt{3}$.

Đỗ Bá Khang

Bài 9/141. Trong hình vuông cạnh 1 cho 1985 điểm. Chứng minh rằng từ mỗi điểm trong số các điểm đã cho có một con đường đi qua

tất cả các điểm còn lại rồi trở về điểm xuất phát với độ dài nhỏ hơn 100.

Nguyễn Đồng Yên

Bài 10/141 a) Chứng minh rằng trong một hình hộp trung điểm các cạnh không xuất phát từ hai đầu mút của một đường chéo cho trước là các đỉnh của một lục giác phẳng có tâm đối xứng.

b) Tìm tất cả những hình hộp có tính chất là cả bốn lục giác phẳng ứng với tất cả các đường chéo của chúng là những lục giác đều.

Nguyễn Đăng Phất

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN THI VÀO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM 1984

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ

Câu 1* - Phương trình đã cho có nghĩa khi $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq (2k+1)\pi/2$ với k là số nguyên. Với điều kiện ấy, phương trình có thể viết là

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m \sin 2x.$$

Nhưng $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - (3/4)\sin^2 2x$, nên ta được phương trình

$$3\sin^2 2x + 4m \sin 2x - 4 = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x$. Với điều kiện trên ta có

$-1 < t < 1$. Vậy ta cần tìm m để phương trình

$$3t^2 + 4mt - 4 = 0 \quad (1)$$

có nghiệm thỏa mãn điều kiện

$$-1 < t < 1 \quad (2)$$

Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm t_1, t_2 trái dấu vì tích $t_1 t_2 = -4/3$. Gọi vế trái của phương trình (1) là $f(t)$.

Cách 1. Nghiệm của phương trình (1) không thỏa mãn điều kiện (2) khi $t_1 \leq -1 < 1 \leq t_2$. Vì hệ số đầu của $f(t)$ dương nên điều này xảy ra khi

$$\begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m-1 \leq 0 \\ 4m-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1/4 \leq m \leq 1/4$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn điều kiện (2), tức là phương trình đã cho có nghiệm, khi $m < -1/4$ hoặc $m > 1/4$. Từ đó ta thấy: $m \in (-1/4; 1/4)$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Cách 2. Nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện (2) trong các trường hợp sau:

a) $t_1 < -1 < t_2 < 1$ hoặc $-1 < t_1 < 1 < t_2$, muốn vậy

$$f(-1)f(1) < 0 \Leftrightarrow -(4m+1)(4m-1) < 0 \Leftrightarrow m < -1/4 \text{ hoặc } m > 1/4.$$

b) $-1 < t_1 < t_2 < 1$, điều này không xảy ra vì $t_1 t_2 = -4/3$.

c) $t_1 = -1 < t_2 < 1$, điều này không xảy ra vì nếu $t_1 = -1$ thì $t_2 = 4/3$.

d) $-1 < t_1 < 1 = t_2$, điều này không xảy ra vì nếu $t_2 = 1$ thì $t_1 = -4/3$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn điều kiện (2) nếu $m < -1/4$ hoặc $m > 1/4$. Ta cũng đi đến kết luận như trên.

Nhận xét: Tuyệt đại đa số thí sinh làm lần lượt phần 1) và 2) như đề ra. Khi làm phần 1) không ít thí sinh đã không từ điều kiện đề phương trình có nghĩa suy ra rằng phương trình vô nghiệm. Thậm chí một số thí sinh đã không tìm điều kiện để phương trình có nghĩa. Khi giải phần 2) khá nhiều thí sinh không biện luận được đầy đủ.

(*) Xem đề bài trang 13, Số 4 - 1984 Báo Toán học và Tuổi trẻ.

Câu II - Phương trình đầu của hệ có thể viết là $(x-y)(x^2+xy+y^2-m)=0$. Do đó hệ đã cho tương đương với hai hệ sau:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \quad (3), \quad \begin{cases} x^2+xy+y^2-m=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \quad (4)$$

Hệ (3) có nghiệm duy nhất $x=y=-1/2$.

$$(4) \Rightarrow \begin{cases} xy=1-m \\ x+y=-1 \end{cases}$$

Vậy x, y là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2+X+1-m=0$ (5)

Ta có $\Delta=4m-3$. Do đó:

Nếu $m < 3/4$, phương trình (5) vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ (4) vô nghiệm.

Nếu $m=3/4$, phương trình (5) có nghiệm kép $X_1=X_2=-1/2 \Rightarrow$ hệ (4) có nghiệm kép

$$x=y=-1/2.$$

Nếu $m > 3/4$, phương trình (5) có hai nghiệm $X_1=(-1+\sqrt{4m-3})/2; X_2=(-1-\sqrt{4m-3})/2$

$$\Rightarrow \text{hệ (4) có 2 nghiệm} \begin{cases} x=X_1 \\ y=X_2 \end{cases}; \begin{cases} x=X_2 \\ y=X_1 \end{cases}$$

Tóm lại:

Nếu $m < 3/4$, hệ đã cho có 1 nghiệm $x=y=-1/2$

Nếu $m=3/4$, hệ đã cho có 1 nghiệm bội ba $x=y=-1/2$.

Nếu $m > 3/4$, hệ đã cho có 3 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x=-1/2 \\ y=-1/2 \end{cases}; \begin{cases} x=X_1 \\ y=X_2 \end{cases}; \begin{cases} x=X_2 \\ y=X_1 \end{cases}$$

Do đó khi $m=3$, hệ có 3 nghiệm

$$\begin{cases} x=-1/2 \\ y=-1/2 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

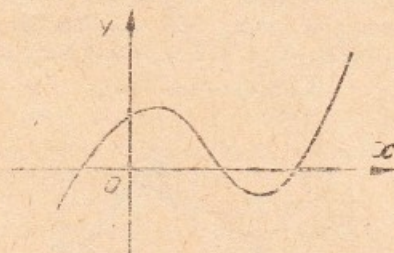
Nhận xét: Một số thí sinh không biết phân tích vế trái của phương trình đầu của hệ thành thừa số, mà rút y theo x từ phương trình sau của hệ rồi thay vào phương trình đầu để được một phương trình bậc ba, mà cách giải nó không đơn giản chút nào. Một số thí sinh khác lại chỉ suy từ hệ đã cho được một hệ (4) mà thôi, do đó đã bỏ mất một nghiệm.

Câu III - Hàm số $y=2x^3-3(m+2)x^2+6(m+1)x-3m+6$ được xác định với mọi $x, y'=6x^2-6(m+2)x+6(m+1), y'=0$ khi $x=1$ và $x=m+1$. Nếu $m \neq 0$ thì y' triệt tiêu và đổi dấu tại hai điểm phân biệt $x=1, x=m+1$. Vì vậy hàm số đạt cực trị tại hai điểm đó, các cực trị là $y(1)=8, y(m+1)=8-m^3$.

Muốn cho đồ thị của hàm số bậc ba đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì hai

điểm cực đại và cực tiểu của nó phải ở hai phía đối với trục hoành (xem hình vẽ), tức là:

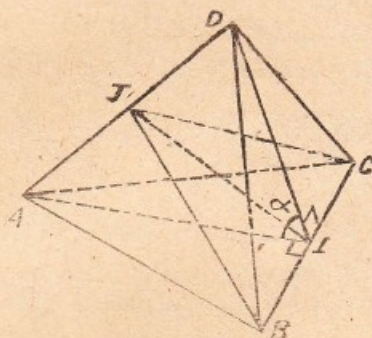
$$y(1) \cdot y(m+1) < 0 \Leftrightarrow 8-m^3 < 0 \Leftrightarrow m^3 > 8.$$



Vậy đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm khác nhau nếu $m > 2$.

Nhận xét: Nhiều thí sinh không giải được bài này. Một số thí sinh khi giải bài này đã không nhận xét rằng hàm số chỉ có cực trị khi $m \neq 0$.

Câu IV - 1) Trong tam giác cân ABC ta có $BC \perp AI$. Trong tam giác cân DBC ta có $BC \perp DI$, do đó $BC \perp (ADI)$ nên $BC \perp AD$.

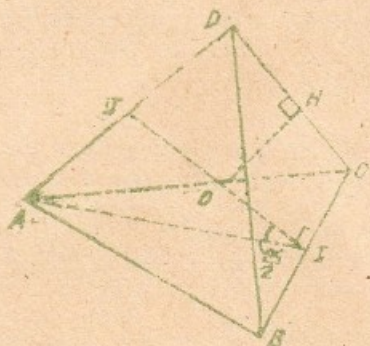


IJ là đường vuông góc chung của AD và BC khi và chỉ khi $IJ \perp AD$. Khi ấy tam giác IAD có IJ là trung tuyến đồng thời là đường cao nên là tam giác cân $IA=ID$. Hai tam giác vuông AIB, DIB có IB chung và $IA=ID$ nên chúng bằng nhau.

Suy ra $AB=DB$ hay $b=c$. Vậy IJ là đường vuông góc chung của BC và DB khi $b=c$. Khi ấy $AD \perp IJ$ và theo trên $AD \perp BI$ nên $AD \perp (BJC)$, $AD \perp JC$. Vì $\angle CID = \angle CJD = 90^\circ$ nên hình cầu đường kính CD đi qua I, J .

2) Vì $BC \perp (ADI)$ nên thể tích phải tìm $V = \frac{1}{3} dt(ADI) \cdot BC$. Vì $AI \perp BC, DI \perp BC$ nên $AID = \alpha$ dt $(ADI) = (1/2) \cdot IA^2 \sin \alpha$. Trong tam giác vuông AIB ta có $AI = \sqrt{b^2 - a^2/4} \Rightarrow dt(ADI) = (1/8) \cdot (4b^2 - a^2) \sin \alpha$.
 $V = (1/24) a (4b^2 - a^2) \sin \alpha$.

3) Gọi O là điểm giữa của IJ . Kẻ $OH \perp CD$.
Đề hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với CD , ta phải có $OI = OJ = OH$. Khi ấy hai tam giác vuông OIC và OHC bằng nhau vì có cạnh huyền OC chung và $OI = OH$, do đó $CH = CI$. Tương tự, hai tam giác vuông OJD và OHD bằng nhau, nên $DH = DJ$. Vậy $CH + HD = CI + DJ$ hay
 $CI + DJ = CD$ (6)



Khi $b = c = a\sqrt{3}/2$ thì $AI = \sqrt{b^2 - a^2/4} = a\sqrt{2}/2$.

Trong tam giác vuông AIJ ta có $AJ = AI \cdot \sin(\alpha/2) = (a\sqrt{2}/2) \cdot \sin(\alpha/2)$

Thay $CI = a/2$, $DJ = AJ$, $CD = a\sqrt{3}/2$ vào (6), ta được

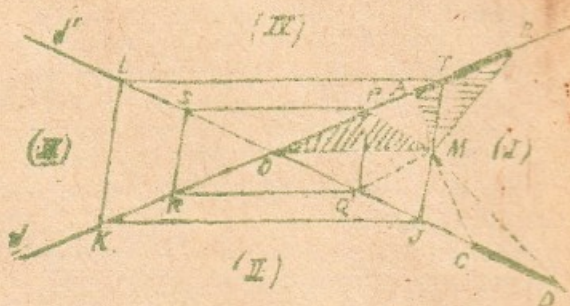
$$a/2 + (a\sqrt{2}/2) \cdot \sin(\alpha/2) = a\sqrt{3}/2 \Rightarrow \sin(\alpha/2) = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2}$$

Vì $0 < (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2} < 1/\sqrt{2}$ nên $0 < \alpha/2 < \pi/4$ hay $0 < \alpha < \pi/2$, giá trị chấp nhận được.

Nhận xét. Đa số thí sinh chỉ làm được phần 1), chỉ có khá ít thí sinh làm được phần 3).

Câu V - Gọi O là giao điểm của d, d' . Lấy trên d hai điểm P, R sao cho $OP = OR = AB$ và

lấy trên d' hai điểm Q, S sao cho $OQ = OS = CD$. Giả sử M nằm trong góc (I) . Ta có $dt(MAB) = dt(MOP)$, $dt(MCD) = dt(MOQ) \Rightarrow dt(MAB) + dt(MCD) = dt(MPOQ)$. Vì $dt(MAB) + dt(MCD)$ không đổi, giả sử nó bằng s , nên $dt(MPOQ) = s$. Tam giác OPQ có định nên $dt(OPQ) = s_0$ không đổi.



Giả sử $s > s_0$. Vì $dt(MPOQ) = dt(OPQ) + dt(MPQ)$ nên $dt(MPQ) = s - s_0$ không đổi. Vì P, Q cố định $dt(MPQ) = s - s_0$, nên M chạy trên đoạn thẳng IJ song song với PQ và cách PQ một khoảng $h = 2(s - s_0)/PQ$. Đảo lại, giả sử M là một điểm bất kỳ trên đoạn IJ . Ta có
 $dt(MPOQ) = dt(OPQ) + dt(MPQ) = s_0 + (1/2)PQ \cdot h = s_0 + s - s_0 = s$

Nhưng $dt(MAB) = dt(MOP)$, $dt(MCD) = dt(MOQ)$ nên $dt(MAB) + dt(MCD) = dt(MPOQ) = s$. Vậy quỹ tích những điểm M thuộc góc (I) sao cho $dt(MAB) + dt(MCD) = s$ là đoạn thẳng IJ . Lập luận tương tự cho trường hợp điểm M thuộc các góc (II) , (III) , (IV) , ta thấy rằng quỹ tích phải tìm là bốn cạnh của hình bình hành $IJKL$ có đường chéo nằm trên d, d' .

Nếu $s < s_0$ thì quỹ tích phải tìm là bốn cạnh của hình bình hành $IJKL$ nằm trong hình $PQRS$, còn nếu $s = s_0$ thì quỹ tích chính là bốn cạnh của hình bình hành $PQRS$.

TOÁN HỌC và ĐỜI SỐNG



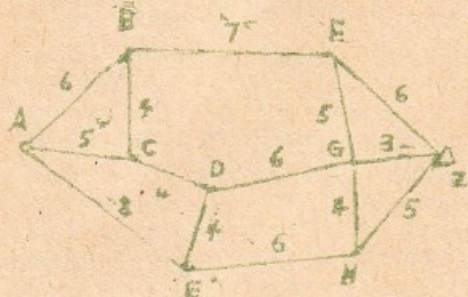
BƯỜNG Đİ NÀO NHANH NHẤT

TRẦN VŨ THIỆU

TRONG đời sống hàng ngày, khi cần đi từ một địa điểm này tới một địa điểm khác ta thường phải suy nghĩ, tính toán để tìm ra một đường đi nhanh nhất. Trong thực tế có rất nhiều vấn đề mà khi giải quyết chúng cũng dẫn đến việc tìm một đường đi như thế. Chẳng hạn khi cần vận chuyển nhanh chóng một thứ hàng nào đó (hoa quả, rau tươi, thịt cá...) từ nơi sản

xuất đến nơi tiêu thụ hay khi cần tiếp tế gấp lương thực, vũ khí, đạn dược... từ hậu phương ra tiền tuyến. Trong những tình huống tương tự, vấn đề được đặt ra như sau: Cho trước một mạng lưới đường giao thông, trên mỗi đoạn có ghi rõ thời gian cần thiết để đi trên đoạn đường đó (xem hình vẽ) thời gian đi từ A tới B tốn 6 giờ, từ A tới C tốn 5 giờ, v.v...)

Điểm A (gọi là *nguồn*) và điểm Z (gọi là *đích*).
Hãy tìm một đường đi nhanh nhất từ nguồn A tới đích Z?



Với mạng lưới đường đơn giản thì vấn đề này không có gì khó, chỉ việc tìm ra tất cả các đường đi có thể có từ A đến Z, rồi so sánh thời gian đi trên các đường ấy với nhau là có ngay đường đi nhanh nhất. Nhưng với những mạng lưới đường phức tạp thì cách độ không còn thiết thực nữa, vì nó mất rất nhiều thời gian và không tránh khỏi nhầm lẫn, sai sót.

Phương pháp sau đây sẽ giúp giải quyết vấn đề đó một cách khá đơn giản và có thể áp dụng cho cả những mạng lưới có hàng nghìn đường đi khác nhau mà vẫn cho kết quả khá nhanh chóng. Phương pháp này có tên gọi là phương pháp «*gán nhãn*». Ý của phương pháp như sau: ta hãy gọi các ngã ba, ngã tư, v.v... là những «*nút*» (ví dụ nút C, nút E..., trong hình vẽ) và lần lượt gán cho mỗi nút một số gọi là «*nhãn*» như sau: ta cho nhãn của A bằng 0; sau đó trong số các đoạn đường đi từ A ta chọn đoạn có thời gian nhỏ nhất (ở đây là $AC = 5$), rồi gán nhãn cho nút C bằng nhãn của A cộng với thời gian nhỏ nhất này: $0 + 5 = 5$. Tiếp đó trong số các đoạn đường nối một nút đã có nhãn (A hoặc C) với một nút chưa được gán nhãn ta lại chọn đoạn sao cho thời gian của nó cộng với nhãn của nút đã được gán nhãn là nhỏ nhất, đó là đoạn $CB = CD = 4$, và gán nhãn cho nút B và D bằng nhãn của nút C cộng với thời gian của đoạn tương ứng: $5 + 4 = 9$, v.v... Ta cứ tiếp tục làm như vậy cho đến khi đích Z được gán nhãn. Nhãn của đích Z chính là thời gian của đường đi nhanh nhất từ A tới Z. Nói chung, nhãn của một nút (đã được gán nhãn) là thời

gian của đường đi nhanh nhất từ A tới nút đó. Để dễ xây dựng đường đi cần tìm, mỗi lần gán nhãn cho một nút ta cần ghi lại nút kia của đoạn đường mà ta đã dùng để gán nhãn cho nút đó. Chẳng hạn, ứng với nút C là A, ứng với nút B hoặc D là C, v.v... Nhờ cách ghi này, đi ngược từ Z ta sẽ tìm ra đường đi trở về A và đó là đường đi nhanh nhất cần tìm.

Quá trình tìm đường đi nhanh nhất từ A đến Z trong mạng vẽ ở trên được tóm tắt như sau:

Bước	Nút được gán nhãn	Nhãn của nút	Nút đã dùng để gán nhãn
1	A	0	
2	C	$0 + 5 = 5$	A
3	B	$5 + 4 = 9$	C
	D	$5 + 4 = 9$	C
4	E	$9 + 4 = 13$	D
5	G	$9 + 6 = 15$	D
	H	$13 + 6 = 19$	E
6	Z	$15 + 3 = 18$	G

Dựa vào bảng trên ta biết được thời gian của đường đi ngắn nhất từ nguồn A tới đích Z bằng 18 (giờ) và đường đi cần tìm qua các nút Z, G, D, C, A hay theo chiều thuận:

$$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow Z.$$

Dùng phương pháp tương tự có thể giải quyết vấn đề tìm đường đi dài nhất nối hai nút cho trước trên một mạng lưới đường đã biết. Vấn đề này thường gặp khi cần tính toán thời hạn hoàn thành các dự án theo «*phương pháp sơ đồ mạng*».

Có những vấn đề tưởng như rất xa lạ đối với vấn đề đã nêu ở trên, nhưng cũng có thể giải quyết bằng cùng một phương pháp để tìm đường đi nhanh nhất. Chẳng hạn, cần phải truyền tin tức qua một mạng lưới thông tin liên lạc gồm nhiều khâu, ở mỗi khâu đều có một phần nguy cơ tin tức bị lộ và nguy cơ đó ở mỗi khâu có thể khác nhau. Cho nên tùy theo cách chọn đường truyền tin mà tin tức được bảo đảm an toàn nhiều hay ít. Làm sao chọn được đường truyền tin an toàn nhất (tin tức được truyền đến nơi đến chốn và ít có nguy cơ bị lộ nhất)?

VỀ BÀI TOÁN SỐ 1/136

(Tiếp theo trang 15)

Bài toán 3: Cho a, b, c, m là các số nguyên khác 0 và $(b, m) = 1$. Cho r_1, r_2 và k là các số nguyên thỏa mãn:

$$r_2 - ar_1 = c + km$$

Lập dãy số $\{x_n\}$ như sau: $x_1 \equiv r_1 \pmod{m}$, $x_2 \equiv r_2 \pmod{m}$ và $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} + c$, $\forall n \geq 3$.

Chứng minh rằng, tồn tại một số của dãy chia hết cho m .

Việc giải bài toán này xin nhường cho các bạn.

Cuối cùng tôi muốn nói với các bạn rằng, từ bài toán 3, bằng cách chọn các số a, b, c, m, r_1, r_2 và k thích hợp, các bạn sẽ có những bài toán mà về mặt hình thức có những ý nghĩa thực y muốn.

Trao đổi với bạn đọc

VỀ BÀI TOÁN SỐ 1/136

NGUYỄN KHẮC MINH

TRONG mục «Đề ra kỳ này» của báo TH và TT số 136 năm 1984 có bài toán sau (bài 1/136):

Bài toán 1:

Cho dãy số $\{x_n\}$ như sau: $x_1 = 20$, $x_2 = 100$ và $x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} - 1964$, với một $n \geq 3$.

Chứng minh rằng: tồn tại một số của dãy chia hết cho 1984.

Bằng cách áp dụng nguyên lý Dirichlet ta có được lời giải của bài toán trên như đã trình bày trong báo TH và TT số 139 (mục «Giải bài kỳ trước»). Hơn thế, nguyên lý Dirichlet còn gợi ý cho chúng ta hướng mở rộng điều khẳng định của bài toán 1. Nhận xét thấy rằng, tập hợp vô hạn các số dư trong phép chia các số hạng của dãy $\{x_n\}$ cho 1984 chỉ nhận một số hữu hạn các giá trị khác nhau (nhiều nhất là 1984 giá trị) và trong đó chắc chắn có 1 giá trị bằng 0. Do vậy, theo nguyên lý Dirichlet, chắc chắn có ít nhất 2 số dư cùng nhận 1 giá trị nào đó. Từ đây nảy sinh một câu hỏi: có thể xây ra trường hợp giá trị đó chính là giá trị bằng 0 và do dãy $\{x_n\}$ có vô hạn số, số dư nhận giá trị này là vô hạn hay không? Nói một cách khác, ta cần kiểm định tính đúng đắn của bài toán sau:

Bài toán 2: Với điều kiện của bài toán 1. Chứng minh rằng tồn tại vô số số của dãy chia hết cho 1984.

Bỏ qua thứ tự trình bày, xin nói ngay với các bạn rằng điều khẳng định của bài toán 2 hoàn toàn chính xác.

Phần lớn các bạn tham gia giải và gửi bài về Tòa soạn không chỉ dừng ở việc giải bài toán 1, mà đều giải bài toán 2. Tuy nhiên, lời giải của các bạn khá dài và phức tạp. Ở đây trình bày một lời giải gọn và đơn giản hơn để các bạn cùng tham khảo.

Lời giải bài toán 2: Từ điều kiện của đầu bài ta có $\forall n \geq 4$:

$$\begin{aligned}x_n - 5x_{n-1} &= -(x_{n-1} - 5x_{n-2}) - 1964, \\&= -(x_{n-2} - 5x_{n-3}) - 1964 - 1964 \\&= x_{n-2} - 5x_{n-3}\end{aligned}$$

suy ra: $\forall k \geq 2$

$$\begin{aligned}x_{2k} - 5x_{2k-1} &= x_{2k-2} - 5x_{2k-3} = \dots = \\&= x_2 - 5x_1 = 0.\end{aligned}\quad (1)$$

$$x_{2k-1} - 5x_{2k-2} = x_{2k-3} - 5x_{2k-4} = \dots =$$

$$\begin{aligned}&= x_3 - 5x_2 = 4.100 + 5.20 - 1964 - 5.100 = \\&= -1964.\end{aligned}$$

Do đó, $\forall k \geq 2$

$$\begin{aligned}x_{2k} - 5^{2k-1} x_1 &= \sum_{i=2}^{2k} 5^{2k-i} (x_i - 5x_{i-1}) = \\&= -1964 (5^{2k-3} + 5^{2k-5} + \dots + 5^3 + 5), \\&= -5.1964 (5^{2k-4} + 5^{2k-6} + \dots + 5^2 + 1) = \\&= -5.1964 \sum_{i=2}^k 5^{2(k-i)}.\end{aligned}$$

Thay $x_1 = 20$ vào biểu thức trên ta được:

$$\begin{aligned}x_{2k} &= 20 \left[5^{2k-1} - 491 \sum_{i=2}^k 5^{2(k-i)} \right] = \\&= 20 \left[5^{2k-1} + 5 \sum_{i=2}^k 5^{2(k-i)} - 496 \sum_{i=2}^k 5^{2(k-i)} \right] \\&= 20 \left[5 \sum_{i=1}^k 5^{2(k-i)} - 496 \sum_{i=2}^k 5^{2(k-i)} \right] \\&= 20 \left[\frac{5(5^{2k} - 1)}{5^2 - 1} - 496 \sum_{i=2}^k 5^{2(k-i)} \right] \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$x_{2k-1} = 4 \left[\frac{5(5^{2k} - 1)}{5^2 - 1} - 496 \sum_{i=2}^k 5^{2(k-i)} \right] \quad (3)$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng với $k = 48p$, $p \geq 1$ thì $x_{2k} \vdots 1984$ và $x_{2k-1} \vdots 1984$.

Trước hết ta chứng minh:

$$(5^{2k} - 1) \vdots 3 \cdot 31 \cdot 2^7 \text{ với } k = 48p, p \geq 1.$$

Thật vậy, vì

$$\begin{aligned}5^2 &= 25 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 5^{96p} \equiv 1 \pmod{3} \\&\text{hay } (5^{96p} - 1) \vdots 3\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\text{Vì } 5^3 &\equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow 5^{96p} \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow \\&\Rightarrow (5^{96p} - 1) \vdots 31\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}\text{Ta lại có } 5^4 &\equiv 1 \pmod{2^4} \Rightarrow 5^4 \equiv \\&= 2^4 \cdot m + 1 \Rightarrow 5^8 = (5^4)^2 = \\&= (2^4 \cdot m + 1)^2 = \\&= (2^4 \cdot m)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot m + 1 \\&\Rightarrow 5^8 \equiv 1 \pmod{2^5}\end{aligned}$$

Bằng cách suy luận tương tự ta cũng có:

$$(5^8)^2 = 5^{16} \equiv 1 \pmod{2^6}$$

$$\text{và } (5^{16})^2 = 5^{32} \equiv 1 \pmod{2^7} \Rightarrow 5^{96} \equiv 1 \pmod{2^7}$$

$$\text{hay } (5^{96} - 1) : 2^7 \quad (6)$$

Do 3, 31 và 2^7 đôi một nguyên tố cùng nhau nên từ (4), (5) và (6) suy ra: $(5^{96} - 1) : 3 \cdot 31 \cdot 2^7$

$$\text{Mặt khác vì } 3 \cdot 31 \cdot 2^7 = 24 \cdot 496$$

$$\text{nên } (5^{96} - 1) : 24 \cdot 496 \quad (7)$$

Từ (3) và (7) suy ra: với $k = 48p$, $p \geq 1$ thì $x_{2k-1} : 1496$, tức $x_{2k-1} : 1984$. Đồng thời do $x_{2k} = 5x_{2k-1}$ nên ta cũng có $x_{2k} : 1984$ với $k = 48p$, $p \geq 1$.

Tóm lại, $\forall p \geq 1$ thì $x_{96p-1} : 1984$

và $x_{96p} : 1984$

Kết quả nhận được của các bạn gửi bài tới Tòa soạn hoặc không chính xác hoặc là những trường hợp riêng của kết quả nhận được trong lời giải trên.

Hướng mở rộng bài toán 1 như đã trình bày ở trên không phải là duy nhất. Bài toán 1 còn có thể mở rộng theo một hướng khác. Cụ thể từ bài toán 1 ta có bài toán 3 sau:

(Xem tiếp trang 13)



TRÒ CHƠI ĐOÁN SỐ

TRÒ chơi này có nhiều tên gọi khác nhau như cầm năm, sáu màu hoặc khéo nghĩ. Chúng ta hãy đặt tên cho nó là trò chơi đoán số và qui định luật chơi như sau: Người đồ nghĩ một số có bốn chữ số, mỗi chữ số có thể nhận giá trị từ 1 đến 6 (6 màu). Bạn được phép đoán số đó trong vòng sáu bước. Ở mỗi bước, bạn đưa ra một số bốn chữ số để thăm dò. Người đồ sẽ báo cho bạn biết kết quả thăm dò của bạn. Nếu bạn đoán đúng giá trị của một chữ số nào đó nhưng sai vị trí thì sẽ được báo một dấu trừ (-); nếu bạn đoán đúng một chữ số cả về giá trị và vị trí thì được báo một dấu cộng (+). Thí dụ:

Người đồ nghĩ số 5 2 3 6 (và che nó đi)

Bạn đoán là 3 5 5 6

thì người đồ sẽ báo: 1+, 2- (1 chữ số đúng hoàn toàn là 6; 2 chữ số đúng giá trị là 3 và 5).

Trò chơi này đòi hỏi sự suy luận chặt chẽ, có thể nói mỗi lần chơi là một lần rèn luyện tư duy, lập luận có lý. Một người đồ có thể chơi với nhiều người đoán cùng một lúc (từng người đoán độc lập với nhau).

Chúng ta hãy xét một ví dụ: Sau 4 bước thăm dò, người đoán thu được kết quả như sau (xem bảng 1)

Đến đây chúng ta có thể đoán được số đã nghĩ bằng lập luận như sau (Chúng ta sẽ gọi một chữ số đúng hoàn toàn là chữ số chắc đúng)

và gọi chữ số là đúng nếu như nó đúng về giá trị hoặc đúng hoàn toàn):

Bảng 1

Bước	Số thăm dò	Kết quả
1	1 2 3 4	1 - ✓
2	5 6 1 6	2 +, 1 -
3	5 6 4 3	1 +, 2 -
4	5 4 6 3	3 +

Theo bước 3 và bước 4 ta thấy việc đổi chỗ giữa 4 và 6 đã làm tăng thêm hai dấu + vậy các chữ số 4, 6 ở bước 4 là hai chữ số chắc đúng. Kết quả ở bước 4 là 3+ cho ta thấy trong hai chữ số 5 và 3 phải có một chữ số sai và một chữ số chắc đúng. Vì 4 là chữ số đúng nên theo kết quả ở bước 1 (1- cho số 1, 2, 3, 4) ta thấy 1, 2, 3 là các chữ số sai. Vậy 5 là chắc đúng. Khi đó theo bước 1 số đã nghĩ phải có dạng 5 4 6 ? Theo kết quả ở bước 2 (2+, 1-) số thăm dò 5 6 1 6 có 3 chữ số đúng. Nhưng 1 là sai nên 5, 6, 6 phải là những chữ số đúng. Vậy số đã nghĩ là 5 4 6 6.

Trước khi thử chơi, xin mời các bạn phân tích thí dụ sau (Bảng 2)

Bảng 2

Bước	Số thăm dò	Kết quả
1	1 ① 1 1	2 +
2	1 1 2 2	1 +, 1 -
3	1 3 1 3	3 -
4	4 ② 3 1	2 +, 1 -
5	5 ③ ④ ①	2 +, 1 -

NGUYỄN XUÂN HUY



Quang cảnh Hội trường
buổi lễ (Hội trường lớn
Viện khoa học Việt Nam).

Đồng chí Phó Tổng biên
tập đọc báo cáo 20 năm
hoạt động của báo.

Ảnh Nam Hải



1



2



3



4



5



6



Ảnh Nam Hải

Ảnh bên: Các bạn đoạt giải nhất

Lớp 10: 1. Đỗ Duy Khánh 2. Nguyễn Tiến Dũng

Lớp 11: 3. Trần Duy Hùng 4. Lê Thanh Hà

Lớp 12: 5. Vũ Quý Dương 6. Đặng Vũ Giang