VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Số 140
6
1984

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó Tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói: 52825

ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ THỨC TỶ SỐ THỂ TÍCH

ĐỖ THANH SƠN

TRONG bài này chúng ta sẽ đề cập đến ứng dụng của một hệ thức hình học không gian. Hệ thức đó được phát biểu như sau:

Hệ thức: *Nếu một mặt phẳng cắt ba cạnh SA, SB, SC của một hình chóp tam giác SABC lần lượt tại các điểm A', B', C' thì*

$$\frac{V(SA'B'C')}{V(SABC)} = \frac{SA'}{SA} \times \frac{SB'}{SB} \times \frac{SC'}{SC} \qquad (1)$$

Với $V(SABC)$ là thể tích hình chóp $SABC$.

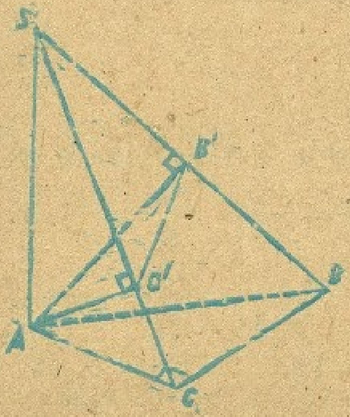
Việc chứng minh hệ thức (1) khá dễ dàng và xin nhường cho bạn đọc. Dưới đây thông qua một số bài toán, tôi muốn chỉ ra rằng sử dụng hệ thức (1), một số bài toán hình học có thể giải được khá gọn và hay.

Bài toán 1 Hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông cân ABC ($AC = BC$), cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và $SA = AB$. Mặt phẳng qua A vuông góc với SB cắt SB tại B', SC tại C'. Tính tỷ số thể tích của hai đa diện tạo thành do thiết diện cắt hình chóp $SABC$.

Giải: Đặt $AC = a$, khi đó $AB = a\sqrt{2} = SA$ và $SC = a\sqrt{3}$. Đặt V là thể tích hình chóp $SABC$, V_1 là thể tích hình chóp $SAB'C'$, $V_2 = V - V_1 \Rightarrow V_2/V_1 = V/V_1 - 1$, ta tìm V/V_1. Theo (1) ta có:

$V_1/V = SA/SA \times SB'/SB \times SC'/SC$ (*).

ta tính các tỷ số SB'/SB, SC'/SC.



Hình 1

Theo giả thiết $SB \perp (AB'C')$ nên $AB' \perp SB$, do $\triangle SAB$ cân nên $SB'/SB = 1/2$. Mặt khác

$BC \perp (SAC)$ nên $BC \perp AC'$, lại có $SB \perp AC'$. Vậy $AC' \perp (SBC) \Leftrightarrow AC' \perp SC$.

Xét tam giác vuông SAC: $SA^2 = SC' . SC \Rightarrow SA^2/SC^2 = SC'/SC \Rightarrow SC'/SC = 2a^2/3a^2 = 2/3$. Thay các tỷ số đã tính được vào (*) ta có:

$$V_1/V = 1/2 \times 2/3 = 1/3 \Rightarrow V/V_1 = 3$$
$\Rightarrow V_2/V_1 = 2$ (đpcm).

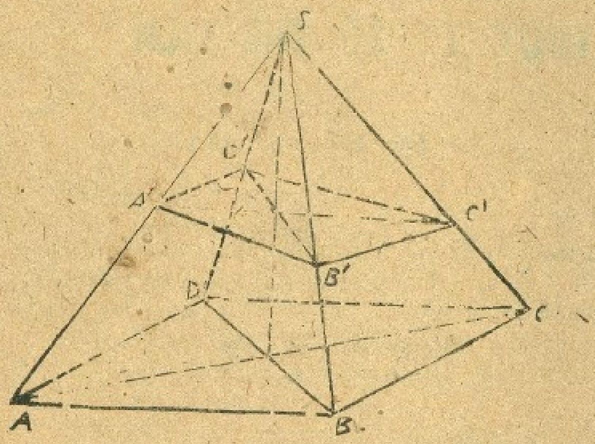
Chú ý: Hệ thức (1) chỉ đúng cho hình chóp tam giác. Đối với hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, v.v..., ta phải chia ra thành các hình chóp tam giác rồi mới được áp dụng hệ thức (1).

Bài toán 2. Hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Cắt hình chóp bằng mặt phẳng. Mặt phẳng này cắt SA, SB, SC, SD tại các điểm tương ứng A', B', C', D'. Chứng minh rằng:

$$SA/SA' + SC/SC' = SB/SB' + SD/SD' \qquad (**)$$

Nếu hình chóp $SABCD$ là đều, thì (**) trở thành:

$$1/SA' + 1/SC' = 1/SB' + 1/SD' \qquad (***)$$



Hình 2

Giải.

Xét hình chóp $SABC$ và $SADC$ ta có:

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} . \frac{SB'}{SB} . \frac{SC'}{SC} \qquad (I)$$

$$\frac{V_{SA'D'C'}}{V_{SADC}} = \frac{SA'}{SA} . \frac{SD'}{SD} . \frac{SC'}{SC} \qquad (II)$$

Vì $V_{SABC} = V_{SADC} = V/2$ (V là thể tích hình chóp $SABC$). Cộng (I) và (II) ta có:

$$\frac{V_{SA'B'C'D'}}{V/2} = \frac{SA'}{SA} . \frac{SB'}{SB} . \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} . \frac{SD'}{SD} . \frac{SC'}{SC} \qquad (III)$$

Xét hình chóp $SABD$ và $SBCD$ ta có:

$$\frac{V_{SA'B'D'}}{V_{SABD}} = \frac{SA'}{SA} . \frac{SB'}{SB} . \frac{SD'}{SD} \qquad (IV)$$

$$\frac{V_{SB'C'D'}}{V_{SBCD}} = \frac{SB'}{SB} . \frac{SC'}{SC} . \frac{SD'}{SD} \qquad (V)$$

Cộng (IV) và (V) ta được:

$$\frac{V_{SA'B'C'D'}}{V/2} = \frac{SA'}{SA} . \frac{SB'}{SB} . \frac{SD'}{SD} + \frac{SB'}{SB} . \frac{SC'}{SC} . \frac{SD'}{SD} \qquad (VI)$$

So sánh (III) và (VI) ta được

$$\frac{SA'}{SA} . \frac{SB'}{SB} . \frac{SC'}{SC} + \frac{SA'}{SA} . \frac{SD'}{SD} . \frac{SC'}{SC} = \frac{SA'}{SA} . \frac{SB'}{SB} . \frac{SD'}{SD} + \frac{SB'}{SB} . \frac{SC'}{SC} . \frac{SD'}{SD}$$

hay:

$$\frac{SA'}{SA} . \frac{SB'}{SB} . \frac{SC'}{SC} . \frac{SD'}{SD} \left(\frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'} \right) = \frac{SA'}{SA} . \frac{SB'}{SB} . \frac{SC'}{SC} . \frac{SD'}{SD} \left(\frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{SD}{SD'} + \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} + \frac{SA}{SA'}$$

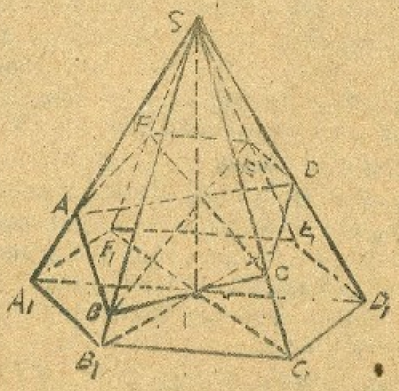
Nếu hình chóp là đều, thì ta có $SA = SB = SC = SD$ và vì vậy

$$1/SD' + 1/SB' = 1/SC' + 1/SA' \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài toán 3. Một mặt phẳng cắt tất cả 6 cạnh bên của một hình chóp lục giác đều tại các điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng

$1/SA + 1/SD = 1/SB + 1/SE = 1/SC + 1/SF$ (S là đỉnh hình chóp).

Giải:



Hình 3

Ta hãy áp dụng kết quả của bài toán 2. Gọi hình chóp đều đã cho là $SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Xét hình chóp $SA_1B_1D_1E_1$ với đáy là hình bình hành $A_1B_1D_1E_1$, thiết diện là $ABDE$ ta có:

$$SA_1/SA + SD_1/SD = SB_1/SB + SE_1/SE.$$

Vì $SA_1 = SD_1 = SB_1 = SE_1$, nên hệ thức trên viết lại:

$$1/SA + 1/SD = 1/SB + 1/SE.$$

Xét hình chóp $SA_1F_1D_1C_1$ ta có:

$$SA_1/SA + SD_1/SD = SF_1/SF + SC_1/SC \Rightarrow 1/SA + 1/SD = 1/SF + 1/SC.$$

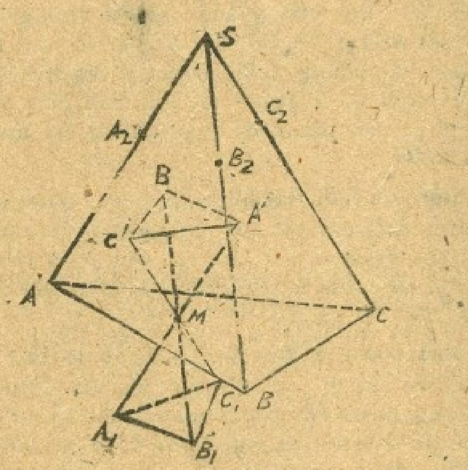
Hệ thức (1) có một hệ quả khá trực tiếp như sau:

Bài toán 4: (Hệ quả của (1))

Trên đáy ABC của hình chóp $SABC$ ta lấy điểm M. Các đường thẳng kẻ qua M song song với SA, SB, SC cắt các mặt bên hình chóp lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng

$$\frac{V_{MA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{MA'}{SA} \times \frac{MB'}{SB} \times \frac{MC'}{SC} \quad (2).$$

Giải:



Hình 4

Gọi A_1, B_1, C_1, lần lượt là các điểm đối xứng với A', B', C' qua M (xem hình 4). Khi đó

$$V_{MA'B'C'} = V_{MA_1B_1C_1}.$$

Trên các cạnh SA, SB, SC lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $SA_2 = MA_1$; $SB_2 = MB_1$; $SC_2 = MC_1$.

Khi đó hình chóp $SA_2B_2C_2$ là ảnh của hình chóp $MA_1B_1C_1$ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{MS}$ nên

$$V_{MA_1B_1C_1} = V_{SA_2B_2C_2}$$

hay

$$V_{MA'B'C'} = V_{SA_2B_2C_2}$$

Mặt khác

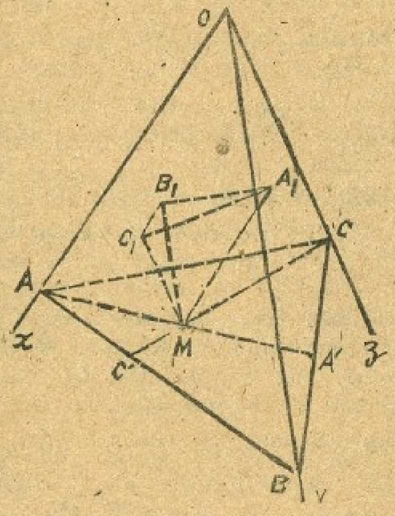
$$\frac{V_{SA_2B_2C_2}}{V_{SABC}} = \frac{SA_2}{SA} \cdot \frac{SB_2}{SB} \cdot \frac{SC_2}{SC}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{MA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}$$

Hệ thức (2) giúp ta giải được bài toán cực trị sau đây:

Bài toán 5. Cho trước góc tam diện $Oxyz$ và điểm M cố định trong góc đó. Hãy dựng một mặt phẳng qua M cắt góc tam diện thành tứ diện có thể tích bé nhất.

Giải



Hình 5

Giả sử mặt phẳng qua M cắt các cạnh Ox, Oy, Oz của tam diện $Oxyz$ tại A, B, C. Kẻ qua M các đường thẳng song song với các tia Ox, Oy, Oz cắt các mặt (yOz), (zOx) và (xOy) tại A_1, B_1, C_1.

Theo (2) ta có:

$$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{OABC}} = \frac{MA_1}{OA} \cdot \frac{MB_1}{OB} \cdot \frac{MC_1}{OC} \quad (*)$$

Vì $V_{MA_1B_1C_1}$ không đổi, nên V_{OABC} bé nhất khi $MA_1/OA \cdot MB_1/OB \cdot MC_1/OC$ đạt max.

Gọi A', B', C' là giao điểm của AM, BM, CM với các cạnh đối diện của ΔABC (xem hình 5), ta có:

$$MA_1/OA = A'M/A'A\ ;\ MB_1/OB = B'M/B'B\ ,$$
$$MC_1/OC = C'M/C'C,$$

do M nằm trong ΔABC, ta có
$$MA'/AA' + MB'/BB' + MC'/CC' = 1$$
nên $MA_1/OA + MB_1/OB + MC_1/OC = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$MA_1/OA.\ MB_1/OB.\ MC_1/OC$ đạt max khi
$MA_1/OA = MB_1/OB = MC_1/OC$
$\Leftrightarrow MA'/AA' = MB'/BB' = MC'/CC' \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác.

Nếu dựng mặt phẳng qua M thừa nhận M là trọng tâm tam giác tạo thành do mặt phẳng cắt Ox, Oy, Oz thì V_{OABC} bé nhất.

Việc dựng cụ thể xin nhường bạn đọc.

Bài toán sau đây lại là một ứng dụng khác của hệ thức (2).

Bài toán 6. Cho góc tam diện $Oxyz$ và điểm M bên trong nó.

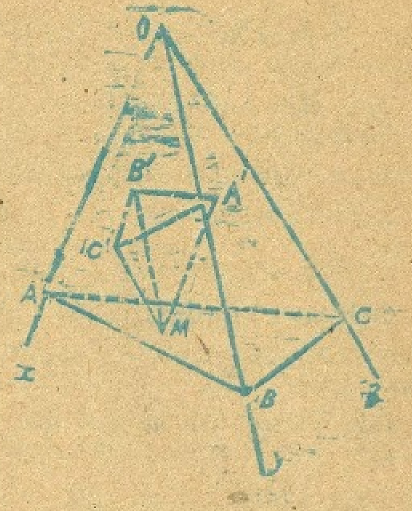
Một mặt phẳng qua M cắt các cạnh của góc tại các điểm A, B, C. Chứng minh rằng
$$V^3_{OABC}/(V_{MOBC}\ .\ V_{MOCA}\ .\ V_{MOAB})$$
có giá trị không phụ thuộc cách chọn mặt phẳng.

Giải :

Giả sử mặt phẳng qua M cắt Ox, Oy, Oz, tại A, B, C (xem hình 6). Kẻ qua M các đường thẳng song song với Ox, Oy, Oz lần lượt cắt các mặt bên hình chóp $OABC$ tại A', B', C'.

Áp dụng (2) của bài toán 4 ta có :
$$V_{OABC}/V_{MA'B'C'} = OA/MA' \times OB/MB' \times$$
$$\times OC/MC' \quad (*)$$

Mặt khác
$$V_{OABC}/V_{MOAB} = OC/MC'\ ;$$
$$V_{OABC}/V_{MOBC} = OA/MA'\ ;$$
$$V_{OABC}/V_{MOCA} = OB/MB'\ ;$$



Hình 6

thay các hệ thức này vào (*) ta có
$$V_{OABC}/V_{MA'B'C'} = V^3_{OABC}/$$
$$/(V_{MOAB} \times V_{MOBC} \times V_{MOCA}) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Một số bài toán sau đây giành cho bạn đọc.

Bài toán 7. Hình chóp $SABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ cạnh $BC = AB\sqrt{2}$; $SA \perp (ABCD)$. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SC cắt SC tại C', SB tại B' và SD tại D'. Biết rằng mặt phẳng $(AB'C'D')$ hợp với $(ABCD)$ một góc nhọn α. Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện tạo thành do mặt phẳng cắt hình chóp $SABCD$.

Bài toán 8. Cắt hình chóp ngũ giác đều bằng mặt phẳng cắt tất cả các cạnh bên hình chóp tại các điểm A, B, C, D, E. Gọi S là đỉnh hình chóp. Hãy tìm hệ thức liên hệ cho các đoạn SA, SB, SC, SD và SE.

Bài toán 9. M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD của tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng mặt phẳng bất kỳ đi qua MN cắt tứ diện thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

GIẢI BÀI kỳ trước

Bài 1/137. *Ký hiệu $S(n)$ là ước số lẻ lớn nhất của số tự nhiên n. Chứng minh rằng với mọi n ta có :*
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{S(k)}{k} - \frac{2n}{3} \right| < 1.$$

(Trong số 137 báo TH và TT in nhầm là $2k/3$, thành thật xin lỗi bạn đọc).

Lời giải : Bất đẳng thức hiển nhiên đúng với $n = 1$, $n = 2$. Ta giả sử bất đẳng thức đúng với mọi $p < n$, tức là có :
$$\left| \sum_{k=1}^{p} \frac{S(k)}{k} - \frac{2p}{3} \right| < 1 \qquad (1)$$

và ta phải chứng minh:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{S(k)}{k} - \frac{2n}{3} \right| < 1 \qquad (2)$$

Thực vậy, do

$$\frac{S(k)}{k} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k - \text{lẻ} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{S(i)}{i} & \text{nếu } k = 2i \end{cases}$$

nên nếu n chẵn, $n = 2m$ ta có:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{S(k)}{k} - \frac{2n}{3} \right| = \left| \sum_{k=1}^{2m} \frac{S(k)}{k} - \frac{4m}{3} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \frac{S(i)}{i} + m - \frac{4m}{3} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{S(i)}{i} - \frac{2m}{3} \right| < \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad (3)$$

(theo giả thiết quy nạp). Nếu n lẻ và $n = 2q+1$ ta có:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{S(k)}{k} - \frac{2n}{3} \right| = \left| \sum_{k=1}^{2q} \frac{S(k)}{k} + 1 - \frac{4q+2}{3} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{2q} \frac{S(k)}{k} - \frac{4q}{3} \right| + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$$

(theo (3))

Vậy (2) đã được chứng minh và ta có bất đẳng thức cần chứng minh đúng với mọi số tự nhiên n.

Nhận xét: Các bạn Nguyễn Quang Thái (11 CT ĐHSP Hà Nội 1), Lã Hồng Hạnh (10 H, PTTH Nguyễn Trãi, Hà Nội) có lời giải tốt hơn cả.

T.V.T

Bài 2/137. *Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + xy - y^2 = n$ có ít nhất một nghiệm nguyên thì có vô số nghiệm nguyên.*

Lời giải: Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử phương trình này chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$ khi nó có nghiệm nguyên.

Đặt $a_h = |x_h| + |y_h|$, $h = \overline{1, k}$. Không mất tổng quát, gọi a_1 là số lớn nhất trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Chú ý rằng, khi a_1 không tồn tại tương ứng với trường hợp phương trình có vô số nghiệm. Vậy mục đích của ta là chứng minh không tồn tại a_1.

Do có $x^2 + xy - y^2 = (x+y)^2 + (x+y)(-y) - (-y)^2$ và $x^2 + xy - y^2 = x^2 + x(x-y) - (x-y)^2$, nên khi (x_1, y_1) là nghiệm thì cũng có $(x_1 + y_1, -y_1)$ và $(x_1, x_1 - y_1)$ là nghiệm. Theo cách chọn a_1 ta có:

$$a_1 = |x_1| + |y_1| \geqslant |x_1 + y_1| + |-y_1| \Rightarrow |x_1| \geqslant |x_1 + y_1| \quad (1)$$

và

$$a_1 = |x_1| + |y_1| \geqslant |x_1| + |x_1 - y_1| \Rightarrow |y_1| \geqslant |x_1 - y_1| \quad (2)$$

. Nếu $x_1 = 0$ thì $x_1^2 + x_1y_1 - y_1^2 = -y_1^2 = n \leqslant 0$ vô lý.

$y_1 = 0$ thì theo (2) ta có $x_1 = 0$ vô lý. (theo trên)

Vậy phải có $x_1 \neq 0$; $y_1 \neq 0$.

Nếu x_1, y_1 cùng dấu thì có $|x_1 + y_1| = |x_1| + |y_1|$ nên theo (1) ta có $y_1 = 0$ vô lý.

Nếu x_1, y_1 khác dấu thì $|x_1 - y_1| = |x_1| + |y_1|$ nên theo (2) ta có $x_1 = 0$ vô lý.

Tóm lại không thể tồn tại a_1, và khi phương trình có nghiệm nguyên thì nó phải có vô số nghiệm nguyên.

Nhận xét: Các bạn Hà Anh Vũ, Nguyễn Quang Thái (10 chuyên toán, HĐSP, Hà Nội 1), Đỗ Duy Khánh (11 CT, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang), Nguyễn Thục Vân (Trường PTTH Thăng Long, Hà Nội) đã chứng minh bằng phương pháp trực tiếp chỉ ra dãy vô hạn các nghiệm khi phương trình có nghiệm cũng có lời giải tương đối tốt.

T.V.T

Bài 3/137. *Cho dãy Phibônaxi, xác định như sau:*

$u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ với $n \geqslant 3$

Chứng minh rằng nếu n là bội số của k thì u_n là bội số của u_k.

Lời giải: (của Hà Anh Vũ lớp 10 chuyên toán Đại học sư phạm 1 Hà Nội và Nguyễn Trọng Tố lớp 10T, PTTH Lam Sơn Thanh Hóa).

Trước hết ta chứng minh qui nạp công thức sau theo i (với $i > k$).

$$u_i = u_k \cdot u_{i-k+1} + u_{k-1} \cdot u_{i-k}$$

Với $i = k+1$ ta có $u_{k+1} = u_k \cdot u_2 + u_{k-1} \cdot u_1$

Giả sử đã chứng minh được cho mọi số $i < m$. Ta có

$$\begin{aligned} u_m &= u_{m-1} + u_{m-2} \\ &= (u_k \cdot u_{m-1-k+1} + u_{k-1} \cdot u_{m-1-k}) + \\ &\quad + (u_k \cdot u_{m-2-k+1} + u_{k-1} \cdot u_{m-2-k}) \\ &= u_k (u_{m-k} + u_{m-k-1}) + \\ &\quad u_{k-1}(u_{m-k-1} + u_{m-k-2}) \\ &= u_k \cdot u_{m-k+1} + u_{k-1} \cdot u_{m-k} \end{aligned}$$

Căn cứ vào công thức đó ta lại chứng minh bài toán qui nạp theo n.

Với $n=k$ thì $u_n \vdots u_k$

Do u_k và $u_{n-k} \vdots u_k$ theo giả thiết qui nạp nên

$$u_n = u_k \cdot u_{n-k+1} + u_{k-1} \cdot u_{n-k}$$

cũng chia hết cho u_k.

Cách 2 (của Hàn Hùng Định, lớp 11B, Lý Văn Thành lớp 11G PTTH An Nhơn 1, Nghĩa Bình; Cao Vi Ba, Đặng Vũ Sơn, 11 CT ĐH.THHN; Nguyễn Quang Thái, 11 CT ĐHSPHN 1).

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Khi đó $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1x_2 = -1$. Do đó

$$u_{n+1} = (x_1 + x_2)u_n - x_1x_2u_{n-1}$$
$$u_{n+1} - x_1u_n = x_2(u_n - x_1u_{n-1})$$
$$u_{n+1} - x_2u_n = x_1(u_n - x_2u_{n-1})$$

Vậy trừ đi ta có

$$(x_2 - x_1)u_n = x_2(u_n - x_1u_{n-1}) - x_1(u_n - x_2u_{n-1})$$
$$= x_2^2(u_{n-1} - x_1u_{n-2}) - x_1^2(u_{n-1} - x_2u_{n-2})$$
$$= \ldots$$
$$= x_2^{n-1}(u_2 - x_1u_1) - x_1^{n-1}(u_2 - x_2u_1)$$
$$= x_2^{n-1}(1 - x_1) - x_1^{n-1}(1 - x_2)$$
$$= x_2^n - x_1^n \text{ (vì } x_1 + x_2 = 1).$$

$$\text{Vậy } u_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$$

và ta cũng có $u_k = \dfrac{x_1^k - x_2^k}{x_1 - x_2}$

Giả sử $n = k \cdot i$. Khi đó

$$\frac{u_n}{u_k} = \frac{x_1^{ki} - x_2^{ki}}{x_1^k - x_2^k} = x_1^{k(i-1)} + x_1^{k(i-2)}x_2^k + \ldots$$

$$\ldots + x_1^k x_2^{k(i-2)} + x_2^{k(i-1)}$$

$$= x_1^{k(i-1)} + (-1)^k x_1^{k(i-3)} + \ldots$$

$$+ (-1)^k x_2^{k(i-3)} + x_2^{k(i-1)}$$

(Vì $x_1 \cdot x_2 = -1$).

Vậy ta sẽ chứng minh $x_1^m + x_2^m$ nguyên bằng qui nạp theo m.

Với $m = 1$ đã có $x_1 + x_2 = 1$.

$$x_1^m + x_2^m = x_1^{m-1}(1 - x_2) + x_2^{m-1}(1 - x_1)$$
$$= (x_1^{m-1} + x_2^{m-1}) + (x_1^{m-2} + x_2^{m-2})$$

(vì $x_1x_2 = -1$).

Theo giả thiết qui nạp $x_1^m + x_2^m$ là nguyên.

Vậy $\dfrac{u_n}{u_k}$ là nguyên.

N.Q.T

Bài 4/137. *Cho x_1, x_2, x_3 là các nghiệm thực của phương trình.*

$$x^3 + ax^2 + x + b = 0,\ b \neq 0$$

Chứng minh rằng khi đó:

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right) +$$
$$+ \left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = 4$$

Lời giải (của nhiều bạn).

Theo định lý Viet thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -b \end{cases}$$

Ta có:

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) = x_1x_2 + \frac{x_3}{x_1x_2x_3} - \frac{x_3(x_1^2 + x_2^2)}{x_1x_2x_3}$$

Do đó

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right) +$$
$$+ \left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) =$$
$$= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \frac{x_3 + x_1 + x_2}{x_1x_2x_3} -$$
$$- \frac{x_3(x_1^2 + x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_3^2) + x_1(x_2^2 + x_3^2)}{x_1x_2x_3}$$
$$= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} -$$
$$- \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3}$$
$$= 1 + \frac{-a}{-b} - \frac{(-a) \cdot 1 + 3b}{-b} = 1 + 3 = 4 \text{(đpcm)}$$

Nhận xét: Các bạn Cao Vi Ba, Đặng Vũ Sơn (11CT ĐHTH HN) Nguyễn Hải Vinh (10A Tây Sơn, HN), Nguyễn Quang Thái (11CT ĐHSP HN1), Lý Văn Thành, Lê Thiện Thanh (11 An Nhơn1, Nghĩa Bình), Trần Vũ Thanh Hùng (11P Quang Trung, Quy Nhơn, Nghĩa Bình) Đỗ Duy Khánh (11CT, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang),... có lời giải tốt.

N.V.M.

Bài 5/137: *Ba góc x, y, z thỏa mãn điều kiện.*

$$0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 2\pi$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 0 \\ \sin x + \sin y + \sin z = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng x, y, z lập thành một cấp số cộng với công sai $\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải: Từ điều kiện đã cho suy ra:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = -\cos z \\ \sin x + \sin y = -\sin z \end{cases}$$

Bình phương các vế tương ứng ta được:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y = \cos^2 z$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y = \sin^2 z$$

Cộng vế với vế, ta được:

$$2 + 2\cos(x-y) = 1 \text{ hay } \cos(x-y) = -\frac{1}{2}$$

Hoàn toàn tương tự, cũng có

$$\cos(y-z) = \cos(z-x) = -\frac{1}{2}$$

Vì $0 \leqslant y-x;\ z-y;\ z-x \leqslant 2\pi$ suy ra các góc $y-x$; $z-y$; $z-x$ nhận một trong hai giá trị $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$. Nhưng vì $z-x = (z-y) + (y-x)$ nên chỉ có thể xảy ra:

$$z - x = \frac{4\pi}{3};\quad z - y = y - x = \frac{2\pi}{3}$$

Ta được đpcm.

Nhận xét: Các bạn: Cao Vi Ba, Đặng Vũ Sơn (11 CT ĐHTH Hà Nội), Nguyễn Quang Thái (11 CT ĐHSP HN1), Đỗ Duy Khánh (11 CT, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang), ... có lời giải tốt.

N.V.M

Bài 6/137: *Các số dương A và B phải thỏa mãn điều kiện gì, để tồn tại 5 số dương u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành một cấp số nhân, với.*

$$u_0 + u_4 = A;\quad u_1 + u_3 = B\ ?$$

Lời giải:

Gọi q là công bội của cấp số nhân phải tìm ($q > 0$). Ta có:

$$A = u_0 + u_4 = \frac{u_2}{q^2} + u_2 . q^2 = u_2\,(q^{-2} + q^2).$$

$B = u_1 + u_3 = u_2\,(q^{-1} + q)$. Từ đó suy ra:

$$Au_2 = u_2^2\,(q^{-2} + q^2)$$

$$B^2 = u_2^2\,(q^{-2} + q^2) + 2u_2^2 \qquad (1)$$

hay: $\quad 2u_2^2 + Au_2 - B^2 = 0$

Vì $u_2 > 0$ nên từ phương trình này ta được

$$u_2 = \frac{-A + \sqrt{A^2 + 8B^2}}{4}$$

do $\quad q^{-2} + q^2 \geqslant 2$ và $q^{-1} + q \geqslant 2$

ta suy ra điều kiện để tồn tại q là:

$$q^{-2} + q^2 = \frac{A}{u_2} \geqslant 2;\ q^{-1} + q = \frac{B}{u_2} \geqslant 2$$

Từ (1) suy ra, nếu $\frac{A}{u_2} \geqslant 2$ thì $\frac{B}{u_2} \geqslant 2$

Do vậy, điều kiện để tồn tại q là:

$$\frac{A}{u_2} \geqslant 2 \text{ hay } \frac{A}{\dfrac{-A + \sqrt{A^2 + 8B^2}}{4}} \geqslant 2$$

Giải bất phương trình này ta suy ra $A \geqslant B$.

Đó là điều kiện phải tìm.

N.V.M.

Bài 7/137. *Đặt* $H\,(u, m, n) =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k\, u_k^m\, C_n^k$ *trong đó n, m là các số nguyên không âm, u là cấp số cộng gồm $(n+1)$ số hạng $u_0, u_1, \ldots, u_n$, số hạng đầu u_0 và công sai khác không, C_n^k là số tổ hợp chập k của n.*

1) Chứng minh giá trị của $H(u, m, n)$ không phụ thuộc vào cấp số cộng u khi $m < n$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của m để giá trị của $H(u, m, n)$ phụ thuộc vào u_0.

Lời giải: Vì u là cấp số cộng có công sai $d \neq 0$ nên có $u_k = u_0 + kd$. Vậy theo khai triển nhị thức Niutơn ta có:

$$H(u, m, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,(u_0 + kd)^m\, C_n^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{j=0}^{m} u_0^{m-j}\,(kd)^j\, C_m^j . C_n^k$$

$$= \sum_{j=0}^{m} u_0^{m-j}\, d^j . C_m^j \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^j\, C_n^k$$

$$= \sum_{j=0}^{m} u_0^{m-j}\, d^j\, C_m^j\, T\,(n, j) \qquad (1)$$

với $T(n, j) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^j C_n^k$ với $0 \leqslant j \leqslant m$.

Bây giờ ta đi xác định giá trị của $T(n, j)$. Xét đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k = (1-x)^n \qquad (2)$$

Đặt $H_i = (1-x)^i$ với $i \geqslant 0$ — nguyên. Dễ dàng có:

$xH_i' = iH_i - iH_{i-1}$ với $i \geqslant 1$ (3), ở đó H_i' là đạo hàm của H_i theo x.

Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp công thức sau:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^j C_n^k x^k = a_0 H_n + a_1 H_{n-1} + \ldots + a_j H_{n-j}$$

$$\text{với } j \leqslant n \qquad (4)$$

ở đó a_i, $i = \overline{1, j}$ là các hằng số nào đó, còn riêng $a_j = (-1)^j n(n-1)\ldots(n-j+1)$. Thực vậy, lấy đạo hàm theo x ở hai vế của đẳng thức (2) sau đó lại nhân hai vế với x và với chú ý (3) ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k C_n^k x^k = nH_n - nH_{n-1}, \text{ ở đây } a_0 = n;\ a_1 = (-1)^1 n$$

Vậy (4) đã được chứng minh với $j = 1$. Ta giả sử (4) đã đúng với mọi $r < j$ tức là có dạng.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^r C_n^k x^k = b_0 H_n + b_1 H_{n-1} + \ldots + b_r H_{n-r} \qquad (5)$$

với b_i, $i = \overline{1, r}$ là các hằng số nào đó và riêng $b_r = (-1)^r n(n-1)\ldots(n-r+1)$ và ta phải chứng minh đẳng thức:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^{r+1} C_n^k x^k = b_0' H_n + \ldots + b'_{r+1} H_{n-r-1}$$

với b_i' là các hằng số nào đó, riêng $b'_{r+1} = (-1)^{r+1} n(n-1)\ldots(n-r)$. Thực vậy, từ (5) lấy đạo hàm hai vế theo x sau đó nhân cả hai vế với x và cũng với chú ý (3) ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^{r+1} C_n^k x^k = \sum_{i=0}^{r} b_i H'_{n-i} x$$

$$= \sum_{i=0}^{r} b_i [(n-i) H_{n-i} - (n-i) H_{n-i-1}]$$

$$= n b_0 H_n + \ldots + b_r (-1)(n-r) H_{n-r-1}$$

$$= b_0' H_n + \ldots + b'_{r+1} H_{n-r-1}$$

với $b_0' = nb_0$; ...; $b'_{r+1} = (-1)(n-r)b_r = (-1)^{r+1} n(n-1)\ldots(n-r)$.

Vậy (4) đã được chứng minh xong.

Với chú ý $H_0 = 1$ và khi $x = 1$ thì $H_i = 0$ với $\forall\ i \geqslant 1$, nên khi thay $x = 1$ từ (4) ta có

$$T(n, j) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^j C_n^k = \begin{cases} 0 & \text{Khi } j < n \\ (-1)^n . n! & \text{Khi } j = n \end{cases}$$

Vậy theo (1) khi $m < n$ với chú ý $0 \leqslant j \leqslant m$ thì ta có $H(u, m, n) = 0$ rõ ràng không phụ thuộc vào cấp số cộng u. Phần 1 đã được chứng minh xong.

Cũng theo (1) khi $m = n$ mà $0 \leqslant j \leqslant m$ ta có $H(u, n, n) = (-1)^n d^n n!$ không phụ thuộc vào u_0. Vậy giá trị m cần tìm phải thỏa mãn $m \geqslant n + 1$.

Xét (4) khi $j = n$ ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k^n C_k^n x^k = a_0 H_n + \ldots + a_{n-1} H_1 + a_n H_0$$

Chú ý $a_n H_0$ là hằng số, lấy đạo hàm theo x cả hai vế sau đó lại nhân hai vế với x và với chú ý (3) ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^{n+1} C_n^k x^k = a_0 x H_n' + \ldots + a_{n-1} x H_1'$$

$$= a_0 n H_n + c_1 H_{n-1} + \ldots + (-1) a_{n-1} H_0$$

ở đó c_i, $i = \overline{1, n-1}$ là các hằng số nào đó. Vậy cho $x = 1$ ta có:

$$T(n, n+1) = \sum (-1)^k k^{n+1} C_n^k = -a_{n-1}$$

Lại theo (1) với $m = n + 1$ ta có:

$$H(u, n+1, n) = \sum_{j=0}^{n-1} u_0^{m-j} d^j C_m^j T(n, j) +$$

$$+ u_0 d^n C_{n+1}^n T(n, n) + d^{n+1} C_{n+1}^{n+1} T(n, n+1)$$

$$= 0 + (-1)^n (n+1)! d^n u_0 - d^{n+1} a_{n-1}$$

và do $d \neq 0$ (theo giả thiết) mà ta có $H(u, n+1, n)$ phụ thuộc vào số hạng đầu u_0. Như vậy giá trị cần tìm của m là $m = n + 1$. Vậy phần hai của bài toán cũng được chứng minh.

Nhận xét: Không có bạn nào giải trọn vẹn bài toán này. Bạn Đỗ Duy Khánh (11CT, Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang) giải đúng phần 1 của bài toán bằng phương pháp quy nạp và là bài giải tốt hơn cả.

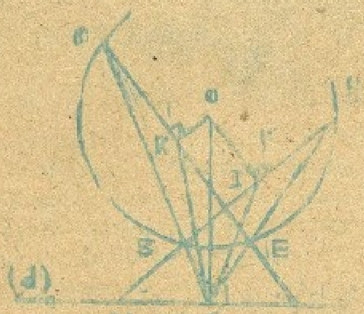
T. V. T.

Bài 8/137. *Cho đường thẳng (d) nằm ngoài vòng tròn tâm O. Gọi S là chân đường vuông góc hạ từ O xuống (d). Kẻ cát tuyến SBC và tiếp tuyến SA. Gọi M, N là giao của AB và AC với (d). Chứng minh SM = SN.*

Lời giải: (của Đỗ Duy Khánh, 11CT Nguyễn Văn Trỗi – Nha Trang và Đặng Vũ Sơn, 11CT ĐHTH Hà Nội).

Ta chứng minh bài toán tổng quát sau:

« Cho đường thẳng (d) nằm ngoài vòng tròn tâm O. Gọi S là chân đường vuông góc hạ từ O xuống (d). Kẻ các cát tuyến SBC và SEF. Gọi M, N là giao của BF, CE với (d). Khi đó $SM = SN$ ».



Thật vậy, hạ $OI \perp BF$ và $OK \perp CE$. Ta có I, K là điểm giữa của BF, CE. Và dễ dàng chứng minh được các tứ giác $OMSI$ và $ONSK$ là các tứ giác nội tiếp. Từ đó:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{MIS} &= \widehat{MOS}\\ \widehat{NKS} &= \widehat{NOS}\end{aligned}\right\}(1)$$

Xét hai tam giác SCE và SFB ta có:

$\widehat{CSF}$ chung

$\widehat{SCE} = \widehat{SFB}$ (do cùng chắn cung BE)

Do đó: $\Delta SCE \sim \Delta SFB \Rightarrow \Delta SKE \sim \Delta SIB$ (do I, K là điểm giữa của BF và CE) $\Rightarrow \widehat{MIS} = \widehat{NKS}$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được: $\widehat{MOS} = \widehat{NOS}$. Như thế, ΔMON là tam giác cân tại O. Suy ra:

$$SM = SN \text{ (đpcm)}$$

Khi $E \equiv F$ ta trở về bài toán đã ra!

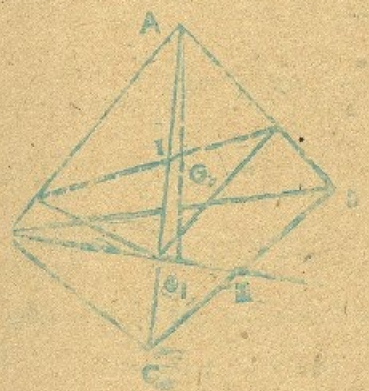
Nhận xét: Các bạn Cao Vi Ba (11CT ĐHTH Hà Nội), Nguyễn Quang Thái, Nguyễn Phương Tuấn (11CT, 10CT ĐHSP Hà Nội), Cao Huy Chước (lớp 8 CT Quốc học Huế, Bình Trị Thiên), Lâm Tùng Giang, Nguyễn Hùng Sơn, Trần Quân (11 CT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), Trần Hưng (12.1 Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang, Hà Bắc), Đỗ Ngọc Minh Châu (lớp 10A Pleiku 1, Gialai Kontum), cũng có lời giải tốt. Một số bạn còn sử dụng các tính chất của đường đối cực của một điểm đối với một đường tròn và các tính chất của chùm điều hòa để giải bài toán đã ra cũng như bài toán mở rộng.

N. K. M.

Bài 9/137. *Cho tứ diện ABCD. Qua trọng tâm G của tứ diện ta dựng một mặt phẳng P tùy ý. Gọi AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 là khoảng cách từ A, B, C, D đến P. Chứng minh rằng, một trong bốn đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 bằng tổng của ba đoạn thẳng còn lại.*

Lời giải: (dựa theo cách giải của Đỗ Duy Khánh, 11CT, Nguyễn Văn Trỗi Nha Trang).

Từ điều kiện của đề bài ta thấy chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:



Trường hợp 1: Thiết diện của [P] và tứ diện ABCD là tam giác (Trường hợp này xảy ra khi giao tuyến của [P] với một mặt nào đó của tứ diện hoặc đi qua trọng tâm của mặt đó hoặc chia mặt đó ra làm hai phần, một phần chỉ chứa 2 điểm của mặt, còn phần kia chứa điểm còn lại cùng trọng tâm của mặt đó). Trong trường hợp này luôn tồn tại một mặt của tứ diện, giả sử mặt BCD, nằm về một phía của [P].

Gọi G_1 là trọng tâm của ΔBCD. Nối BG_1, kéo dài cắt CD tại điểm giữa I của CD. Trên BI kéo dài về phía I lấy điểm B_o sao cho $IB_o = IG_1$. Gọi G_1', I_1, B_o' là chân các đường vuông góc hạ từ G_1, I, B_o xuống [P]. Do các bộ điểm (B, G_1, I, B_o) và (C, I, D) thẳng hàng nên các bộ điểm (B_1, G_1', I_1, B_o') và (C_1, I_1, D_1) cũng thẳng hàng. Áp dụng định lý về đường trung bình trong hình thang lần lượt cho các hình thang CC_1D_1D, $G_1G_1'B_o'B_o$ và $BB_1B_o'B_o$ ta được:

$$\begin{aligned}BB_1 + CC_1 + DD_1 &= BB_1 + 2II_1 =\\ &= BB_1 + G_1G_1' + B_oB_o'\\ &= (BB_1 + B_oB_o') + G_1G_1'\\ &= 3G_1G_1' \qquad (1)\end{aligned}$$

Do G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên

$$AG = 3GG_1 \quad (2)$$

Dễ dàng chứng minh được : $\Delta AA_1G \sim \Delta G_1G_1'G$.

Từ đây kết hợp với (2) suy ra $AA_1 = 3G_1G_1'$ (3)

Kết hợp (1) và (3) ta được: $AA_1 = BB_1 + CC_1 + DD_1$ (đpcm).

Trường hợp 2: Thiết diện của [P] và tứ diện ABCD là tứ giác.

(Trường hợp này xảy ra khi giao tuyến của [P] với một mặt nào đó của tứ diện chia mặt đó ra làm hai phần: một phần chỉ chứa 1 điểm của mặt, còn phần kia chứa 2 điểm còn lại cùng trọng tâm của mặt đó). Khi ấy [P] sẽ chia không gian ra làm 2 phần: một phần chỉ chứa 2 đỉnh của tứ diện, chẳng hạn A, C, còn phần kia chứa 2 đỉnh còn lại B, D. Gọi M, N, Q là điểm giữa của AC, BD và MN. Lấy điểm O bất kỳ trong không gian. Ta có:

$$\vec{OQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{OM} + \vec{ON}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OC}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{OB} + \vec{OD}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}\right) \quad (4)$$

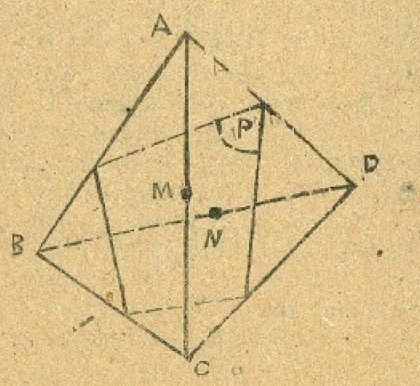
Do G là trọng tâm của tứ diện nên:

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{GO} + \vec{OA} + \vec{GO} + \vec{OB} + \vec{GO} + \vec{OC} + \vec{GO} + \vec{OD} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{4}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}\right) \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $Q \equiv G$. Tức 3 điểm M, G, N, thẳng hàng và $MG = GN$ (6)



Gọi M_1, N_1 là chân các đường vuông góc hạ từ M, N xuống [P].

Do các bộ điểm (A, M, C) và (B, N, D) thẳng hàng nên các bộ điểm (A_1, M_1, C_1) và (B_1, N_1, D_1) cũng thẳng hàng. Áp dụng định lý về đường trung bình trong hình thang lần lượt cho các hình thang AA_1C_1C và BB_1D_1D ta có:

$$AA_1 + CC_1 = 2MM_1 \quad (7)$$

$$BB_1 + DD_1 = 2NN_1 \quad (8)$$

Đồng thời từ (6) suy ra: $MM_1 = NN_1$. Từ đây kết hợp với (7) và (8) ta được:

$$AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$$

Như vậy trong trường hợp này điều khẳng định của đề ra cần được thay bằng điều khẳng định sau: «Tổng của hai trong bốn đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 bằng tổng của hai đoạn còn lại».

Nhận xét: Phần lớn các bạn tham gia giải bài đều phát hiện ra trường hợp còn sót của đề ra. Các bạn đã bổ sung và chứng minh đúng điều khẳng định cho trường hợp đó. Nhưng tất cả các bạn đều không chỉ ra điều kiện để xảy ra các trường hợp nêu trên — một điều cần phải làm để lời giải được chặt chẽ.

N.K.M.

Bài 10/137 *Cho một đường gấp khúc $A_1A_2 \ldots A_n$, khép kín, không đồng phẳng; các điểm A_i đều thuộc mặt cầu tâm O bán kính R cho trước. Xét biểu thức:*

$$d = \sum_{i=1}^{n} A_iB_i^2$$

trong đó B_i là hình chiếu vuông góc của một điểm B trong không gian xuống A_iA_{i+1} tương ứng ($A_{n+1} \equiv A_1$). Tìm vị trí của B để d nhỏ nhất.

Lời giải: (của Cao Vi Ba, Đặng Vũ Sơn, 11CT ĐHTH Hà Nội và Đỗ Duy Khánh, 11CT Nguyễn Văn Trỗi Nha Trang).

$$d = \sum_{i=1}^{n} A_iB_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (BA_i^2 - BB_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} BA_i^2 - \sum_{i=1}^{n} BB_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} BA_{i+1}^2 - \sum_{i=1}^{n} BB_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (BA_{i+1}^2 - BB_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{i+1}B_i^2$$

Vậy $2d = \sum_{i=1}^{n} (A_iB_i^2 + A_{i+1}B_i^2)$

Ta có $A_iB_i^2 + A_{i+1}B_i^2$ nhỏ nhất khi $A_iB_i = A_{i+1}B_i$ (vì rằng $A_iB_i + A_{i+1}B_i = A_iA_{i+1}$ không phụ thuộc B_i).

Vậy d nhỏ nhất khi và chỉ khi B là tâm mặt cầu ngoại tiếp của $A_1A_2 \ldots A_n$. Do $A_1A_2 \ldots A_n$ không đồng phẳng nên $B \equiv O$.

N.Q.T

ĐỀ THI CHÀO MỪNG CÁC NGÀY LỄ LỚN TRONG NĂM 1985

Bài 1/140. Với mỗi số tự nhiên n, ký hiệu $f(n)$ là tổng các chữ số của nó và đặt $f_1(n) = f(n)$, $f_2(n) = f(f_1(n))$,..., $f_{k+1}(n) = f(f_k(n))$ với $k = 1, 2, 3, \ldots$

1) Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n cho trước, tồn tại một số tự nhiên d sao cho đẳng thức

$$f_k(n) = f_d(n)$$

thỏa mãn với mọi $k \geqslant d$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất (nếu có) của n sao cho số d nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên bằng 3.

Nguyễn Huy Đoan

Bài 2/140. Cho dãy số $x_0 = 65$, $x_{k+1} = x_k + \dfrac{1}{x_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Chứng minh rằng $1985 < x_{1968000} < 1985{,}01$.

Lê Đình Thịnh

Bài 3/140. Tìm số dương lớn nhất trong ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x = 1 - |1 - 2y| \\ y = 1 - |1 - 2z| \\ z = 1 - |1 - 2x| \end{cases}$$

Phan Văn Viện

Bài 4/140. Cho số nguyên dương bất kỳ k. Chứng minh rằng luôn tồn tại số $r > 1$ không nguyên sao cho với mọi n tự nhiên ta có

$$[r^n] \vdots k,$$

($[r^n]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá r^n)

Đỗ Bá Khang

Bài 5/140. A, B, C là ba góc của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{tg}^2 A\,\mathrm{tg}^2 B\,\mathrm{tg}^2 C / (\mathrm{tg}^2 A + \mathrm{tg}^2 B + \mathrm{tg}^2 C)$$

khi ΔABC biến thiên.

Nguyễn Văn Mậu

Bài 6/140. Xét bảng số gồm n dòng, n cột

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

trong đó a_{ij} nhận một trong các giá trị $\{0, \pm 1, \pm 2; \pm 3\}$. Hãy xác định các giá trị của n sao cho tồn tại bảng A_n có tính chất như sau:

1) Ở mỗi dòng, mỗi cột đều có một số 1 (hoặc -1), một số 2 (hoặc -2), một số 3 (hoặc -3), các số còn lại bằng 0.

2) Ứng với mỗi bộ (i, j, k) sao cho $a_{ik} \cdot a_{jk} \neq 0$, tồn tại duy nhất một cột m sao cho $a_{im} \cdot a_{jm} = -a_{ik}a_{jk}$.

3) Ứng với mỗi bộ (i, j, k) sao cho $a_{ki}a_{kj} \neq 0$ tồn tại duy nhất một dòng m sao cho $a_{mi} \cdot a_{mj} = -a_{ki} \cdot a_{kj}$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 7/140. Cho dãy số $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ Xác định theo công thức:

$$y_p = (1-x)\,y_{p-1} + Ax/y_{p-1}^{(1-x)/x}$$

với $A > 0$, $0 < x < 1$ và $y_0 > 0$. Hãy chứng minh dãy số trên có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Tạ Văn Tự

Bài 8/140. Cho một mặt phẳng P cố định, một hình chóp đều $S.\,A_1A_2\ldots A_{84}$ biến thiên. Đỉnh S luôn luôn nằm ở một phía của mặt phẳng P, đáy nằm trên P, A_1 cố định, và luôn luôn thỏa mãn hệ thức:

$$a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 1 \text{ (đơn vị độ dài)}$$

ở đây a là ký hiệu độ dài cạnh đáy, α là góc nhị diện kề cạnh đáy. Chứng minh rằng mỗi mặt phẳng chứa mặt bên của hình chóp mà không qua A_1 đều tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Phạm Đăng Long

Bài 9/140. Cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ đồng dạng với tỷ số $k \neq 1$, và có cùng hướng. Chứng minh rằng:

$$AA' \cdot BC \leqslant BB' \cdot CA + CC' \cdot AB$$
$$BB' \cdot CA \leqslant CC' \cdot AB + AA' \cdot BC$$
$$CC' \cdot AB \leqslant AA' \cdot BC + BB' \cdot CA$$

Đỗ Đức Thái

Bài 10/140. Mặt phẳng đi qua một cạnh và chia đôi cạnh đối diện của một hình tứ diện gọi là một *mặt trung diện* của hình tứ diện đó. Mặt phẳng đi qua một cạnh và chia đôi góc nhị diện thuộc cạnh đó gọi là một *mặt phân giác* (trong) của hình tứ diện đó.

Hãy tìm tất cả những hình tứ diện đặc trưng bởi tính chất là mỗi mặt phân giác của một nhị diện trùng với mặt trung diện xuất phát từ cạnh của nhị diện đó.

Nguyễn Đăng Phất

Lịch sử toán học

VỀ LỊCH SỬ LƯỢNG GIÁC HỌC

NGUYỄN BÁ KIM

CŨNG như mọi khoa học và các phân môn khác của toán học, lượng giác học ra đời và phát triển do những nhu cầu của đời sống.

Nảy sinh từ sự cần thiết phải đo lại ruộng đất sau những trận lụt hàng năm ở sông Nin, hình học thời cổ Ai Cập cách đây 4000 năm đã đạt tới một trình độ đáng lưu ý. Nó cũng đã được ứng dụng vào việc xây dựng Kim Tự Tháp, một kỳ quan của thế giới. Với sự phát triển của hình học, lượng giác học đã hình thành. Trong những tài liệu toán học của người cổ Ai Cập còn thấy cả những yếu tố tiền thân của lượng giác học, chẳng hạn tỉ số những độ dài của những đoạn thẳng ở những hình chóp.

Ở Trung Hoa, những kiến thức hình học và lượng giác cũng đã nảy nở sớm. Ngay từ khoảng năm 1100 trước công lịch người ta đã tạo những góc vuông bằng cách dùng tam giác có các cạnh 3, 4, 5 đơn vị, đã xác định chiều cao nhờ đo bóng, đã tính chiều sâu và khoảng cách nhờ những tam giác vuông. Tiếc rằng nền toán học sớm của Trung Quốc còn để lại ít dấu vết vì tất cả những sách và tài liệu văn hóa của nước này đã bị Tần Thủy Hoàng ra lệnh thiêu hủy.

So với toán học Ai Cập thì toán học Babilon, trong đó có hình học và lượng giác, đã đạt tới một trình độ cao hơn. Hiện nay còn giữ lại được những tài liệu về những vấn đề toán học khoảng 5000 năm về trước. Ở Mêsôpôtami, một vùng nằm giữa sông Ơphorát và sông Tigơrơ, do phải xây dựng những con đê phục vụ nông nghiệp, người ta phải tính độ dốc của thành đê và chiều rộng của mặt đê. Trong những tính toán này, tỉ số độ dài của những đoạn thẳng đóng một vai trò quan trọng.

Những vấn đề nảy sinh trong thực tế đã dẫn tới những kiến thức toán học. Sự tỉ lệ của các cạnh tương ứng trong những tam giác đồng dạng và định lý Pitago đã được phát hiện. Toán học Babilon cũng đã liên hệ chặt chẽ với thiên văn học. Mặc dầu thiên văn học Babilon thời đó liên quan nhiều với mê tín dị đoan nhưng cũng đã đạt được một số kiến thức thiên văn thật sự

Những quan sát hàng nhiều trăm năm đã cho thấy tính chu kỳ của những hiện tượng trong bầu trời, đặc biệt là sự lặp lại một cách có qui luật của hiện tượng nhật thực và nguyệt thực. Hiện vẫn còn giữ lại được những bảng tính những quá trình thiên văn có tính chu kỳ. Nếu biểu thị những giá trị số này trong một hệ trục tọa độ (điều này thiên văn học thời đó chưa làm) thì được một đường sin.

Khoảng năm 1900 trước công lịch, những nước nội địa như Ai Cập và Mêsôpôtami đã không còn tạo được những điều kiện thuận lợi nhất cho kinh tế và khoa học nữa. Vai trò này đã chuyển sang những nước ở ven biển do sự phát triển của ngành đóng tầu.

Nhờ liên hệ mật thiết với Mêsôpôtami và Ai Cập, toán học Hy Lạp đã tiếp nhận rất nhiều công trình khoa học và đã đi tới những nhận thức mới. Talét (624? – 548? trước công lịch) đã đo chiều cao của những cái tháp bằng cách đo bóng của chúng vào lúc bóng của ông vừa đúng bằng bản thân ông. Ông cũng đã tính khoảng cách từ tầu thủy đến cảng nhờ những tam giác đồng dạng. Về sau toán học Hy Lạp đã phát triển đến một trình độ đáng ngạc nhiên. Tuy nhiên dần dần nó rơi vào ảnh hưởng của triết học duy tâm, đặc biệt là của trường phái Pơlatông và do đó bị đứt liên hệ với thực tế. Trong xã hội chiếm hữu nô lệ mọi hoạt động thực tế bị coi là ít giá trị và người ta cho rằng không cần thiết phải ghi chép lại những phương pháp của toán thực tế, trong đó có lượng giác học.

Vào những thế kỷ cuối trước công lịch, yêu cầu đối với khoa trắc địa tăng lên. Những sự đo đạc này thúc đẩy khoa thiên văn. Do đó lượng giác học, với tư cách là công cụ toán học quan trọng, cũng có những tiến bộ.

Aritxtacốt (khoảng năm 270 trước công lịch) đã thử đo tỉ số khoảng cách trái đất – mặt trăng với khoảng cách trái đất – mặt trời theo con đường lượng giác bằng cách đo góc giữa mặt trăng, trái đất và mặt trời lúc bán nguyệt thực. Do dụng cụ thời đó chưa được tốt, ông nhận được tỉ số 1 : 19 trong khi giá trị đúng là 1 : 370.

Việc biến đổi lượng giác có sử dụng các tỉ số sin, cosin, tang và cotang ở tam giác vuông đã được những nhà học giả Ả rập tiến hành vào thế kỷ thứ 9. Trong khi ở châu Âu khoa học bị kìm hãm do ảnh hưởng của nhà thờ Gia tô giáo thì nền văn hóa Ả rập nở rộ, trong đó toán học đặc biệt là đại số và lượng giác rất được khuyến khích phát triển. Abu Nát (khoảng năm 1000) đã tìm ra định lý hàm số sin trong lượng giác phẳng. Át – Tút (1201 – 1274) là người đầu tiên đã tập hợp tất cả những thành tựu của lượng giác học thành một tòa lâu đài hoàn chỉnh. Người ta đã tính được cả những bảng thiên văn và lượng giác rất phức tạp, chẳng hạn Ulúc Béc (1392 – 1449) đã lập bảng hàm số lượng giác với độ chính xác tới 17 chữ số thập phân.

Lượng giác học và thiên văn học Ấn Độ cũng đã đạt tới một trình độ cao tương tự.

Đến thế kỷ 15 toán học châu Âu đuổi kịp và vượt nền toán học cổ Hy Lạp và La Mã ít nhất là ở một số bộ phận. Những kết quả mới đã đạt được là do đời sống xã hội đã đặt ra những vấn đề mà việc giải quyết chúng đòi hỏi phải sử dụng những phương pháp toán học mới. Điều này cũng xảy ra cả trong lượng giác học.

Trong xã hội phong kiến đã phát triển một giai cấp mới, giai cấp tư sản. Giai cấp này khuyến khích thương mại, mở rộng thị trường ở hải ngoại. Đường biển tới Ấn Độ và một châu mới đã được phát hiện. Tầu thuyền đi lại trên biển cả đòi hỏi một trình độ cao về thiên văn học và lượng giác học.

Cả thiên văn học cũng đặt ra cho lượng giác học những yêu cầu cao. Bằng cách đo đạc trong bầu trời nhờ những công cụ thiên văn đã được cải tiến, người ta nhận thấy rằng quan niệm của Pơtôlêmê về địa tâm hệ (trái đất là trung tâm) là không đúng. Với tác phẩm khoa học «Về sự quay của các thiên thể» mà trong đó nhật tâm hệ (mặt trời là trung tâm) được lập luận, nhà bác học Ba lan Côpécních (1473 – 1543) đã tạo nên bước quyết định cho sự phát triển của thiên văn học.

Việc trang bị đại bác cho quân đội cũng đòi hỏi cấp bách sự phát triển của ngành trắc địa và do đó của lượng giác học. Để bắn đại bác trúng mục tiêu, người ta cần những phương pháp đo chính xác những khoảng cách trên mặt đất.

Do những yêu cầu thực tế đó và cả những yêu cầu thực tế khác nữa, lượng giác học đã phát triển rất nhanh vào thế kỷ 15, 16 và 17. Iohanet Phôn Gơmunden (1380? – 1442) và tiếp theo là Giêoóc Phôn Poibắc (1423 – 1461) đã tiến hành tính bảng lượng giác mở rộng. Công trình phức tạp này cuối cùng đã được Rêghiômôntan (1436 – 1476) hoàn thành. Rêghiômôntan là một nhà toán học lỗi lạc của châu Âu thời đó. Trong công trình «Năm cuốn sách về tất cả các tam giác» mà mãi đến năm 1533 mới được in, ông đã thâu tóm tất cả các phương pháp, định lý và bảng lượng giác mà thời đó đã đạt được. Nhờ Rêghiômôntan lượng giác học ở châu Âu đã trở thành một khoa học nhất quán và về mặt nội dung toán học nó đã đạt tới trình độ như ngày nay.

Về sau những bảng lượng giác còn được cải tiến tốt hơn hẳn nhờ các nhà toán học Lêticút (1514 – 1576), Viét (1540 – 1603) và nhà thiên văn học lớn Iôhannét Kêpơle (1571 – 1630). Những tên gọi và ký hiệu mà hiện nay dùng trong lượng giác học thì mãi sau này mới được đưa vào. Về căn bản người ta sử dụng những tên gọi và ký hiệu do nhà toán học thiên tài người Thụy sĩ là Lêôna Ơle (1707 – 1783) đã đặt ra: π là số đo độ dài nửa đường tròn đơn vị, a, b, c là ký hiệu các cạnh của một tam giác; sin, cos, tang là ký hiệu những hàm số lượng giác.

Trao đổi với bạn đọc

VỀ MỘT ĐỀ TOÁN TRONG SỐ 1 CỦA BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỖ VĂN SĨ

NHỮNG đề toán trong mục « Đề ra kỳ này » đã đem đến cho bạn đọc nhiều điều hấp dẫn và lý thú. Chúng đã gợi ý, hướng dẫn các bạn tìm tòi, vận dụng vốn hiểu biết toán học của mình để chứng minh, phát hiện nhiều điều mới mẻ. Nhân dịp Báo Toán học và tuổi trẻ tròn 20 tuổi (1964 — 1984) tôi mời bạn đọc trở về với đề toán số 1/64 trong mục đề ra kỳ này của số báo đầu tiên. *Chứng minh rằng số*

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ chữ số } 1} - \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ chữ số } 2}$$

bao giờ cũng là một số chính phương. Từ bài toán này ta có thể dẫn ra những bài toán lý thú tương tự:

Đề 1.1 *Với* $A = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ chữ số } 1}$

$B = \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ chữ số } 4}$

Chứng minh rằng $A + B + 1$ bao giờ cũng là một số chính phương.

Đề 1.2 *Với* $A = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ số chữ } 1}$

$B = \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ chữ số } 1}$

$C = \underbrace{66\ldots6}_{n \text{ chữ số } 6}$

Chứng minh rằng $A + B + C + 8$ bao giờ cũng là một số chính phương.

Đề 1.3 *Cho dãy số*

$49; 4489; 444889; \ldots$

được hình thành bằng cách đưa 48 vào giữa mỗi số hạng. Chứng minh rằng mỗi số hạng của dãy số đều là số chính phương.

Chắc rằng còn có thể sáng tạo thêm nhiều đề mới nữa, việc làm này xin nhường các bạn đọc và coi đây là cách thiết thực chúc mừng Báo Toán học và tuổi trẻ và mục Đề ra kỳ này của báo ngày càng phát triển phong phú và sáng tạo.

Dưới đây xin nêu lên cách giải chung nhất cho các đề toán

Đề 1.1.

Ta có $A = \underbrace{11\ldots1}_{2n} = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2n-1}$

$$= \frac{10^{2n} - 1}{9}$$

$$B = \underbrace{44\ldots4}_{n} = 4 \times \underbrace{11\ldots1}_{n}$$

$$= 4 \times (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1})$$

$$= 4 \times \frac{10^n - 1}{9}$$

Do đó:

$$A + B + 1 = \frac{10^{2n} - 1 + 4(10^n - 1)}{9} + 1$$

$$= \frac{10^{2n} + 4.10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2$$

$$= \underbrace{33\ldots34}_{n}{}^2$$

Đề 1.2

Ta có $A = \underbrace{11\ldots1}_{2n} = \dfrac{10^{2n} - 1}{9}$

$$B = \underbrace{11\ldots1}_{n+1} = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$$

$$C = \underbrace{66\ldots6}_{n} = 6 \times \underbrace{11\ldots1}_{n} = 6 \times \frac{10^n - 1}{9}$$

Do đó

$$A + B + C + 8 = \frac{10^{2n} + 10^{n+1} + 6 \times 10^n + 64}{9}$$

$$= \frac{10^{2n} + 16 \times 10^n + 64}{9}$$

$$= \left(\frac{10^n + 8}{3}\right)^2 = \left(\frac{\overbrace{10\ldots08}^{n+1 \text{ chữ số } 0}}{3}\right)^2$$

$$= \underbrace{33\ldots36}_{n-1 \text{ chữ số } 3}{}^2$$

Đề 1.3

Số hạng thứ n của dãy số có dạng

$$U_n = 4(10^n + 10^{n+1} + \ldots + 10^{2n-1})$$

$$8(1 + 10 + \ldots 10^{n-1}) + 1$$

$$= 4 \times 10^n \times \frac{10^n - 1}{9} + 8 \times \frac{10^n - 1}{9} + 1$$

$$= \frac{4 \times 10^{2n} + 4 \times 10^n + 1}{9}$$

$$= \left(\frac{2 \times 10^n + 1}{3}\right)^2$$

$$= \underbrace{66\ldots67}_{n-1 \text{ chữ số } 6}{}^2$$

Từ những vấn đề đào sâu, mở rộng và phát triển những hiểu biết đã có để đi đến những hiểu biết, phát hiện mới rộng hơn, sâu sắc hơn, phong phú hơn các bạn sẽ đi đến những sáng tạo toán học.

THÔNG BÁO

Để chào mừng các ngày lễ lớn trong năm 1985 :
— 40 năm Nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam.
— 55 năm Đảng Cộng sản Việt Nam.
— 95 năm ngày sinh Chủ tịch Hồ Chí Minh
— 10 năm Giải phóng Miền Nam.
Báo Toán học và Tuổi trẻ tổ chức

CUỘC THI GIẢI TOÁN
CHÀO MỪNG CÁC NGÀY LỄ LỚN TRONG NĂM 1985

— Đối tượng dự thi : bạn đọc của báo TH và TT. Đề thi gồm 20 đề toán đăng trong 2 số báo : 140 (Số 6 — 1984) và 141 (Số 1-1985).

— Thời hạn nhận bài dự thi : 2 tháng sau ngày báo phát hành (tính theo dấu bưu điện của nơi gửi bài dự thi).

— Giải thưởng : Giải Nhất, Nhì, Ba và giải khuyến khích cho từng khối lớp 10, lớp 11 và lớp 12. Giải xuất sắc và đặc biệt xuất sắc dành cho những người đạt kết quả xuất sắc hay đặc biệt xuất sắc. Giải cho bạn đọc nữ đoạt giải. Giải tập thể cho đơn vị có tổng số điểm cao. Giải tập thể cho đơn vị có nhiều người dự thi nhất...

— Lời giải mỗi đề toán phải viết trên một tờ giấy riêng, trên đó có ghi đầy đủ : Họ và tên, lớp, trường, địa phương, địa chỉ riêng của người dự thi, nam hay nữ.

— Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên báo TH và TT số 4 năm 1985. Rất mong bạn đọc nhiệt liệt hưởng ứng và tham dự đông đảo.

BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

BA MẦU HAY BỐN MẦU?

MỘT họa sĩ gửi thư cho một nhà toán học : « Thưa ông, tôi được biết rằng gần đây người ta đã chứng minh được giả thuyết 4 mầu trong Toán học : để tô mầu bất kỳ một bản đồ địa lý nào, ta cũng chỉ cần dùng 4 mầu (quy tắc tô : 2 nước có biên giới chung thì phải tô bằng hai mầu khác nhau). Tôi đã thành công khi chứng minh rằng chỉ cần 3 mầu cũng đủ. Tôi xin gửi ông chứng minh (rất ngắn) đó :

« Ta hãy dùng 3 mầu tùy ý (chẳng hạn xanh, đỏ, vàng). Dùng ba mầu đó với những tỉ lệ khác nhau ta có thể pha thành vô số mầu cần thiết để có thể tô cho mỗi nước một mầu... »

NHƯ VĂN

AI ĐÚNG ?

Ba người khách nước ngoài cùng ngồi trên một toa tầu đi ngang qua nước Hà lan. Đó là một nhà Văn, một nhà Hóa học và một nhà Toán học.

Khi trông thấy một con bò mầu đen đang gặm cỏ trên cánh đồng mà đoàn tầu đi qua, nhà Văn nói :

— Ồ, bò ở nước này mầu đen...

Nhà Hóa học nói :

— Tôi không nghĩ như vậy. Nhưng chắc chắn là nước này có ít nhất một con bò đen.

Nhà Toán học nói :

— Tôi không nghĩ như vậy. Tôi chỉ có thể nói rằng : nước này có ít nhất một con bò, mà ít nhất là một nửa của nó có mầu đen...

NHƯ VĂN

GIẢI ĐÁP BÀI BẢNG NHẢY

Để viết được dãy số 1, 2, ..., 13 trên tấm bảng nhảy đó, ta hãy viết dãy 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 (bắt đầu là số 0 đến số 13 nhưng bỏ số 10). Kể từ số 3 trở đi các số 0, 1, 2,..., 9 sẽ tự động tăng thêm 1. Còn các số 11, 12 và 13 chưa kịp nhảy, do đó ta sẽ nhận được dãy số cần viết.

Tổng quát hóa bài toán trên mời các bạn hãy giải bài toán sau :

Ta gọi một tấm bảng là bảng nhảy m bậc k (m, k nguyên dương) là tấm bảng có đặc tính như sau : nếu bạn định viết dãy số nguyên a_1, a_2, ..., a_n, ... thì khi bạn viết đến số hạng a_n, số hạng đứng trước nó k bước tức là số hạng a_{n-k} sẽ tự động tăng thêm m đơn vị. Có cách nào viết nổi dãy số 1, 2, 3, ..., n trên tấm bảng nhảy đó không ?

NGUYỄN XUÂN HUY

LỊCH VĨNH CỬU

Một bạn học sinh dùng hai khối lập phương mỗi mặt có ghi một chữ số 0, 1, 2 v.v... để làm một cuốn lịch vĩnh cửu. Liệu hai khối đó có đủ để biểu thị 31 ngày trong tháng không ?

NGUYỄN XUÂN HUY

Báo Toán học và Tuổi trẻ xin chân thành cảm ơn tất cả các cơ quan, đoàn thể đã tài trợ và cho tặng phẩm để tổ chức lễ kỷ niệm 20 năm thành lập báo, lễ đón nhận Huân chương Lao động hạng Nhì và làm giải thưởng cho các em học sinh đoạt giải của Báo Toán học và Tuổi trẻ.

In 15.000 số tại Xí nghiệp in 75 Hàng Bồ — Hà Nội. Số in 02/85. In xong và gửi lưu chiểu tháng 1-1985

Chỉ số 11884

Giá 2 đồng