VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Số 139
5
1984

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập : **Nguyễn Cảnh Toàn**
Phó Tổng biên tập : **Ngô Đạt Tứ**

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói: 52825

XÉT THÀNH TÍCH 20 NĂM HOẠT ĐỘNG

HỘI ĐỒNG NHÀ NƯỚC TẶNG THƯỞNG

BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG HẠNG NHÌ

THƯ CỦA CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG BỘ TRƯỞNG PHẠM VĂN ĐỒNG

Gửi bạn đọc nhân dịp Báo Toán Học và Tuổi Trẻ tròn 20 tuổi

Hà Nội, ngày 31 tháng 8 năm 1984

Các bạn thân mến,

Trong 20 năm qua, báo «Toán học và Tuổi trẻ» đã có những đóng góp quan trọng đối với phong trào học toán của tuổi trẻ. Cái đẹp trong sáng và tác dụng kỳ diệu của toán học khiến người xưa coi toán học như «Bà Hoàng của các khoa học». Ngày nay, trước những ứng dụng ngày càng to lớn và sâu rộng của toán học, người ta coi toán học là «Người giúp việc đắc lực». Học toán và làm toán không chỉ là đi tìm cái hay, cái đẹp của toán học mà phải đem toán học ứng dụng có hiệu quả vào mọi lĩnh vực phát triển kinh tế và xã hội. Thành tích của đội tuyển học sinh nước ta trong các kỳ thi toán quốc tế chứng tỏ tuổi trẻ Việt Nam, người Việt Nam ta có những khả năng rất đáng coi trọng và phát huy về toán học. Tư duy và kiến thức toán học là công cụ ngày càng cần thiết đối với những người làm khoa học kỹ thuật, những người làm kinh tế và nói chung đối với mọi người trong lĩnh vực hoạt động của mình để tính toán đúng, lựa chọn những phương án tốt trong các quyết định và trong việc làm.

Chúc các bạn trẻ phấn đấu để tiến bộ không ngừng trong việc học toán, làm toán và ứng dụng toán. Chúc báo «Toán học và tuổi trẻ» có thêm nhiều người đọc và ngày càng có tác dụng thiết thực.

Phạm Văn Đồng

HAI MƯƠI NĂM BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Do sáng kiến của Ban Vận động thành lập Hội Toán Học Việt Nam và sự ủng hộ tích cực của Ủy ban Khoa học Nhà nước (ngày nay là Ủy ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước) Báo Toán học và Tuổi trẻ ra mắt bạn đọc vào tháng Mười năm 1964 với mục đích *« gây không khí sôi nổi, hào hứng học toán trong thanh thiếu niên, đặc biệt là học sinh các trường phổ thông cấp 3 (ngày nay là các trường phổ thông trung học) »*

Nhằm mục đích đã đề ra, nội dung của báo tập trung vào những đề mục: Nói chuyện với bạn trẻ yêu toán; Tìm hiểu sâu toán học phổ thông; Đề ra kỳ này và giải bài kỳ trước (đây là phần chủ yếu và thường xuyên của mỗi số báo); Bước đầu tìm hiểu toán học hiện đại; Toán học và đời sống; Lịch sử, tiểu sử, câu chuyện và giai thoại toán học; Giải đáp thắc mắc; Giải trí toán học. Trong quá trình phát triển của báo đã hình thành thêm một số đề mục; Bạn có biết; Học sinh hay bạn đọc tìm tòi; Trao đổi với bạn đọc hay bạn đọc trao đổi.

Với mục đích và nội dung như vậy, ngay từ khi mới ra đời báo TH và TT đã được các bạn trẻ khắp nơi hoan nghênh nhiệt liệt. Số báo đầu tiên đã phải in hai lần để tăng số lượng lên gấp đôi mà vẫn không đáp ứng đủ nhu cầu của bạn đọc. Từ khắp nơi trên miền Bắc bạn đọc tới tấp gửi thư về tòa soạn hoan nghênh, bày tỏ niềm hân hoan sau khi đọc số báo đầu tiên và nói lên nhận thức của mình về ý nghĩa, vai trò và tác dụng của báo. Số lượng và nội dung những bức thư của bạn đọc không những nói lên lòng thiết tha yêu thích toán học của đông đảo các bạn trẻ trong các nhà trường, xí nghiệp, cơ quan, công trường, nông trường và trong quân đội mà còn cho thấy sự đáp ứng đúng lúc của tờ báo đối với nhu cầu học tập và tìm hiểu toán học của những thanh thiếu niên ham học của chúng ta. Đó cũng là những lời động viên, cổ vũ nhiệt thành của bạn đọc đối với tòa soạn, bạn biên tập, các bạn cộng tác và những ai đã đóng góp công sức vào sự ra đời của tờ báo.

Phần lớn trong 10 năm đầu hoạt động của báo là thời gian quân dân miền Bắc nước ta phải đương đầu với cuộc chiến tranh phá hoại vô cùng ác liệt của đế quốc Mỹ. Tuy vậy, nhờ có sự quan tâm đặc biệt của Ủy ban Khoa học Nhà nước, nhờ có sự giúp đỡ nhiệt tình của các cơ quan xuất bản, ấn loát, phát hành báo chí, bưu điện, cộng với những cố gắng bền bỉ, tích cực của ban biên tập, tòa soạn và các bạn cộng tác, báo Toán học và Tuổi trẻ đã như cây măng vươn lên giữa mùa dông bão, vượt qua mọi khó khăn gian khổ gây nên bởi những bước leo thang chiến tranh ngày càng ác liệt của quân thù, phục vụ bạn đọc được thường xuyên và liên tục. Trong lúc máy bay Mỹ ngày đêm gieo rắc đau thương và đổ nát trên các phố phường làng mạc, báo Toán học và Tuổi trẻ vẫn vượt qua bom đạn đến với bạn đọc bên miệng hầm trú ẩn hay dưới mái trường sơ tán, ruổi theo các hòm thư thay đổi của các chiến sĩ phòng không đến bên mâm pháo, cạnh trạm ra đa, quanh dàn tên lửa hay ấp ủ trong ba lô của các anh bộ đội Cụ Hồ đang « xẻ dọc Trường sơn đi cứu nước ».

Cuộc kháng chiến chống Mỹ giành thống nhất đất nước kết thúc thắng lợi năm 1975 đã mở đường cho báo TH và TT bay vào các tỉnh thành miền Nam. Một phong trào đọc báo và giải bài trên báo TH và TT lại dấy lên trong các nhà trường của các tỉnh, thành mới được giải phóng. Số lượng phát hành báo tăng lên rõ rệt và người ta thấy xuất hiện trên báo TH và TT những lời giải hay của các thanh thiếu niên, những bài viết của các thầy, cô giáo của các trường thuộc các tỉnh phía Nam. Một số giải thưởng trong các cuộc thi giải toán của báo đã được tặng cho các học sinh yêu toán và giỏi toán ở các tỉnh, thành phía Nam. Tuy nhiên, trong vòng mười năm trở lại đây những khó khăn mới đến với báo TH và TT không phải là ít. Song, nhờ có sự cộng tác nhiệt tình và to lớn của đông đảo bạn cộng tác, ban biên tập và đặc biệt là có sự ủng hộ tích cực của Viện Khoa học Việt nam, báo TH và TT đã đạp bằng sóng gió để phục vụ bạn đọc ngày một tốt hơn.

Nhìn lại quá trình 20 năm phục vụ bạn đọc người ta có thể thấy những thành tích nổi bật của Báo TH và TT:

1 — Nhằm đúng mục đích và đối tượng của mình, báo TH và TT đã thực sự gây được một không khí sôi nổi và phong trào say mê học toán và giải toán rộng rãi trong các thanh thiếu niên ham học, đặc biệt là trong học sinh các trường phổ thông trung học.

2 — Đóng góp đáng kể vào việc nâng cao chất lượng học tập và trình độ toán học của học sinh các trường phổ thông trung học. Đóng góp quan trọng vào việc nâng cao chất lượng bài giảng, trình độ và lòng yêu nghề của các thầy giáo, cô giáo trong các trường phổ thông.

3 – Có tác dụng sâu xa và trọng yếu đối với việc đào tạo, bồi dưỡng và phát hiện những tài năng trẻ làm nòng cốt cho việc nhanh chóng đào tạo và xây dựng đội ngũ cán bộ khoa học kỹ thuật nói chung và toán học nói riêng.

Đánh giá thành tích của báo TH và TT trong 20 năm qua, Hội đồng Nhà nước Nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam đã tặng thưởng báo TH và TT *Huân chương lao động hạng nhì*. Đây là phần thưởng cao quý và vinh dự lớn lao mà Đảng và Nhà nước dành cho tập thể lớn những người đã góp công góp sức xây dựng và làm nên thành tích cho báo TH và TT.

Ngày 10 tháng 10 năm 1967 Chủ tịch Hội đồng Bộ trưởng Phạm Văn Đồng đã có thư gửi bạn đọc của báo TH và TT nói lên vai trò của báo đối với tuổi trẻ và động viên thanh thiếu niên « *nêu cao chủ nghĩa anh hùng cách mạng trong việc tiến quân vào khoa học, kỹ thuật* ». Nhân dịp báo TH và TT tròn 20 tuổi Chủ tịch lại viết thư cho bạn đọc của báo xác nhận « *Trong 20 năm qua, báo «Toán học và Tuổi trẻ» đã có những đóng góp quan trọng đối với phong trào học toán của tuổi trẻ* » và ân cần chỉ bảo cho chúng ta « *Học toán và làm toán không chỉ là đi tìm cái hay, cái đẹp của toán học mà phải đem toán học ứng dụng có hiệu quả vào mọi lĩnh vực phát triển kinh tế và xã hội* ».

Để xứng đáng với phần thưởng cao quý của Nhà nước, để lĩnh hội sâu sắc và thực hiện sinh động những lời chỉ bảo của Chủ tịch Hội đồng Bộ trưởng, để chắp cánh ước mơ cho các bạn trẻ yêu toán, giúp họ nâng cao nhiệt tình và phát huy óc sáng tạo, nhanh chóng chiếm lĩnh những đỉnh cao của trí tuệ hay gánh vác những trọng trách trong công cuộc dựng xây và bảo vệ đất nước, báo TH và TT mong được sự cộng tác chặt chẽ hơn nữa của các bạn cộng tác, mong được sự giúp đỡ và ủng hộ nhiều hơn nữa của các cơ quan của Đảng và Nhà nước, mong được sự hưởng ứng, góp ý, phê bình của đông đảo bạn đọc.

Nhân ngày kỷ niệm vẻ vang này báo TH và TT xin bầy tỏ lòng biết ơn đối với các cơ quan Đảng và Nhà nước đã hướng dẫn và giúp đỡ báo hoạt động, xin chân thành cảm ơn các cá nhân, cơ quan, đoàn thể đã cộng tác với báo và đã góp phần làm nên thành tích của báo.

Báo **TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ**

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

SỐ VÀ LỆNH

NGUYỄN CẢNH TOÀN

CÁC số thông thường (số thực) còn có gì đáng suy nghĩ nữa nhỉ? Nhưng chỉ việc đổi cách nhìn thì lại lắm điều mới xuất hiện, ít ra cũng là mới đối với những người chỉ có kiến thức toán học phổ thông. Ta hãy lấy một phép nhân hai số thực, chẳng hạn 3. 4. Ta có thể coi «3» là một lệnh và «4» là vật chịu lệnh: lệnh «3» tác dụng lên vật «4» làm cho vật này trở thành vật «12». «Lệnh» và «Vật» ở đây đều là số thực.

Nếu ta thực hiện liên tiếp lệnh «3» rồi lệnh «5» lên vật «4», cụ thể là: 5. (3. 4), thì ta được vật «60». Ta cũng được kết quả đó, nếu ta chỉ thực hiện có một lệnh duy nhất là «15» lên vật «4». Như thế người ta nói rằng lệnh «15» là tích của hai lệnh «3» và «5» xét theo thứ tự đó (ở đây thứ tự không quan trọng nhưng sau đây, khi mở rộng khái niệm «lệnh», chúng ta sẽ thấy rằng thứ tự này là quan trọng). Một cách tổng quát, ta nói rằng tích của hai «lệnh» (lấy theo một thứ tự nào đó) là một «lệnh» duy nhất có tác dụng lên trên mỗi «vật» giống như tác dụng của việc thực hiện liên tiếp hai «lệnh» đã cho, (theo thứ tự đã cho) lên cùng «vật» đó.

Rõ ràng cách nhìn mới này cho phép ta mở rộng các «lệnh» và các «vật» ra ngoài phạm vi các số thực. Nói chính xác hơn thì ở đây có «lệnh» L, «vật chịu lệnh» V và «Kết quả sau khi lệnh đã thi hành» Q, tất cả đều là số thực. Sau đây, khi mở rộng, có cái không còn là số thực nữa. Ta hãy đi từng bước:

Bước thứ nhất: V và Q là những cặp số thực sắp thứ tự còn L vẫn là số thực. Ta quy ước rằng, «lệnh» c tác động lên «vật» (a, b) với a, b, c là những số thực thì cho ta «vật» (ca, cb) là cặp số thực ca và cb.

Bước thứ hai: L và V đều là cặp số thực sắp thứ tự, còn Q là số thực.

Ta quy ước rằng «lệnh» (p,q) tác động lên «vật» (a,b) thì cho kết quả là số thực $pa+qb$.

Bước thứ ba: L, V, Q đều là cặp số thực.

Ta quy ước rằng «lệnh» (p,q) tác động lên «vật» (a,b) thì cho kết quả là cặp số thực $(pa,\ qb)$.

Bước thứ tư: L là hai cặp số thực sắp thành một bảng gồm một cặp ở trên và một cặp ở dưới, V là một cặp số thực và Q cũng là một cặp số thực.

Ta quy ước rằng «lệnh» $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ tác động lên «vật» (a,b) thì cho kết quả là cặp số thực $(pa+qb,\ ra+sb)$.

Ta sẽ viết lại bốn quy ước ở bốn bước nói trên như sau:

$$c.\,(a,b)=(ca,\ cb) \qquad (1)$$

$$(p,q)\,.\,(a,b)=pa+qb \qquad (2)$$

$$(p,q)\,.\,(a,b)=(pa,\ qb) \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}.\,(a,b)=(pa+qb\ ;\ ra+sb) \qquad (4)$$

Đến đây, chắc bạn đã háo hức muốn mở rộng đi xa hơn nữa. Nhưng thôi, ta hãy tạm dừng ở bước thứ tư để đi sâu cái đã. Ta chú ý rằng (4) thực chất là áp dụng hai lần (2), lần thứ nhất áp dụng «lệnh» (p,q) vào «vật» (a,b) để có $pa+qb$, lần thứ hai áp dụng «lệnh» (r,s) vào «vật» (a,b) để có $ra+sb$.

Ta lại chú ý rằng, nếu trong (4), «lệnh» $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ có dạng $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ thì kết quả ở vế sau của (4) sẽ giống y như kết quả ở vế sau của (1):

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.\,(a,b)=(ca,\ cb).$$

Vậy hai «lệnh» c và $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ có thể coi như là một. Đặc biệt hai «lệnh» 1 và $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ đều là lệnh «để nguyên» và «hai lệnh» 0 và $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ đều là lệnh «triệt tiêu» vì $1.(a,b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.(a,b)=(a,b)$

$$0.(a,\ b)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\,(a,\ b)=(0,\ 0)$$

Ta cũng chú ý rằng, nếu trong (4) «lệnh» $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ có dạng $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ thì kết quả ở vế sau của (4) sẽ giống như kết quả ở vế sau của (3).

Tóm lại, mở rộng như ở (4) là đã bao trùm các mở rộng ở (1) và (3) và là việc thực hiện hai lần mở rộng ở (2). Cho nên ta tập trung nghiên cứu mở rộng (4) và ta thấy ngay nhiều điều mới, có vẻ kỳ lạ nữa, xuất hiện:

Lũy linh: Ta thử xét lệnh $\alpha=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Đem α tác động vào một cặp (a,b) nào đó, theo (4), ta có cặp $(b,0)$; tiếp theo đó ta lại cho α tác động lần nữa vào cặp $(b,\ 0)$; cuối cùng ta được cặp $(0,\ 0)$. Như vậy α^2 tác động vào cặp $(a,\ b)$ giống y như lệnh «0». Vậy ta có thể viết:

$\alpha^2=0$ (nhưng $\alpha\neq 0$. vì tác động của lệnh α khác tác động của lệnh 0).

Từ đó suy ra: $\alpha^3=\alpha^2.\alpha=0.\alpha=0$

rồi dần dần suy ra:

$$\alpha^n=0 \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

Ta gặp một sự kiện mới lạ: một phần tử $\alpha\neq 0$ nhưng mọi lũy thừa của nó đều bằng không. Một phần tử như vậy gọi là một phần tử *«lũy linh»*.

Lũy đẳng. Ta thử xét lệnh $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Đem β tác động vào một cặp $(a,\ b)$ nào đó, theo (4), ta có cặp $(a,\ 0)$; tiếp tục tác động β vào cặp $(a,\ 0)$ ta vẫn được cặp $(a,\ 0)$. Vậy β^2 cũng tác động lên cặp $(a,\ b)$ giống như β, tức là: $\beta^2=\beta$.

Từ đó $\beta^3=\beta^2.\beta=\beta.\beta=\beta$.

rồi suy ra $\beta^n=\beta$ với mọi số tự nhiên n.

Ta gặp một sự kiện mới lạ khác: một phần tử β khác 1 và khác 0 mà mọi lũy thừa của nó đều bằng nó. Một phần tử như vậy gọi là một phần tử *«lũy đẳng»*.

Căn bậc hai của −1. Ta thử xét lệnh $i=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Đem i tác động vào một cặp $(a,\ b)$ nào đó, theo (4), ta có cặp $(-b,\ a)$; tiếp tục tác động i vào cặp $(-b,\ a)$, ta được cặp $(-a,\ -b)$. Vậy tác động của i^2 giống y hệt như tác động của lệnh «−1». Vậy $i^2=-1$.

Dĩ nhiên $-i=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ cũng có bình phương bằng −1. Dễ hiểu làm sao. Thế mà ngày xưa người ta không hiểu nổi và gọi i là số ngu ngốc đấy!

Căn bậc hai của 1. Ai chả biết $+1$ và -1 đều có bình phương bằng 1. Nhưng đâu đã hết. Ta hãy xét lệnh $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rõ ràng đó không phải là lệnh « giữ nguyên ». Nhưng bạn tự mình có thể thử để thấy rằng e^2 là « lệnh » « giữ nguyên ». Vậy $1, -1, e$ và $-e$ đều có bình phương bằng 1.

Ước của không. Ta hãy áp dụng lệnh: $p = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ vào cặp (a, b). Theo (4), ta có cặp $(a-2b, -2a+4b)$. Ta lại áp dụng lệnh: $q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ vào cặp $(a-2b, -2a+4b)$. Theo (4), ta được cặp $(0, 0)$. Vậy: tích $qp = 0$ mặc dù $p \neq 0$, $q \neq 0$. q và p gọi là các *ước của không*, một điều cũng mới lạ.

— **Tích hai lệnh nói chung không giao hoán.** Bạn cứ thử tính mà xem. Trên kia $qp = 0$ nhưng $pq \neq 0$.

Rõ ràng ta bước vào một thế giới mới, mở rộng thế giới mà ở đó các « lệnh » là các số thực. Chắc bạn háo hức muốn bước vào thế giới đó. Nhưng đi vào đây, phải rất cẩn thận như khi bước vào một bãi mìn. Chẳng hạn vào đây, nếu gặp đẳng thức $ab = ac$. Với $a \neq 0$, chớ vội ước lược để có $b = c$. Vì $ab = ac$ cho ta $ab - ac = 0$ hay $a(b-c) = 0$ nhưng $a(b-c) = 0$ có thể xảy ra với $a \neq 0$ và $b - c \neq 0$ tức $b \neq c$. Hoặc phải rất thận trọng với thứ tự các thừa số trong một tích. Dù vậy, lòng háo hức đối với cái mới chắc sẽ thúc đẩy bạn sắm một máy dò mìn để đi vào bãi mìn đó.

Cuối cùng xin nói rằng, tôi gọi « lệnh » cho nó nôm na, còn trong toán học người ta gọi các « lệnh » bằng một danh từ văn vẻ hơn là: « toán tử ».

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

TÌM ĐA THỨC VỚI NGHIỆM CHO TRƯỚC

NGÔ VIỆT TRUNG

HÃY xét bài toán: *Tìm một đa thức với hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận một số α cho trước làm nghiệm.* Đây là một bài toán cổ điển có liên quan chặt chẽ đến việc phát triển một số khái niệm cơ sở của toán học. Ngày nay người ta biết rõ phải giải quyết bài toán này như thế nào. Tuy nhiên với trình độ phổ thông đó vẫn là một bài toán khó.

Có thể minh họa điều này qua trường hợp $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Đây là một đề bài của kỳ thi học sinh giỏi toán lớp 12 toàn quốc vừa qua. Hầu hết thí sinh đều tìm thấy:

$$P(X) = X^6 - 6X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 36X + 1$$

là một đa thức với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm nhưng không ai chứng minh được đó là đa thức có bậc nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên.

Việc tìm ra $P(X)$ hoàn toàn đơn giản và dựa vào nhận xét sau: Tích của một đa thức có nghiệm là α với một đa thức bất kỳ vẫn là một đa thức có nghiệm là α. Đa thức có bậc nhỏ nhất (với hệ số thực) nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm là $X - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$. Để loại căn bậc ba ta nhân nó với $(X - \sqrt{2})^2 + (X - \sqrt{2})\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ và nhận được đa thức

$$(X - \sqrt{2})^3 - 3 = X^3 - 3\sqrt{2}X^2 + 6X - 2\sqrt{2} - 3.$$

Để loại căn bậc hai ta lại nhân tiếp với $X^3 + 6X - 3 + \sqrt{2}(3X^2 + 2)$ và nhận được:

$$P(X) = (X^3 + 6X - 3)^2 - 2(3X^2 + 2)^2$$

Sau khi tìm được $P(X)$ nhiều thí sinh nhận xét là: vì 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên $6 = 2.3$ phải là bậc nhỏ nhất của các đa thức với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Do đó $P(X)$ là đa thức cần tìm. Kết luận liều nhưng rất gần sự thật. Tại sao không tiếp tục một cách bình thường bằng việc giả sử có một đa thức: $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_5X^5$ với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm rồi chứng minh $a_0 = \dots = a_5 = 0$?

Điều kiện duy nhất ràng buộc các số nguyên $a_0, \dots, a_5$ với nhau là $Q(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$. Vấn đề là phải loại được các căn bậc hai và ba. Để làm việc này ta hãy khai triển các lũy thừa của $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ trong $Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})$ rồi viết lại phương trình $Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})=0$ dưới dạng

$$b_0+b_1\sqrt{2}+b_2\sqrt[3]{3}+b_3\sqrt[3]{9}+b_4\sqrt{2}\sqrt[3]{3}+$$
$$+b_5\sqrt{2}.\sqrt[3]{9}=0.$$

Bạn đọc có thể dễ dàng thử lại để thấy:

$$b_0=a_0+2a_2+3a_3-4a_4+50a_5$$
$$b_1=a_1+2a_3+12a_4+4a_5$$
$$b_2=a_1+6a_3+3a_4+20a_5$$
$$b_3=3a_2+12a_4+3a_5$$
$$b_4=2a_2+8a_4+15a_5$$
$$b_5=3a_3+20a_5.$$

Loại căn bậc hai ta nhận được phương trình

$$(b_0+b_2\sqrt[3]{3}+b_3\sqrt[3]{9})^2-2(b_1+b_4\sqrt[3]{3}+b_5\sqrt[3]{9})^2=$$
$$=b_0^2+6b_2b_3-2b_1^2-12b_4b_5+$$
$$+(2b_0b_2+3b_3^2-4b_1b_4-6b_5^2)\sqrt[3]{3}+$$
$$+(2b_0b_3+b_2^2-4b_1b_5-2b_4^2)\sqrt[3]{3}=0$$

Tinh ý sẽ thấy phương trình trên cho ta một đa thức bậc hai AX^2+BX+C với hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Điều này dẫn đến liên tưởng 3 là bậc nhỏ nhất của các đa thức nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm và do đó A, B, C phải bằng không. Chứng minh điều này không khó. Từ giả thiết $A\sqrt[3]{9}+B\sqrt[3]{3}+C=0$ ta có:

$$(A\sqrt[3]{9}+B\sqrt[3]{3}+C)(A\sqrt[3]{3}-B)=3A^2-BC-$$
$$-(B^2-AC)\sqrt[3]{3}=0.$$

Khử căn bậc ba sẽ nhận được

$$(3A^2-BC)^3-3(B^2-AC)^3=0.$$

Đặt $m=3A^2-BC$ và $n=B^2-AC$. Ta có thể thấy ngay là m, n phải chia hết cho 3 nghĩa là $m=3m_1$, $n=3n_1$ với m_1, n_1 là những số nguyên. Ta lại có $m_1^3-3n_1^3=0$, từ đây lại suy ra m_1, n_1 phải chia hết cho 3, v.v... Như vậy m, n sẽ chia hết cho mọi lũy thừa của 3. Điều này chỉ xảy ra khi $m=n=0$. Từ điều kiện $3A^2-BC=0$, $B^2-AC=0$ ta lại có $3A^3-B^3=0$ và do đó A, B phải bằng không như ở trên. Quay lại với giả thiết $A\sqrt[3]{9}+B\sqrt[3]{3}+C=0$ ta có thể kết luận là $A=B=C=0$.

Với chứng minh trên thì

$$b_0^2+6b_2b_3-2b_1^2-12b_4b_5=0,$$
$$2b_0b_2+3b_3^2-4b_1b_4-6b_5^2=0,$$
$$2b_0b_3+b_2^2-4b_1b_5-2b_4^2=0.$$

Các phương trình này cho thấy b_0, ..., b_5 phải là các số chẵn. Đặt $b_0=2b_0'$, ..., $b_5=2b_5'$ rồi thay vào hệ phương trình trên và giản ước số chung 4 đi ta lại được một hệ phương trình tương tự với ẩn là b_0', ..., b_5'. Từ đây lại suy ra b_0', ..., b_5' phải là các số chẵn v.v... Tóm lại b_0, ..., b_5 chia hết cho mọi lũy thừa của 2. Điều này chỉ xảy ra khi $b_0=...=b_5=0$.

Như vậy là từ điều kiện $Q(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})=0$ ta đã suy ra được 6 phương trình sau:

$$a_0+2a_2+3a_3+4a_4+50a_5=0,$$
$$a_1+2a_3+12a_4+4a_5=0,$$
$$a_1+6a_3+3a_4+20a_5=0,$$
$$3a_2+12a_4+3a_5=0,$$
$$2a_2+8a_4+15a_5=0,$$
$$3a_3+20a_5=0.$$

Bạn đọc có thể dễ dàng giải hệ phương trình này và nhận được kết quả $a_0=...=a_5=0$. Bây giờ ta có thể kết luận 6 là bậc nhỏ nhất của các đa thức với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.

Trong trường hợp tổng quát không phải với số α nào ta cũng tìm được một đa thức với hệ số nguyên nhận α làm nghiệm. Ví dụ như các số π, e không thể là nghiệm của bất kỳ một đa thức với hệ số nguyên nào, vì vậy người ta gọi chúng là các số *siêu việt*. Ngược lại người ta gọi α là một *số đại số* nếu có một đa thức với hệ số nguyên nhận α làm nghiệm. Số ảo i cũng là một số đại số vì nó là nghiệm của phương trình $X^2+1=0$.

Các số đại số thường có thể biểu diễn qua các căn bậc tự nhiên của các số nguyên với các phép tính thông thường. Không phải việc xác định các đa thức với hệ số nguyên bậc nhỏ nhất nhận chúng làm nghiệm lúc nào cũng dễ dàng như trường hợp $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. Sau đây là một cách xác định các đa thức này dựa theo các kết quả của toán học cao cấp.

Giả sử $P(X)$ là một đa thức với hệ số nguyên bậc nhỏ nhất nhận một số α làm nghiệm. Nếu bậc của $P(X)$ là n thì người ta có thể tìm thấy n số α_1, ..., α_n khác nhau sao cho:

$$P(X)=a(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n),$$

ở đây a là hệ số của X^n trong $P(X)$. Tất nhiên α nằm trong các số $\alpha_1, ..., \alpha_n$ và $\alpha_1, ..., \alpha_n$ có thể là các số phức. Bạn đọc chưa quen với số phức có thể hiểu chúng là các số có dạng $a+ib$ với a, b là những số thực mà phép nhân hai số phức thực hiện được nhờ tính chất $i^2=-1$. Các số $\alpha_1, ...\alpha_n$ được gọi là các *số liên hợp* của α. Việc tìm $P(X)$ có thể quy về việc tìm các số liên hợp của α.

Nếu α là một căn bậc m của một số nguyên a không có dạng $a = b^t c$ với t là một ước số của m thì các số liên hợp của α là,

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)\sqrt[m]{a},$$

$k = 1, \dots, m$, và ta có $P(X) = X^m - a$ là một đa thức cần tìm.

Nếu α có thể biểu diễn dưới dạng $F(\beta, \gamma, \dots)$ với F là một đa thức nhiều biến với hệ số nguyên và $\beta, \gamma, \dots$ là các số có dạng $\sqrt[m]{a}$ như trên sao cho nếu $\beta = \sqrt[m]{b}$ và $\gamma = \sqrt[m]{c}$ thì b và c phải nguyên tố cùng nhau, thì các số liên hợp của α sẽ có dạng $F(\beta', \gamma', \dots)$ với $\beta', \gamma', \dots$ là một cặp các số liên hợp tương xứng của $\beta, \gamma, \dots$ Giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là các số khác nhau có dạng $F(\beta', \gamma', \dots)$. Đa thức $(X-\alpha_1) \dots (X-\alpha_n)$ sẽ có hệ số là các số hữu tỷ. Quy đồng và loại bỏ mẫu số ở các hệ số của đa thức này ta sẽ có đa thức $P(X)$ cần tìm.

Ví dụ như trường hợp $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, các số liên hợp của $\sqrt{2}$ là $\pm\sqrt{2}$ và của $\sqrt[3]{3}$ là $\sqrt[3]{3}$, $(-1/2 \pm i\sqrt{3/2})\sqrt[3]{3}$. Bạn đọc có thể thử lại để thấy.

$$\begin{aligned}
&(X - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3})(X + \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}) \times \\
&\times (X - \sqrt{2} + \sqrt[3]{3/2} + i.\sqrt{3}.\sqrt[3]{3/2}) \times \\
&\times (X - \sqrt{2} + \sqrt[3]{3/2} - i\sqrt{3}\sqrt[3]{3/2}) \times \\
&\times (X + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3/2} + i\sqrt{3}.\sqrt[3]{3/2}) \times \\
&\times (X + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3/2} - i\sqrt{3}.\sqrt[3]{3/2}) = \\
&= X^6 - 6X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 36X + 1.
\end{aligned}$$

Cần phải nhấn mạnh rằng phương pháp trên chỉ giúp ta xác định $P(X)$ trước và ta vẫn phải chứng minh bằng các kiến thức sơ cấp rằng đa thức $P(X)$ tìm được theo cách này chính là đa thức với hệ số nguyên bậc nhỏ nhất nhận α làm nghiệm.

Bạn đọc nào quan tâm đến các kiến thức toán học cao cấp dẫn đến phương pháp trên có thể tìm đọc quyển «Đại số» của Serge Lang (Phần II, chương VII và VIII) do Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp xuất bản năm 1974.

Bài 1/136: *Cho dãy số $\{x_n\}$ như sau: $x_1 = 20$, $x_2 = 100$ và*

$$x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} - 1964, \quad \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng, tồn tại một số của dãy chia hết cho 1984.

Lời giải: Đặt $x_n = 1984\alpha_n + r_n$, $\forall n \geq 1$

α_n và r_n là các số nguyên và $0 \leq r_n < 1984$.

Xét dãy cặp số $(r_1, r_2); (r_2, r_3); \dots; (r_n, r_{n+1}); \dots$

Vì dãy này vô hạn mà số các số r_i hữu hạn nên phải tồn tại hai số tự nhiên l, m (giả sử $m > l$) sao cho $(r_l, r_{l+1}) = (r_m, r_{m+1})$ theo nghĩa

$$\left.\begin{aligned} r_l &= r_m \\ r_{l+1} &= r_{m+1} \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng, khi đó $r_{l-1} = r_{m-1}$

Thật vậy, xét hiệu:

$$\begin{aligned}
5x_{m-1} - 5x_{l-1} &= (x_{m+1} - 4x_m + 1964) - (x_{l+1} - 4x_l + 1964) \\
&= (x_{m+1} - x_{l+1}) - 4(x_m - x_l) \\
&= [1984(\alpha_{m+1} - \alpha_{l+1}) + (r_{m+1} - r_{l+1})] - \\
&\quad - 4[1984(\alpha_m - \alpha_l) + (r_m - r_l)] \\
&= 1984[(\alpha_{m+1} - \alpha_{l+1}) - 4(\alpha_m - \alpha_l)] \quad \text{(theo (I))}
\end{aligned}$$

Suy ra $5(x_{m-1} - x_{l-1}) \vdots 1984$ và do $(5, 1984) = 1$ nên $(x_{m-1} - x_{l-1}) \vdots 1984$.

Từ đây ta có: $r_{m-1} = r_{l-1}$

Tương tự ta cũng có $r_{l-2} = r_{m-2}$ và cứ tiếp tục quá trình trên ta nhận được:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= r_{2+(m-l)} \\ r_1 &= r_{1+(m-l)} \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng $x_{m-l} \vdots 1984$.

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
5x_{m-l} &= x_{m-l+2} - 4x_{m-l+1} + 1964 \\
&= 1984\alpha_{m-l+2} + r_{m-l+2} \\
&\quad - 4(1984\alpha_{m-l+1} + r_{m-l+1}) + 1964 \\
&= 1984(\alpha_{m-l+2} - 4\alpha_{m-l+1}) + (r_2 - 4r_1) + 1964 \\
&\qquad \text{(theo (II))}
\end{aligned}$$

Từ điều kiện đầu bài ta có $r_1 = 20$, $r_2 = 100$ và do vậy:

$$5x_{m-l} = 1984(\alpha_{m-l+2} - 4\alpha_{m-l+1}) + 1984.$$

Suy ra $5x_{m-l} \vdots 1984$ và do $(5, 1984) = 1$ nên $x_{m-l} \vdots 1984$ (đ.p.c.m).

Nhận xét: Các bạn ***Đỗ Duy Khánh*** (10 CT Nguyễn Văn Trỗi – Nha Trang), ***Lê Thanh Hà*** (12 CT Lam Sơn Thanh Hóa), ***Lê Bá Tường*** (21 Lương Văn Cù. – Long Xuyên, ***Trần Hưng*** (12 CT Ngô Sĩ Liên Hà Bắc), ***Nguyễn Ngọc Văn Khoa*** và ***Lâm Tùng Giang*** (10 CT Phan Châu Trinh – Đà Nẵng) có lời giải tốt.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài 2/136: *Với mỗi số tự nhiên $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ $(a_1 \neq 0)$ ta ký hiệu $\vec{A}$ là số $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1}$. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên k có tính chất sau: Nếu số tự nhiên A là bội của k thì số tự nhiên $\vec{A}$ cũng là bội của k.*

Lời giải: Dễ thấy 1, 3, 9, 11, 33, 99 là các số tự nhiên có tính chất nêu trên. Đó là những ước số của 99. Ta sẽ chứng minh mọi số k có tính chất nêu trên là ước số của 99.

Giả sử k là số có m chữ số do đó $k < 10^m$. Trong $10^m - 1$ số tự nhiên liên tiếp từ $10^m + 1$ đến $2.10^m - 1$ có ít nhất một số chia hết cho k. Số đó là $\overline{1a_1a_2\ldots a_m}$. Khi đó số $\overline{a_n\ldots a_2a_11}$ cũng chia hết cho k. Vậy k và 10 nguyên tố cùng nhau.

Cũng vậy trong $10^m - 1$ số tự nhiên liên tiếp từ $5.10^{m+1} + 1$ đến $51.10^m - 1$ có một số chia hết cho k. Giả sử đó là số B viết dưới dạng cơ số 10 là $\overline{50b_1b_2\ldots b_m}$. Khi đó cả $\vec{B}$ và do đó $M = \vec{B}.10^{m+1} + B$ cũng chia hết cho k. Ta có $M = \overline{b_m\ldots b_2b_1100b_1b_2\ldots b_m} \Rightarrow M - \vec{M} = 99.10^m$

Khi đó $M - \vec{M}$ chia hết cho k hay 99.10^m chia hết cho k. Mà k và 10 nguyên tố cùng nhau, vậy k phải là ước của 99.

Nhận xét: Bài này không bạn nào có lời giải đầy đủ.

QUỐC TOẢN

Bài 3/136: *Cho dãy số $u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/u_{n-1}$ với mọi $n \in N$. Chứng minh u_n nguyên với mọi n.*

Lời giải: Ta chứng minh bài toán bằng qui nạp. Với $n = 2$ ta có $u_2 = (u_1^2 + 1)/u_0 = (1+1)/1 = 2$

$\Rightarrow u_2$ nguyên.

Giả sử đã chứng minh được u_n nguyên với mọi $n \leqslant k$. Ta có

$$u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/u_{n-1} \Rightarrow u_{n+1}u_{n-1} = u_n + 1$$

Nên
$$u_{k+1}u_{k-1} = u_k^2 + 1$$
$$u_k\,u_{k-2} = u_{k-1}^2 + 1$$

Suy ra $u_{k+1}u_{k-1} - u_ku_{k-2} = u_k^2 - u_{k-1}^2$

$$\Rightarrow u_{k-1}(u_{k+1} + u_{k-1}) = u_k(u_k + u_{k-2})$$
$$\Rightarrow u_k/(u_{k+1} + u_{k-1}) = u_{k-1}/(u_k + u_{k-2})$$

Tương tự

$$u_{k-1}/(u_k + u_{k-2}) = u_{k-2}/(u_{k-1} + u_{k-3}) = \cdots$$
$$= u_1/(u_2 + u_0) = 1/(2+1) = 1/3.$$

Do đó

$u_k/(u_{k+1} + u_{k-1}) = 1/3 \Rightarrow u_{k+1} = 3u_k - u_{k-1}$
$\Rightarrow u_{k+1}$ nguyên (vì u_k, u_{k-1} nguyên)

Vậy u_n nguyên với mọi n.

Nhận xét: Các bạn *Lê Thanh Hà* (12 CT Lam Sơn, Thanh Hóa); ***Lâm Tùng Giang*** và ***Nguyễn Ngọc Văn Khoa*** (10 CT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), *Trần Hưng* (12 CT Ngô Sĩ Liên, Hà Bắc); *Nguyễn Quang Thái* (11 CT ĐHSP Hà Nội 1) có lời giải tốt.

Đ.B.K

Bài 4/136: *Cho $0 < a,b,c \leqslant 1$. Chứng minh:*
$$a/(b+c+1) + b/(c+a+1) + c/(a+b+1) + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1$$

Lời giải: (của bạn ***Nguyễn Hồ Anh Nguyên***, lớp 11 CT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng):

Trước hết ta chứng minh, nếu $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$ thì:
$$(1-\alpha)(1-\beta) \leqslant 1/(1+\alpha+\beta) \qquad (*)$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số không âm $(1-\alpha)$, $(1-\beta)$, $(1+\alpha+\beta)$ ta có:
$$[(1-\alpha+1-\beta+1+\alpha+\beta)/3]^3 \geqslant$$
$$\geqslant (1-\alpha)(1-\beta)(1+\alpha+\beta) \Leftrightarrow (1-\alpha)(1-\beta) \leqslant 1/(1+\alpha+\beta)$$

Để ý rằng: $a/(a+b+c) + b/(a+b+c) + c/(a+b+c) = 1$

Khi đó bất đẳng thức của đề ra có thể viết thành:

$$a/(b+c+1) + b/(a+c+1) + c/(a+b+1) + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant a/(a+b+c) + b/(a+b+c) + c/(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{a(1-a)}{(a+b+c)(b+c+1)} + \frac{b(1-b)}{(a+b+c)(a+c+1)} + \frac{c(1-c)}{(a+b+c)(a+b+1)} \geqslant (1-a)(1-b)(1-c) \quad (**)$$

Theo (*) ta có:

$1/(1+b+c) \geqslant (1-b)(1-c)$; $1/(1+a+c) \geqslant (1-a)(1-c)$; $1/(1+a+b) \geqslant (1-a)(1-b)$

Từ đó suy ra:

$$\frac{a(1-a)}{(a+b+c)(1+b+c)} \geqslant \frac{a(1-a)(1-b)(1-c)}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\frac{b(1-b)}{(a+b+c)(1+a+c)} \geqslant \frac{b(1-a)(1-b)(1-c)}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\frac{c(1-c)}{(a+b+c)(1+a+b)} \geqslant \frac{c(1-a)(1-b)(1-c)}{a+b+c} \quad (3)$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được bất đẳng thức (**). Và như vậy bất đẳng thức của đề ra được chứng minh.

Chú ý: 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

2. Bằng phương pháp của lời giải trên có thể chứng minh được bất đẳng thức tổng quát hơn:

Với $0 < a_i \leqslant 1$, $(i=\overline{1,n})$ thì:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i/(1+S-a_i) + \prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \leqslant 1$$

ở đây: $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

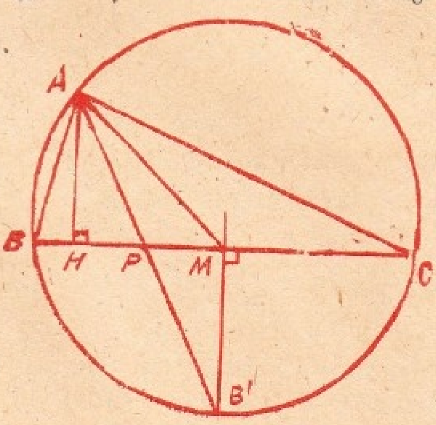
Nhận xét: Các bạn *Lâm Tùng Giang* (10 CT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), ***Lê Bá Tường*** (21 Lương Văn Cù, Long Xuyên), ***Nguyễn Ngọc Văn Khoa*** (10 CT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng),... có lời giải tốt.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài 5/136: *Tam giác ABC có độ lớn hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ khác nhau. AH, AM, AP tương ứng là đường cao, trung tuyến, phân giác dựng từ A. Chứng minh rằng $PH = PM$ khi và chỉ khi $\sin B.\sin C = \sin^2(A/2)$.*

Lời giải: (Của *Nguyễn Ngọc Văn Khoa* lớp 10 CT. Phan Châu Trinh, Đà Nẵng)

Phân giác AP kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tại P', P' là điểm giữa cung BC và do đó $P'M \perp BC$ suy ra $AH // P'M$ và P ở trong đoạn HM.



Áp dụng định lý hàm số sin cho hai tam giác *ABP* và *ACP* ta được:

$BP/AP = \sin(A/2)/\sin B$ và $CP/AP = \sin(A/2)/\sin C$

Do đó $\sin^2(A/2) = \sin B.\sin C$ tương đương với $BP.CP = AP^2$. Do $BP.PC = AP.PP'$ cho nên

$$\sin^2(A/2) = \sin B.\sin C$$
$$\Leftrightarrow \quad AP.PP' = AP^2$$
$$\Leftrightarrow \quad PP' = AP$$
$$\Leftrightarrow \quad HP = PM \ (\text{vì } \widehat{B} \neq \widehat{C})$$

Nhận xét: Trong số trước đề ra có sự nhầm lẫn $PH = PM$ thành $MH = MP$. Tất cả các bài gửi về đều đã chỉnh lý và giải tốt. Trong số các bài gửi về bài của em *Nguyễn Ngọc Văn Khoa* tuy học lớp thấp nhất nhưng có bài giải ngắn gọn, sáng sủa nhất.

QUỐC TOẢN

Bài 6/136: *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, có bậc không quá 4, với tính chất: tồn tại 5 số nguyên khác nhau x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sao cho*

$$P(x_1)\ P(x_2)\ P(x_3)\ P(x_4)\ P(x_5) = -3.$$

Lời giải: Vì vai trò của các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 như nhau nên ta có thể giả thiết $|P(x_1)| > P(x_j)$; $j=2, 3, 4, 5$. Có hai khả năng $P(x_1)=3$ và $P(x_1)=-3$.

A) $P(x_1)=3$. Khi đó $P(x_2)P(x_3)\ P(x_4)\ P(x_5) = -1$.

Cần phân biệt hai trường hợp nhỏ:

A_1) $P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = -1$; $P(x_5) = 1$. Khi đó $P(x) = Q(x)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) - 1$ (1) với $Q(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên (có bậc không quá 1).

Thay $x=x_1$ và $x=x_5$ vào (1) ta được

$$Q(x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4) = 4 \quad (2)$$
$$Q(x_5)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4) = 2 \quad (3)$$

Vì vai trò của x_2, x_3, x_4 như nhau nên ta có thể coi $x_4 > x_3 > x_2$. Thế thì theo (2): $x_1-x_2 > x_1-x_3 > x_1-x_4$ là những ước giảm dần của 4.

Theo (3): $x_5-x_2 > x_5-x_3 > x_5-x_4$ là những ước giảm dần của 2. Nếu $x_1 > x_5$ thì x_1-x_2, x_1-x_3, x_1-x_4, x_5-x_4 là các ước giảm dần của 4. Suy ra $x_1-x_2=2$; $x_1-x_3=1$; $x_1-x_4=-1$; $x_5-x_4=-2$. Từ đó suy ra: $x_3-x_4=-2$ hay $x_3=x_5$ mâu thuẫn.

Tương tự, nếu $x_1 < x_5$ thì x_5-x_2, x_5-x_3, x_5-x_4, x_1-x_4 là các ước giảm dần của 2. Điều này không thể xảy ra.

A2) $P(x_2) = -1$; $P(x_3) = P(x_4) = P(x_5) = 1$. Khi đó $P(x) = Q(x)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)+1$ với $Q(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Cho $x = x_1$ và $x = x_2$, suy ra:

$$Q(x_1)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5) = 2.$$

$$Q(x_2)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5) = -2.$$

có thể coi rằng $x_5 > x_4 > x_3$ thì $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4$, $x_1 - x_5$ và $x_5 - x_2$, $x_4 - x_2$, $x_3 - x_2$ là các ước giảm dần của 2.

Nếu $x_1 > x_2$ thì $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4$, $x_1 - x_5$, $x_2 - x_5$ là 4 ước giảm dần của 2, điều này không xảy ra.

Nếu $x_1 < x_2$ thì $x_5 - x_1$, $x_5 - x_2$, $x_4 - x_2$, $x_3 - x_2$ là 4 ước giảm dần của 2, điều này cũng không thể xảy ra.

B) $P(x_1) = -3$. Khi đó $P(x_2)$ $P(x_3)$ $P(x_4)$ $P(x_5) = 1$. Ta phân biệt 3 trường hợp nhỏ:

B1) $P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5) = -1$. Khi đó.

$$P(x) = A(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \times$$
$$\times (x-x_5) - 1 \qquad (4)$$

(với A là 1 số nguyên)

Thay $x = x_1$ vào (4) ta được $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4$, $x_1 - x_5$ là 4 ước khác nhau của 2, điều này không thể xảy ra.

B2) $P(x_2) = P(x_3) = -1$; $P(x_4) = P(x_5) = 1$. Có thể giả thiết $x_3 > x_2$; $x_5 > x_4$. Khi đó

$$P(x) = Q(x)(x-x_2)(x-x_3) - 1 \qquad (5)$$

Thay $x = x_1$, $x = x_4$, $x = x_5$ vào (5) ta được

$$Q(x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3) = -2$$

$$Q(x_4)(x_4-x_2)(x_4-x_3) = 2$$

$$Q(x_5)(x_5-x_2)(x_5-x_3) = 2$$

Vậy $x_5 - x_2$, $x_4 - x_2$, $x_4 - x_3$ là các ước giảm dần của 2. Suy ra:

a) Hoặc $x_5 - x_2 = 2$; $x_4 - x_2 = 1$; $x_4 - x_3 = -1$ suy ra $x_5 = x_3$ vô lý.

b) Hoặc $x_5 - x_2 = 1$; $x_4 - x_2 = -1$; $x_4 - x_3 = -2$ suy ra $x_5 = x_3$ vô lý.

B3) $P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5) = 1$. Khi đó

$$P(x) = A(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)+1 \qquad (6)$$

(với A là 1 số nguyên). Thay $x = x_1$ vào (6) ta được $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4$, $x_1 - x_5$ là các ước khác nhau của 4. Có thể coi: $x_2 > x_3 > x_4 > x_5$. Các ước của 4 là: $-4, -2, -1, 1, 2, 4$.

Suy ra $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4$, $x_1 - x_5$ là các ước tăng dần của 4. Nhận xét rằng $x_1 - x_2 \neq \pm 4$; ± 1; 2 vì khi đó không thể chọn được 4 ước khác nhau. Suy ra:

$$x_1 - x_2 = -2; x_1 - x_3 = -1; x_1 - x_4 = 1;$$
$$x_1 - x_5 = 2$$

từ đó $A = -1$. Vậy $P(x) = -(x-x_1-2) \times$
$\times (x-x_1-1)(x-x_1+1)(x-x_1+2)+1$

hay

$P(x) = -(x-x_1)^4 + 5(x-x_1)^2 - 3$; Với x_1 là một số nguyên tùy ý.

Nhận xét: Các bạn *Lê Bá Tường* (21 – Lương Văn Cù, Long Xuyên) *Trần Hưng* (12CT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang, Hà Bắc) có lời giải tốt. Một số bạn khác, do nhầm lẫn trong suy luận và tính toán đã đi đến các kết luận: Không tồn tại nghiệm hoặc tồn tại hai đa thức khác nhau thỏa mãn điều kiện bài ra.

N.V.M.

Bài 7/136: *Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*:

$$y = \frac{x^6 - 10x^5 + 19x^4 + 62x^3 - 151x^2 - 96x + 257}{x^3 - 5x^2 - 3x + 16}$$

trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Lời giải: Ta có $A = x^3 - 5x^2 - 3x + 15 =$
$$= x^2(x-5) - 3(x-5) = (x^2-3)(x-5) =$$
$$= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-5) \qquad (1)$$

Mặt khác, hàm số trên có thể biểu diễn được dưới dạng:

$$y = x^3 - 5x^2 - 3x + 16 + 1/(x^3 - 5x^2 - 3x + 16) \quad (2)$$

từ (1) ta thấy $A \geqslant 0$ với $|x| \leqslant \sqrt{3}$ mà $x^3 - 5x^2 - 3x + 16 = A + 1$ nên từ (2) áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $y \geqslant 2$ và dấu bằng đạt được khi và chỉ khi:

$$x^3 - 5x^2 - 3x + 16 = 1/(x^3 - 5x^2 - 3x + 16)$$
$$\Leftrightarrow (x^3 - 5x^2 - 3x + 16)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - 3x + 16 = 1 \text{ với } |x| \leqslant \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - 3x + 15 = 0,$$

và theo (1) thì trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ ta có hai nghiệm là $x = \pm\sqrt{3}$.

Tóm lại giá trị nhỏ nhất cần tìm $y_{min} = 2$ và đạt được tại $x = \sqrt{3}$ hoặc $x = -\sqrt{3}$.

Nhận xét: Các bạn *Hà Anh Vũ* (10 CT. ĐHSP Hà Nội), *Lâm Tùng Giang* (Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), *Lê Thiện Thanh, Lý Văn Thành* (Phổ thông Trung học An Nhơn, Nghĩa Bình) và bạn *Nguyễn Thục Vấn* (trường phổ thông trung học Thăng Long, Hà Nội) có lời giải tốt.

T.V.T

Bài 8/136: *Gọi V là tập hợp tất cả các tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$ sao cho $|P(x)| \leqslant 1$ với mọi giá trị $0 \leqslant x \leqslant 1$. Hãy tìm cực đại của $|P'(x)|$ với mọi P nằm trong V.*

Lời giải: Vì $P'(x) = 2ax + b$ là một hàm bậc nhất nên trên đoạn [0,1] $P'(x)$ nhận các giá trị cực đại và cực tiểu tại 2 đầu mút 0 và 1, do đó cực đại của $P'(x)$ chỉ có thể ở 1 trong 2 điểm $x=0$ hay $x = 1$.

Ta có $P'(1) = 2a+b = 3(a+b+c) - (a+2b+4c)+c$

$$\Rightarrow |P'(1)| = |2a+b| \leqslant 3|a+b+c| + |a+2b+4c| + |c| = 3|P(1)| + 4|P(1/2)| + |P(0)| \leqslant 3.1 + 4.1 + 1 = 8 \ \forall P \in V$$

Mặt khác $P'(0) = b = (a+2b+4c) - (a+b+c) - 3c$

$$\Rightarrow |P'(0)| = |b| \leqslant |a+2b+4c| + |a+b+c| + 3|c| = 4|P(1/2)| + |P(1)| + 3|P(0)| \leqslant 8$$

với mọi $P \in V$

Ta suy ra $|P'(x)| \leqslant 8 \ \forall x \in [0,1]$ và $\forall P \in V$

Cuối cùng ta thấy tam thức $P(x) = 8x^2 - 8x + 1 \in V$ và có $P'(0) = 8$.

Nhận xét: Các bạn *Lê Thanh Hà và Trịnh Văn Hiện*, (12 CT Lam Sơn Thanh Hóa), *Trần Hưng* (12 CT Ngô Sĩ Liên Hà Bắc) có lời giải tốt.

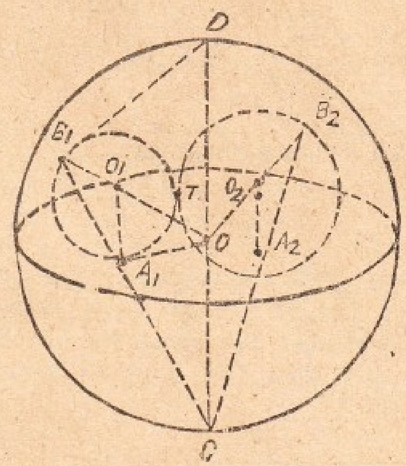
Đ.B.K.

Bài 9/136: *Cho một nửa mặt cầu tâm O bán kính R cố định và hai hình cầu nhỏ thay đổi nhưng luôn tiếp xúc nhau và nội tiếp trong nửa mặt cầu trên.*

Chứng minh rằng tiếp điểm của hai hình cầu nhỏ luôn luôn nằm trên một mặt cầu cố định.

Lời giải: Gọi A_1, A_2 là tiếp điểm của các mặt cầu nhỏ (O_1); (O_2) với hình tròn lớn của nửa hình cầu đã cho; B_1, B_2 là các tiếp điểm của các mặt cầu (O_1), (O_2) với nửa mặt cầu đã cho. CD là đường kính của hình cầu tâm O bán kính R, vuông góc với mặt phẳng của hình tròn lớn đã cho. Ta có: $O_iA_i // OC$; O, O_i, B_i thẳng hàng và do $O_iB_i/O_iA_i = OB_i/OC$ nên cũng có A_i, B_i, C_i thẳng hàng (với $i = \overline{1,2}$). Lại có, tứ giác A_iODB_i nội tiếp vì $\widehat{DB_iC} = \widehat{A_iOD} = 1v$, nên:

$CA_i . CB_i = CO . CD = 2R^2$ $(i = \overline{1,2})$. Do đó C có cùng phương tích với hai mặt cầu (O_1) và (O_2), hay C nằm trên mặt đẳng phương của hai mặt cầu đó. Từ đó, gọi T là tiếp điểm của hai mặt cầu nhỏ thì ta có CT sẽ là tiếp tuyến của chúng và $CT^2 = CA_i . CB_i = 2R^2$. Vậy T thuộc mặt cầu tâm C bán kính $R\sqrt{2}$ cố định (đ.p.c.m).



Nhận xét: bạn *Lê Thanh Hà* (12 CT. Lam Sơn, Thanh Hóa) giải đúng và có lời giải gần giống ở trên. Ngoài ra các bạn *Lê Bá Cường* (21. Lương Văn Cù, Long Xuyên) dùng kiến thức về tam giác lượng và mặt cầu Apôlôniut, bạn *Nguyễn Phú Quý* (10 CT. Phan châu Trinh, Đà Nẵng) dùng kiến thức hình học giải tích cũng có lời giải tương đối tốt.

T.V.T.

Bài 10/136: *Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức.*

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\cot gA + \cot gB + \cot gC}\right)^3 \leqslant \frac{a^2.b^2.c^2}{tg(A/2).tg(B/2).tg(C/2)}$$

Lời giải (Dựa theo cách giải của các bạn *Trần Duy Hinh*, 12G Trưng Vương, Quy Nhơn. *Lê Thanh Hà* 12CT. Lam Sơn, Thanh Hóa và một số bạn khác).

Ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - (2bc\sin A).\cot gA = b^2 + c^2 - 4S\cot gA \quad (S \text{ là diện tích } \Delta ABC).$$

Từ đó suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot gA + \cot gB + \cot gC) \qquad (1)$$

Mặt khác,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \geqslant 2bc - 2bc\cos A =$$
$$= 2bc(1 - \cos A)$$
$$= 4bc.\sin^2(A/2)$$
$$= 4bc.\sin A.\frac{\sin^2(A/2)}{\sin A}$$
$$= 4S.\mathrm{tg}(A/2).$$

Do vậy $\dfrac{a^2}{\mathrm{tg}(A/2)} \geqslant 4S$. Từ đó suy ra:

$$\frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{tg}(A/2).\mathrm{tg}(B/2).\mathrm{tg}(C/2)} \geqslant (4S)^3 \qquad (2).$$

Kết hợp (1) và (2) ta được d.p.c.m. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, tức ΔABC là tam giác đều.

Cách 2 (dựa theo cách giải của *Lê Bá Tường*, 21 Lương Văn Cù, Long Xuyên; *Trần Hưng* 12CT Ngô Sĩ Liên, Bắc giang, Hà Bắc; *Hồ Anh Nguyên* 11CT Phan Chu Trinh Đà Nẵng và một số bạn khác):

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC. Ta có:

$$r = S/p = (p-a)\mathrm{tg}(A/2) = (p-b)\mathrm{tg}(B/2) =$$
$$= (p-c)\mathrm{tg}(C/2) \qquad (1)$$

$$\mathrm{cotg}\,A = \frac{(b^2+c^2-a^2)/2bc}{2S/bc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh tương đương với:

$$(4S)^3 \leqslant a^2b^2c^2 \cdot p^3(p-a)(p-b)(p-c)/S^3 =$$
$$= p^2a^2b^2c^2/S$$
$$\Leftrightarrow (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \leqslant a^2b^2c^2 \qquad (3).$$

$$\text{Mà}\begin{cases} a^2 \geqslant a^2-(b-c)^2 = (a+b-c)(a+c-b) \\ b^2 \geqslant b^2-(a-c)^2 = (a+b-c)(b+c-a) \\ c^2 \geqslant c^2-(a-b)^2 = (a+c-b)(b+c-a). \end{cases}$$

Nhân các vế tương ứng ta được (3).

Nhận xét: Một số bạn khác còn dùng hệ thức Ơle để chứng minh.

N.V.M.

Bài 1/139. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho 1984 phân số sau đây là tối giản:

$1/(n^{1984}+1984n+3)$; $2/(n^{1984}+1984n+4)$; ...; $1984/(n^{1984}+1984n+1986)$.

Đỗ Đức Thái

Bài 2/139. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $x+y+z$, biết rằng x, y, z thỏa mãn phương trình

$$y^2+yz+z^2 = 1-3x^2/2.$$

Lê Quốc Hán

Bài 3/139. Chứng minh rằng trong ΔABC: giao điểm của đường phân giác ABC với đường trung bình song song với AB, và các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp ΔABC với AB và AC, nằm trên một đường thẳng.

Đỗ Hồng Anh

Bài 4/139. Cho ΔABC. Gọi M, N, P là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh BC, CA, AB. Giả sử: d_a là đường thẳng qua điểm giữa của PN và vuông góc với BC, d_b là đường thẳng qua điểm giữa của PM và vuông góc với AC, d_c là đường thẳng qua điểm giữa của MN và vuông góc với AB.

Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng qui.

Phương Thảo

Bài 5/139. a) Tìm phương trình bậc 3 có nghiệm là

$$\cos(\pi/7),\ \cos(3\pi/7),\ \cos(5\pi/7).$$

b) Từ đó hãy tính tổng:

$$1/\cos(\pi/7) + 1/\cos(3\pi/7) + 1/\cos(5\pi/7).$$

Đỗ Bá Khang

Bài 6/139. Một tứ giác ghềnh có các góc đối diện bằng nhau. Chứng minh rằng các cạnh đối của tứ giác bằng nhau.

Đỗ Bá Khang

Bài 7/139. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$.

Chứng minh rằng nếu m, n, k là ba số nguyên đôi một khác nhau thì $\max\{f(m), f(n), f(k)\} \geqslant 1/2$.

Nguyễn Văn Mậu

***Bài 8/139.** Cho $p=\overline{a_0 a_1 a_2 \ldots a_k}$ $(k \geqslant 3)$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k = 0$ không có nghiệm hữu tỷ.

Nguyễn Văn Mậu

***Bài 9/139.** Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác có 3 cạnh là 3 đường trung tuyến của ΔABC, và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh rằng

$$R_1/R_2 \geqslant (4/3)\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2).$$

Tạ Văn Tự

***Bài 10/139.** Cho hàm số $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$. Chứng minh rằng hai khẳng định sau tương đương:

a) $f(xf(y)) = yf(x) \quad \forall x,y>0.$

b) $f(xy) = f(x)f(y) \quad \forall x,y>0.$

$f(f(x)) = x \quad \forall x>0.$

Nguyễn Minh Đức

TOÁN HỌC và ĐỜI SỐNG

VẬT LÝ TOÁN TRONG KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT HIỆN ĐẠI

PHẠM HUYỀN

1. Vật lý toán là gì? Trước hết hãy lấy một ví dụ về phương pháp vật lý toán. Trong cơ học, để tìm chuyển động của một vật trong không gian, người ta có thể mô hình hóa vật đó dưới dạng một điểm có khối lượng m và giả thử tại thời điểm t ở vị trí với véctơ bán kính $\vec{r}$, rồi mô tả chuyển động bằng hàm $\vec{r}=\vec{r}(t)$, vận tốc bằng hàm $\vec{v}=d\vec{r}/dt$, gia tốc bằng $\vec{w}=d^2\vec{r}/dt^2$ và áp dụng định luật Niutơn mô tả quan hệ giữa lực tác dụng $\vec{F}$ và chuyển động bằng phương trình toán học.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}.$$

Đó là phương trình vi phân mô tả chuyển động của vật điểm trong không gian. Phương trình này cho phép các nhà cơ học có thể khảo sát chuyển động bằng các định lý toán học, tức qua tích phân các phương trình này có thể rút ra các kết luận khác nhau về chuyển động mà không cần đến những quan sát hay các thực nghiệm vừa tốn kém vừa mất nhiều thời gian.

Qua ví dụ trên có thể nói, vật lý toán là phương pháp khảo sát các bài toán vật lý bằng các định lý toán học, là lý thuyết về các mô hình toán học mô tả các hiện tượng vật lý. Thực chất của phương pháp này là: chỉ ra một số đại lượng đặc trưng cho quá trình cần khảo sát, thiết lập các phương trình vi phân mô tả quan hệ định lượng giữa các đại lượng đặc trưng nguyên nhân và hệ quả của hiện tượng, sau đó dùng phương pháp suy diễn toán học, các phương pháp tích phân xác định các đại lượng đặc trưng ở tại mỗi vị trí, mỗi thời điểm với yêu cầu sao cho lời giải toán học thu được phải phù hợp với các số liệu quan sát thực tế. Từ đây còn có thể rút ra các kết luận lý thuyết khác nhau cho công tác thực hành, thí dụ như trong cơ học, có thể chỉ ra các lực cần tác dụng để các chuyển động xảy ra theo yêu cầu cho trước v.v...

Để lập các phương trình vi phân mô tả hiện tượng ta phải dựa vào các giả thuyết hay còn gọi là các tiên đề hay các nguyên lý, là các chân lý được rút ra từ quá trình quan sát lâu dài và sự tổng hợp thực tế sâu sắc quá trình vật lý. Trong cơ học — đó là các tiên đề Niutơn.

2. Vài nét về sự phát triển của vật lý toán. Niutơn (1643 — 1727) là người đặt nền móng cho phương pháp vật lý toán như một khoa học. Với bài toán cơ học về chuyển động, Niutơn đã xây dựng được các mô hình về các vật, các phương trình vi phân chuyển động trong cơ học lý thuyết, xây dựng lý thuyết hấp dẫn tự nhiên. Đalambe (1717 – 1783), Ơle (1707 – 1783), Becnuli (1700 — 1782), Lagrăng (1736 — 1818), Oxtrôgratxki (1801 — 1862), Liapunôp (1857 — 1918), Xtêclôp (1864 — 1926), Traplưgyn (1869 — 1942), Poăngcarê, Kôpmôgôrôp... đã mở rộng phương pháp nghiên cứu nhiều hiện tượng vật lý khác, như bài toán về dao động của các dây căng, của các thanh, chuyển động của chất lỏng, sự lan truyền âm thanh và nhiệt v.v... những bài toán trong quang học, điện học, từ học, vật lý lượng tử, lý thuyết tương đối v.v... và đề xuất nhiều mô hình vật lý toán mới dưới dạng các phương trình vi phân thường (hàm đặc trưng chỉ phụ thuộc một biến), phương trình đạo hàm riêng (hàm đặc trưng phụ thuộc nhiều biến), phương trình vi tích phân v.v...

Để xây dựng các mô hình toán người ta đã áp dụng lý thuyết về các phép tính biến phân, lý thuyết hàm và phiếm hàm, lý thuyết xác suất, các phương pháp tính gần đúng và cả các máy tính điện tử..., tóm lại là tất cả các thành tựu của toán học hiện đại. Và vật lý toán đã trở thành một chất kết dính của lâu đài toán học hiện đại. Có nhiều nhà toán học lớn đi vào nghiên cứu các bài toán vật lý toán và những nghiên cứu này đã thúc đẩy cả toán học lẫn vật lý học cùng phát triển.

Sự phát triển của môn vật lý toán cho chúng ta thấy mối quan hệ khăng khít cũng như những tác động qua lại giữa toán học và vật lý học. Thật vậy, lịch sử phát triển khoa học có không ít các ví dụ khẳng định: nhiều bài toán, nhiều bộ môn toán học đã được xây dựng hoặc phát triển trên cơ sở các bài toán vật lý toán, như lý thuyết phương trình vi phân, lý thuyết ổn định, lý thuyết điều khiển, lý thuyết biến phân v.v... Đồng thời, nhiều bài toán vật lý đã được giải quyết nhờ xây dựng được các mô hình toán thích hợp cho phép sử dụng các lý thuyết toán học cao cấp hơn v.v... Có nhiều hiệu ứng vật lý được phát hiện bằng lý thuyết rồi mới được chứng minh bằng thực nghiệm.

Nhà toán học Đức Hilbert vào năm 1900 có đưa ra một số luận điểm toán học nổi tiếng, trong đó luận điểm thứ sáu khẳng định nhiệm vụ « tiên đề hóa vật lý học bằng toán học ». Nhà toán học Nga Xtêclôp vào năm 1921 khẳng định: « Không một khoa học tự nhiên nào không dùng toán học mà vẫn vượt qua được giai đoạn thu thập tư liệu để trở thành khoa học sáng tạo... Đối với vật lý học, toán học và vật lý học đã hợp nhất thành một thể thống nhất đến mức độ khó mà tách bạch được đâu là toán học, đâu là vật lý học ». Nhà vật lý lý thuyết và cũng là nhà toán học Đirắc, vào năm 1930, viết « sự phát triển của vật lý yêu cầu phải áp dụng các kiến thức toán học ngày càng cao cấp hơn. Quá trình trừu tượng hóa này còn tiếp tục cả trong tương lai. Các thành tựu vật lý phải dựa trên những đổi mới, những mở rộng liên tục các giả thuyết trên cơ sở các thành tựu toán học... », Bôgôliubôp vào năm 1963 còn cho rằng những khái niệm và phương pháp của lý thuyết trường lượng tử ngày càng mang màu sắc toán học.

3. Một số ví dụ về thành tựu áp dụng phương pháp vật lý toán. Ví dụ hiển hách đầu tiên có lẽ là việc phát hiện sao Neptuyn bằng tính toán. Sự việc xảy ra như sau: Năm 1781, nhà Thiên văn học người Anh là Giersen phát hiện ra sao Thiên Vương. Khi quan sát sao Thiên Vương nhà thiên văn học Nga Lecxen nhận thấy quĩ đạo thực không phù hợp với quĩ đạo lý thuyết tính theo cơ học Niutơn và đưa ra giả thuyết cho rằng sự sai lệch này không phải do Cơ học Niutơn sai mà do ảnh hưởng của một ngôi sao khác mà ta còn chưa phát hiện thấy. Theo giả thuyết này, nhà thiên văn học Anh là Adamxơ đã tiến hành tính toán quĩ đạo của ngôi sao chưa biết đó và thông báo cho đài thiên văn Grinuych vào tháng 2 năm 1845, nhưng giám đốc Eri không tổ chức quan sát kịp thời. Cũng theo giả thuyết đó, nhà thiên văn học Pháp Lơveriê thông báo kết quả tính toán của mình cho Đài thiên văn Beclin (18-9-1846) và Giám đốc Gale tổ chức quan sát ngay (23-9-1846) nên đã phát hiện ra ngôi sao mới ở vị trí chỉ sai khác rất ít với địa điểm tính toán (gần 52 phút góc). Đó là sao Neptuyn. Phát hiện này được đánh giá như kỳ tích của phương pháp tư duy khoa học của thế kỷ 19.

Năm 1818, trong cuốn « Lý thuyết động lực về trường điện từ », Maxuen đã đưa ra các phương trình vi phân xác định các đại lượng của trường điện và trường từ cùng nhiều giả định lý thuyết khác như giả định cho rằng tia sáng là các sóng điện từ tần số cao. Giả định về nguồn gốc điện từ của ánh sáng được nhà vật lý Đức là Hertz khẳng định bằng thực nghiệm, còn các giả định khác cũng đã được thực tế chứng minh.

Giải thưởng Nôben năm 1979 về vật lý đã trao cho các nhà nghiên cứu lý thuyết về các hạt bôzôn W là hạt được xem như tác nhân chính trong các tương tác yếu. Bằng lý thuyết, họ đã chứng minh sự tồn tại của các bôzôn và dự đoán khối lượng của chúng. Và tháng 1-1983 người ta đã ghi nhận được bằng thực nghiệm dấu vết của các bôzôn đầu tiên. Lý thú hơn nữa là khối lượng của chúng rất gần với số liệu tính toán lý thuyết. Do đó lý thuyết về sự tương tác yếu đã được chứng minh bằng thực nghiệm.

4. Vật lý toán ở Việt Nam. Ở Việt Nam, vật lý toán được nghiên cứu nhiều trong cơ học, vật lý lý thuyết, hải dương học, khí tượng học... Có nhiều nhà toán học ứng dụng đang nghiên cứu áp dụng phương pháp vật lý toán trong các bài toán về môi trường sống (toán sinh), về kinh tế (toán kinh tế), về điều khiển học,...

Các trường Đại học Tổng hợp Hà Nội, thành phố Hồ Chí Minh và Huế có những bộ môn chuyên đào tạo các nhà vật lý toán về cơ học (thuộc Khoa toán – cơ), về vật lý học (thuộc khoa vật lý)...

Vật lý toán Việt Nam đang chờ đón các năng lực mới của bạn trẻ tham gia.

Trao đổi với bạn đọc

CẦN THÊM MỘT CHỮ « NẾU »

ĐẶNG VIỄN

TRONG báo THTT số 107 (tr. 1) có nêu bài toán (bài toán 1) cùng với lời giải sau đây:

Bài toán 1. *Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức x^2+y^2 với điều kiện:*

$$(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2-x^2-y^2=0 \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện (1) biến đổi được về dạng:

$$(x^2+y^2)^2-3(x^2+y^2)+1+4x^2=0 \quad (2)$$

hay $(x^2+y^2)^2-3(x^2+y^2)+1=-4x^2$. (3)

Đặt $u=x^2+y^2$. Khi đó, từ (3), ta có:

$$u^2-3u+1\leqslant 0 \quad (4)$$

hay $(3-\sqrt{5})/2\leqslant u\leqslant(3+\sqrt{5})/2$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức x^2+y^2 là:

$$(3+\sqrt{5})/2.$$

Giá trị bé nhất của biểu thức x^2+y^2 là:

$$(3-\sqrt{5})/2.$$

Thực ra, lời giải mới chỉ kết luận được rằng $\text{Max}\,(x^2+y^2)=(3+\sqrt{5})/2$ và $\min(x^2+y^2)=(3-\sqrt{5})/2$ nếu x^2+y^2 đạt được các giá trị này. Dù là dễ dàng thấy rằng điều đó xảy ra khi $x=0$, song không nêu điều đó ra vẫn là một thiếu sót.

Bây giờ, ta hãy thử xét khả năng áp dụng của cách giải đó nếu thay đổi đôi chút điều kiện (1), chẳng hạn thay bằng điều kiện (1') sau đây:

$$(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2-4x^2-y^2-2=0 \quad (1')$$

Bằng cách biến đổi tương tự như trên, ta sẽ có:

$$u^2-3u-1\leqslant 0.$$

Nếu tiếp tục giải như trên thì không thích hợp vì ta sẽ thu được một giá trị âm ứng với giá trị nhỏ nhất của u. Muốn cho tương ứng với mỗi giá trị của u đều có một giá trị của x^2+y^2 cần thỏa mãn điều kiện $u\geqslant x^2$. Vì vậy, bằng cách đặt $X=x^2$, ta có hệ mà các bạn có thể giải bằng kiến thức ở lớp 10 (8 cũ) sau đây:

$$\begin{cases} X=-u^2+3u+1 \\ 0\leqslant X\leqslant u \end{cases}$$

Để tránh suy luận nhầm rằng từ $u\geqslant X$ ta có u đạt giá trị nhỏ nhất khi $u=X$, các bạn có thể xét thêm bài toán trên với sự thay thế điều kiện (1) bằng điều kiện (1'') sau đây:

$$(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2-6x^2-y^2+2=0 \quad (1'')$$

Bài toán 2. *Cho hình thang ABCD với đáy AB và DC. Chứng minh rằng:*

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2+2AB\,.\,CD \ (9/82\ THTT).$$

Trong lời giải đó bài báo chỉ nêu trường hợp các hình chiếu H và H' của A và B xuống CD đều ở trong đoạn CD. Trong khi đó, có cả thảy 6 trường hợp khác nhau (các trường hợp H hoặc H' trùng vào C hoặc D đều được coi là nằm trong đoạn CD), nghĩa là lời giải chỉ đúng **nếu** xảy ra trường hợp tương ứng với hình đã vẽ. Bây giờ, làm thế nào để giải trọn vẹn bài toán cho cả 5 trường hợp còn lại nữa? Chắc các bạn đều thấy ngại nếu phải vẽ thêm cho đủ 5 trường hợp hình vẽ còn lại và tiến hành giải tiếp từng trường hợp một vì đấy quả là một công việc đáng chán. Nhưng, thế thì phải làm thế nào? Bạn đã từng gặp một hệ thức nào đó bao quát mọi trường hợp hình vẽ chưa? Bạn sắp nhớ ra rồi đấy... chính là hệ thức Sa-lơ. Bây giờ, bạn hãy chứng minh hệ thức tổng quát sau đây về bình phương cạnh AB trong tam giác ABC (không cứ ứng với góc C nhọn, tù hay vuông):

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2\overline{BC}.\overline{CH}$ (trong đó H là hình chiếu của đỉnh A xuống cạnh BC), rồi áp dụng nó vào việc giải bài toán này.

Ta có:

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2+2\overline{CD}\,.\,\overline{DH}$$
$$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2+2\overline{DC}.\overline{CH'}$$

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2\overline{DC}(\overline{DC}+\overline{HD}+\overline{CH'})$$
$$=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2\overline{DC}\,.\,\overline{HH'}$$ (Áp dụng hệ thức Sa-lơ vào biểu thức trong ngoặc đơn.)

hay $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2\overline{DC}\,.\,\overline{AB}$ (vì $ABH'H$ là một hình chữ nhật). Suy ra:

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2+2.AB.CD$$

(vì $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ là hai vectơ song song cùng chiều)

Bài toán 3. *Có một miếng bìa hình chữ nhật cỡ 18cm×48cm. Hỏi phải cắt đi ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau với cạnh bằng bao nhiêu để có thể làm thành một cái hộp (không nắp) với thể tích lớn nhất có thể được.*

Lời giải 1. Gọi x là cạnh các hình vuông phải cắt đi, ta có thể tích V của cái hộp là: $V = x(18-2x)(48-2x)$ với $0 < x < 9$ hay $V = 8/5 \cdot 5x/2 \cdot (18-2x)(12-x/2)$. Vì các thừa số biến đổi $5x/2$, $18-2x$ và $12-x/2$ đều dương và có tổng bằng 30 không đổi và chúng lại bằng nhau khi $x=4$ nên V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x=4$ (cm) theo định lý 1 (hệ quả của định lý Cô-si) sau đây:

Định lý 1. Nếu n số không âm $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ mà có tổng không đổi thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

Chắc các bạn đều cho rằng đây là một lời giải hay vì nó ngắn, gọn. Thế mà, vẫn thiếu chặt chẽ đấy! Để làm sáng tỏ điều đó, ta hãy lấy một lời giải khác làm phản ví dụ:

Lời giải 2.. Ta có $V = x(18-2x)(48-2x) = \frac{1}{4} \cdot 4x \cdot (18-2x)(48-2x)$ với $0 < x < 9$. Vì các thừa số biến đổi $4x$, $18-2x$ và $48-2x$ đều dương và có tổng bằng 66 không đổi, hơn nữa, hai thừa số $18-2x$ và $48-2x$ luôn luôn không bằng nhau nên theo định lý 1 thì V không bao giờ đạt giá trị lớn nhất (!).

Vì vậy, cần phải thêm một chữ «**nếu**» vào định lý 1 (thiếu chặt chẽ) thành định lý 1' sau đây:

Định lý 1'. Nếu n số không âm $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ mà có tổng không đổi và nếu có thể xảy ra trường hợp chúng bằng nhau thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

Bài toán 4. *Cho trước một đường tròn. Chứng minh rằng trong số các tam giác nội tiếp đường tròn đó, tam giác đều có diện tích lớn nhất.*

Lời giải. Xét các tam giác nội tiếp đường tròn đó. Vì các tam giác đều đều bằng nhau nên chúng có một diện tích xác định duy nhất. Do đó, muốn chứng minh «tam giác đều là tam giác có diện tích lớn nhất», ta chỉ việc chứng minh «tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác đều». Ta sẽ chứng minh mệnh đề này bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo của nó (tức cũng đẳng giá với nó) sau đây: «mọi tam giác không đều đều không có diện tích lớn nhất». Quả vậy, xét tam giác ABC không đều. Thế thì, nó có ít nhất một cặp cạnh không bằng nhau, chẳng hạn, $AB > BC$. Dễ dàng chứng minh rằng diện tích ΔABC bé hơn diện tích một trong hai tam giác cân có đáy là AC. Bài toán chứng minh xong.

Nhiều bạn rất thích lời giải này vì trong đó đã vận dụng liên tiếp hai cách chứng minh gián tiếp. Thế nhưng, nó vẫn không được chấp nhận vì chưng còn thiếu một chữ **nếu**. Bạn hãy thử nghĩ xem tại sao vậy?

Thường ta vẫn quen xét tập hợp hữu hạn số thực trong đó bao giờ cũng tồn tại ít nhất một số lớn nhất đồng thời ít nhất một số bé nhất. Nhưng điều đó không còn đúng nữa đối với tập hợp vô hạn số thực, chẳng hạn, tập hợp số thực trong nửa đoạn (0; 3) không có số lớn nhất. Ở đây, tập hợp diện tích các tam giác nội tiếp hình tròn đã cho là một tập hợp vô hạn nên cũng chưa khẳng định được rằng nó có số lớn nhất hay không (dựa vào các định lý về tồn tại giới hạn ở lớp 11, bạn dễ dàng chứng minh rằng có). Cho nên cần phải thêm một chữ **nếu** vào điều đã được chứng minh trong lời giải trên như sau: «**Nếu** tồn tại ít nhất một tam giác nội tiếp đường tròn đó, với diện tích lớn nhất thì tam giác đều chính là tam giác đó».

Qua các ví dụ trên, các bạn có thể rút ra một vài điều đơn giản sau đây:

1) Cần luôn luôn có ý thức cảnh giác về tính tồn tại của khái niệm toán học mà ta đang sử dụng.

2) Thường các sai lầm về lôgic được xét theo các loại sau đây: sai về luận đề (lời giải bài toán 4), sai về luận cứ (lời giải 1), và sai về luận chứng (các lời giải bài toán 1 và bài toán 2)

Các bạn đi trước hầu như đều có một nhận xét thống nhất như sau: «Ở phổ thông, điều cần thiết nhất là được rèn luyện cũng như tự rèn luyện về tư duy toán học». Mong rằng các bạn nhận thấy ở đây một lời khuyên quí báu.

CHỈ HỎI MỘT CÂU

Trong một cuộc cắm trại Tí thấy có một trại đẹp quá, muốn đến hỏi xem đây là trại của lớp 10A hay lớp 10B. Khi đến, những người trong trại ra điều kiện cho Tí: Người trả lời Tí không nói mà chỉ gật hay lắc đầu làm hiệu là đúng hay không. Người lớp 10A sẽ nói thật, người lớp 10B sẽ nói dối. Những người có mặt ở đây có cả người lớp 10A lẫn người lớp 10B. Tí muốn hỏi ai thì hỏi nhưng *chỉ được hỏi một câu thôi*. Các bạn tìm giúp Tí một câu hỏi để Tí biết đây là trại của lớp 10 nào?

BÌNH PHƯƠNG

In 15000 số tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ – Hà Nội. Số in 174/84 Giá: 3 đồng
In xong và gửi lưu chiểu 11-84 – Chỉ số: 11884