VIỆN KHOA HỌC
VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

Số 138
4
1984

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó Tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội
Dây nói: 52825

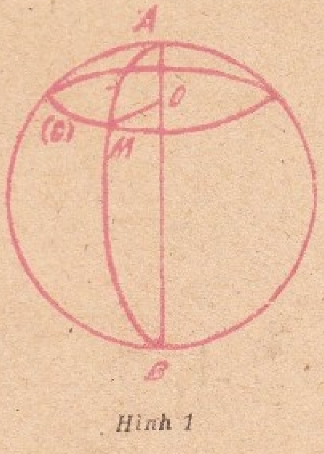
Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

VÒNG TRÒN NHIỀU TÂM

NGUYỄN CẢNH TOÀN

TRONG toán học có rất nhiều cái lúc mới đầu nghe rất lạ, nhưng khi có thêm hiểu biết mới, cách nhìn mới thì lại hóa quen. Câu chuyện « Vòng tròn nhiều tâm » sau đây thuộc vào loại câu chuyện về những cái lạ mà quen đó.

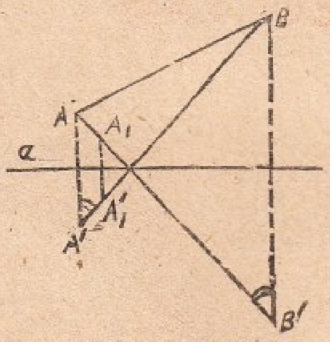
Giá bạn có đốt đuốc đi tìm khắp thế gian cũng không bao giờ tìm được vòng tròn có quá một tâm nếu vòng tròn bạn tìm là vòng tròn mà bạn đã học trong chương trình phổ thông. Nhưng nếu bạn có một cách nhìn mới, cách nhìn của những sinh vật « Cầu » chẳng hạn thì bạn có ngay những vòng tròn hai tâm và hai bán kính. Những sinh vật « Cầu » là những sinh vật tưởng tượng sống trên một mặt cầu nào đó, không bao giờ rời khỏi mặt cầu và cũng không hay biết tí gì về thế giới ở ngoài mặt cầu. Đối với những sinh vật đó thì rõ ràng mỗi vòng tròn đều có hai tâm và hai bán kính (h. 1). Đối với chúng ta, những người có thể đứng ngoài mặt cầu mà nhìn vào thì đường cong (C) cũng là một vòng tròn nhưng chỉ có một tâm là O và một bán kính OM, còn đối với sinh vật « Cầu » thì (C) là một vòng tròn có hai tâm A, B và hai bán kính $\overset{\frown}{AM}$ và $\overset{\frown}{BM}$.



Hình 1

Rõ ràng chúng ta và sinh vật « Cầu » có hai cách nhìn khác nhau về « Khoảng cách ». Để đi xa hơn nữa đến những thế giới có vòng tròn nhiều tâm, thậm chí vô số tâm, chúng ta hãy suy nghĩ thêm về « Khoảng cách ». Trong đời sống hàng ngày, ta hay nói : « Khoảng cách » từ nơi này đến nơi khác, « Khoảng cách » về trình độ, « Khoảng cách » về tư tưởng v.v... Ngay « Khoảng cách » từ nơi này đến nơi khác, cũng có thể có nhiều nội dung : « Khoảng cách » theo đường chim bay, « Khoảng cách » theo đường bộ, « Khoảng cách » theo đường thủy v.v... Như vậy « Khoảng cách » có thể có rất nhiều nghĩa nhưng đều thống nhất ở chỗ nói lên mức độ khác nhau giữa hai sự vật về một phương diện nào đó : « Khoảng cách » càng lớn thì hai sự vật càng xa sự « đồng nhất » xét về phương diện đó.

Với cách nhìn trên, ta có thể xây dựng nên khái niệm « Khoảng cách » dẫn tới những vòng tròn có nhiều tâm. Sau đây là một ví dụ : trong mặt phẳng thông thường, ta chọn một đường thẳng a nào đó rồi gọi góc $\widehat{AA'B}$ (trong đó A' là đối xứng của A qua đường thẳng a) là « Khoảng cách » giữa hai điểm A, B (các điểm trên đường thẳng a không xét đến trong việc tính « Khoảng cách » này) (lấy góc $\widehat{BB'A}$ cũng được, B' là đối xứng của B qua a, vì $\widehat{AA'B} = \widehat{BB'A}$). Ý nghĩa của « Khoảng cách » ở



Hình 2

đây là độ lệch góc giữa phương AB' (hoặc BA') và phương vuông góc với a. Nếu ta định hướng mặt phẳng và xét góc định hướng giữa hai đường thẳng $A'A$ và $A'B$ (hay $B'A$ và $B'B$) thì ta có khoảng cách đại số AB (A trước, B sau) xác định tới $K\pi$.

Ta hãy xét xem « Vòng tròn » tâm A đi qua B là đường cong gì ? Ta thấy ngay rằng đó là đường thẳng thông thường $A'B$ vì khi A cố định, B chạy trên đường thẳng $A'B$ thì hai đường thẳng $A'A$ và $A'B$ cố định, do đó góc (định hướng) giữa hai đường thẳng này không đổi, nghĩa là « khoảng cách » từ A đến B không đổi. Như vậy đường thẳng thông thường $A'B$ là một « vòng tròn » tâm A. Nhưng ngoài tâm A ra, « vòng tròn » này còn có vô số tâm khác mà quỹ tích là đường thẳng AB'. Quả vậy, cứ lấy một điểm A_1 khác A trên đường thẳng AB', ta sẽ thấy ngay rằng A_1 cũng là tâm « Vòng tròn » $A'B$ (h. 2) với cùng « bán kính » như cũ. Nói tổng quát thì mọi đường thẳng thông thường là một « vòng tròn » có vô số tâm nhưng cùng một bán kính ; quỹ tích các tâm đó chính là đường thẳng thông thường đối xứng với đường đã cho qua a.

Nếu đường thẳng thông thường đã cho vuông góc với a thì « vòng tròn » tương ứng có bán kính bằng không ; nếu nó song song với a thì « vòng tròn » tương ứng có bán kính bằng $\pi/2$.

Bạn đọc có thể chứng minh rằng mọi vòng tròn thông thường có tâm trên a lại là một « đường thẳng », vì nếu ta có ba điểm A, B, C trên một vòng tròn thông thường, có tâm trên a thì « khoảng cách » AC bằng tổng hai « khoảng cách » AB và BC (giống như đối với các khoảng cách đại số thông thường AC, AB, BC trên một đường thẳng thông thường).

Đường thẳng lại là « vòng tròn » có vô số tâm và vòng tròn lại là « đường thẳng ». Quả là một sự « thay bậc đổi ngôi » rất lạ, phải không các bạn, nhưng cũng dễ hiểu làm sao.

Ví dụ trên đây là ví dụ đơn giản nhất về một lớp không gian rộng rãi có nhiều tính chất rất phong phú do tác giả bài này phát minh và xây dựng thành một lý thuyết có thể gọi là « lý thuyết các không gian Cảnh – Toàn » hay « lý thuyết các không gian có tuyệt đối động » (nhưng xin miễn giải thích tại sao lại gọi là « có tuyệt đối động »)

Điều đáng nói với các bạn là tầm quan trọng của « cách nhìn » : trên những sự vật cũ, thậm chí rất cũ, nếu có cách nhìn mới vẫn có thể phát minh nhiều điều mới mẻ và lý thú.

NGUYÊN LÝ « KHỞI ĐẦU CỰC TRỊ »

ĐỖ BÁ KHANG

TRONG khi giải toán ở nhà trường cũng như ở các kỳ thi học sinh giỏi, chúng ta thường phải vận dụng 3 nguyên lý chứng minh : đó là nguyên lý phản chứng, nguyên lý quy nạp và nguyên lý Dirichlêt (Về nguyên lý Đirichlêt có thể xem thêm bài « Nguyên tắc Đi-rich-lê

2. *Lê Tự Lực*, lớp 12, trường Quốc học Huế, Bình Trị Thiên.

3. *Đỗ Quang Đạt*, lớp 12CT, trường Đại học Sư phạm Hà nội 1.

Giải xuất sắc :

1. *Đỗ Duy Khánh*, lớp 10CT, trường Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang.
2. *Nguyễn Tiến Dũng A*, lớp 10CT, Đại học Tổng hợp Hà nội.
3. *Trần Duy Hinh*, lớp 11C, trường Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình.

Giải người có nhiều lời giải hay :

1. *Nguyễn Tiến Dũng A*, lớp 10CT, trường Đại học Tổng hợp Hà nội.
2. *Trần Quân*, lớp 10 CT, Trường Phan Chu Trinh, Đà Nẵng.
3. *Đỗ Quang Đại*, lớp 12CT, trường Đại học Sư phạm Hà nội 1.

Giải đặc biệt : *Võ Tấn Phát*, lớp 9E, trường Chuyên toán, Quy Nhơn, Nghĩa Bình.

Giải trường đạt tổng số điểm cao :

Nhất : Khối Chuyên Toán trường Đại học Tổng hợp Hà Nội.

Nhì : Trường PTTH Phan Chu Trinh, Đà Nẵng.

Ba : Trường PTTH Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình.

Giải trường có nhiều học sinh dự thi nhất :

1. Trường PTTH Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình.
2. Trường PTTH Lê Hồng Phong, Thành phố Hồ Chí Minh.

Giải khuyến khích :

1. *Nguyễn Quang Dũng*, lớp 12CT, trường Đại học Sư phạm Hà nội 1.
2. *Trịnh Văn Hiệu*, lớp 11CT, trường Lam Sơn, Thanh Hóa.
3. Võ Đại Hoài Đức, lớp 11CT, trường Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh.
4. *Trang Lâm Bằng*, lớp 11CT, trường Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh.
5. *Võ Thanh Hùng*, lớp 11CT, trường Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh.
6. *Nguyễn Việt Quang*, lớp 10CT, trường Đại học Tổng hợp Hà nội.
7. *Nguyễn Minh Ngân*, lớp 10CT, trường Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang.
8. *Nguyễn Gia Bảo*, lớp 10CT, trường Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh.
9. *Nguyễn Huy Toàn*, lớp 9E, PTCS Lê Lợi 2, Quy Nhơn, Nghĩa Bình.
10. *Nguyễn Bình Ngọc Khuê*, lớp 9B, trường Hội Thương 2, Plâycu, Gia lai Contum
11. *Phạm Xuân Trung*, lớp 8A, trường PTCS Trưng Nhị, Hà Nội.

GIẢI BÀI kỳ trước

Bài 1/135. *Chứng minh rằng nếu số N bằng tổng bình phương của 1984 số nguyên thì số 1984. N bằng tổng bình phương của 992. 1983 + 1 số nguyên.*

Lời giải. (Của các bạn *Trần Quân*, *Lâm Tùng Giang*, *Nguyễn Hùng Sơn*, 10 CT Phan Châu Trinh – Quảng nam Đà Nẵng).

Ta chứng minh bài toán tổng quát : Nếu N là tổng bình phương của n số nguyên thì $n.N$ là tổng bình phương của $(n-1)n/2+1$ số nguyên.

Thật vậy đặt $N = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ (a_i nguyên). Khi đó

$$nN = na_1^2 + na_2^2 + \ldots + na_n^2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \ldots + 2a_{n-1}a_n)$$

$$+[(a_1^2-2a_1a_2 + a_2^2) + \ldots + (a_1^2-2a_1a_n + a_n^2)]$$

$$+[(a_2^2-2a_2a_3 + a_3^2) + \ldots + (a_2^2-2a_2a_n + a_n^2)] +$$

$$\ldots + [(a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}a_n + a_n^2)] =$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + [(a_1-a_2)^2 +$$

$$\ldots + (a_1-a_n)^2] + [(a_2-a_3)^2 + \ldots + (a_2-a_n)^2] +$$

$$\ldots + (a_{n-1} - a_n)^2$$

là tổng bình phương của $1 + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ số nguyên (đpcm).

Áp dụng $n = 1984$ ta có lời giải bài toán đã cho.

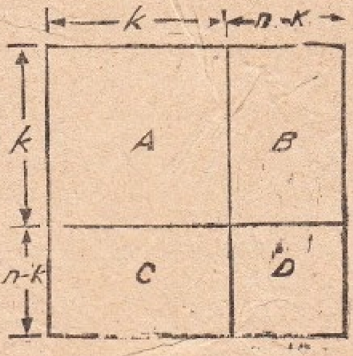
Đ.B.K.

Bài 2/135 : *Trong một cuộc đấu cờ, điểm của n đấu thủ được ghi vào bảng vuông n^2 ô. Ô thứ $i \times j$ với $i \neq j$ là điểm của đấu thủ i trong trận gặp đấu thủ j (thắng : 1, hòa : 1/2 và thua là 0. điểm). Các ô trên đường chéo chính ghi số 0.*

Chứng minh rằng nếu có thể cắt bảng vuông theo cột thành hai hình chữ nhật, có đúng 1/2 tổng số điểm của mỗi đấu thủ, thì số n người dự đấu là một số chính phương.

Lời giải. của *Trần Quân*, lớp 10 CT, Đà Nẵng.

Giả sử đường cắt theo cột chia bảng vuông n^2 thành hai hình chữ nhật $n\times k$ và $n\times(n-k)$. Ta lại cắt ngang bảng vuông thành hai hình chữ nhật $k\times n$ và $(n-k)\times n$. Bảng vuông được chia thành 4 mảnh A, B, C, D.



Gọi tổng số điểm trong các ô của A, B, C, D tương ứng là $T(A)$, $T(B)$, $T(C)$, $T(D)$. Ta để ý rằng tổng số điểm của 2ô $i\times j$ và $j\times i$ với $i\neq j$ luôn luôn bằng 1. Vậy ta có tổng số điểm của bảng vuông là bằng $(n^2-n)/2$ và

$$T(A)=(k^2-k)/2$$

$$T(D)=[(n-k)^2-(n-k)]/2$$

Theo giả thiết thì $T(A)=T(B)$ và $T(C)=T(D)$ nên

$$T(A)+T(D)=T(B)+T(C)=(n^2-n)/4$$

hay $(k^2-k)/2+[(n-k)^2-(n-k)]/2=(n^2-n)/4$ nghĩa là: $n=n^2-4nk+4k^2=(n-2k)^2$. *Điều phải chứng minh.*

Nhận xét: Tất cả các bài giải gởi tới tòa soạn đều đúng.

N.Đ.T

Bài 3/135. *Hãy tìm tất cả các số nguyên tố p thỏa mãn tính chất sau: với mọi a, b nguyên: $a^2+b^2 \vdots p$ khi và chỉ khi $a \vdots p$ và $b \vdots p$.*

Lời giải. Để giải bài toán trước tiên ta hãy chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề (Định lý Fecma) Nếu p là số nguyên tố thì với mọi số tự nhiên a ta có: $(a^p-a)\vdots p$.

Chứng minh (Qui nạp theo a)

$a=1$: hiển nhiên. Bổ đề đúng.

Giả sử bổ đề đúng với a ta phải chứng minh bổ đề đúng với $a+1$. Áp dụng nhị thức Niu tơn:

$$(a+1)^p-(a+1)=a^p+C_p^1a^{p-1}+\dots+C_p^{p-1}a+1-a-1,$$

$$=(a^p-a)+C_p^1a^{p-1}+\dots+C_p^{p-1}a,$$

trong đó $C_p^k=\dfrac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{1.2\dots k}\vdots p$ $(1\leqslant k<p)$. Bổ đề được chứng minh.

Để giải bài toán ta chỉ cần tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho: với mọi a, b nguyên mà $a^2+b^2\vdots p$ thì $a\vdots p$ và $b\vdots p$.

* $p=2$ không thỏa mãn bài toán vì với a, b lẻ ta có $a^2+b^2\vdots 2$ nhưng $a, b\vdots 2$.

* $p\geqslant 3$: +) $p=4k+1$: Theo định lý Vinxơn (bổ đề 3 bài 3/129) ta có $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p$ $\Rightarrow (4k)!+1\equiv 0 \pmod p$. Mặt khác

$$4k\equiv -1 \pmod p$$
$$4k-1\equiv -2 \pmod p$$
$$\dots$$
$$2k+1\equiv -2k \pmod p$$

$\Rightarrow (4k)!+1\equiv 1.2\dots 2k.(2k+1)\dots 4k+1\equiv[(2k)!]^2+1\equiv 0 \pmod p$

nhưng $1\vdots p$. Vậy tất cả các số nguyên tố dạng $4k+1$ đều không thỏa mãn điều kiện bài toán.

+) $p=4k+3$. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng p thỏa mãn điều kiện của đầu bài:

Giả sử có $a, b\in Z$ sao cho $a^2+b^2\vdots p$ nhưng chẳng hạn $a\vdots p$, khi đó $b\vdots p$.

Theo bổ đề ta có

$$\left.\begin{array}{l} a(a^{p-1}-1)\vdots p\Leftrightarrow a^{p-1}-1\vdots p \\ b(b^{p-1}-1)\vdots p\Rightarrow b^{p-1}-1\vdots p.\end{array}\right\}$$

Vậy $a^{p-1}+b^{p-1}-2\vdots p$ hay

$$(a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1}-2=(a^2+b^2)A-2\vdots p$$

mà $a^2+b^2\vdots f\Rightarrow 2\vdots p$: vô lý vì $p\geqslant 3$.

Vậy các số nguyên tố p có dạng $4k+3$ là những số phải tìm.

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Việt Quang* (10 CT ĐHTH), *Nguyễn Hồ Anh Nguyên* (10CT. Đà Nẵng), *Lê Anh Sơn* (10CT trường Phan Bội Châu — Đà Nẵng) có lời giải tốt.

P.T.H

Bài 4/135. *Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các đỉnh một đa giác đều còn O là điểm tùy ý bên trong của nó. Chứng minh rằng có ít nhất một góc A_iOA_j thỏa mãn:*

$$\pi(1-1/n)\leqslant\widehat{A_iOA_j}\leqslant\pi$$

Lời giải (của nhiều bạn).

Giả sử A_1 là đỉnh gần O nhất. Các đường chéo A_1A_k chia đa giác đều thành các tam giác $A_1A_kA_{k+1}$.

những chiếc lồng và các chú thỏ «đăng trong báo TH và TT số 71). Bài báo này muốn giới thiệu với các bạn 1 nguyên lý chứng minh thứ tư có thể sử dụng khá tốt cho rất nhiều bài toán thuộc các dạng hoàn toàn khác nhau, đó là nguyên lý «Khởi đầu cực trị».

Nội dung của nguyên lý phát biểu như sau:

Trong một tập hợp hữu hạn (khác rỗng) các số thực luôn có thể chọn được số bé nhất và số lớn nhất.

Vì cách chứng minh rất đơn giản nên nhường cho bạn đọc tự thực hiện lấy. Tác giả chỉ xin phép minh họa việc áp dụng nguyên lý này bằng các ví dụ cụ thể:

Ví dụ 1. n bạn học sinh thi đấu bóng bàn theo nguyên tắc đấu vòng tròn. Chứng minh rằng luôn có thể xếp cả n bạn theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau.

Giải: Xét tất cả các cách xếp 1 số bạn thành hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau. Vì cách xếp như vậy bao giờ cũng tồn tại và số cách xếp chỉ là hữu hạn nên theo nguyên lý khởi đầu cực trị ta có thể chọn cách xếp có nhiều bạn nhất. Ta sẽ chứng minh rằng cách xếp đó phải có cả n bạn học sinh.

Thật vậy, giả sử cách xếp đó chỉ gồm có $k < n$ bạn, theo thứ tự là $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Khi đó xét bạn B không xếp trong hàng. Theo nguyên tắc đấu vòng tròn, B phải đấu với cả $A_1, A_2, \ldots A_k$. Ta thấy B không thể thắng A_1 vì nếu thắng thì ta đã có được 1 cách xếp nhiều hơn k người là $B, A_1, A_2, \ldots A_k$ trái với cách chọn $A_1, A_2, \ldots A_k$. Do đó B thua A_1. Nhưng khi đó B không thể thắng A_2 vì nếu thắng ta lại có cách xếp $A_1, B, A_2, A_3, \ldots A_k$. Do đó B thua A_2. Lập luận tương tự ta suy ra B thua A_k. Nhưng khi đó ta lại cũng có cách xếp đông hơn: $A_1, A_2, \ldots A_k, B$. Trong mọi trường hợp ta đều thấy vô lý. Vậy k phải bằng n (*đpcm*).

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng cho $2n$ điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng, trong đó có n điểm màu đỏ và n điểm màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại cách nối tất cả các điểm đỏ với các điểm xanh bởi n đoạn thẳng không có điểm chung.

Giải: Xét tất cả các cách nối n cặp điểm đỏ–xanh bởi n đoạn thẳng. Vì cách nối là tồn tại và số các cách nối là hữu hạn ta chọn cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất. Ta sẽ chứng minh đó là cách nối phải tìm. Thật vậy nếu có 2 đoạn AX và BY cắt nhau tại điểm O (A, B màu đỏ còn X, Y màu xanh). Khi đó nếu ta thay 2 đoạn AX và BY bởi 2 đoạn AY và BX và giữ nguyên các đoạn kia thì do

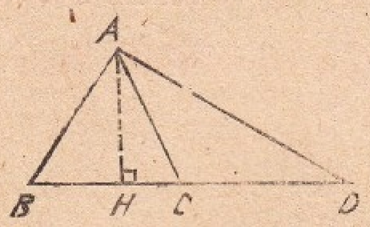
$$AY + BX < (AO + OY) + (BO + OX) = AX + BY$$

ta được 1 cách nối mới có tổng độ dài các đoạn bé hơn. Điều này trái với cách chọn ban đầu của chúng ta, vậy suy ra *đpcm*.

Ví dụ 3. (Bài toán Xin-vex-te).

Trên mặt phẳng cho n điểm ($n \geqslant 3$). Biết rằng mỗi đường thẳng đi qua 2 điểm bất kỳ đều đi qua một điểm thứ ba. Chứng minh rằng cả n điểm thẳng hàng.

Giải: Giả sử n điểm không thẳng hàng. Ứng với mỗi điểm ta xét các khoảng cách dương từ điểm đó tới tất cả các đường thẳng đi qua 2 trong số các đỉnh còn lại. Vì số khoảng cách đó là hữu hạn mà số điểm cũng hữu hạn nên ta có thể chọn khoảng cách bé nhất trong tất cả các khoảng cách được xét. Gọi đó là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC. Hạ $AH \perp BC$. Theo điều kiện đầu bài, đường thẳng BC còn đi qua điểm thứ ba D. Ta thấy hai trong số ba điểm B, C, D phải nằm về một phía của điểm H. Giả sử C và D nằm về 1 phía của H. Xét tam giác ACD có $\widehat{C}$ tù nên khoảng cách từ C đến AD bé hơn khoảng cách từ A đến CD trái với cách chọn A, B, C. Tương tự nếu A và D hay B và C ở về cùng một phía của H, ta cũng suy ra khoảng cách từ A đến BC không phải bé nhất. Mâu thuẫn chứng tỏ tất cả các điểm, đều cùng nằm trên một đường thẳng.



Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi số n nguyên > 1, $2^n - 1$ không chia hết cho n.

Giải: Giả sử có số $n > 1$ sao cho $2^n - 1 \vdots n$. Khi đó n lẻ. Gọi p là ước số nguyên tố bé nhất của n. Do p cũng lẻ nên $(2, p) = 1$ và theo định lý Phéc-ma ta có $2^{p-1} - 1 \vdots p$.

Gọi k là số tự nhiên bé nhất có tính chất là $2^k - 1 \vdots p$. Rõ ràng $k \leqslant p - 1 < p$. Ta chứng minh khi đó $n \vdots k$. Thật vậy nếu $n = kq + r$ với $0 < r < k$ thì

$$2^n - 1 = (2^k)^q \cdot 2^r = (m.p+1)^q \cdot 2^r$$
$$= (m'p + 1)\, 2^r.$$

Mà $2^n - 1 \vdots p$ vì p là ước của n nên ta suy ra $2^r \vdots p$ với $0 < r < k$ trái với cách chọn k.

Vậy $n \vdots k$. Nhưng $k < p$ nên ta suy ra n có ước số nguyên tố $< p$ trái với cách chọn p. Mâu thuẫn chứng tỏ không có n nguyên > 1 để cho $2^n - 1 \vdots n$.

Bạn đọc thân mến, trên đây các bạn đã làm quen với nguyên lý « Khởi đầu cực trị » qua 1 số bài toán cụ thể. Ta có thể nhận thấy rằng cũng giống như nguyên lý Dirichlê hay nguyên lý quy nạp toán học, nội dung của nguyên lý « Khởi đầu cực trị » rất đơn giản, nhưng cách vận dụng vào để giải các bài toán lại rất phong phú và đa dạng. Trong 1 số trường hợp, ta có thể thay phương pháp này bởi phép quy nạp hay phản chứng thông thường nhưng việc áp dụng nguyên lý « Khởi đầu cực trị » thường cho các lời giải ngắn và độc đáo hơn nhiều. Còn bây giờ mời các bạn thử sức với 1 số bài tập nhỏ sau đây :

Bài tập 1 : Trên mặt phẳng cho n điểm không cùng nằm trên 1 đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 điểm mà không chứa điểm nào bên trong.

Bài tập 2 : Sau một trận đấu vòng bóng bàn, mỗi đấu thủ được gọi tên những người thua mình và những người thua những người thua mình. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đấu thủ được gọi tên tất cả mọi người còn lại.

Bài tập 3 : Trong một phòng họp, biết rằng mỗi người đều quen với ít nhất 2 người. Chứng minh rằng có thể chọn ra 1 số người để xếp ngồi quanh một bàn tròn sao cho mỗi người đều ngồi giữa hai người mình quen.

Bài tập 4 : Trên mặt phẳng cho n điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng. Trong đó có 1 số điểm tô màu đỏ, các điểm còn lại tô màu xanh. Mỗi điểm xanh được nối với ít nhất 1 điểm đỏ bởi một đoạn thẳng. Biết rằng không có điểm đỏ nào được nối với tất cả các điểm xanh. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm xanh A và B và 2 điểm đỏ X, Y sao cho A được nối với X, B được nối với Y nhưng A không được nối với Y và B không được nối với X.

Bài tập 5 : Có 2^n kỵ sĩ được nhà vua mời đến dự tiệc. Biết rằng mỗi kỵ sĩ đều quen với $\geqslant n$ người khác. Chứng minh rằng có thể xếp cả $2n$ kỵ sĩ quanh 1 bàn tròn sao cho mỗi người đều ngồi giữa 2 người mình quen.

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN
CHÀO MỪNG BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ 20 TUỔI

Lớp 10

Giải nhất : 1. *Đỗ Duy Khánh*, lớp 10CT, trường Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang, Phú Khánh.

2. *Nguyễn Tiến Dũng A*, lớp 10CT, trường Đại học Tổng hợp Hà nội.

Giải nhì : 1. *Nguyễn Quảng Cường*, lớp 10CT, trường Đại học Tổng hợp Hà nội.

2. *Đặng Vũ Sơn*, lớp 10CT, trường Đại học Tổng hợp Hà nội.

3. *Nguyễn Ngọc Văn Khoa*, lớp 10CT, trường Phan Chu Trinh, Đà Nẵng.

Giải ba : 1. *Nguyễn Thiều Dương*, lớp 10CT, trường Đại học Tổng hợp Hà nội.

2. *Trần Quân*, lớp 10CT, trường Phan Chu Trinh, Đà Nẵng.

3. *Lâm Tùng Giang*, lớp 10CT, trường Phan Chu Trinh, Đà Nẵng.

Lớp 11

Giải nhất : 1. *Trần Duy Hinh*, lớp 11C, trường Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình.

2. *Lê Thanh Hà*, lớp 11CT, trường Lam Sơn Thanh Hóa.

Giải nhì : 1. *Huỳnh Đức Thắng*, lớp 11CT trường Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình

2. *Đỗ Trọng Vinh*, lớp 11CT, trường Lam Sơn, Thanh Hóa.

Giải ba : 1. *Lê Đức Tuấn*, lớp 11CT, trường Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình.

2. *Nguyễn Văn Hưng*, lớp 11CT, trường Phan Chu Trinh, Đà Nẵng.

Lớp 12

Giải nhất : 1. *Vũ Quý Dương*, lớp 12CT, trường Đại học Tổng hợp Hà nội.

2. *Đặng Vũ Giang*, khoa lưu học sinh trường Đại học Ngoại ngữ, Hà nội.

Giải nhì : 1. *Nguyễn Hoành Cường*, lớp 12CT trường Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình.

2. *Nguyễn Đình Kim*, lớp 12A, trường Phú Nhuận, thành phố Hồ Chí Minh.

Giải ba : *Nguyễn Tiến Nam*, lớp 12CT, trường Đại học Tổng hợp Hà nội.

Nếu O nằm trên cạnh của 1 tam giác nào đó thì bài toán được giải quyết vì khi đó sẽ có góc $\widehat{A_iOA_j}=\pi$. Giả sử O nằm trong tam giác $A_1A_kA_{k+1}$. Khi đó $\widehat{A_1OA_k}$ và $\widehat{A_1OA_{k+1}} \leqslant \pi$. Mặt khác do $OA_1 \leqslant OA_k$ và $OA_1 \leqslant OA_{k+1}$ nên $\widehat{OA_kA_1} \leqslant \widehat{OA_1A_k}$ và $\widehat{OA_{k+1}A_1} \leqslant \widehat{OA_1A_{k+1}}$. Mà

$$\widehat{OA_1A_k} + \widehat{OA_1A_{k+1}} = \widehat{A_kA_1A_{k+1}} = \pi/n.$$

Do đó

$$\widehat{AO_1A_k} + \widehat{A_1OA_{k+1}} = 2\pi - (\widehat{OA_1A_k} + \widehat{OA_1A_{k+1}}) - (\widehat{OA_kA_1} + \widehat{OA_{k+1}A_k}) \geqslant 2\pi - \pi/n - \pi/n = 2\pi\,(1 - 1/n)$$

Ta suy ra hoặc $\widehat{A_1OA_k}$ hoặc $\widehat{A_1OA_{k+1}} \geqslant \pi\,(1-1/n)$

Đ. B. K

Bài 5/135. *Cho A, B, C là ba góc của một tam giác (đo bằng radian). Hãy chứng minh rằng:*

$$A.\cos B + \sin A.\cos C > 0.$$

Lời giải (của nhiều bạn). Vì $B < \pi - C$ và hàm cos nghịch biến trong khoảng $(0, \pi)$ nên $\cos B > \cos(\pi - C) = -\cos C$

Ta suy ra $\cos B + \cos C > 0$. Vì $\sin A > 0$ nên $\sin A\ (\cos B + \cos C) > 0$. Ta xét hai trường hợp:

a) Nếu $B \leqslant \pi/2$ thì $\cos B \geqslant 0$. Khi đó $A \cos B \geqslant \sin A \cos B$ bởi vì $A > \sin A$. Vậy

$A \cos B + \sin A \cos C > \sin A \cos B + \sin A \cos C > 0$.

b) Nếu $B > \pi/2$ thì ta có:

$-\cos B = \cos(A + C) = \cos A \cos C - \sin A \sin C < \cos A \cos C$.

Do đó $\cos B + \cos A \cos C > 0$.

Vì $\operatorname{tg} A > A > 0$ và $\cos B < 0$ nên ta có:

$$A.\cos B > \operatorname{tg} A.\cos B$$

và $A \cos B + \sin A \cos C > \operatorname{tg} A \cos B + \sin A \cos C = \operatorname{tg} A\ (\cos B + \cos A \cos C) > 0$.

Vậy trong cả hai trường hợp ta đều có bất đẳng thức phải chứng minh.

Nhận xét: Một số bạn dùng đạo hàm để chứng minh nhưng không để ý rằng A, B và C không phải là biến độc lập nên chứng minh không chặt chẽ.

Đ.B.K

Bài 6/135. *Cho n là số tự nhiên $\geqslant 3$; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương, đặt $P = \sum_{i=1}^{n} a_i$ và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i/(P - a_{i+1})$ với quy ước $a_{n+1} = a_1$.*

1) Chứng minh rằng $1 < S < 2$.

1) Các bất đẳng thức trên có thể làm tốt hơn được không?

Lời giải 1) Ta có $S = \sum_{i=1}^{n} a_i/(p - a_{i+1}) > \sum_{i=1}^{n} a_i/p = 1$.

Giả sử k_0 là chỉ số có tính chất $a_{k_0} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$. Khi đó

$a_i/(p - a_{i+1}) \leqslant a_i/(p - a_{k_0})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Do vậy

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i/(P - a_{i+1}) \leqslant a_{k_0}/(P - a_{k_0+1}) + \sum_{i \neq k_0} a_i/(P - a_{k_0}) < a_{k_0}/a_{k_0} + 1 = 2$$

Vậy $1 < S < 2$.

2) Các bất đẳng thức trên không thể làm tốt hơn được, thật vậy với $a_1 = k^2$, $a_2 = k$; $a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 1$ thì

$S = k^2/(k^3 + n - 2) + k/(k^2 + k + n - 2) + (n-3)/(k^2 + k + n - 3) + 1/(k + n - 2) \to 1$ khi $k \to +\infty$

Với $a_1 = k$, $a_2 = k^2$, $a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 1$ thì

$S = k/(k + n - 2) + k^2/(k^2 + k + n - 2) + (n - 3)/(k^2 + k + n - 3) + 1/(k^2 + n - 2) \to 2$ khi $k \to +\infty$.

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Việt Quang* (10CT ĐHTH Hà nội), *Nguyễn Ngọc Văn Khoa*, *Trần Quân*, *Lâm Tùng Giang* (10CT Phan Châu Trinh, Đà nẵng), *Đỗ Trọng Vinh*, (11 CT Lam Sơn, Thanh Hóa) và một số bạn khác có lời giải tương đối tốt.

N.V.M.

Bài 7/135. *a) Hãy xác định giá trị lớn nhất của a sao cho tồn tại số b để phương trình sau có ba nghiệm trong đoạn $[-1,1]$: $x^3 - x^2 + bx - a = 0$.*

b) Chứng minh rằng khi đó cả ba nghiệm đều dương.

Lời giải (dựa theo cách giải của bạn *Trần Duy Hinh* – lớp 11 CT Trưng Vương – Quy Nhơn)

a) Giả sử phương trình $x^3 - x^2 + bx - a = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 ($x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$) trong đoạn $[-1, 1]$. Khi đó, theo định lý Viét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b & (2) \\ x_1x_2x_3 = a & (3) \end{cases}$$

1) Nếu $x_3 < 0$ hoặc $x_2 < 0$ thì $x_1 + x_2 + x_3 < x_3 \leqslant 1$ mâu thuẫn với (1).

2) Nếu $x_1 < 0 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, thì $a = x_1x_2x_3 \leqslant 0$.

3) Nếu $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$ thì theo bất đẳng thức Cosi ta được

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}.$$

Từ (3) suy ra $1 \geqslant 3\sqrt[3]{a}$ hay $a \leqslant 1/27$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3$. Vậy max $a = 1/27$. Thế vào (2) ta được $b = 1/3$. Ngược lại ứng với $a = 1/27$, $b = 1/3$. thì phương trình

$$x^3 - x^2 + 1/3x - 1/27 = 0.$$

có ba nghiệm $x_1 = x_2 = x_3 = 1/3 \in [-1, 1]$.

b) Hiển nhiên theo câu a).

Nhận xét: Các bạn *Lê Thanh Hà, Trương Văn Cường, Đỗ Trọng Vinh, Trần Xuân Bình* (11 CT Lam sơn, Thanh Hóa); *Nguyễn Ngọc Văn Khoa, Trần Quân, Lâm Tùng Giang* (10 CT Phan Châu Trinh, Đà nẵng); *Lê Anh Sơn* (10 CT Phan Bội Châu, Nghệ Tĩnh) và *Đỗ Duy Khánh* (10 CT Nguyễn Văn Trỗi – Nha Trang), có lời giải tốt.

N.V.M.

Bài 8/135. *a) Chứng minh rằng không thể có 10 số nguyên tố lập thành cấp số cộng chứa trong 1984 số tự nhiên đầu tiên.*

b) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất 9 số nguyên tố lập thành cấp số cộng chứa trong 1984 số tự nhiên đầu tiên.

Lời giải. a) Dễ dàng suy ra được từ câu b).

b) Giả sử $a_1, a_2, \dots a_9$ (xếp theo thứ tự tăng dần) là một cấp số cộng gồm các số nguyên tố chứa trong 1984 số tự nhiên đầu tiên và có công sai $d > 0$:

Gọi p là số nguyên tố nào đó nhỏ hơn 9.

Nếu $a_1 = p$ thì $a_{p+1} = a_1 + pd = p(1 + d)$ vô lý vì a_{p+1} nguyên tố.

Vậy $a_1 \geqslant 11$.

Xét các số dư của các số $a_1, a_2, \dots a_p$ khi chia cho p. Vì các số này là những số nguyên tố $> p$ nên các số dư chỉ có thể là $1, 2, \dots p - 1$. Do đó phải có 2 số a_i, a_j $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p)$ có cùng số dư khi chia cho $p \Rightarrow a_j - a_i = (j-i)d \,\vdots\, p \Rightarrow d \,\vdots\, p$ (vì $1 \leqslant j - i < p$) với p là số nguyên tố bất kỳ nhỏ hơn $9 \Rightarrow d \,\vdots\, 2.3.5.7 \Rightarrow d = 210k$ $(k \in N)$.

Mà $a_9 = a_1 + 8d \leqslant 1984 \Rightarrow d < 248$. Vậy $d = 210$.

Ta có $a_1 < 1984 - 8d = 1984 - 8.210 = 304$ (1)

Nếu $a_1 = 11$ thì $a_2 = 221 \,\vdots\, 13$, còn nếu $a_1 = 13$ thì $a_7 = 1273 \,\vdots\, 19$.

Vậy $a \geqslant 17$ (2)

Gọi r_{11} và r_{13} tương ứng là số dư của phép chia a_1 cho 11 và 13.

Ta có $a_n = a_1 + (n-1)210 = a_1 + (n-1) \times (11.19 + 1) = 11.b + r_{11} + (n - 1)$. Vì $(n - 1)$ lấy các giá trị từ 1 đến 8 nên $r_{11} = 1$ hoặc $r_{11} = 2$ (để a_n không chia hết cho 11) (3).

Mặt khác: $a_n = a_1 + (n - 1)(13.16 + 2) = 13.c + r_{13} + 2(n - 1)$. Vì $2(n-1)$ lấy các giá trị 2, 4, 6,..., 16 nên r_{13} chỉ có thể nhận các giá trị 2, 4, 6, 8 để $a_n \,\not\vdots\, 13$) (4)

Kết hợp các điều kiện (1), (2), (3) và (4) ta có a_1 chỉ có thể nhận các giá trị 67, 199, 277.

Nếu $a_1 = 67 \Rightarrow a_4 = 697 \,\vdots\, 17$, nếu $a_1 = 277 \Rightarrow a_3 = 697 \,\vdots\, 17$. Vậy a_1 chỉ có thể nhận 1 giá trị duy nhất là 199, do đó cũng chỉ tồn tại duy nhất cấp số cộng thỏa mãn đầu bài là:

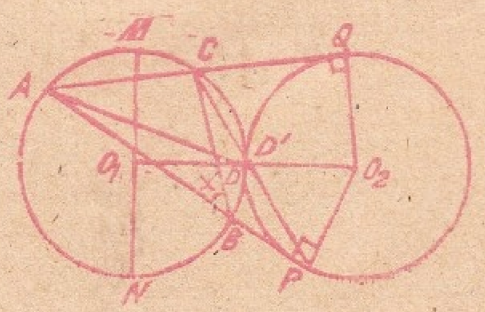
÷ 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879.

Nhận xét: Các bạn *Trần Duy Hinh* (lớp 11C Trưng vương – Qui nhơn); *Nguyễn Việt Quang* (10CTĐHTH); *Lê Thiện Thanh* (Lớp 10/c trường trung học An Nhơn I Nghĩa Bình); *Nguyễn Thanh Hà* (lớp 12C PTTH Lý Thường Kiệt): *Trần Quân*, và *Nguyễn Ngọc Văn Khoa* (10CT Đà Nẵng),... có lời giải tốt.

P.T.H.

Bài 9/135. *Cho hai đường tròn bằng nhau (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau tại D. Dựng đường kính MN của đường tròn (C_1) vuông góc với đường nối tâm của hai đường tròn. Chứng minh rằng trên nửa đường tròn MN không chứa D, tồn tại điểm A sao cho hai tiếp tuyến của đường tròn (C_2) đi qua A cắt đường tròn (C_1) tại hai điểm B và C (khác A) tạo nên ΔCAB cân $(CA = CB)$. Chứng minh rằng khi đó góc $C > 90°$*

Lời giải. Gọi O_1, O_2 là tâm của các đường tròn (C_1); (C_2) và bán kính của chúng là R. Trên nửa đường tròn MN không chứa D ta lấy một điểm A sao cho $O_2A = 2R\sqrt{2}$. Điều này chắc chắn lấy được bởi vì $R\sqrt{5} < 2R\sqrt{2} < 3R$. Ta sẽ chứng tỏ điểm A thỏa mãn điều kiện của đề bài (xem hình vẽ).



Ta có $\cos \widehat{AO_2Q} = QO_2/AO_2 = 1/2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin \widehat{AO_2Q} = \sqrt{7}/2\sqrt{2}$.

Trong $\triangle AO_1O_2$ ta có.

$$\cos \widehat{AO_2O_1} = \frac{AO_2 + O_1O_2^2 - AO_1^2}{2AO_2 \cdot O_1O_2} = \frac{11}{8\sqrt{2}}$$

từ đó cũng có : $\sin \widehat{AO_2O_1} = \sqrt{7}/8\sqrt{2}$.

Vậy : $\cos \widehat{QO_2O_1} = \cos(\widehat{AO_2O_1} + \widehat{AO_2Q}) = 1/8$

và $QO_1^2 = QO_2^2 + O_2O_1^2 - 2QO_2 \cdot O_2O_1 . \cos \widehat{QO_2O_1} =$

$R^2 + 4R^2 - 2R \cdot 2R.\ 1/8 = 9/2\,R^2$

Xét phương tích của điểm Q đối với đường tròn (C_1) ta có :

$\mathcal{P}\, Q/(C_1) = QO_1^2 - R^2 = 7/2\,R^2 = QC \cdot QA$

$\Rightarrow QC = 7R^2/2QA = R\sqrt{7/2}$

(Tính QA dựa vào tam giác vuông AQ_1O_2). Từ đó :

$CA = QA - QC = R\sqrt{7} - R\sqrt{7/2} = QC$

Lại xuất phát từ $CA = QC$, ta có :

$CA^2 = CQ^2 = \mathcal{P}\, C/(C_2) = CP \cdot CD'$

(D' là giao điểm của CP và (C_2)). Từ đó :

$CA/CD' = CP/CA \Rightarrow \Delta CAD' \sim \Delta CPA$

$\Rightarrow \widehat{CPA} = \widehat{CAD'} \Rightarrow \widehat{D'O_2P} = \widehat{D'O_1C}$

$\Rightarrow \triangle O_1D'C = \Delta O_2D'P \Rightarrow \widehat{O_1D'C} = \widehat{O_2D'P}$

mà C, D', P thẳng hàng nên O_1, D', O_2 cũng thẳng hàng. Từ đó dễ có CO_1PO_2 là hình bình hành nên $CO_1 // O_2P$ mà $O_2P \perp AP$ nên $CO_1 \perp AB$. Vậy $\triangle CAB$ cân tại C. Khi này ta có $\cos C = \cos(\pi - 2\widehat{ABC}) = -\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x$ với $x = \widehat{ABC}$.

Trong $\triangle ACP$ ta có :

$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos x$

$\Leftrightarrow 4CD^2 = 7R^2 + 4R^2\sin^2 x - 2R\sqrt{7}.2R\sin x\cos x$ (*) (vì $D' \equiv D$). Mặt khác do $\Delta CAD \sim \triangle CPA$ suy ra $CA/CP = CD/CA \Rightarrow CA^2 = CP \cdot CD \Rightarrow CQ^2 = 2CD^2$ $\Rightarrow CD = CA/\sqrt{2} = 2R\sin x/\sqrt{2} = \sqrt{2}\,.\,R\sin x$. Vậy từ (*) ta có $\cos x = 3/4$ và từ đó ta có $\cos C = -1/8 < 0$ nên $C > 90°$ (đ.p.c.m).

Nhận xét: Đa số các bạn giải bài này đều dài. Riêng bạn *Chế Quang Quyền* (11 A, PTTH Long Thành, Đồng Nai) có lời giải tốt hơn cả.

T.V.T

Bài 10/135. *Cho biết $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 27$ hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đại lượng :*

$$A = x + y + z + xy + yz + zx$$

Lời giải (của *Chế Quang Quyền*, 11A Trường PTTH Long Thành, Đồng Nai)

a) *Giá trị lớn nhất.* Theo bất đẳng thức Bunhiakôpxki

$x + y + z \leqslant |x + y + z| \leqslant \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \leqslant 9$ (1) dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$.

Mặt khác $xy + yz + zx \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 27$ (2) dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$.

Từ (1) và (2) thấy $A \leqslant 36$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$. Vậy giá trị lớn nhất của A là 36.

b) *Giá trị nhỏ nhất:* Đặt $T = x + y + z$, $S = x^2 + y^2 + z^2$ thì $A = T + (T^2 - S)/2$ hay $A = (T^2 + 2T - S)/2 = [(T+1)^2 - (1+S)]/2 \geqslant -(1+S)/2$. Vì $S \leqslant 27$ nên thấy ngay $A \geqslant -14$ dấu bằng xảy ra khi $T = -1$ và $S = 27$.

hay
$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 27. \end{cases} \quad (3)$$

Dễ thấy một nghiệm của hệ là $x = -\sqrt{13}$, $y = \sqrt{13}$, $z = -1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -14.

Nhận xét: Một số bạn không chỉ ra các giá trị của x, y, z để A đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

N.Đ.T

Bài 1/138. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có :

$9^A \times 661^{2A} + 1983^A + 1$ chia hết cho $(3^2 . 661^2 + 2^6 . 31)$

Ở đó :

$$A = \underbrace{19^{5^{19^{5^{19^{5}}}}}}_{n \text{ số}}$$

Huỳnh Ngọc Dân

Bài 2/138 : Cho các số $x, y, z \geqslant 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $x + 2y + z \geqslant 4(1-x) \times (1-y)(1-z)$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 3/138. Hãy tìm mọi đa thức $P(x)$ sao cho $P(0) = 0$ và

$$P(x^2+1) = [P(x)]^2 + 1$$

Đỗ Bá Khang

Bài 4/138. Cho đường cong $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ và một đường thẳng Δ cắt đường cong tại 4 điểm lần lượt là A, B, C, D. Chứng minh rằng nếu $AB = CD$ thì tồn tại một đường thẳng song song với Δ, tiếp xúc với đường cong tại 2 điểm phân biệt

Hoàng Hoa Trại

Bài 5/138. Gọi V là thể tích hình chóp tam giác $SABC$ chứng minh rằng nếu tồn tại một điểm O sao cho $OC = 1$, $OA = OB = OC = 4$ thì có bất đẳng thức $V \leqslant 9\sqrt{3}$.

Hoàng Hoa Trại

Bài 6/138: Giả sử M là điểm nằm trong tam giác vuông cân ABC (vuông ở B) sao cho $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$. Tính góc $\widehat{AMB}$

Phương Thảo

*** Bài 7/138.** Tìm cặp hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x) - f(y) = (x+y).\, g(x-y)$ với mọi x, y.

Nguyễn Văn Mậu

*** Bài 8/138.** Cho $2n$ số dương $m_1, m_2, \ldots, m_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Hãy chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^k}{a_i^m} \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\right)^k}{n^{k-m-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^m}$$

Với mọi m, k nguyên và $0 \leqslant m \leqslant k-1$.

Tạ văn Tự

*** Bài 9/138.** Trên mặt phẳng có n điểm $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Người ta nối một số điểm với nhau bằng m màu khác nhau sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

(1). Mỗi điểm P có số chẵn $v(P)$ cạnh xuất phát.

(2). Từ điểm P tùy ý ta có thể đi theo các cạnh để đến một điểm Q tùy ý khác.

(3). Với mỗi điểm P và mỗi màu thứ s $(1 \leqslant s \leqslant m)$ gọi $v_s(P)$ là số cạnh xuất phát từ P và được tô màu thứ s thì $v_s(P) \leqslant \frac{1}{2} v(P)$.

Chứng minh rằng toàn bộ hệ thống điểm $P_1, P_2, \ldots, P_n$ và các cạnh được tô bởi m màu này lập thành 1 hình mà ta có thể vẽ bởi một nét sao cho nét vào và nét ra tại 1 đỉnh của hình được tô bởi 2 màu khác nhau.

Vũ Đình Hòa

*** Bài 10/138.** Gọi MN là đường kính tùy ý của vòng tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC và AA_1, BB_1, CC_1 là các dây cung của đường tròn đó và cùng vuông góc với MN. Chứng minh $MA^4 + MB^4 + MC^4 = NA^4 + NB^4 + NC^4 = A_1A^4 + B_1B^4 + C_1C^4$.

Lê Quốc Hán

Chú thích: Những bài có dấu * là những bài khó.

Tìm hiểu sâu toán học phổ thông

MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

LÊ THỐNG NHẤT

Ở phổ thông các bạn học 3 phương pháp cho một hàm số $y = f(x)$: cho bởi đồ thị, cho bởi bảng và cho bởi biểu thức đại số. Miền xác định của hàm số là tất cả các giá trị của đối số x mà tương ứng xác định duy nhất giá trị của hàm số $f(x)$. Việc tìm miền xác định của hàm số, nhất là khi hàm số cho bởi các biểu thức đại số chắc là các bạn đã làm quen nhiều. Thí dụ trong kỳ thi đại học tháng 6 năm 1970:

« Tìm miền xác định của các hàm số:

$$y = 1/\sqrt{-x^2+4x+5} + \lg(x^2-3x+2)$$

$$y = \sqrt{\log_{0,8}\frac{2x+1}{x+5} - 2}\;,$$

3. Người ta chia tập hợp các điểm của mặt phẳng, định hướng ngược chiều kim đồng hồ, thành một số hữu hạn những tập hợp con không giao nhau và được tô bằng những màu khác nhau. Ta cố định hai điểm phân biệt O và A của mặt phẳng. Với mỗi điểm X của mặt phẳng, khác điểm O, ta cho tương ứng:

— Độ đo bằng radian $\alpha(X)$ của góc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX})$ với $0 \leqslant \alpha(X) < 2\pi$

— Đường tròn $C(X)$ tâm O với bán kính có độ đo $OX + \alpha(X)/OX$

Chứng minh có một điểm Y của mặt phẳng với $\alpha(Y) > 0$, sao cho tồn tại một điểm của $C(Y)$ cùng màu với Y.

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài chấm 7 điểm

∴

Ngày thứ hai
5 tháng bảy 1984

4. Giả sử $ABCD$ là một tứ giác lồi sao cho đường thẳng CD tiếp tuyến với đường tròn đường kính AB.

Chứng minh điều kiện cần và đủ để đường thẳng AB tiếp tuyến với đường tròn đường kính CD là các đường thẳng BC và AD song song

5. Trong mặt phẳng người ta cho một đa giác lồi n cạnh với $n \geqslant 4$. Ta gọi:

p là tổng các chiều dài của tất cả các cạnh của đa giác;

d là tổng các chiều dài của tất cả các đường chéo của đa giác.

Chứng minh các bất đẳng thức:

$$n-3 < 2d/p < [n/2]\,[(n+1)/2]-2$$

($[x]$ chỉ phần nguyên của một số thực x)

6. Giả sử a, b, c, d là những số nguyên dương lẻ thỏa mãn các điều kiện:

i) $a < b < c < d$,

ii) $ad = bc$,

iii) $a+d = 2^k$ và $b+c = 2^m$, k và m là những số nguyên.

Chứng minh rằng $a = 1$.

Thời gian làm bài 4 giờ 30 phút
Mỗi bài chấm 7 điểm

∴

KẾT QUẢ CỦA ĐOÀN HỌC SINH VIỆT NAM

Giải nhất: **Đàm Thanh Sơn** (ĐHTH Hà nội 1) 42 điểm

Giải nhì: — **Đỗ Quang Đại** (ĐHSP Hà nội 1): 27 điểm

— **Nguyễn Văn Hưng** (Phan Chu Trinh, — Đà Nẵng): 26 điểm

Giải ba: — **Võ Thu Tùng** (Phan Chu Trinh Quảng Nam—Đà Nẵng): 25 điểm

— **Nguyễn Thúc Anh** (Lam Sơn Thanh Hóa): 23 điểm

— **Nguyễn Minh Hà** (Chu Văn An Hà nội): 19 điểm

ĐỀ TOÁN THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG

THÁNG 6-1984

(180 phút – không kể thời gian đọc và chép đề thi)

Câu 1: Cho phương trình

$(\cos^6 x + \sin^6 x)/(\cos^2 x - \sin^2 x) = m\,\mathrm{tg}2x$, m là tham số.

1) Giải phương trình khi $m = 1/4$

2) Với giá trị nào của m, phương trình có nghiệm?

Câu II: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = m(x-y) \\ x + y = -1 \end{cases}, m \text{ là tham số.}$$

1) Giải hệ khi $m = 3$.

2) Biện luận hệ đã cho.

Câu III: Xác định tham số m để cho đồ thị của hàm số

$y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 6$.

cắt trục Ox tại ba điểm khác nhau.

Câu IV: Cho một hình tứ diện $ABCD$, trong đó $BC = a$, $AB = AC = b$, $DB = DC = c$, α là góc phẳng của nhị diện có cạnh là BC ($\alpha < \pi/2$).

1) Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Với điều kiện nào đối với b, c, đường thẳng nối điểm giữa I của BC với điểm giữa J của AD là đường vuông góc chung của BC và AD. Chứng minh rằng khi đó hình cầu (1) đường kính CD đi qua I và J.

2) Giả sử $b = c$. Tính thể tích của hình tứ diện theo a, b, α

3) Giả sử $b = c = a\sqrt{3}/2$. Tính góc α để hình cầu (1) đường kính IJ tiếp xúc với đường thẳng CD.

Câu V: Cho hai đoạn thẳng cố định AB, CD theo thứ tự nằm trên hai đường thẳng giao nhau d, d'. Tìm quỹ tích những điểm M trong mặt phẳng (2) sao cho tổng diện tích các tam giác MAB, MCD không đổi.

Ghi chú:

1) Thí sinh khối B và cao đẳng không phải làm phần 3) Câu IV và câu V.

---

1) *Chúng ta nên hiểu là mặt cầu*

2) *Bạn đọc thêm vào « tạo bởi d và d' »* (*Chú thích của Tòa soạn*).

CHÍNH XÁC TOÁN HỌC

Một nhà Toán học đã chỉ dẫn cho một người khách hỏi thăm đường đi như sau:

— Ông hãy theo con đường này mà đi thẳng, qua một chiếc cầu dài khoảng 50m, thì ông rẽ sang bên trái và đi khoảng 100m nữa là đến nơi.

Khách qua đường cám ơn rồi đi.

Mấy phút sau, nghe tiếng gọi, khách quay lại thấy nhà Toán học chạy đến và hổn hển nói qua hơi thở:

— Xin lỗi ông... tôi ... tôi ... nhầm. Cái cầu ấy phải dài tới 70m chứ không phải là 50m.

Khách ngạc nhiên:

— Ồ, điều đó có gì là quan trọng đâu mà ngài phải bận tâm.

Đến lượt nhà Toán học ngạc nhiên:

— Ông nói sao? Không quan trọng ư? Nếu ông mới đi trên cầu được 50m mà đã rẽ sang trái thì ông sẽ rơi ngay xuống sông...

PHẢN CHỨNG

Thầy: — Em hãy chứng minh rằng số $2^{2^{10}} + 1$ là số nguyên tố.

Trò: — Thưa thầy em chứng minh bằng phương pháp phản chứng ạ.

Thầy: — Tốt lắm, em trình bày đi!

Trò: — Thưa thầy, nếu $2^{2^{10}} + 1$ là một hợp số thì thầy không bao giờ bảo em chứng minh là số nguyên tố!

NHƯ VÂN

NÓI KHOÁC KHÔNG LÔGIC

A: — Tớ có thể làm bất cứ việc gì mà cậu bảo tớ!

B: — Vậy tớ bảo « Cậu hãy ra một đề toán mà không ai (kể cả cậu) giải được nó ». Cậu làm được không?

A: — Được chứ! Tớ đã bảo rồi mà

B: Vậy bây giờ tớ bảo « Cậu hãy giải bài toán đó » Cậu có làm được không?

A: Được, à... à... Không...

NHƯ VÂN

BẢNG NHẢY

Một tấm bảng có đặc tính kỳ lạ như sau: nếu bạn viết dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ thì khi viết đến số hạng a_n, số hạng đứng trước nó 3 bước tức là số hạng a_{n-3} sẽ tự động tăng thêm 1 đơn vị. Có cách nào viết nổi dãy số 1, 2, ..., 13 trên tấm bảng nhảy đó không?

Thực chất của những bài loại này là các bạn tìm các giá trị của đối số để tất cả các biểu thức đại số đã cho là có nghĩa (xác định).

Trong trường hợp hàm số cho bởi các biểu thức đại số thì còn một vấn đề nữa mà các bạn cần quan tâm đó là miền giá trị của hàm số. Miền giá trị của hàm số tức là những giá trị có thể nhận được của hàm số y để có giá trị của đối số x lập tương ứng với nó. Thí dụ hàm số $y = x^2$ thì miền giá trị là $y \geqslant 0$; vì với mọi giá trị của x đều tương ứng với giá trị của hàm số $y = x^2 \geqslant 0$ và ngược lại với bất cứ giá trị nào của $y \geqslant 0$ đều tồn tại giá trị của x sao cho $x^2 = y$. Một thí dụ nữa là hàm số $y = \sin x$ thì miền giá trị là $-1 \leqslant y \leqslant 1$, vì với mọi giá trị của x ta có $-1 \leqslant y = \sin x \leqslant 1$ và với bất cứ giá trị nào của $-1 \leqslant y \leqslant 1$ thì đều tồn tại giá trị của x sao cho $\sin x = y$. Vậy khi hàm số cho bởi biểu thức đại số thì miền giá trị của nó chính là tất cả những giá trị của y để phương trình $y = f(x)$ có nghiệm đối với ẩn x. Do đó khi chúng ta đi tìm miền giá trị của hàm số, chính là đưa đến việc tìm tham số y thỏa mãn cho phương trình $y = f(x)$ có nghiệm với ẩn x.

Thí dụ 1: Tìm miền giá trị của hàm số

$$y = (x+1)/(x^2+x+1)$$

Do $x^2 + x + 1 > 0$ nên ta có phương trình tương đương:

$$y(x^2+x+1) = x+1$$

hay: $$yx^2 - (1-y)x + y - 1 = 0$$

Phương trình bậc 2 đối với ẩn x muốn có nghiệm thì:

$$\begin{aligned}
&\Delta = (1-y)^2 - 4y(y-1) \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow (y-1)(-1-3y) \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow (y-1)(y+1/3) \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow -1/3 \leqslant y \leqslant 1
\end{aligned}$$

Vậy miền giá trị của hàm số là: $-1/3 \leqslant y \leqslant 1$

Từ đó các bạn có thể suy ra kết quả của các bài toán sau (các bạn thử suy ra xem!).

Bài toán 1a: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = (x+1)/(x^2+x+1)$$

Bài toán 1b: Tìm các góc α thỏa mãn

$$\sin\alpha = (x+1)/(x^2+x+1)$$

với giá trị nào đó của x.

Bây giờ các bạn xét thí dụ phức tạp hơn:

Thí dụ 2: Tìm miền giá trị của hàm số:

$$y = \cos 2x - \sin^2 x + \cos x$$

Ta biến đổi:

$$\begin{aligned}
y &= \cos 2x - \sin^2 x + \cos x\\
&= 2\cos^2 x - 1 - 1 + \cos^2 x + \cos x\\
&= 3\cos^2 x + \cos x - 2
\end{aligned}$$

Đến đây tôi hướng dẫn các bạn theo 2 phương pháp.

Phương pháp 1: Tìm giá trị của y để phương trình đối với x có nghiệm:

$$3\cos^2 x + \cos x - 2 - y = 0$$

Đặt $X = \cos x$ thì dẫn đến bài toán tìm giá trị của y để phương trình bậc 2 đối với ẩn X có nghiệm thỏa mãn: $-1 \leqslant X \leqslant 1$. Ta có phương trình:

$$3X^2 + X - (2+y) = 0$$

Xét tam thức bậc 2: $f(X) = 3X^2 + X - (2+y)$

Điều kiện để $f(X)$ có nghiệm thỏa mãn $-1 \leqslant X \leqslant 1$ là

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta \geqslant 0\\ f(-1) \geqslant 0\\ f(1) \geqslant 0\end{cases}\\ (-1).f(1) \leqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1 + 12(2+y) \geqslant 0\\ -y \geqslant 0\\ 2-y \geqslant 0\end{cases}\\ -y(2-y) \leqslant 0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}25 + 12y \geqslant 0\\ y \leqslant 0\\ y \leqslant 2\end{cases}\\ 0 \leqslant y \leqslant 2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}0 \geqslant y \geqslant -25/12\\ 2 \geqslant y \geqslant 0\end{array}\right.$$

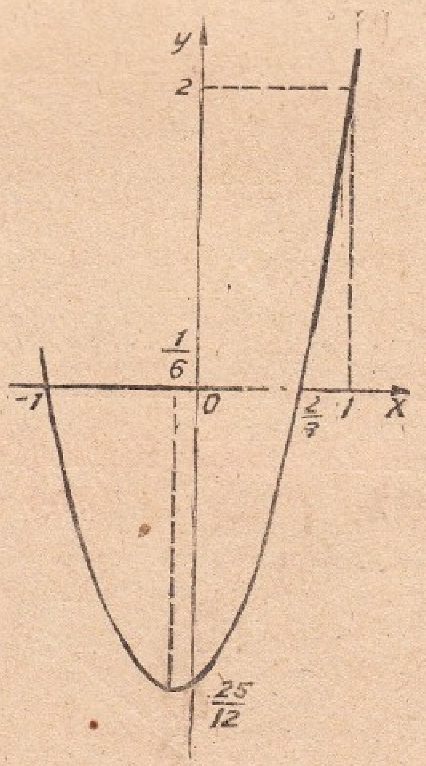
$$\Leftrightarrow 2 \geqslant y \geqslant -25/12.$$

Vậy miền giá trị của hàm số là $-25/12 \leqslant y \leqslant 2$

Phương pháp 2: Đặt $X = \cos x$ ta có:

$$y = 3X^2 + X - 2$$

Vẽ đồ thị của $y = 3X^2 + X - 2$ ta được một parabon như hình vẽ, từ đó miền giá trị của



$y = 3X^2 + X - 2$ chính là $y \geqslant -25/12$ nếu X nhận mọi giá trị tùy ý. Nhưng ở đây $X = \cos x$ nên: $-1 \leqslant X \leqslant 1$.

Ta xét đồ thị giới hạn trên đoạn $-1 \leqslant X \leqslant 1$. Từ đó ta thấy ngay khi $-1 \leqslant X \leqslant 1$ thì $-25/12 \leqslant y \leqslant 2$. Vậy miền giá trị của hàm số là $-25/12 \leqslant y \leqslant 2$.

Những vấn đề xoay quanh phương pháp 2 tôi có dịp sẽ trở lại với các bạn ở một bài báo sau.

Từ đó các bạn có thể thấy kết quả và phương pháp làm các bài toán:

Bài toán 2a: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \cos 2x - \sin^2 x + \cos x$$

Bài toán 2b: Chứng minh rằng:

$$-25/12 \leqslant \cos 2x - \sin^2 x + \cos x \leqslant 2$$

Bài toán 2c: Biết rằng góc α của một tam giác thỏa mãn:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \cos 2x - \sin^2 x + \cos x$$

với x là một góc nào đó. Chứng minh α là một góc tù.

Bây giờ các bạn làm quen với cách phát biểu khác của bài toán tìm miền giá trị của hàm số.

Thí dụ 3: Cho hàm số:

$$y = \frac{x+m+1}{x^2+m^2+x+m+1}.$$

Tìm những điểm trên trục tung mà đồ thị của hàm số không đi qua với mọi giá trị của tham số m.

Ta hãy tìm những điểm của trục tung mà đồ thị của hàm số có thể đi qua. Đó chính là những điểm có hoành độ $x = 0$ (vì điểm nằm trên trục tung) và có tung độ là $y = \dfrac{m+1}{m^2+m+1}$ (vì điểm nằm trên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+m+1}{x^2+m^2+x+m+1}$). Ta thấy miền giá trị của $y = \dfrac{m+1}{m^2+m+1}$ là $-1/3 \leqslant y \leqslant 1$ (xem thí dụ 1). Vậy tung độ của những điểm trên trục tung mà đồ thị có thể đi qua phải thỏa mãn: $-1/3 \leqslant y \leqslant 1$.

Nên những điểm của trục tung mà đồ thị hàm số không đi qua với mọi giá trị của m là: $y > 1$ hoặc $y < -1/3$.

Vậy bài toán này thực chất bắt ta phải tìm được miền giá trị của hàm số $y = \dfrac{m+1}{m^2+m+1}$ (đối số m) để từ đó suy ra kết quả bài toán ban đầu.

Thí dụ 4: Giải phương trình:

$$\cos \pi x = x^2 - 4x + 5.$$

Ở đây ta xét 2 hàm số:

$$y_1 = \cos \pi x \text{ và } y_2 = x^2 - 4x + 5.$$

Ta có: $y_1 = \cos \pi x \leqslant 1$ và $y_2 = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geqslant 1$.

Ta thấy ngay miền giá trị của chúng là $y_1 \leqslant 1$ và $y_2 \geqslant 1$.

Đề cho $y_1 = y_2$ suy ra chỉ có thể là $y_1 = y_2 = 1$.

Vậy phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \cos \pi x = 1 \\ x^2 - 4x + 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Tóm lại nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Cuối cùng xin các bạn hãy luyện tập bằng các bài tập sau:

Bài tập 1: Tìm miền giá trị của hàm số

$$y = -\cos x/(2\cos^2 x - 1).$$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2\sin^2 y \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases}$$

Bài tập 3: Giải phương trình:

$$\sqrt{2 + \cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x.$$

Bài tập 4: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$$y = (x+1)/(x-1)$$

chỉ có thể bị parabon: $y = x^2 + 4mx + m^2$ cắt ở những điểm nào? Với m là tham số tùy ý.

Bài tập 5: Với $x \geqslant 0$ thì hàm số:

$$y = (1+x^2)/(1+x)$$

đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Bài tập 6: Chứng minh rằng với mọi x thì

$$x^2/(x^4+1) \leqslant 1/2.$$

Chúc các bạn thành công.

ĐỀ THI VÔ ĐỊCH TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 25 TẠI PRAHA (29-6 – 10-7-1984)

Ngày thứ nhất
4 tháng bảy 1984

1. Giả sử x, y, z là những số thực dương hoặc bằng 0 thỏa mãn:

$$x + y + z = 1.$$

Chứng minh các bất đẳng thức:

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant 7/27.$$

2. Tìm một cặp số nguyên (a, b) dương (>0) thỏa mãn các điều kiện:

i) Tích $ab(a+b)$ không chia hết cho 7;

ii) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ chia hết cho 7^7.

Chứng tỏ câu trả lời.

VỀ CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG

NGUYỄN ĐỨC THUẦN

TRÊN báo *Toán học và tuổi trẻ*, chúng ta đã đề cập tới một loại chứng minh, đó là loại chứng minh gián tiếp. Thuộc loại chứng minh gián tiếp, có phép chứng minh phản chứng. Trong sách giáo khoa toán, người ta đã trình bày phép chứng minh phản chứng giúp các bạn chứng minh một số mệnh đề toán học ngay từ khi các bạn học toán ở lớp dưới, khi các bạn mới học hình học chẳng hạn.

Muốn dùng được phép chứng minh phản chứng, chúng ta cần biết *phủ định* mệnh đề. Chẳng hạn, đối với «$x > y$»(1) thì phủ định của nó là: «$x \leqslant y$». Chú ý rằng «$x < y$» cũng như «$x = y$» là *trái* với (1). Đề toán sau đây: «Cho 3 đường thẳng a, b và c, trong đó $a//c$ và $b//c$, chứng minh $a//b$ thực chất là luận đề (mệnh đề cần chứng minh) sau đây: «Nếu có 3 đường thẳng a, b, c mà $a//c$ và $b//c$ thì $a//b$». Phủ định của nó là: «Có 3 đường thẳng a, b, c, $a//c$ và $b//c$ mà a không song song với b». Chú ý rằng «a không song song với b» là phủ định kết luận «$a//b$», chứ không phải là phủ định toàn bộ luận đề. *Như vậy, muốn phủ định luận đề như trên, người ta ghép tất cả giả thiết của luận đề với phủ định kết luận của nó* (*)

Khi chứng minh phản chứng, chúng ta cần tiến hành theo 3 bước:

Bước 1: Phủ định luận đề. Bước này được gọi là *bước giả sử*.

Bước 2: Rút ra điều vô lý. Bước này được gọi là *bước truy nguyên*.

Bước 3: *Bước kết luận*.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng, nếu một đường thẳng mà song song với một đường thẳng bất kỳ của một mặt phẳng không chứa nó thì nó song song với chính mặt phẳng đó. ($a//b$, $b \subset (P)$, $a \not\subset (P) \rightarrow a//(P)$).

1) Giả sử với giả thiết như vậy mà a không song song với (P), có nghĩa là $a \times (P)$.

2) Gọi (Q) là mặt phẳng (a, b). Như vậy b sẽ là giao tuyến của (P) và (Q). Nếu $a \times (P)$, thì a phải cắt giao tuyến b tức là $a \times b$! Trái với giả thiết $a//b$.

3) Sở dĩ có điều mâu thuẫn trên là do ta đã giả sử $a \times (P)$. Vậy $a//(P)$.

Muốn chứng minh phản chứng, ta phủ định luận đề rồi từ đó suy ra sự vô lý. Sự vô lý có thể là do điều suy ra trái với giả thiết; có thể trái với một điều đúng (định nghĩa, tiên đề, định lý, mệnh đề đúng đã được chứng minh). có thể sự vô lý do hai điều trái nhau, v.v..; Cũng có khi, muốn chứng minh phản chứng, người ta chỉ phủ định kết luận rồi suy ra điều trái với giả thiết.

Người ta thường dùng 5 hình thức chứng minh phản chứng sau đây: (*)

1. Phủ định luận đề rồi suy ra điều trái với giả thiết.

(Xem ví dụ 1)

2. Phủ định luận đề rồi suy ra điều trái với một điều đúng nào đó.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ thì ta có $|ac + bd| \leqslant 1$.

Giải:

1) Giả sử với giả thiết như vậy mà $|ac + bd| > 1$.

2) Nếu đặt $a = \cos\varphi$ thì, vì $a^2 + b^2 = 1$ nên $b = \sin\varphi$.

Nếu đặt $c = \cos\alpha$ thì vì $c^2 + d^2 = 1$ nên $d = \sin\alpha$.

Do đó $|ac + bd| = |\cos\varphi \cos\alpha + \sin\varphi \sin\alpha|$
$= |\cos(\varphi - \alpha)| > 1$.

3) Điều trên là vô lý vì $|\cos x| \leqslant 1$. Vậy điều giả sử không thể tồn tại và ta có $|ac + bd| \leqslant 1$.

3. Phủ định luận đề rồi suy ra hai điều trái nhau.

Ví dụ 3. Chứng tỏ rằng phương trình:

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

bao giờ cũng có nghiệm.

Giải: 1) Giả sử phương trình trên vô nghiệm. Khai triển, ta được phương trình tương đương với phương trình đã cho:

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + ac + bc) = 0.$$

(*) *Đối với các bạn đã quen it nhiều với lôgich thì ta có thể giải thích được dễ dàng. Gọi G là giả thiết và K là kết luận thì hình thức của luận đề là $G \Rightarrow K$. Do đó, phủ định của nó là $\overline{G \Rightarrow K}$. Ta biến đổi:*

$$\overline{G \Rightarrow K} = \overline{\overline{G} \vee K} = G\overline{K}.$$

(*) *Xem Nguyễn Đức Thuần trong «Suy luận và chứng minh ĐHSPHN, 1980.*

2) Nếu phương trình vô nghiệm thì

$$\Delta = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+ac+bc) < 0. \quad (1)$$

Nhưng biến đổi, ta thấy:

$$\Delta = 2[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \geqslant 0. \quad (2)$$

3) Mâu thuẫn! (1) và (2) là phủ định của nhau. Vậy điều giả sử không thể có, có nghĩa là phương trình đã cho có nghiệm.

4. *Phủ định kết luận của luận đề rồi suy ra điều trái với giả thiết.*

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu a^2, b^2, c^2 là bai số hạng liên tiếp theo thứ tự ấy của một cấp số cộng thì $1/(b+c)$, $1/(c+a)$, $1/(a+b)$ cũng là ba số hạng liên tiếp theo thứ tự ấy của một cấp số cộng.

Giải 1) Giả sử ba số $1/(b+c)$, $1/(c+a)$, $1/(a+b)$ không là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

2) Nếu thế thì

$$1/(c+a) - 1/(b+c) \neq 1/(a+b) - 1/(c+a)$$

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)} \neq \frac{c-b}{(a+b)(c+a)}$$

$$(b-a)(a+b)(c+a) \neq (c+a)(b+c)(c-b).$$

$$b^2 - a^2 \neq c^2 - b^2$$

Điều sau cùng này chứng tỏ rằng a^2, b^2, c^2 không là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Trái với giả thiết!

3) Mâu thuẫn! Vậy điều giả sử không thể tồn tại, nghĩa là ba số đã cho sau là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

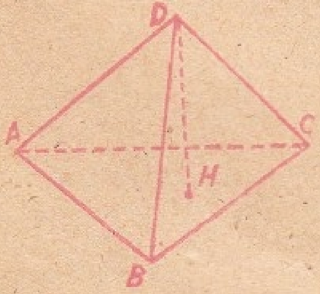
5. *Phủ định luận đề suy ra kết luận của luận đề.*

Ví dụ 5. Cho một tứ diện có cặp cạnh đối vuông góc với nhau từng đôi một $OABC$. Chứng minh H là trực tâm của $\triangle ABC$ khi và chỉ khi $OH \perp (ABC)$.

Giải: I. *Chứng minh rằng nếu H là trực tâm của $\triangle ABC$ thì $OH \perp (ABC)$*: dễ dàng, chứng minh trực tiếp suy từ giả thiết ra kết luận.

II. *Chứng minh $OH \perp (ABC)$ thì H là trực tâm của $\triangle ABC$.*

1) Giả sử rằng với giả thiết $OA \perp BC$, $AB \perp OC$ và $OH \perp (ABC)$ mà H không phải là trực tâm của $\triangle ABC$.



2) Như thế thì tồn tại trực tâm H' của $\triangle ABC$. Theo chứng minh phần I ta có $OH' \perp (ABC)$. Nhưng, ở đây $OH \perp (ABC)$. Từ một điểm ngoài mặt phẳng, chỉ có một đường thẳng qua nó vuông góc với mặt phẳng mà thôi. Do đó $H \equiv H'$.

3) Như vậy H là trực tâm của $\triangle ABC$.

Trên đây đã trình bày với các bạn 5 hình thức chứng minh phản chứng (*). Cùng một bài toán, các bạn có thể dùng hình thức này hoặc hình thức khác. Cùng một bài toán, các bạn có thể dùng phép chứng minh phản chứng hoặc chứng minh trực tiếp. Tuy nhiên, có nhiều bài toán dùng phép chứng minh phản chứng thì dễ mà chứng minh trực tiếp thì khó, và ngược lại. Nắm vững các hình thức chứng minh phản chứng các bạn có thêm khả năng tìm con đường dễ hơn để đi đến đích.

(*) *5 hình thức phản chứng viết theo kí hiệu lôgich là:*

1) $G\,\overline{K} \Rightarrow \overline{G}$. 2) $G\,\overline{K} \Rightarrow D$. 3) $G\,\overline{K} \Rightarrow C\,\overline{C}$.

4) $\overline{K} \Rightarrow \overline{G}$. 5) $G\,\overline{K} \Rightarrow K$.

Để chứng minh các mệnh đề trên đều tương đương với $G \Rightarrow K$.

In 15.000 số tại Xí nghiệp in 75 Hàng Bò — Hà nội — Chỉ số 11884
Số in 141/84. In xong và gửi lưu chiểu tháng 11/84

Giá : 2.00đ