VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Số 137
3
1984

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập Nguyễn Cảnh Toàn
Phó Tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội
Dây nói: 52825

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

HÀM SỐ CHUYỂN TIẾP CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH

NGUYỄN VĂN MẬU

LTS. Bạn đọc đã quen nhiều với việc giải các phương trình và bất phương trình, trong đó đại lượng phải tìm là các biến số. Bây giờ mời các bạn làm quen với việc giải các phương trình mà cái phải tìm lại là các hàm số. Nói cách khác là chúng ta làm quen với việc giải các « phương trình hàm ».

Đối với cặp số dương a, b ta có thể thành lập được rất nhiều các đại lượng trung bình. Đặc điểm chung, là chúng đều thuộc đoạn $[\min(a, b), \max(a, b)]$. Các dạng đơn giản hơn cả là các giá trị trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa, trung bình bậc hai... mà ta thường gặp trong chương trình toán phổ thông trung học. Ta có thể sắp xếp chúng theo một trật tự nhất định:

$$\min(a, b) \leqslant \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant \max(a, b) \qquad (1)$$

(bạn đọc có thể tự kiểm tra dễ dàng các bất đẳng thức này).

Hãy lấy hai đại lượng trung bình nhân và cộng làm ví dụ. Từ (1) ta nhận thấy ngay rằng bất phương trình hàm

$$f(\sqrt{xy}) \leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right);\ x, y \geqslant 0 \qquad (2)$$

sẽ nhận mọi hàm $f(x)$ đồng biến trong khoảng $[0, \infty)$ làm nghiệm của nó; trong khi đó, phương trình hàm tương tự

$$f(\sqrt{xy}) = f\left(\frac{x+y}{2}\right);\ x, y \geqslant 0 \qquad (3)$$

chỉ có một nghiệm $f(x)$ là một hằng số tùy ý. Bởi lẽ đó, các dạng bất phương trình hàm và phương trình hàm (2) – (3) được xem là các bài toán «quá dễ», và rất ít người chú ý tới. Tuy vậy, vấn đề sẽ không đơn giản nếu ta thấy các bài toán (2) – (3) bằng bài toán sau đây: Những lớp hàm số nào sẽ thực hiện phép chuyển tiếp một đại lượng trung bình của đối số sang một đại lượng trung bình của hàm số. Ví dụ, xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \; ; \; x, y \geqslant 0. \qquad (4)$$

Các bài toán tương tự như bài toán (4) đã được nhiều người chú ý từ lâu, bởi lẽ chúng liên quan chặt chẽ đến việc chuyển tiếp các cấp số và các dãy số. Thật vậy, nếu hàm số $f(x)$ thỏa mãn (4) thì $f(x)$ sẽ chuyển cấp số nhân

$$a_1, a_2, \dots ; \; a_j > 0$$

thành một cấp số cộng

$$f(a_1); f(a_2), \dots$$

Đối với các bài toán khác, ta cũng có các «tình trạng» tương tự.

Ta có thể chia các bài toán về chuyển tiếp các đại lượng trung bình thành hai nhóm. Một nhóm gồm tất cả các bài toán chuyển tiếp của một dạng trung bình. Nhóm còn lại, gồm các bài toán chuyển tiếp của hai dạng trung bình khác nhau.

Nhóm I.

Bài toán 1: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x, sao cho:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \text{ với mọi } x, y$$

Bài toán 2: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục với $x \geqslant 0$, sao cho

$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{f(x) f(y)} \; ; \; x, y \geqslant 0.$$

Bài toán 3: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục với $x \neq 0$, sao cho

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{2f(x) f(y)}{f(x) + f(y)} \; ; \; x, y \neq 0.$$

Nhóm II

Bài toán 4: Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x, sao cho

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2f(x) f(y)}{f(x) + f(y)}.$$

Bài toán 5: Xác định $f(x)$ liên tục với mọi x, sao cho

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x) f(y)}.$$

Bài toán 6: Xác định $f(x)$ liên tục với $x \neq 0$, sao cho

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \sqrt{f(x) f(y)}.$$

Danh mục các bài toán trong các nhóm I và II còn nhiều nữa. Bạn đọc dễ dàng tự đặt và giải đối với các dạng chuyển tiếp khác (xem phần bài tập áp dụng). Nhận xét rằng, các bài toán 1—6 có lời giải rất ngắn gọn nếu ta đòi hỏi các hàm số $f(x)$ là những hàm số có đạo hàm (hàm khả vi). Ở đây, sẽ trình bày vắn tắt một phương pháp sơ cấp chỉ dựa trên tính chất liên tục của nghiệm $f(x)$.

Cách giải bài toán 1: Đặt $f(0) = a$; $f(1) = b$. Khi đó, cho $x = 0$, $y = 2$ ta được $f(2) = 2f(1) - f(0) = 2b - a$. Cho $x = 1$; $y = 3$ thì được $f(3) = 2f(2) - f(1) = 3b - 2a$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thu được

$$f(n) = nb - (n-1)a = n(b-a) + a. \qquad (5)$$

Tiếp theo, cho $x = 0$ ta được

$$f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{f(y) + f(0)}{2} = \frac{f(y) + a}{2}$$

Với $y = 1$

$$y = 1/2 \; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{b+a}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{b-a}{4} + a.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thu được

$$f\left(\frac{1}{2^m}\right) = \frac{b-a}{2^m} + a. \qquad (6)$$

Kết hợp (5) và (6) ta có

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = (b-a)\frac{m}{2^n} + a. \qquad (7)$$

Sử dụng tính liên tục của $f(x)$, từ (7) ta nhận được

$f(x) = (b-a)x + a$; trong đó b, a tùy ý.

Vậy nghiệm của bài toán 1 là

$$f(x) = cx + a; \; c, a \text{ tùy ý}.$$

Giải bài toán 4:

Giả sử tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = 0$. Khi đó

$$f\left(\frac{x_0 + y}{2}\right) = \frac{2f(x_0) f(y)}{f(x_0) + f(y)} = 0 \text{ với mọi } y.$$

Vậy $f(x) \equiv 0$, hàm số này không thỏa mãn. Suy ra $f(x) \neq 0$ với mọi x

Đặt $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ thì bài toán 4 có dạng:

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}.$$

Theo kết quả của bài toán 1 thì $g(x) = cx + a$; c và a tùy ý.

Vậy

$$f(x) = \frac{1}{(cx + a)}$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x ta phải có $c = 0$; $a \neq 0$.

Vậy $f(x) = d$; $d = \frac{1}{a} \neq 0$.

Giải bài toán 5 : Từ điều kiện bài toán, suy ra $f(x) \geqslant 0 \ \forall x$.

1) Nếu $f(x_0) = 0$ tại $x = x_0$ nào đó thì

$f\left(\frac{x_0 + y}{2}\right) = \sqrt{f(x_0) f(y)} = 0$, suy ra $f(x) = 0$ là nghiệm duy nhất.

2) Giả thiết $f(x) > 0 \ \forall x$.

Đặt $f(0) = a > 0$; $f(1) = ab, b > 0$;

$f(x) = a.b^x g(x)$.

Ta có : $g(0) = g(1) = 1$ và:

$$ab^{\frac{x+y}{2}} g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{ab^x g(x)\, ab^y g(y)}$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{g(x)\, g(y)}.$$

chọn $y = 0$ ta được

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{g(x)}$$

cho $x = 1$ thì $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Cho $x = 1/2$ thì $g\left(\frac{1}{4}\right) = 1$. Từ đó suy ra

$$g\left(\frac{1}{2^m}\right) = 1,\ m \in N.$$

Mặt khác

$$g(x) = [g(x/2)]^2,$$

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{g(x)\, g(y)}\ .$$

Suy ra với $x = 2$ $g(2) = 1$.

Với $x = 1$, $y = 3$ thì

$1 = \sqrt{g(1)\, g(3)}$, vậy $g(3) = 1$.

Với $x = 2$, $y = 4$ thì

$1 = \sqrt{g(2)\, g(4)}$, vậy $g(4) = 1$.

Suy ra $g(n) = 1$ với mọi n tự nhiên.

Do $g(0) = \sqrt{g(x)\, g(-x)}$ suy ra $g(-n) = 1$.

Vậy

$g(n) = 1$ với mọi n nguyên. (8)

Kết hợp (7) và (8) ta thu được $g(n/2^m) = 1$. Sử dụng tính chất liên tục của hàm số $g(x)$ ta suy ra $g(x) = 1$

Vậy $f(x) = a.b^x$; $a, b > 0$ tùy ý.

Giải bài toán 2 : Cho $y = 0$ ta được $f(0) \times [f(x) - f(0)] = 0$.

Vậy nếu $f(0) \neq 0$ thì $f(x) = f(0) > 0$ là nghiệm duy nhất. Ta chỉ xét $f(0) = 0$. Nếu tồn tại giá trị $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) = 0$ thì $f(x) = 0$ là nghiệm duy nhất. Do đó, có thể giả thiết $f(x) > 0$, $\forall x > 0$.

Đặt $x = e^u$, $y = e^v$ $-\infty < u, v < +\infty$ và $g(u) = f(e^u)$ thì bài toán 2 có dạng

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \sqrt{g(u)\, g(v)}.$$

Vậy ta nhận được bài toán 5 với $g(x) = a.b^x$. Suy ra $f(x) = \ln(a.b^x)$.

Tương tự, các bài toán 3 và 6 dễ dàng chuyển về các bài toán đã xét. Thật vậy, trong bài toán 6 ta đặt $u = 1/x$, $v = 1/y$ và $g(u) = f(1/u)$, ta sẽ chuyển về bài toán 5 đối với $g(u)$. Trong bài toán 3 đặt $u = 1/x, v = 1/y$ và $g(u) = 1/f(1/u)$ ta sẽ dẫn về bài toán 1.

Bài tập áp dụng

1) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục với mọi x, thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{(f(u))^2 + (f(v))^2}{2}}$$

với mọi u, v.

2) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục với $x \geqslant 0$, thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

với $x, y \geqslant 0$.

3) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục với $x \geqslant 0$, thỏa mãn điều kiện

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2 f(x) f(y)}{f(x) + f(y)}$$

với $x, y > 0$

4) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục với $x \neq 0$, thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

THI VÔ ĐỊCH TOÁN TOÀN QUỐC 1984

THEO thường lệ, vào đầu tháng ba hàng năm, Bộ giáo dục tổ chức kỳ thi vô địch toán quốc chọn học sinh giỏi toán lớp 12. Năm nay tất cả các tỉnh, thành phố trong cả nước và hai trường đại học (đại học Tổng hợp và đại học sư phạm Hà Nội) có khối chuyên toán đều tham gia.

Sau đây là đề thi làm trong hai ngày (mỗi ngày làm 3 bài toán trong 180 phút) và kết quả

I. ĐỀ THI

Bài 1.

1) Tìm đa thức của x có bậc nhỏ nhất với hệ số nguyên có một nghiệm là $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

2) Giải phương trình:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=2+\sqrt{1-x^2}$$

Bài 2.

Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots$ như sau: $u_1=1$, $u_2=2$, $u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$ với $n=2, 3, \ldots$

Dãy số $v_1, v_2 \ldots$ được xác định theo qui luật

$$v_n=\sum_{i=1}^{n} \operatorname{arccotg} u_i, \quad n=1, 2, \ldots$$

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Bài 3.

Trong mặt phẳng P cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với P lấy điểm S sao cho $SA=2a$.

1) M và N là hai điểm tương ứng di động trên BC và DC.

a) Xác định vị trí của M; N sao cho: $BM+DN\geqslant 3/2\,a$, hai mặt phẳng SAM và SMN vuông góc với nhau và tích $BM.DN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Xác định vị trí của M, N sao cho $\widehat{NAM}=45°$ và thể tích của tứ diện $SAMN$ lớn nhất, nhỏ nhất. Tính các giá trị đó.

2) Q là điểm di động sao cho Q luôn luôn nhìn AB, AD dưới các góc vuông. Gọi Π là mặt phẳng vuông góc với P theo giao tuyến AB. IQ cắt Π tại Q'.

a) Tìm quỹ tích của Q'.

b) Điểm Q ở trên sẽ vẽ nên đường (k). Gọi R là giao điểm thứ hai khác với Q của CQ và (k). Chứng minh rằng đại lượng $\sin^2\widehat{Q'DB}+\sin^2\widehat{R'DB}$ là một hằng số không phụ thuộc vào vị trí của Q, trong đó R' là giao điểm của DR với mặt phẳng Π.

Bài 4.

1) Cho x và y là các số nguyên, không đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=|5x^2+11xy-5y^2|.$$

2) Tìm tất cả các số dương t sao cho $0{,}9t=\dfrac{[t]}{t-[t]}$, trong đó ký hiệu $[t]$ chỉ phần nguyên của t.

Bài 5.

Cho a và b là hai số thực trong đó $a\neq 0$. Hãy tìm đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$x.P(x-a)=(x-b)P(x).$$

Bài 6. Cho góc tam diện $Sxyz$ đỉnh S, trong đó $\widehat{xSz}=\alpha$, $\widehat{xSy}=\beta$ và $\widehat{ySz}=\gamma$. Gọi A, B, C tương ứng là giá trị của các góc nhị diện cạnh Sy, Sz, Sx của góc tam diện ấy.

1) Chứng minh:

a) $\sin\alpha/\sin A=\sin\beta/\sin B=\sin\gamma/\sin C$

b) $\alpha+\beta=180°$ khi và chỉ khi $A+B=180°$.

2) Giả sử $\alpha=\beta=\gamma=90°$. Gọi O là một điểm cố định trên Sz sao cho $SO=a$.

M và N là hai điểm di động trên Sx và Sy sao cho $SM+SN=a$. Chứng minh rằng đại lượng $\widehat{SOM}+\widehat{SON}+\widehat{MON}$ là một hằng số không phụ thuộc vị trí của M và N. Tìm quỹ tích tâm I của hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OSMN$.

II. KẾT QUẢ

A. Giải cá nhân

Giải nhất

Nguyễn Văn Hưng, trường Phan Chu Trinh, Quảng Nam Đà Nẵng

Giải nhì

Đỗ Quang Đại, trường ĐHSP Hà Nội 1

Giải ba

1. *Cao Hoàng Trụ*, trường Lê Hồng Phong thành phố Hồ Chí minh;

2. *Nguyễn Thúc Anh*, trường Lam Sơn, Thanh Hóa;

3. *Võ Đại Hoài Đức*, trường Lê Hồng Phong, thành phố HCM;

4. *Nguyễn Quốc Lân*, trường Lê Hồng Phong thành phố HCM;

5. *Nguyễn Thanh Quang*, trường thị xã Cần Thơ, Hậu Giang.

Giải khuyến khích

1. *Đàm Thanh Sơn*, trường ĐH Tổng hợp Hà Nội;

2. *Phan Phước Đính*, trường Quốc học, Bình Trị Thiên;

3. *Vũ Hoàng Dũng*, trường Lam Sơn, Thanh Hóa;

4. *Nguyễn Minh Hà*, trường Chu Văn An, Hà Nội;

5. *Nguyễn Hữu An*, trường Lam Sơn, Thanh Hóa;

6. *Nguyễn Hoành Cường*, trường Trưng Vương, Nghĩa Bình;

7. *Lê Thanh Hà*, trường Lam Sơn, Thanh Hóa,

8. *Lê Đình Trọng*, trường Quốc học, Bình Trị Thiên;

9. *Dương Văn Định*, trường Phan Bội Châu Nghệ Tĩnh;

10. *Võ Thu Tùng*, trường Phan Chu Trinh, Quảng Nam Đà Nẵng;

11. *Đoàn Nguyên Thượng*, trường Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh.

B. Giải đồng đội.

Giải nhất: Thành phố Hồ Chí Minh.

Giải nhì: Thanh Hóa và Quảng Nam Đà Nẵng.

Giải ba: ĐH Tổng hợp Hà Nội, Nghệ Tĩnh, Hà Nội, Thái Bình, Hà Sơn Bình, Hà Nam Ninh, Hải Hưng và Hậu Giang.

LÊ HẢI CHÂU

ỨNG DỤNG CỦA MỘT SỐ ĐỒNG NHẤT THỨC

HÀ HUY BẢNG

CHÚNG ta xét hai bài toán sau đây:

Bài toán 1. Giả sử m, n, p là các số nguyên khác nhau bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\frac{m^k}{(m-n)(m-p)}+\frac{n^k}{(n-p)(n-m)}+\frac{p^k}{(p-m)(p-n)}$$

là số nguyên với mọi số nguyên $k \geqslant 0$.

Bài toán 2. Giả sử m, n, p, q là các số nguyên khác nhau bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\frac{m^k}{(m-n)(m-p)(m-q)}+\frac{n^k}{(n-p)(n-q)(n-m)}+$$
$$+\frac{p^k}{(p-q)(p-m)(p-n)}+\frac{q^k}{(q-m)(q-n)(q-p)}$$

là số nguyên với mọi số nguyên $k \geqslant 0$.

Các bài toán này nếu giải bằng phương pháp thông thường thì rất phức tạp. Nhưng chúng sẽ trở thành đơn giản nếu sử dụng phương pháp như sau:

Ta có đồng nhất thức:

$$(x-a)(x-b)(x-c)x^k = x^{k+3}-(a+b+c)x^{k+2}+$$
$$+(ab+bc+ca)\,x^{k+1}-abcx^k,\ k=0,1,\ldots$$

Đặt $x=a$, $x=b$, $x=c$ ta được:

$$a^{k+3}-(a+b+c)\,a^{k+2}+(ab+bc+ca)\,a^{k+1}-abca^k=0,$$

$$b^{k+3}-(a+b+c)\,b^{k+2}+(ab+bc+ca)\,b^{k+1}-abcb^k=0,$$

$$c^{k+3}-(a+b+c)\,c^{k+2}+(ab+bc+ca)\,c^{k+1}-abc\,c^k=0.$$

Giả sử a, b, c khác nhau. Chia hai vế của đẳng thức thứ nhất cho $(a-b)(a-c)$, thứ hai cho $(b-c)(b-a)$, thứ ba cho $(c-a)(c-b)$ rồi cộng lại, ta được:

$$(1)\quad \frac{a^{k+3}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{k+3}}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^{k+3}}{(c-a)(c-b)}$$

$$-(a+b+c)\left[\frac{a^{k+2}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{k+2}}{(b-c)(b-a)}\right.$$

$$\left.+\frac{c^{k+2}}{(c-a)(c-b)}\right]+(ab+bc+ca)\times$$

$$\left[\frac{a^{k+1}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{k+1}}{(b-c)(b-a)}\right.$$

$$\left.+\frac{c^{k+1}}{(c-a)(c-b)}\right]-abc\left[\frac{a^{k}}{(a-b)(a-c)}+\right.$$

$$\left.\frac{b^{k}}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^{k}}{(c-a)(c-b)}\right]=0.$$

$$k=0,1,\ldots$$

Đặt (2) $S_k=\dfrac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^k}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^k}{(c-a)(c-b)}$; $k=0,1,\ldots$

Khi đó (1) trở thành

$$(3)\quad S_{k+3}-(a+b+c)S_{k+2}+(ab+bc+ca)S_{k+1}-abc\,S_k=0;\qquad k=0,1,\ldots$$

Bởi vậy, nếu biết S_0, S_1, S_2 ta có thể tính được S_k ($k\geqslant 3$) nhờ công thức truy toán (3).

Ta tính S_0, S_1, S_2 trực tiếp từ (2):

$$S_0=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0,$$

$$S_1=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0,$$

$$S_2=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=1.$$

Thay $k=0$ vào (3) ta được:

$$S_3=a+b+c,$$

và từ đó sẽ tính được S_4, S_5...

Như vậy là nhờ (3) và $S_0=S_1=0$, $S_2=1$, ta giải được bài toán 1 và tính được mọi tổng S_k ($k\geqslant 3$).

Ta lại có đồng nhất thức:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,x^k$$
$$=x^{k+4}-(a+b+c+d)\,x^{k+3}$$
$$+(ab+bc+cd+da)\,x^{k+2}$$
$$-(abc+bcd+cda+dab)\,x^{k+1}+abcd\,x^k;$$
$$k=0,1,\ldots$$

Giả sử a, b, c, d khác nhau; làm tương tự như trước được:

$$(4)\quad S^*_{k+4}-(a+b+c+d)S^*_{k+3}+(ab+bc+cd+da)S^*_{k+2}-(abc+bcd+cda+dab)S^*_{k+1}+abcd\,S^*_k=0$$

với (5)

$$S^*_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^k}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^k}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)};$$
$$k=0,1,\ldots$$

Tính trực tiếp S^*_0, S^*_1, S^*_2, S^*_3, ta được $S^*_0=S^*_1=S^*_2=0$ và $S^*_3=1$.

Thay giá trị của S^*_0, S^*_1, S^*_2, S^*_3 vào (4) ta được

$$S^*_4=\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^4}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}=a+b+c+d.$$

Như vậy là nhờ (4) và $S^*_0=S^*_1=S^*_2=0$, $S^*_3=1$ ta giải được bài toán 2 và tính được mọi tổng S^*_k ($k\geqslant 4$).

Chúng tôi dành cho độc giả việc tổng quát hóa bài toán này. Sau đây chúng ta xét một vài ứng dụng khác của phương pháp này:

1. Đơn giản biểu thức :

$$A = \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b^2(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c^2(c-a)(c-b)}.$$

Lời giải : Biến đổi số hạng :

$$\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a^2a^2bc\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)} = \frac{1}{abc}\cdot\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)},$$

và làm tương tự với các biểu thức còn lại. Từ đó ta có :

$$A = \frac{1}{abc}\left[\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{abc}S_3 = \frac{1}{abc}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

2. Đơn giản biểu thức .

$$B = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}.$$

Lời giải : Đặt $d = 0$, khi đó

$$S_0^* = \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{1}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

Bởi vậy $B = \frac{1}{abc}$

3 Chứng minh rằng :

$$T_m = a^m\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + b^m\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + c^m\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

luôn là số nguyên với mọi số nguyên a, b, c m ; $m \geqslant 1$.

Lời giải :

Ta thấy :

$$\frac{a^m(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a+b+c)a^{m+1} + abca^{m-1}}{(a-b)(a-c)}.$$

Biến đổi tương tự các số hạng sau, ta được :

$$T_m = (a+b+c)S_{m+1} + abc\,S_{m-1}.$$

Áp dụng kết quả bài toán 1 ta được điều phải chứng minh.

Bài 1/134. *Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho $A = k\,19^{1983} + 84^{1983}$ chia hết cho 13390.*

Lời giải (của *Lâm Đạt* – lớp 10B, PTTH, thị xã Thủ Dầu Một, Sông Bé).

Ta sẽ giải bài toán dạng tổng quát hơn : Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho $A = k19^{2n+1} + 84^{2n+1}$ chia hết cho 13390. (Muốn trở về bài toán của ta, chỉ việc lấy $n = 991$).

Trước tiên ta thấy : $13390 = 103 \times 13 \times 10$ và 103, 13, 10 nguyên tố cùng nhau. Vậy A phải chia hết cho 3 số đó.

Do : $4^{2n+1} \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 84^{2n+1} \equiv 4 \pmod{10}$,

$9^{2n+1} \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow 19^{2n+1} \equiv 9 \pmod{10}$.

Vậy muốn $A \vdots 10$ phải có $k \equiv 4 \pmod{10}$ (1)

Mặt khác $A = k.19^{2n+1} + (103 - 19)^{2n+1}$

$= (k-1)19^{2n+1} + 103.N$

(N nguyên dương)

$A \vdots 103 \Rightarrow k - 1 \equiv 0 \pmod{103}$

hay $k = 103\,m + 1$. (2)

Từ (1) và (2) có $m = 10m' + 1 \rightarrow$

$k = 1030m' + 104$.

$A = (1030m' + 104)\ 19^{2n+1} + (5.13 + 19)^{2n+1}$

$= (1030m' + 105)19^{2n+1} + 13M$ (M nguyên dương)

$A \vdots 13 \Rightarrow 1030m' + 105 \equiv 0 \pmod{13}$.

$105 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 1030\,m' \equiv 12 \pmod{13}$.

$1030 \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow m' \equiv 4 \pmod{13}$.

hay $m' = 13L + 4 \Rightarrow k = 1030\ (13L + 4) + 104$

$= 1030.\ 13L + 4224.$

k nhỏ nhất khi $L = 0$. Vậy số k cần tìm là $k = 4224$.

N.Đ.T.

Bài 2/134 *Cho hai đa thức với hệ số nguyên $f_1(x)$, $f_2(x)$, thỏa mãn điều kiện: Đa thức $f(x) = f_1(x^3) + xf_2(x^3)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$*

Chứng minh rằng:

USCLN $(f_1(1984), f_2(1984)) \geqslant 1983$.

Lời giải (của nhiều bạn).

$$f(x) = [f_1(x^3) - f_1(1)] + x[f_2(x^3) - f_2(1)] + xf_2(1) + f_1(1).$$

Dễ thấy

$$f_1(x^3) - f_1(1) \vdots\ x^2 + x + 1,$$
$$f_2(x^3) - f_2(1) \vdots\ x^2 + x + 1.$$

Vậy theo giả thiết thì suy ra

$$xf_2(1) + f_1(1) \vdots\ x^2 + x + 1.$$

Suy ra $f_2(1) = f_1(1) = 0$.

Hay $f_2(x)$ và $f_1(x)$ chia hết cho $x - 1$. Từ đó suy ra.

USCLN $(f_1(1984), f_2(1984)) = k \cdot 1983$, k – tự nhiên. $k = 1$ khi $f_1(x) = f_2(x) = x - 1$.

Nhận xét: Hầu hết các bài giải không chỉ ra được trường hợp đẳng thức xảy ra.

N.Đ.M.

Bài 3/134 *Tìm phần nguyên của số*

$$A = (\sqrt{n} + \sqrt{(n+1)})^2 + (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})^2 + (\sqrt{n+2} + \sqrt{n})^2.$$

Lời giải. Ta chứng minh

$$12n + 11 < A < 12n + 12.$$

1) $A < 12n + 12 \Leftrightarrow 6n + 6 + 2 \times (\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+2)n}) < 12n + 12$

$$\Leftrightarrow B = \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+2)n} < 3n + 3.$$

Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{(n+1)(n+2)} < 2(n+1) & (1) \\ \sqrt{(n+2)n} < n + 1 & (2) \end{cases}$$

Thật vậy

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1}$

$\Leftrightarrow 2n + 2 + 2\sqrt{n(n+2)} < 4(n+1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{n(n+2)} < n + 1^2$ đúng.

(2) $\Leftrightarrow n^2 + 2n < (n+1)^2$ đúng.

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

2) $12n + 11 < A \Leftrightarrow 6n + 6 + 2B > 12n + 11$

$\Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+2)n} > 3n + 5/2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} > 3 + \frac{5}{2n}. \qquad (3)$$

Ta có

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} > 1 + \frac{5}{12n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{5}{6n} + \frac{25}{144n^2} \Leftrightarrow n > 25/4.$$

$$\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} > 1 + \frac{15}{12n}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} > 1 + \frac{5}{2n} + \frac{25}{15n^2}$$

đúng với mọi $n \geqslant 1$

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} > 1 + \frac{10}{12n}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{n} > 1 + \frac{10}{6n} + \frac{25}{36n^2} \Leftrightarrow n > 25/12.$$

Vậy khi $n \geqslant 3$ thì vế trái của (3) sẽ lớn hơn:

$1 + \frac{5}{12n} + 1 + \frac{15}{12n} + 1 + \frac{10}{12n} = 3 + \frac{5}{2n}$. Vậy (3) đúng.

Suy ra: $[A] = 12n + 11$ khi $n \geqslant 3$.

Trường hợp $n = 1$ 2 tính trực tiếp

N.Đ.M.

Bài 4/134 *Bề mặt của khối lập phương Rubich được chia thành 54 ô vuông bằng nhau*

Người ta dùng 54 số tự nhiên đầu tiên đánh số 54 ô vuông đó.

Chứng minh rằng bất kì cách đánh số nào thỏa mãn điều kiện: hai số tự nhiên liên nhau được đánh số vào hai ô kề nhau (hai ô có cạnh chung), bao giờ cũng tìm thấy hai ô vuông kề nhau mà hiệu của hai số trong đó > 12.

Hãy chỉ ra một cách đánh số sao cho hiệu hai số ở hai ô vuông kề nhau bao giờ cũng ⩽ 12.

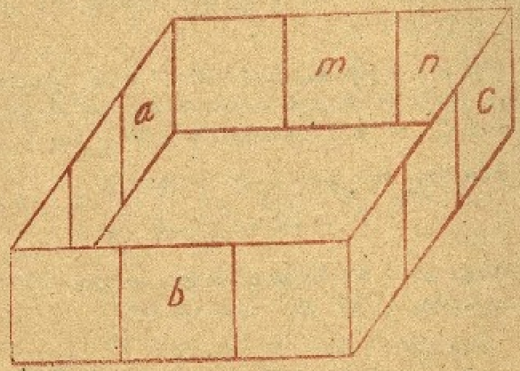
LTS. Tất cả các bạn giải bài này đều không giải trọn vẹn. Tuy nhiên, do sơ suất tòa soạn đã đăng không chính xác đề ra của tác giả. Tòa soạn chân thành xin lỗi tác giả và bạn đọc. Dưới đây Tòa soạn xin đăng lại đề ra và lời giải của tác giả.

Đề bài : *Bề mặt của khối lập phương Ru-bich được chia thành 54 ô vuông bằng nhau. Người ta dùng 54 số tự nhiên đầu tiên đánh số 54 ô vuông đó, theo nguyên tắc : hai số tự nhiên liền nhau được đánh số vào hai ô vuông kề nhau (hai ô có cạnh chung)*

Chứng minh rằng bất kì cách đánh số nào bao giờ cũng tìm thấy hai ô vuông kề nhau mà hiệu của hai số trong đó ⩾ 13.

Hãy chỉ ra một cách đánh số sao cho hiệu hai số ở hai ô vuông kề nhau bao giờ cũng ⩽ 13.

Lời giải : Xác định đáy của lập phương, chia mặt xung quanh của lập phương thành ba lớp, mỗi lớp 12 ô vuông. Xét lớp giữa và chọn ba ô cách đều nhau trên đó. Giả sử ba số a, b, c với $a<b<c$ là ba số ghi trên ba ô vuông này. (Dưới đây ta gọi tên các ô bằng chính các số ghi trên đó). Ta xét 5 ô gồm : ô a, ô c và ba ô nằm giữa a và c. Hiển nhiên trong 5 ô đó có thể chọn được hai ô kề nhau m, n sao cho $m<b<n$ (m có thể trùng với a, n có thể trùng với c). Vì các ô liên tiếp từ m đến n phải qua b nên dễ thấy $n-m \geqslant 11$.



Nếu $n-m \geqslant 13$ thì bài toán được chứng minh.

Nếu $n-m < 13$ thì rõ ràng các ô liên tiếp đi từ m đến n hoặc chỉ là các ô thuộc lớp giữa, hoặc thuộc lớp giữa và một trong hai lớp trên hoặc dưới. Ta giả sử các ô này không thuộc lớp trên. Khi đó các số ở lớp trên nằm ngoài đoạn $[m, n]$.

Xét hai ô m_1, n_1 ở lớp trên tương ứng kề với m, n.

— Nếu $n_1<m$ thì $n_1 \leqslant m-2$, khi đó $n-m_1 \geqslant n-m+2 \geqslant 13$, n và n_1 là hai ô cần tìm.

— Nếu $m_1<n$ thì $m_1 \geqslant n+2$, khi đó $m_1-m \geqslant n-m+2 \geqslant 13$, m và m_1 là hai ô cần tìm.

— Nếu $n_1>n$, $m_1<m$ thì m_1 và n_1 là hai ô cần tìm.

Cách đánh số thỏa mãn đề bài như sau :

D C

46	53	52
47	54	51
48	49	50
36	37	38
23	24	25
10	11	12

A B

A B

35	22	21	9	2	3	13	26	39
34	33	20	8	1	4	14	27	40
45	32	19	7	6	5	15	28	41

D C

18	17	16
31	30	29
44	43	42

D C

THÔNG BÁO

Bắt đầu từ số 4 năm 1984 trở đi giá mỗi số báo THVTT là 2 đồng

Bài 5/134. *Tìm tất cả các nghiệm hữu tỷ của phương trình :*

$$y^2 = 3x^2 + 2x - 5.$$

Lời giải (của *Đỗ Quang Đại* — 12 CT ĐHSP Hà Nội).

Phương trình đã cho tương đương với

$$y^2 = (x-1)(3x+5).$$

Đặt $y = k(x-1)$. Vì x, y hữu tỷ nên k hữu tỷ. Ta có

$$k^2(x-1)^2 = (x-1)(3x+5).$$

— Phương trình có nghiệm hữu tỷ $x=1$, $y=0$.

— Nếu $x-1 \neq 0$ ta có

$$k^2(x-1) = 3x+5$$

$$\Leftrightarrow (k^2-3)x = k^2+5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(k^2+5)}{(k^2-3)}.$$

Vậy tất cả các nghiệm hữu tỷ của phương trình là :

$$x=1,\ y=0\ ;$$

$$x = \frac{(k^2+5)}{(k^2-3)},\ y = \frac{8k}{(k^2-3)}$$

với k là số hữu tỷ bất kỳ khác 3.

Đ.B.K.

Bài 6/134. *Cho số liệt* $\{x_n\}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$x_{n+2} = \frac{x_n \cdot x_{n+1}}{2x_n - x_{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Hãy tìm điều kiện cần và đủ đối với x_1 *và* x_2 *để trong số liệt có vô số số nguyên.*

Lời giải. Đặt $r_n = \frac{1}{x_n}$; từ điều kiện của đầu bài ta suy ra $r_{n+2} = 2r_{n+1} - r_n$ với mọi $n=1, 2, 3, \ldots$ Vậy $\{r_n\}$ là cấp số cộng.

Nếu có vô số số n sao cho x_n nguyên, khác không, thì cũng với các số n đó ta có

$$-1 \leqslant r_n \leqslant 1.$$

Khi đó cấp số cộng vô hạn r_n phải có công sai bằng 0, tức là $x_1 = x_2 =$ số nguyên.

Đảo lại nếu $x_1 = x_2$ là số nguyên khác 0 thì $x_n = x_1$ nguyên với mọi n.

Vậy điều kiện cần và đủ phải tìm là : $x_1 = x_2$ là số nguyên khác 0.

Đ.B.K.

Bài 7/134. *Tìm tất cả các giá trị m sao cho*

$$|mx^3 + (1-m)x| \leqslant 1$$

khi $|x| \leqslant 1$.

Lời giải (của *Trang Lâm Bằng* và *Võ Thanh Hùng* — 11 chuyên toán, Lê Hồng Phong, Hồ Chí Minh).

Đặt $f(x) = mx^3 + (1-m)x$. Ta thấy $f(x)$ là hàm lẻ, nên chỉ cần xét x trong khoảng $0 \leqslant x \leqslant 1$. Nhưng khi $x=0$ hoặc $x=1$ thì thấy ngay $|f(x)| \leqslant 1$, nên chỉ còn phải xét $x \in (0, 1)$.

Ta có

$$|f(x)| \leqslant 1 \leftrightarrow -1 \leqslant mx^3 + (1-m)x \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow -(x+1) \leqslant m(x^3 - x) \leqslant -(x-1)$$

$$\leftrightarrow -\frac{x+1}{x^3-x} \geqslant m \geqslant -\frac{x-1}{x^3-x} \quad (\text{do } x^3 - x < 0)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x(x-1)} \geqslant m \geqslant -\frac{1}{x(x+1)}. \qquad (1)$$

Bằng đạo hàm, tính cực đại và cực tiểu, ta có :

$$x(x-1) \geqslant -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x(x-1)} \geqslant 4,$$

$$x(x+1) < 2 \leftrightarrow -\frac{1}{x(x+1)} < -\frac{1}{2}.$$

Vậy với mọi m trong khoảng $4 \geqslant m \geqslant -1/2$ thì với mọi $x \in (0, 1)$ ta đều có (1), và do đó sẽ có $|f(x)| \leqslant 1$.

Phương trình $x(x+1) = 2 - \alpha$ luôn có nghiệm thực thuộc $(0, 1)$ với $\alpha < 2$ và nhỏ tùy ý, suy ra với $m < -1/2$ (1) không thỏa mãn.

Tóm lại, các giá trị m cần tìm là

$$-1/2 \leqslant m \leqslant 4.$$

Nhận xét : Nhiều bạn đã gửi lời giải bài này, song không ít lời giải còn sai sót.

P.H.

Bài 8/134.

Hãy tính tổng

$$S=\sum_{i=0}^{n}\frac{4^i}{1+\cos 2^i}.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh đẳng thức sau:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \operatorname{tg} 2^i x=\operatorname{cotg}x-2^{n+1}\operatorname{cotg}2^{n+1}x$$

với $x\neq\frac{2k\pi}{2^{n+1}}$, k – nguyên. Thực vậy, từ công thức $\operatorname{tg}2y=\frac{2\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}^2 y}$, ta có $\operatorname{tg}y=\operatorname{cotg}y-2\operatorname{cotg}2y$.

Do vậy đặt $y=2^i x$ ta có:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \operatorname{tg} 2^i x=\sum_{i=0}^{n}\left(2^i\operatorname{cotg}2^i x-2^{i+1}\operatorname{cotg}2^{i+1}x\right)$$

$$=\operatorname{cotg}x-2^{n+1}\operatorname{cotg}2^{n+1}x,$$

(1) đã được chứng minh.

Từ (1) lấy đạo hàm hai vế theo x, ta được:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{4^i}{\cos^2 2^i x}=-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4^{n+1}}{\sin^2 2^{n+1}x}.$$

Áp dụng công thức

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1,$$

ta đi đến

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{4^i}{1+\cos 2^{i+1}x}=$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4^{1+n}}{\sin^2 2^{n+1}x}\right). \quad (2)$$

Cuối cùng, lấy $x=1/2$ (độ đo radian) trong miền xác định của (2) ta có:

$$S=\sum_{i=0}^{n}\frac{4^i}{1+\cos 2^i}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{4^{n+1}}{\sin^2(2^n)}-\frac{1}{\sin^2(1/2)}\right]$$

hay dạng khác là

$$S=-\frac{1}{2}(4^{n+1}-1)+2.\,4^n\operatorname{cotg}^2(2^n)$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2(1/2).$$

Nhận xét. Danh sách các bạn giải tương đối tốt bài này là: *Nguyễn Đình Kim* (12 A1, Phú Nhuận, Hồ Chí Minh) *Nguyễn Phú Quý* (10CT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng), *Vũ Quý Dương* (Ao 12, ĐHTH, Hà Nội), *Trần Duy Hinh* (11C, Trưng vương, Quy Nhơn).

T.V.T.

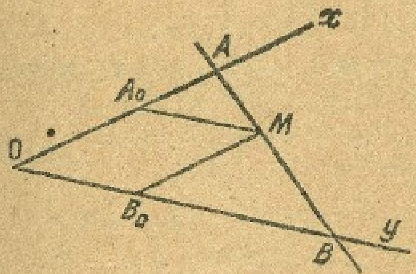
Bài 9/134. *Cho góc xOy cố định. A chạy trên Ox, B chạy trên Oy sao cho*

$$\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}=k,$$

trong đó a, b là các độ dài cho trước, k là một số cho trước. Tìm vị trí của A và B để tam giác AOB có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải (của *Đặng Vũ Sơn* – lớp 10 CT, Đại học Tổng hợp Hà Nội). Trước tiên ta chứng minh cát tuyến AB thỏa mãn

$$\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}=k,$$

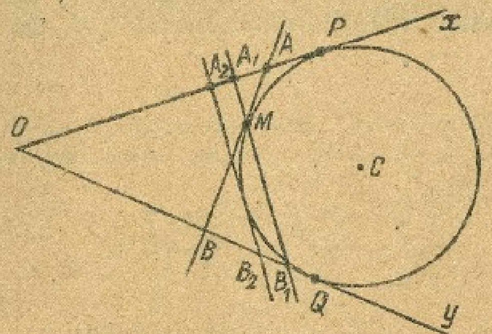


sẽ luôn đi qua một điểm cố định M. Thật vậy, đặt $a/k=a_0$, $b/k=b_0$ ta có: $a_0/OA+b_0/OB=1$ (1). Lấy trên Ox điểm A_0 sao cho $OA_0=a_0$. Qua A_0 kẻ đường song song với Oy, đường này cắt AB tại M. Qua M kẻ đường song song với Ox, cắt Oy tại B_0.

Ta có:

$OA_0/OA=BM/BA$ và $OB_0/OB=AM/AB \Rightarrow OA_0/OA+OB_0/OB=1$. Nhưng đã có $OA_0=a_0$ và (1) $\rightarrow OB_0=b_0$ tức M là điểm cố định trên AB.

Bài toán trở thành xác định cát tuyến AB qua M cố định sao cho chu vi $\triangle OAB$ nhỏ nhất.



Qua M vẽ đường tròn (c) tâm C tiếp xúc với Ox tại P và Oy tại Q. Kẻ A_1B_1 bất kỳ, qua M' và là cát tuyến của vòng tròn (c). $A_2B_2 // A_1B_1$ và tiếp xúc với (C). Ta thấy ngay chu vi của ΔOA_2B_2 nhỏ hơn chu vi ΔOA_1B_1 và bằng $OP+OQ$ hay $2OP$. Mặt khác AB qua M tiếp xúc với (c) nên $\Delta\ OAB$ có chu vi bằng chu vi của $\Delta\ OA_2B_2$ bằng $2OP$. vậy A, B chính là hai điểm cần tìm.

Để xác định A và B ta làm như sau: Xác định điểm M cố định bằng cặp điểm A_oB_o. Vẽ vòng tròn (c') tâm C' tiếp xúc với Ox, Oy. Sao cho đoạn OM nằm ngoài (c'), OM kéo dài cắt (c') tại M'. Qua M kẻ đường song song với $M'C'$, cắt OC' tại C. Dễ dàng chứng minh vòng tròn tâm C bán kính CM tiếp xúc với Ox và Oy.

Qua M vẽ tiếp tuyến của vòng tròn tâm C này. Giao điểm của tiếp tuyến với Ox và Oy cho ta các điểm A, B cần tìm

N. Đ. T

Bài 10/134. *Chứng minh rằng nếu một tứ giác ngoại tiếp có cạnh a, b, c, d và diện tích $S=\sqrt{abcd}$ thì tứ giác đó là tứ giác nội tiếp.*

Lời giải. Ta có $BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A = c^2 + d^2 - 2cd\cos C$. Từ đó có:

$$a^2 + b^2 - 2ab\,(1 - 2\sin^2 A/2) =$$
$$c^2 + d^2 - 2cd\,(1 - 2\sin^2 C/2)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + 4ab\sin^2 A/2$$
$$=(c-d)^2 - 4cd\sin^2 C/2$$
$$\Leftrightarrow (a-b+c-d)\,(a-b-c+d)$$
$$= -4\,ab\sin^2 A/2 - 4\,cd\sin^2 C/2.$$

Vì tứ giác là ngoại tiếp nên có $a+c=b+d$. Từ đó ta có:

$$\sqrt{cd}\sin C/2 = \sqrt{ab}\sin A/2 \qquad (1)$$

Mặt khác có $\sqrt{abcd} = S_{ABCD} = S_{ABD}$
$+ S_{BDC} = 1/2\ ab\sin A + 1/2\ cd\sin C$

Chia hai vế đẳng thức này cho ab ta có:

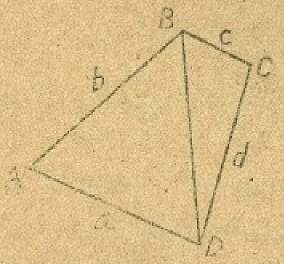
$$2\sqrt{cd}/\sqrt{ab} = \sin A + (cd/ab)\sin C.$$

Sử dụng (1) ta đi đến:

$$2(\sin A/2)/(\sin C/2) = \sin A + [(\sin^2 A/2)/\sin^2 C/2)] \times \sin C$$

$$\Leftrightarrow 2/(\sin C/2) = 2\cos A/2 + 2\sin A/2\,(\cos C/2)/(\sin C/2)$$

$$\Leftrightarrow 1 = (\sin C/2)\,(\cos A/2) + (\sin A/2)(\cos C/2) = \sin[(A+C)/2].$$



Vì A, B, C, D là các góc của một tứ giác nên ta có:

$$(A+C)/2 = \pi/2 \text{ hay } A+C=\pi.$$

Vậy tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Nhận xét: Các bạn *Huỳnh Đức Thắng* (11C, Trưng Vương, Quy Nhơn), *Chế Quang Quyền* (11A, Long Thành, Đồng Nai), *Lê Đức Tuấn* (11C; Trưng Vương, Quy Nhơn), *Huỳnh Văn Thành* (10 CT, Nguyễn văn Trỗi, Phú Khánh) có lời giải tương đối tốt.

T. V. T.

Bài 1/137. Ký hiệu $S(n)$ là ước số lẻ lớn nhất của số tự nhiên n. Chứng minh rằng với mọi n ta có

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{S(k)}{k} - \frac{2k}{3}\right| < 1.$$

Đỗ Bá Khang

Bài 2/137. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2+xy-y^2=n$ có ít nhất một nghiệm nguyên thì có vô số nghiệm nguyên.

Trần Xuân Đáng

Bài 3/137. Cho dãy Phibônaxi xác định như sau:

$u_1=1$, $u_2=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ với $n \geqslant 3$.

Chứng minh rằng nếu n là bội số của k thì u_n là bội số của u_k.

Trần Quang Minh

Bài 4/137. Cho x_1, x_2, x_3 là các nghiệm thực của phương trình

$$x^3 + ax^2 + x + b = 0,\ b \neq 0.$$

Chứng minh rằng

$$(x_1 - 1/x_1)(x_2 - 1/x_2) + (x_2 - 1/x_2)(x_3 - 1/x_3) + (x_3 - 1/x_3)(x_1 - 1/x_1) = 4.$$

Nguyễn Văn Mậu

Bài 5/137. Ba góc x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 2\pi \\ \cos x + \cos y + \cos z = 0 \\ \sin x + \sin y + \sin z = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng x, y, z lập thành một cấp số cộng, với công sai $2\pi/3$.

Phan Đức Chính

Bài 6/137. Các số dương A và B phải thỏa mãn điều kiện gì, để tồn tại 5 số dương u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành một cấp số nhân, với

$$u_0 + u_1 = A,\ u_1 + u_3 = B?$$

Phan Đức Chính

Bài 7/137.

Đặt $$H(u, m, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1^k)\, u_k^m\, C_n^k$$

trong đó n nguyên $\geqslant 0$, u là cấp số cộng gồm $n+1$ số hạng $u_0, u_1, \ldots, u_n$, số hạng đầu u_0 và công sai khác không, C_n^k là tổ hợp chập k của n.

1) Chứng minh giá trị của $H(u, m, n)$ không phụ thuộc vào cấp số cộng u khi $m < n$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của m để $H(u, m, n)$ phụ thuộc vào u_0.

Tạ Văn Tự

Bài 8/137. Cho đường thẳng (d) nằm ngoài đường tròn tâm O. Gọi S là chân đường vuông góc hạ từ O xuống (d). Kẻ cát tuyến SBC và tiếp tuyến SA. Gọi M, N là giao của AB và AC với (d). Chứng minh $SM = SN$.

Tạ Hồng Quảng

Bài 9/137. Cho tứ diện $ABCD$. Qua trọng tâm G của tứ diện ta dựng một mặt phẳng (P) tùy ý. Gọi AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 là khoảng cách từ A, B, C, D đến (P). Chứng minh rằng một trong bốn đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 bằng tổng của ba đoạn thẳng còn lại.

Lê Quốc Hán

Bài 10/137 Cho một đường gấp khúc $A_1A_2 \ldots A_n$ khép kín, không đồng phẳng; các điểm A_i đều thuộc mặt cầu tâm O, bán kính R cho trước. Xét biểu thức

$$d = \sum_{i=1}^{n} A_iB_i^2,$$

trong đó B_i là hình chiếu vuông góc của một điểm B trong không gian xuống A_iA_{i+1} tương ứng $(A_{n+1} \equiv A_1)$. Tìm vị trí của B để d nhỏ nhất.

Phạm Đăng Long

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

TẠ VĂN TỰ

Từ trước chúng ta đã làm quen với các bài toán cực trị ít biến hoặc ít điều kiện. Trong bài này sẽ trình bày một phương pháp giải dễ hiểu đối với một số bài toán cực trị nhiều biến và nhiều điều kiện.

Để làm rõ nội dung và cách vận dụng phương pháp này, ta trình bày thông qua các ví dụ tiêu biểu dưới đây:

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $y = x_1 - x_2$ trên miền G:

$$G = \begin{cases} (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2 \geqslant 25 \\ x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \leqslant 25 \\ -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Lời giải: Đồ thị biểu diễn miền G là miền gạch chéo trên hình 1. Đồ thị của hàm $x_2 = x_1 - y$, y là hằng số nào đó, là tịnh tiến đồ thị △ của hàm $x_2 = x_1$ một lượng $(-y)$ theo trục x_2. Giả sử giá trị lớn nhất y_{max} (tương tự y_{min}) đạt được tại điểm (x_1^*, x_2^*) của miền G. Điều đó có nghĩa là hệ

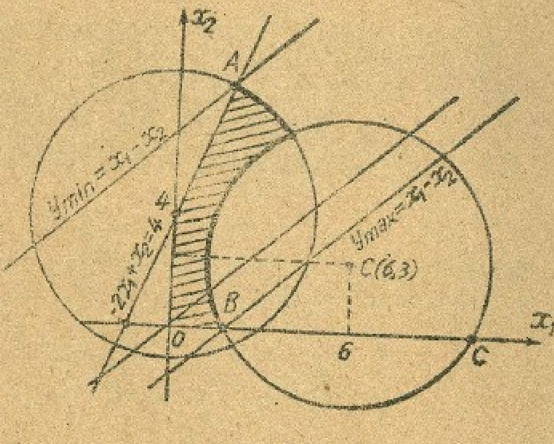
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_{max} \\ (x_1-6)^2 + (x_2-3)^2 \geq 25 \\ x_1^2 + (x_2-4)^2 \leq 25 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

có ít nhất 1 nghiệm là (x_1^*, x_2^*), hay đồ thị hàm $x_2 = x_1 - y_{max}$ có điểm chung với đồ thị biểu diễn miền G. Như vậy để tìm y_{max} hoặc y_{min} trên G, ta xác định vị trí thích hợp của đồ thị là tịnh tiến của △ và có điểm chung với đồ thị biểu diễn miền G mà từ đó ta nhận được giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất cần tìm. Do: $(-y_{max}) \leq -y \leq (-y_{min})$ với $y = x_1 - x_2$, $(x_1, x_2) \in G$, nên y_{min} tương ứng với vị trí đồ thị cao nhất và y_{max} tương ứng với vị trí đồ thị thấp nhất trong các đồ thị là tịnh tiến của △ mà có điểm chung với đồ thị của miền G. Vị trí đồ thị cao nhất là đi qua điểm A và vị trí đồ thị thấp nhất là đi qua điểm B. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1^2 + (x_2-4)^2 = 25 \end{cases}$$

với chú ý tọa độ của điểm A đều dương ta có tọa độ của A là $(\sqrt{5}, 4+2\sqrt{5})$.

Vậy $y_{min} = \sqrt{5} - (4+2\sqrt{5}) = -4 - \sqrt{5}$



Hình 1

Đường tròn $(x_1-6)^2 + (x_2-3)^2 = 25$ cắt trục hoành tại các điểm B và C với các tọa độ tương ứng là $(2, 0)$ và $(10, 0)$. Vậy $y_{max} = 2 - 0 = 2$.

Nhận xét:

Muốn làm tốt phương pháp này cần vẽ đồ thị nhanh, chính xác và phải biết cách lập luận trên đồ thị. Các hàm số thường gặp là:

1) $y = ax+b$ — có đồ thị là đường thẳng.

2) $y = (x_1-a)^2 + (x_2-b)^2$, $y \geq 0$ — có đồ thị là đường tròn tâm (a, b) bán kính $\sqrt{y}$.

3) $y = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$ - có đồ thị là Parabol.

4) $xy = b$, $b \neq 0$ - có đồ thị là đường Hypecbol.

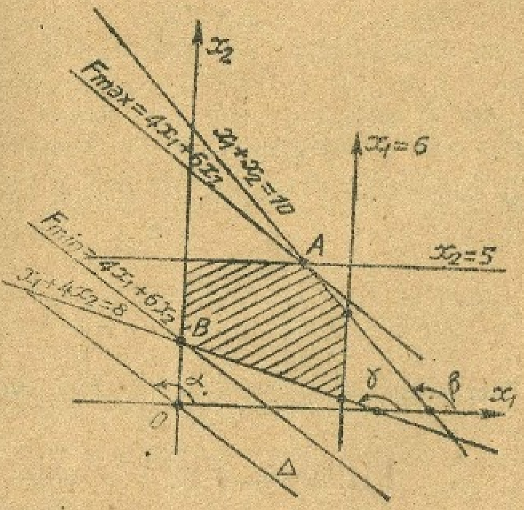
Các tính chất thường dùng là:

1 — Đồ thị hàm số $y = f(x+a)$ là tịnh tiến đồ thị của hàm $y = f(x)$ theo trục x một lượng $(-a)$.

2 — Đồ thị hàm số $y = f(x)+b$ là tịnh tiến đồ thị hàm $y = f(x)$ theo trục y một lượng là b.

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $F = 4x_1 + 6x_2$ với các điều kiện:

$$G = \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 0 \leq x_1 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$$



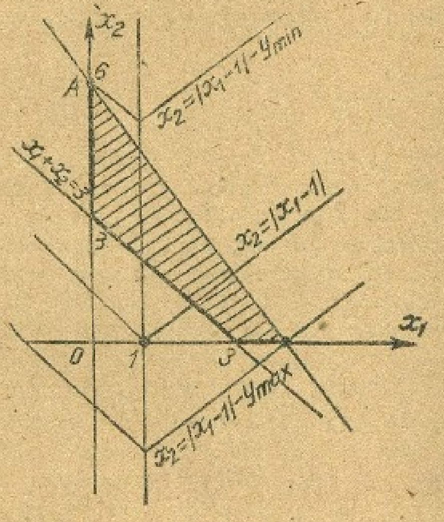
Hình 2

Lời giải: Đồ thị miền G được biểu diễn bằng miền gạch chéo trên hình 2. Hàm $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{F}{6}$ với F là hằng số, có đồ thị là tịnh tiến đồ thị △ của hàm $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$ theo trục x_2 một lượng $F/6$. Do $F_{min} \leq F \leq F_{max}$ với $F = 4x_1 + 6x_2$, $(x_1, x_2) \in G$, nên F_{max} tương ứng với vị trí cao nhất, còn F_{min} tương ứng với vị trí đồ thị thấp nhất trong các đồ thị là tịnh tiến của △ mà có điểm chung với miền gạch chéo.

Hệ số góc của các đường thẳng $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$, $x_2 = -x_1 + 10$, $x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + 2$ lần lượt là $\operatorname{tg}\alpha = -2/3$, $\operatorname{tg}\beta = -1$, $\operatorname{tg}\gamma = -1/4$. Vậy các góc α, β, γ đều tù và $\beta < \alpha < \gamma$ do hàm $y = \operatorname{tg}(x)$ tăng trong khoảng $(\pi/2, \pi)$. Từ đó vị trí đồ thị cao nhất là đi qua điểm A, vị trí đồ thị thấp nhất là đi qua điểm B. Dễ có tọa độ của điểm A là $(5, 5)$, tọa độ của điểm B là $(0, 2)$, nên: $F_{max} = 4.5 + 6.5 = 50$ và $F_{min} = 4.0 + 6.2 = 12$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $y = |x_1 - 1| - x_2$ trên miền G:

$$G = \begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$



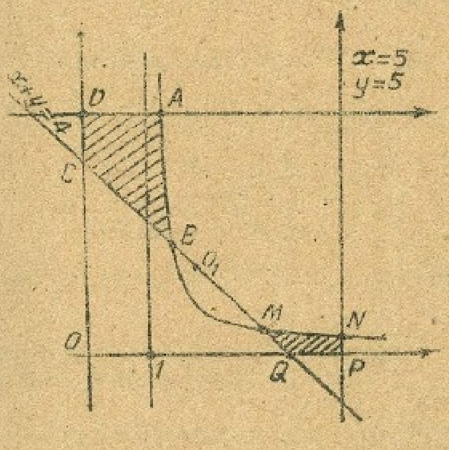
Hình 3

Lời giải: Đồ thị miền G là miền gạch chéo trên hình 3. Ứng với mỗi y, đồ thị hàm số $x_2 = |x_1 - 1| - y$ là tịnh tiến đồ thị △ của hàm $x_2 = |x_1 - 1|$ theo trục x_2 đi một lượng $(-y)$. Do $(-y_{max}) \leqslant -y \leqslant (-y_{min})$ với $y = |x_1 - 1| - x_2$, $(x_1, x_2) \in G$, nên y_{min} tương ứng với vị trí đồ thị cao nhất, y_{max} tương ứng với vị trí đồ thị thấp nhất so với trục x_2 trong các đồ thị là tịnh tiến của △ mà có điểm chung với miền gạch chéo. Vị trí đồ thị cao nhất là đi qua điểm A, vị trí đồ thị thấp nhất là đi qua điểm B. Tọa độ của các điểm A và B dễ dàng tìm được là $(0, 6)$ và $(4, 0)$. Do vậy $y_{min} = |0 - 1| - 6 = -5$, $y_{max} = |4 - 1| - 0 = 3$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $Z = x^2 + y^2$ với hệ điều kiện:

$$G = \begin{cases} (x-1)y \leqslant 1 \\ x + y \geqslant 4 \\ 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 \leqslant y \leqslant 5. \end{cases}$$

Lời giải: Đồ thị miền G là miền gạch chéo trên hình 4. Ứng với mỗi $Z \geqslant 0$, đồ thị $x^2 + y^2 = Z$ là đường tròn tâm $(0, 0)$ bán kính $\sqrt{Z}$. Để tìm Z_{max}, ta xác định đường tròn tâm $O\ (0, 0)$ bán kính lớn nhất và có điểm chung với miền gạch chéo. Dễ dàng thấy đường tròn như thế là đi qua điểm A hoặc N.



Hình 4

Giải hệ $\begin{cases} y = 5 \\ (x-1)y = 1 \end{cases}$ ta có tọa độ của điểm A là $(6/5, 5)$. Tương tự tọa độ của N là $(5, 1/4)$.

Có $Z_A = (6/5)^2 + 5^2 = 26{,}44$ và $Z_N = 5^2 + (1/4)^2 = 25\frac{1}{16}$. Vậy đường tròn cần tìm là đi qua điểm A và có: $Z_{max} = Z_A = 26{,}44$.

Để tìm Z_{min} ta xác định đường tròn tâm $(0, 0)$ có điểm chung với miền gạch chéo và có bán kính bé nhất. Để xác định tọa độ của các điểm B và M ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x-1)y = 1. \end{cases}$$

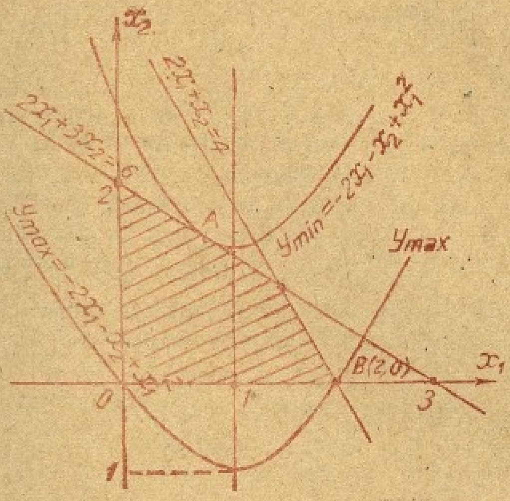
Với chú ý hoành độ của B bé hơn hoành độ của điểm M ta có $B\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $M\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Gọi O_1 là điểm giữa của đoạn CQ, tọa độ của C và Q là $(0, 4)$ và $(4, 0)$ nên O_1 có tọa độ là $(2, 2)$. Do $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 2$, nên điểm C và B nằm cùng phía đối với điểm O_1. Lại do $\triangle OCQ$ cân, nên $OO_1 \perp CQ$, và theo định lý về hình chiếu và đường xiên, ta có trong miền $ABCD$ điểm B gần gốc tọa độ nhất. Lý luận tương tự, ta có trong miền $QMNP$ thì điểm M gần gốc tọa độ nhất. Nhưng có $Z_B = 11 - \sqrt{5}$, $Z_M = 11 + \sqrt{5}$, nên đường tròn cần xác định là đi qua điểm B và có $Z_{min} = Z_B = 11 - \sqrt{5}$.

Ví dụ 5 : Tìm giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm số $y = -2x_1 - x_2 + x_1^2$ với hệ điều kiện:

$$G = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

(Bài 8 trong mục « Đề ra kỳ này » — Báo THvTT số 101).

Lời giải : Đồ thị của G là miền gạch chéo trên hình 5. Với mỗi hằng số y, đồ thị hàm số $x_2 = x_1^2 - 2x_1 - y$ là tịnh tiến đồ thị parabol $\triangle$ của hàm $x_2 = x_1^2 - 2x_1$ theo trục x_2 một lượng $(-y)$. Để tìm y_{min} ta xác định vị trí đồ thị cao nhất trong các đồ thị là tịnh tiến của $\triangle$ mà có điểm chung với đồ thị của miền G. Đồ thị cần tìm tiếp xúc với đường thẳng $2x_1 + 3x_2 = 6$ tại điểm A. Để tìm giá trị hoành độ của A ta giải phương trình có nghiệm kép :



Hình 5

$$-\frac{2}{3}x_1 + 2 = x_1^2 - 2x_1 - y_{min}.$$

Ta có $x_1 = 2/3$ và đồng thời có $y_{min} = -22/9$. Do A thuộc đường thẳng $2x_1 + 3x_2 = 6$, nên ta có tung độ của A là $x_2 = 14/9$. Để tìm y_{max} ta xác định vị trí đồ thị thấp nhất trong các đồ thị là tịnh tiến của $\triangle$ và có điểm chung với miền gạch chéo. Dễ thấy vị trí đồ thị cần tìm là đi qua điểm $O\,(0, 0)$ hoặc $B\,(2, 0)$ và có $y_{max} = 0$.

DANH SÁCH CÁC BẠN THI GIẢI TOÁN

(Tiếp theo)

Nguyễn Hữu Tuấn (8A Trưng Nhị, Hà Nội); Trần Quang Kim (11I Chu Văn An, Hà Nội). Nguyễn Hữu Hạnh (11 P6 Hùng Vương, Hồ Chí Minh); Cù Minh Ngân (12A Hùng Vương, Hồ Chí Minh). Nguyễn Duy Hưng (Ngô Quyền, Hải Phòng). Trần Đức Tuấn (11 chuyên toán, Quốc học Huế). Nguyễn Lê Tuấn (10 chuyên toán, Phan Chu Trinh, Đà Nẵng), Ngô Tấn Vui (10/2 Trần Phú, Đà Nẵng). Phan Bá Trình, Lê Việt Tín (8 Cao đẳng Sư phạm Nghĩa Bình); Nguyễn An Tân (10C), Lê Thiện Thanh 40/C, Nguyễn Hoàng Kim (10B), Lê Xuân Thanh (11 F), (Trưng Vương, Qui Nhơn); Trịnh Đào Chiến, Nguyễn Anh Tuấn (11G), (An Nhơn I, Nghĩa Bình): Phan Đức Bảo (11E An Nhơn II, Nghĩa Bình): Lê Duy Cần (Hoài Nhơn I, Nghĩa Bình) Trần Lục Lang (11 Tuy Phước II). Phạm Hoài Trung (9A Thái Nguyên, Phú Khánh): Huỳnh Kim Linh (Lê Lợi, Đồng Xuân, Phú Khánh). Cao Văn An (10A), Nguyễn Trọng Bảo (10D), (An Khê, Gia Lai — KonTum). Lê Ngọc Thắng (9 Phú Phong, Châu Thành- Tiền Giang). Nguyễn Thanh Quang (Sóc Trăng, Hậu Giang). Đặng Vũ Giang (Khoa Lưu học sinh, ĐH ngoại ngữ Hà Nội). Văn Thanh (Đình Lập, Lạng Sơn).

In 11550 cuốn tại xí nghiệp in 75 Hàng Bồ — Hànội Số in 141/84.
In xong và gửi lưu chiểu tháng 10/1984 Chỉ số 11884 Giá : 1đ00