VIỆN KHOA HỌC VIỆT NAM
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Số 136
2
1984

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn
Phó Tổng biên tập: Ngô Đạt Tứ

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội
Dây nói: 52825

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

TIẾP TỤC CÂU CHUYỆN HÌNH HỌC GIẢ Ơ-CLÍT

NGUYỄN CẢNH TOÀN

TRONG báo Toán học và tuổi trẻ tôi đã có dịp sơ bộ giới thiệu với bạn đọc hình học giả Ơ-clít dưới dạng hình học các vòng tròn định hướng có tâm trên một đường thẳng D cho trước. Mỗi vòng tròn định hướng được coi là một « điểm » có hoành độ bằng hoành độ tâm ở trên D (sau khi đã biến D thành một trục tọa độ), có tung độ bằng bán kính đại số của vòng tròn (bán kính là dương nếu vòng tìm được định hướng ngược chiều kim đồng hồ và là âm trong trường hợp ngược lại). Khoảng cách d giữa hai « điểm » có tọa độ (a_1, b_1) và (a_2, b_2) được diễn tả bởi công thức:

$$d^2 = (a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2; \qquad (1)$$

trong trường hợp hai vòng tròn (« điểm ») có tiếp tuyến chung thì d chính là chiều dài của tiếp tuyến chung trong hay tiếp tuyến chung ngoài tùy theo hai vòng tròn ngược hướng hay cùng hướng. Ta cũng đã thấy rằng nếu « điểm » là « vòng tròn định hướng có tâm trên D » thì « đường thẳng » là một tập hợp tất cả các vòng tròn định hướng vị tự với một vòng tròn định hướng (có tâm trên D) đã cho trong tất cả các phép vị tự có cùng một tâm vị tự cho trước (tâm này cũng nằm trên D) với quy ước rằng hai vòng tròn vị tự nghịch với nhau thì khác hướng.

Cuối bài báo đó tôi có đề nghị bạn đọc hãy thử làm một vài nghiên cứu nho nhỏ. Sau đây tôi không đả động gì đến các đề tài nghiên cứu đó mà đề cập đến một đề tài nghiên cứu nho nhỏ khác để gợi ý bạn đọc cách tự mình tìm « đề tài » và nghiên cứu « đề tài ».

Đề tài nghiên cứu: Hãy thử nghiên cứu xem ba vòng tròn định hướng A, B, C như thế nào thì tạo nên một tam giác ABC vuông góc ở A?

Nghiên cứu.

Vượt khó khăn về góc: Trong bài trước, ta chưa nghiên cứu xem độ lớn góc ở đây tính như thế nào. Cho nên trước hết có lẽ phải nghiên cứu về góc đã. Nhưng ở đây chưa dụng đến « góc nói chung » mà chỉ mới dụng đến góc vuông. Nên ta có thể tạm thời tránh vấn đề « góc » có thể là gai góc bằng cách xoay chuyển vấn đề như sau: Căn cứ vào (1), ta có thể nghĩ rằng trong hình học này, đặc trưng cho tam giác vuông là tính chất: bình phương cạnh huyền bằng hiệu bình phương hai cạnh góc vuông, hay nói một cách khác: bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông, trong đó một cạnh có bình phương âm: như vậy ta thấy thoát được « góc » và vấn đề trở thành: nghiên cứu đặc trưng của ba vòng tròn định hướng A, B, C (trong đó hoặc A, và B hoặc A và C không có tiếp tuyến chung thích hợp với hướng trên các vòng tròn), sao cho

$$d^2_{BC} = d^2_{AB} + d^2_{AC}$$

(trong đó hoặc d^2_{AB} hoặc d^2_{AC} âm)

Giả sử (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) là tọa độ của ba « điểm » A, B, C. Theo (1), ta có:

$$d^2_{BC} = (c_1 - b_1)^2 - (c_2 - b_2)^2$$

$$d^2_{AB} = (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2$$

$$d^2_{AC} = (c_1 - a_1)^2 - (c_2 - a_2)^2$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ phải quan hệ với nhau sao cho

$$(c_1 - b_1)^2 - (c_2 - b_2)^2 = [(b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2] + [(c_1 - a_1)^2 - (c_2 - a_2)]^2 \qquad (2)$$

hay:

$$c_1^2 + b_1^2 - 2b_1c_1 - c_2^2 - b_2^2 + 2b_2c_2$$

$$- b_1^2 - a_1^2 + 2a_1b_1 + b_2^2 + a_2^2 - 2a_2b_2$$

$$- c_1^2 - a_1^2 + 2a_1c_1 + c_2^2 + a_2^2 - 2a_2c_2 = 0$$

hay:

$$-2(a_1^2 - a_2^2 + b_1c_1 - b_2c_2 - a_1b_1 + a_2b_2 - a_1c_1 + a_2c_2) = 0$$

hay:

$$(a_1^2 - a_1c_1 - a_1b_1 + b_1c_1) - (a_2^2 - a_2c_2 - a_2b_2 - b_2c_2) = 0$$

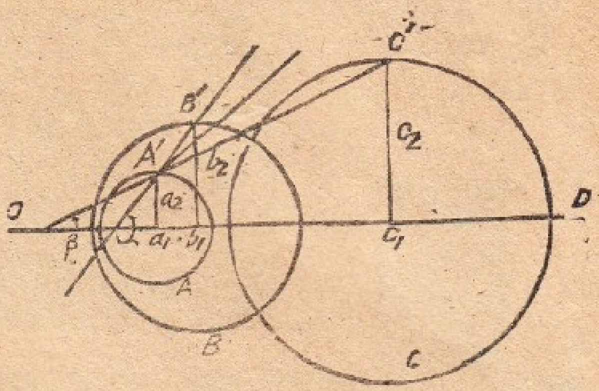
hay:

$$(a_1 - c_1)(a_1 - b_1) = (a_2 - c_2)(a_2 - b_2)$$

hay:

$$\frac{a_2 - c_2}{a_1 - c_1} = \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} \qquad (3)$$

Nếu ta có (3), đi ngược trở lên ta sẽ có (2). Vậy (3) là đặc trưng cho tam giác ABC vuông góc ở A.



Hình 1

Trên hình 1, ta có:

$$\frac{a_2 - c_2}{a_1 - c_1} = \operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} = \operatorname{ctg}\alpha$$

Vậy đặc trưng về mặt hình học là hai góc α, β phụ nhau:

$$\alpha + \beta = \pi/2.$$

Như vậy, nếu ta biểu diễn ba vòng tròn A, B, C theo thứ tự bởi các điểm A', B', C', theo thứ tự có tọa độ Đềcac thông thường là (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) như ở hình 1, thì hai đường thẳng $A'B'$ và $A'C'$ tạo nên một góc có một phân giác song song với phân giác thứ nhất.

Kết quả trên đây làm nảy sinh ra ý mới: Ta biểu diễn mỗi vòng tròn định hướng có tâm trên D có tọa độ (x, y) bằng điểm có tọa độ (x, y) trong một hệ tọa độ Đềcac vuông góc mà D là trục x: như vậy mỗi vòng tròn định hướng được biểu diễn bởi điểm cao nhất hay thấp nhất (giả thiết D nằm ngang) của nó tùy theo hướng của nó là ngược hay thuận chiều kim đồng hồ. Lúc đó thì mỗi « đường thẳng » (một tập hợp vòng tròn định hướng) sẽ được biểu diễn bởi một đường thẳng thông thường vì các điểm biểu diễn các vòng tròn đều vị tự với nhau trong những phép vị tự cùng tâm. Hai « đường thẳng » vuông góc sẽ được biểu diễn bởi hai đường thẳng thông thường tạo nên một góc có một phân giác song song với phân giác thứ nhất. Như vậy các đường thẳng thông thường song song với phân giác thứ nhất hay phân giác thứ hai sẽ biểu diễn những « đường thẳng » vuông góc với bản thân mình. Các đường thẳng vuông góc với bản thân mình gọi là các đường thẳng đẳng hướng. Khoảng cách giữa bất cứ hai điểm nào trên một đường thẳng đẳng hướng cũng bằng không.

VỀ VIỆC SO SÁNH MỘT SỐ VỚI NGHIỆM CỦA TAM THỨC BẬC HAI

PHAN ĐỨC CHÍNH

Ở lớp 8 (hệ 10 năm), sau khi học các hệ thức Vi-ét, có đưa ra áp dụng: xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai. Tuyệt đại đa số học sinh đều biết vận dụng các kiến thức ấy trong bài tập.

Ở lớp 10 (hệ 10 năm), có đề mục «Định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai». Trong chương trình nâng cao để ôn thi vào đại học và cao đẳng, có yêu cầu: «So sánh một số với các nghiệm của tam thức bậc hai».

Vì lẽ đó, những năm gần đây, ở nhiều trường, học sinh được học và làm bài tập về so sánh... Xét về mặt lý thuyết, từ «định lý đảo» sang việc «so sánh», chỉ là bước nhỏ, một học sinh giỏi hoàn toàn có khả năng tự suy ra các thủ tục phải làm trong việc so sánh, một khi đã nắm vững định lý đảo. Nhưng vấn đề là ở chỗ bài tập.

Người ta đưa ra nhiều loại, nhiều kiểu bài toán, tựu trung thuộc các nội dung đại loại như sau: «Tìm điều kiện đối với tham số để một phương trình bậc hai đã cho:

— có cả hai nghiệm lớn hơn α;

— có ít nhất một nghiệm lớn hơn α;

— có cả hai nghiệm lớn hơn α và nhỏ hơn β;

— có ít nhất một nghiệm lớn hơn α và nhỏ hơn β; ...» và đã đúc kết thuật toán để xử lý mỗi loại bài toán trên. Song các thuật toán ấy đòi hỏi giải hệ gồm nhiều bất phương trình, thường phải lập bảng, và vấn đề rất rắc rối nếu là bài toán so sánh hai số với các nghiệm. Tôi thấy rằng thật ra chỉ dùng các hệ thức Vi-ét là đủ, hoặc dùng phương pháp đồ thị. Nói cho vui, tôi có cảm tưởng ở đây có tình trạng «mang dao mổ trâu để giết gà»!

Thật vậy, bằng cách chuyển dịch ẩn số, bài toán so sánh các nghiệm với số α đưa về bài toán so sánh các nghiệm với số 0, tức là xét dấu các nghiệm. Vấn đề là ở chỗ: hoặc so sánh trực tiếp với số α, hoặc làm phép chuyển dịch ẩn số,..., cần cân nhắc cách nào đơn giản hơn. Điều này phụ thuộc vào bài toán đang xét.

Trong 3 ví dụ dưới đây, hai ví dụ đầu tôi bắt gặp trên báo Toán học và tuổi trẻ này. Ở đây tôi muốn trao đổi với bạn đọc: Không nên đưa ra cách giải quá cặn kỹ, không nên quá lạm dụng thuật toán so sánh.

Ví dụ 1. Xác định y để phương trình

$$(y+1)X^2-2(y+2)X+2y=0$$

có ít nhất một nghiệm $X \geqslant 1$.

Giải. Đặt $X=1+x$, phương trình trên trở thành

$$(y+1)x^2-2x+(y-3)=0, \qquad (1)$$

vậy ta cần xác định y để (1) có ít nhất một nghiệm $x \geqslant 0$.

Nếu $y=-1$, thì (1) trở thành $-2x-4=0$, có nghiệm $x=-2$, vậy giá trị $y=-1$ bị loại.

Nếu $y \neq -1$, thì (1) là một phương trình bậc hai, nó có nghiệm khi

$$\Delta'=1-(y+1)(y-3)=-y^2+2y+4 \geqslant 0$$

hay (với $y \neq -1$)

$$1-\sqrt{5} \leqslant y \leqslant 1+\sqrt{5}.$$

Khi đó xét $S=\dfrac{2}{y+1}$.

a) Nếu $S>0$, tức là nếu $y>-1$, thì phương trình có ít nhất một nghiệm dương (vì nếu cả hai nghiệm $\leqslant 0$ thì $S \leqslant 0$);

b) Nếu $S<0$, tức là nếu $y<-1$, thì

$$P=\frac{y-3}{y+1}>0,$$

Vậy cả hai nghiệm đều âm, không thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Thành thử đáp số là: $-1<y \leqslant 1+\sqrt{5}$.

Ví dụ 2. Tìm S để phương trình

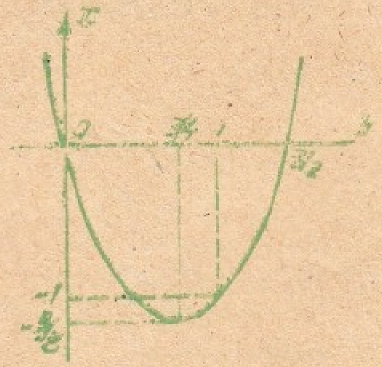
$$2x^2-3x+\frac{3}{S+2}=0$$

có cả hai nghiệm x_1, x_2 với $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i=1,2)$.

Giải. Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$2x^2-3x=-\frac{3}{S+2},$$

ta thấy bài toán quy về việc tìm S để đường thẳng $y=-3/(S+2)$ cắt parabôn $y=2x^2-3x$ tại hai điểm với hoành độ $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant$



Hình 2

Đồ thị trên hình vẽ cho thấy rằng

$$-\frac{9}{8} \leqslant -\frac{3}{S+2} \leqslant -1$$

tức là $2/3 \leqslant S \leqslant 1$.

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình

$$mx^2 + 3x - m + 1 = 0$$

có ít nhất một nghiệm x với $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Giải. Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$-\frac{3x+1}{x^2-1} = m$$

thì bài toán có dạng tương tự với bài toán trong ví dụ 2. Xét hàm $y = -\frac{3x+1}{x^2-1}$; nó có đạo hàm

$$y' = \frac{3x^2+2x+3}{(x^2-1)^2} > 0,$$

vậy nó có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
y	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

(thật ra chỉ cần lập bảng biến thiên với $0 \leqslant x \leqslant 1$). Từ bảng biến thiên này (xét các giá trị của y với $0 \leqslant x \leqslant 1$), ta suy ra kết quả phải tìm: $m \geqslant 1$.

GIẢI BÀI *kỳ trước*

Bài 1/133 *n đội bóng tranh giải, mỗi đội đấu một trận với mỗi đội khác. Đội thắng được 2 điểm, đội hòa được 1 điểm, đội thua được 0 điểm. Nếu hai đội có cùng tổng số điểm thì được xếp hạng trên dưới theo một tiêu chuẩn nào đó. Kết quả là: đội xếp thứ nhất được 8 điểm, đội xếp thứ hai được 6 điểm, đội xếp thứ ba được 5 điểm, các đội còn lại có số điểm khác nhau.*

Hỏi số đội đã tham gia và số điểm của mỗi đội còn lại.

Lời giải (của **Phan Đức Bảo** – 11 E An Nhơn 2, Nghĩa Bình).

Tổng số điểm của n đội bóng là $n(n-1)$. Các đội còn lại, ngoài ba đội đứng đầu, có tổng số điểm trong các trận đấu với nhau là $(n-3)(n-4)$. Ta có

$$\begin{cases} n(n-1) - 19 \geqslant (n-3)(n-4) \\ n(n-1) - 19 < 5(n-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \geqslant 6 \\ 0 < n < 3 + \sqrt{13}. \end{cases}$$

Vậy $n = 6$.

Ba đội còn lại có số điểm là $30 - 19 = 11$. Do có số điểm khác nhau nên số điểm của ba đội là 5, 4, 2.

Tóm lại có 6 đội bóng tham gia giải và số điểm của các đội lần lượt là 8, 6, 5, 5, 4, 2.

Đ.B.K.

Bài 2/133 *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x(x^2+y) + y(x-y^2) + x^2(y+1) - y^2(x-1) = 1964^2.$$

Lời giải. Dễ dàng biến đổi vế trái phương trình thành tích ba số hạng:

$$(x+y)(x+y)(x-y+1).$$

Nếu x, y nguyên thì $(x+y)$ và $(x-y+1)$ nguyên, tổng hai số đó bằng $2x+1$ là số lẻ nên hai số đó có tính chẵn lẻ khác nhau.

Như vậy, để tìm nghiệm nguyên của phương trình, ta phân tích 1964^{20} thành ba số nguyên, trong đó có hai số bằng nhau và có tính chẵn lẻ khác số thứ 3. Vì khi phân tích 1964 ra thừa số nguyên tố ta được:

$$1964 = 2.2.491$$

nên chỉ có thể phân tích 1964^{20} thỏa mãn yêu cầu trên theo các cách sau

$$(1)\ \begin{cases} x+y = 2^{20}.491^{m} \\ x-y+1 = 491^{20-2m} \end{cases}$$

$m = 0, 1, \ldots, 10$

$$(2)\ \begin{cases} x+y = -2^{20}.491^{m} \\ x-y+1 = 491^{20-2m} \end{cases}$$

$m = 0, 1, \ldots, 10$

$$(3)\ \begin{cases} x+y = 491^{m} \\ x-y+1 = 491^{20-2m}.2^{40} \end{cases}$$

$m = 0, 1, \ldots, 10$

$$(4)\ \begin{cases} x+y = -491^{m} \\ x-y+1 = 491^{20-2m}.2^{40} \end{cases}$$

$m = 0, 1, \ldots, 10$

Giải các hệ phương trình trên (là công việc quá đơn giản) ta sẽ được 44 nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

P.Q.G.

Bài 3/133. *Tìm ba chữ số tận cùng của số* $1983^{1984^{1985^{2000}}}$

Lời giải. (của *Nguyễn Tiến Dũng*, $A_0$10 ĐHTH Hà Nội). Vì 1985 là một số lẻ và chia hết cho 5 nên

$$N = 1985^{1986^{2000}} = 5(2k+1)\ (k \in N).$$

Suy ra

$$M = 1984^{N} = 1984^{5(2k+1)} \equiv (2000-16)^{5(2k+1)}$$
$$\equiv (-6)^{5(2k+1)} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{25}.$$

Vì $1984 \vdots 4$, nên $M \equiv 24 \pmod{100}$, hay

$$1984^{1985^{2000}} = 100h + 24\ (h \in N).$$

Ta có

$$1983^{1984^{1985^{2000}}} = 1983^{100h+24}$$
$$\equiv 17^{100h+24} \pmod{1000}$$

Ta thấy rằng

$$17^2 \equiv 289 \pmod{1000}$$
$$17^4 \equiv 521 \pmod{1000}$$
$$17^8 \equiv 441 \pmod{1000}$$
$$17^{16} \equiv 481 \pmod{1000}$$
$$17^{20} \equiv 601 \pmod{1000}$$

nên: $17^{100h} \equiv 1 \pmod{1000}$ (1)

$17^{24} \equiv 121 \pmod{1000}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$1983^{1984^{2000}} \equiv 121 \pmod{1000},$$

tức là ba chữ số tận cùng của số đó là 121.

N.Đ.M

Bài 4/133. *Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn các tính chất*

1) $a_i \leqslant 1983$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) *BSCNN* $(a_i, a_j) > 1983$ *với mọi* $i, j = 1, \ldots, n$ và $i \neq j$

Chứng minh rằng:

$$1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n < 3/2.$$

Lời giải. Ta thấy rằng, nếu số nguyên a thỏa mãn $1983/m \geqslant a > 1983/(m+1)$, ở đó m là số tự nhiên, thì có tất cả m bội số của a là: a, $2a$, ..., ma không vượt quá 1983. Vì vậy nếu ký hiệu k_j là số các số trong tập $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ không vượt quá $1983/j$ và lớn hơn $1983/(j+1)$ với $j = 1, 2, \ldots 1982$, thì khi đó theo trên ta có:

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + jk_j + \ldots$$

là số các số là bội của ít nhất một số thuộc tập hợp A mà không vượt quá 1983. Nhưng do điều kiện BSCNN $(a_i, a_j) > 1983$ nên các bội số này là khác nhau từng đôi một. Do vậy ta có:

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + jk_j + \ldots < 1982. \qquad (1)$$

Rõ ràng có:

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} < k_1 \frac{1}{\frac{1983}{2}} + \ldots + k_j \frac{1}{\frac{1983}{j+1}} + \ldots$$

$$= \frac{2k_1 + 3k_2 + \ldots}{1983}$$

$$= \frac{(k_1 + 2k_2 + \ldots + jk_j + \ldots) + (k_1 + k_2 + \ldots)}{1983}$$

và chú ý $k_1 + k_2 + \ldots + k_j + \ldots = n$ và theo (1) ta có:

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{1983 + n}{1983} = 1 + n/1983 \qquad (2)$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $n \leqslant 992$. Thực vậy giả sử có p số thuộc $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ và $\{1, 2, \ldots, 991\}$. Khi đó sẽ có p bội số của các số này thuộc $\{992, \ldots, 1983\}$ mà không thuộc tập hợp A do tính chất BSCNN $(a_i, a_j) > 1983$.

Vậy số phần tử n của A phải thỏa mãn: $n \leqslant p + (992 - p) = 992$ (chú ý tập hợp $\{992, \ldots, 1983\}$ có 992 phần tử). Vậy theo (2) ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Các bạn — *Nguyễn Ngọc Văn Khoa* (10 CT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), *Nguyễn Tiến Dũng* ($A_0$10 ĐHTH, Hà Nội) có lời giải tốt, hơn cả.

T. V. T.

Bài 5/133. *Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leqslant 1$ khi $|x| \leqslant 1$. Chứng minh rằng với mọi $M > 1$*

$$|f(x)| \leqslant 2M^2 - 1 \text{ khi } |x| \leqslant M.$$

Lời giải. Cách 1 (của *Nguyễn Phú Quy* — 10 CT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng, và của nhiều bạn)

Ta có:

$$|c| = |f(0)| \leqslant 1, \; |a + b + c| = f(1) \leqslant 1,$$
$$|a - b + c| = f(-1) \leqslant 2,$$

nên

$$|2a| = |2a + b - b + c + c - 2c| \leqslant$$
$$|a - b + c| + |a + b + c| + |2c| \leqslant 4.$$

Vậy $|a| \leqslant 2$.

1) Nếu $1 \leqslant x \leqslant M$ thì $|f(x)| = |ax^2 + bx + c| =$
$= |(a + b + c)x + ax(x - 1) + c(1 - x)|$
$\leqslant |a + b + c|\,|x| + |a|\,|x(x - 1)| + |c|\,|1 - x|$
$\leqslant M.1 + 2.M(M - 1) + 1.(M - 1) = 2M^2 - 1.$

2) Nếu $-1 \leqslant x \leqslant 1$ thì $|f(x)| \leqslant 1 \leqslant 2M^2 - 1$

3) Nếu $-M \leqslant x \leqslant -1$ thì $|f(x)| =$
$|(-a + b - c)x + ax(x + 1) + c(x + 1)|$
$\leqslant |a - b + c|\,|x| + |a|\,|x(x + 1)| +$
$+ |c|\,|x + 1| \leqslant M.1 + 2.M(M - 1) + 1.M = 2M^2 - 1.$

Vậy bài toán được chứng minh.

Cách 2 (của *Đỗ quang Đại* — 12 CT ĐHSP Hà Nội và nhiều bạn khác).

Theo công thức nội suy Lagrăng

$$f(x) = f(1)\,\frac{x^2 + x}{2} - f(0)\,(x^2 - 1) +$$

$$f(-1)\,\frac{x^2 - x}{2}, \text{ có } |f(1)| \leqslant 1,$$

$$|f(0)| \leqslant 1, \; |f(-1)| \leqslant 1.$$

1) Nếu $1 < |x| \leqslant M$ thì $|f(x)| \leqslant |f(1)| \times$
$\times \left|\frac{x^2 + x}{2}\right| + |f(0)|\,|x^2 - 1| + |f(-1)| \times$
$\left|\frac{x^2 + x}{2}\right| \leqslant \frac{x^2 + x}{2} + \left|\frac{x^2 - x}{2}\right|$
$+ |x^2 - 1| = 2x^2 - 1 \leqslant 2M^2 - 1.$

2) Nếu $|x| \leqslant 1$ thì $|f(x)| \leqslant 1 \leqslant 2M^2 - 1.$

N. Đ. M.

Bài 6/133. *Giả sử a là một số cho trước và P(x) là một đa thức. Xét các số*

$$|1 - P(0)|, |a - P(1)|, |a^2 - P(2)|, |a^3 - P(3)|. \; (*)$$

1. Chứng minh nếu $a \geqslant 3$, thì với mọi đa thức P(x) bậc không quá 2, trong các số (*) có ít nhất một số $\geqslant 1$.

2. Chứng tỏ rằng nếu $1 < a < 3$; thì tồn tại một đa thức P(x) bậc không quá 2 sao cho tất cả các số (*) đều nhỏ hơn 1.

Lời giải. (của *Trần duy Hinh* — 11C Trưng Vương Qui Nhơn).

Đặt $P(x) = Ax^2 + Bx + C$,

trong đó A, B, C là các hệ số có thể nhận giá trị bằng 0

Ta có:

$$\begin{cases} P(1) = A + B + C \\ P(2) = 4A + 2B + C \\ P(3) = 9A + 3B + C \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 2B + 3C = 4P(1) - P(2) \\ 6B + 8C = 9P(1) - P(3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(0) = C = 3P(1) - 3P(2) + P(3).$$

1. Nếu cả 4 số trong (*) đều nhỏ hơn 1, ta có:

$$\begin{cases} |a - P(1)| < 1 \\ |a^2 - P(2)| < 1 \\ |a^3 - P(3)| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1) > a - 1, \\ -P(2) > -1 - a^2 \\ P(3) > a^3 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(0) = 3P(1) - 3P(2) + P(3) >$$
$$> a^3 - 3a^2 + 3a - 7 = (a - 1)^3 - 6. \qquad (1)$$

Lại có:

$$|1 - P(0)| < 1 \Rightarrow P(0) < 2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(a - 1)^3 - 6 < 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a - 1)^3 < 8 \Rightarrow a - 1 < 2$$
$$\Rightarrow a < 3. \text{ Vô lý (vì } a \geqslant 3).$$

Vậy trong các số (*) có ít nhất một số $\geqslant 1$.

2. Chọn $P(x)$ sao cho:

$$\begin{cases} a^3 - P(3) = (a - 2)^3 \\ a^2 - P(2) = -(a - 2)^2 \\ 1 - P(0) = -a + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(3) = 6a^2 - 12a + 1 \\ P(2) = 2a^2 - 4a + 1 \\ P(0) = a - 1 \end{cases}$$

Từ $P(0) = 3P(1) - 3P(2) + P(3)$ ta có

$$3P(1) = P(0) + 3P(2) - P(3) = 3 + a$$

$$\Rightarrow a - P(1) = a - \frac{3+a}{3} = \frac{2a-3}{3}.$$

Như vậy với $1 < a < 3$, ta có:

$$\begin{cases} |a^3 - P(3)| = |a-2|^3 < 1^3 = 1 \\ |a^2 - P(2)| = |a-2|^2 < 1^2 = 1 \\ |a - P(1)| = \dfrac{|2a-3|}{3} < 1 \\ |1 - P(0)| = |a-2| < 1. \end{cases}$$

Khi đó đa thức $P(x)$ cần tìm có các hệ số A, B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 9A + 3B + C = 6a^2 - 12a + 8 \\ 4A + 2B + C = 2a^2 - 4a + 4 \\ C = a - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = a - 1 \\ 6B + 5C = -6a^2 + 12a + 1 \\ 4A + 2B + C = 2a^2 - 4a + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = a - 1 \\ B = (-6a^2 + 7a + 9)/6 \\ A = (a^2 - 10a + 6)/6. \end{cases} \qquad (3)$$

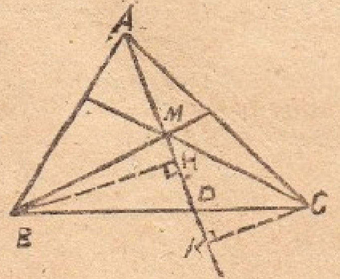
Vậy đa thức $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ với A, B, C xác định bởi (3) sẽ làm cho tất cả các số trong (*) đều nhỏ hơn 1.

Đ. B. K.

Bài 7/133. *Cho tam giác ABC. Tìm điểm M ở trong tam giác sao cho $MA.BC + MB.CA + MC.AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải (của *Võ Tấn Phát* – lớp 9E, PTCT, Quy Nhơn).

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn hay là tam giác vuông. Ký hiệu S là diện tích, D là giao của AM với BC, H và K tương ứng là chân đường vuông góc hạ từ B và C tới AM. Ta có:



Hình 3

$$MA.BC = MA(BD + DC) \geqslant MA(BH + CK)$$

hay $MA.BC \geqslant 2(S_{ABM} + S_{ACM})$ (1)

Phân tích hoàn toàn tương tự ta cũng có:

$$MB.CA \geqslant 2(S_{ABM} + S_{BCM}) \qquad (3)$$

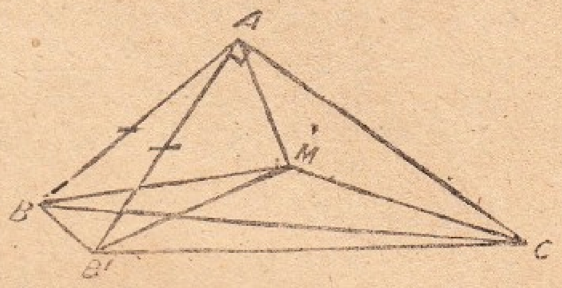
$$MC.AB \geqslant 2(S_{BCM} + S_{ACM}) \qquad (2)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta được:

$$MA.BC + MB.CA + MC.AB \geqslant 4S_{ABC},$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H là trực tâm của tam giác ABC. Vậy điểm cần tìm M là trực tâm của tam giác ABC.

b) Tam giác ABC có góc tù tại A.



Hình 4

Kẻ AB' vuông góc với AC và $AB' = AB$. Giả sử M khác A và M nằm trong tam giác $AB'C$ (nếu không thế ta kẻ $AC' \perp AB$, $AC' = AC$ và chứng minh tương tự).

Vì $\widehat{AB'B} = \widehat{ABB'}$ nên $\widehat{MB'B} > \widehat{MBB'}$

$\Rightarrow MB > MB'$ và $\widehat{CB'B} > \widehat{CBB'} \to CB > CB'$.

Vậy $MA.BC + MB.AC + MC.AB > MA.B'C + AC.MB' + MC.AB'$. Nhưng theo trường hợp a)

$$MA.B'C + MB'.AC + MC.AB' \geqslant 4S_{AB'C} = 2AB'.AC = 2AB.AC$$

Vậy trong trường hợp này điểm cần tìm M là đỉnh A của góc tù khi $M \equiv A$ thì $MA.BC + MB.AC + MC.AB = 2AB.AC$.

Nhận xét: Rất nhiều bạn chỉ xét trường hợp a). Một số bạn chứng minh phần b) rất phức tạp hoặc thiếu sót.

N.Đ.T.

Bài 8/133. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Đặt $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$, $A_1B_1 = c_1$, $B_1C_1 = a_1$, $A_1C = b$.

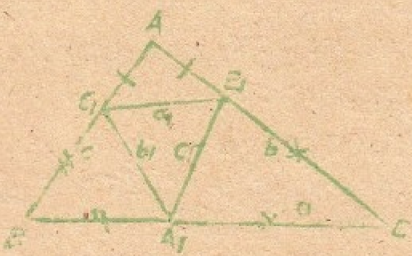
Chứng minh rằng

$$(a/a_1)^2 + (b/b_1)^2 + (c/c_1)^2 \geqslant 12$$

Lời giải (của *Nguyễn Tiến Dũng* (A) lớp 10 CT, ĐHTHHN).

Từ giả thiết suy ra

$$a_1 = (b + c - a)\sin(A/2)$$



Hình 5

hay $a_1^2 = (b + c - a)^2 \sin^2 (A/2)$

$$= (b + c - a)^2 (1 - \cos A)/2$$

$$= \frac{1}{2}(b + c - a)^2 \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{1}{4bc}(b+c-a)^2 (a+b-c)(a+c-b)$$

$$= \frac{1}{4bc}[b^2 - (a - c)^2][c^2 - (b - a)^2]$$

$$\leqslant b^2 c^2/(4bc) = bc/4.$$

Một cách hoàn toàn tương tự ta có:

$$b_1^2 \leqslant ac/4,\ c_1^2 \leqslant ba/4.$$

Khi đó:

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{b}{b_1}\right)^2 \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a_1^2b_1^2c_1^2}}$$

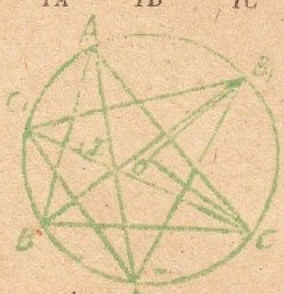
$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(bc/4)(ac/4)(ab/4)}} = 12$$

N.Đ.T

Bài 9/133 *Trong tam giác ABC, các đường phân giác cắt nhau tại I và cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Gọi S, S_1 và d tương ứng là diện tích $\triangle ABC$, diện tích $\triangle A_1B_1C_1$ và khoảng cách từ I đến tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.*

Hãy chứng minh rằng:

1) $\frac{S_1}{S} = \frac{IA_1}{IA} \cdot \frac{IB_1}{IB} \cdot \frac{IC_1}{IC}$;



Hình 6

2) $d = R\sqrt{1 - S/S_1}$.

Lời giải. 1) Ta có:

$S_1 = A_1B_1 . B_1C_1 . C_1A_1/(4R)$,

$S = AB . BC . CA/(4R)$,

nên $\frac{S_1}{S} = \frac{A_1B_1}{AB} \cdot \frac{B_1C_1}{BC} \cdot \frac{C_1A_1}{CA}$ (1)

Dễ thấy $\triangle ABI \backsim \triangle B_1A_1I$

$\Leftrightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{IB_1}{IA}$ Tương tự ta cũng có:

$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{IC_1}{IB}$, và $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{IA_1}{IC}$.

Vậy ta có

$$S_1/S = IA_1/IA . IB_1/IB . IC_1/IC$$

2) Ta có $\widehat{ICB_1} = (\widehat{B} + \widehat{C})/2 = \widehat{B_1IC} \Rightarrow IB_1 = B_1C$.

Lại có $\triangle OB_1C_1$ cân và có $\widehat{B_1OC} = \widehat{B}$

Xét $\triangle IA_1C$ có $\widehat{CIA_1} = (\widehat{A} + \widehat{C})/2 = \widehat{A_1CI}$.

Vậy $\triangle IA_1C$ cân, nên có $\widehat{IA_1C} = \widehat{B}$

$\Rightarrow \triangle IA_1C \backsim \triangle B_1OC \Leftrightarrow B_1C/OB_1 = IC/IA_1$

$\Leftrightarrow IA_1/R = IC/B_1C = IC/IB_1$ (2)

Chú ý $\triangle B_1IC \backsim \triangle C_1IB$

$IC/IB_1 = IB/IC_1$ (3)

Từ (2) và (3) ta có

$(IA_1/R)^2 = IB.IC : IB_1.IC_1) \Leftrightarrow IA.IA_1 =$
$= R^2\ IA.IB.IC/(IA_1.IB_1.IC_1) = R^2 S/S_1$ (theo phần 1)

Vì $IA.IA_1 = R^2 - d^2$, nên $R^2 - d^2 = R^2.S/S_1$
$\Leftrightarrow d = R\sqrt{1 - S_1/S}$ (đpcm).

Nhận xét: bạn *Nguyễn Thanh Quan* (12P, trường PTTH vừa học vừa làm Thủ Đức, TP Hồ Chí Minh) có lời giải tốt.

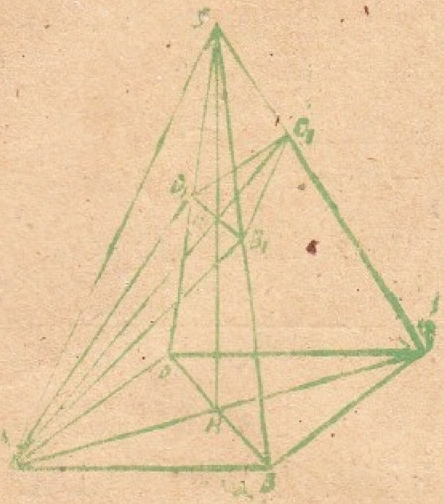
T.V.T.

Bài 10/133. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Trên cạnh SC lấy điểm C_1.*

Chứng minh rằng trong các thiết diện tạo thành do mặt phẳng đi qua AC_1 cắt SB, SD, thì thiết diện song song với BD là thiết diện nhỏ nhất.

Tính diện tích thiết diện nhỏ nhất đó nếu cạnh đáy hình chóp bằng 1, cạnh bên bằng $\sqrt{3}$ và $CC_1 = 2\sqrt{3}/3$.

Lời giải. Gọi B_1 và D_1 tương ứng là giao của mặt phẳng đi qua AC với SB và SD. SH là đường cao của hình chóp và H_1 là giao của SH với thiết diện. Dễ chứng minh được nếu thiết diện



Hình 7

song song với BD thì tam giác SB_1D_1 có diện tích nhỏ nhất, và do đó chóp SAB_1CD_1 có thể tích nhỏ nhất. Trong khi đó đường cao của chóp này lớn nhất. Vậy đáy $AB_1C_1C_1$ có diện tích nhỏ nhất.

Xét trường hợp $AB_1C_1D_1$ có diện tích nhỏ nhất. Từ định lý hàm số côsin trong tam giác ACC_1 ta tính được $AC_1 = \sqrt{2}$.

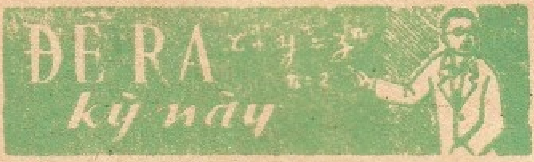
Như vậy $AC_1 = AC$, và do đó $\widehat{B_1C_1D_1} = \widehat{BCD} = 90°$. Suy ra $B_1D_1 = 2C_1H_1$.

Theo tính chất của đường phân giác SH_1 trong tam giác SAC_1, ta tính được $C_1H_1 = AC_1/4 = \sqrt{2}/4$.

Từ đó tínhđược diện tích $AB_1C_1D_1$ bằng 1/2

Nhận xét: Nhiều bạn giải được bài toán này song phần lớn các bạn có lời giải dài.

P.Q.G.



Bài 1/136. Cho dãy số $\{x_n\}$ như sau:

$$x_1 = 20,\ x_2 = 100,$$
$$x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} - 1964 \text{ với}$$

mọi $n \geqslant 2$.

Chứng minh rằng tồn tại một số của dãy chia hết cho 1984.

Tạ Hồng Quảng

Bài 2/136. Với mỗi số tự nhiên $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ $(a_1 \neq 0)$ ta ký hiệu $\overleftarrow{A}$ là số $a_na_{n-1}\ldots a_1$. Hãy tìm các số tự nhiên k có tính chất: Nếu số tự nhiên A là bội của k thì $\overleftarrow{A}$ cũng là bội của k.

Vũ Đình Hòa. (sưu tầm)

Bài 3/136. Cho dãy số $\{u_n\}$ như sau:

$$u_0 = u_1 = 1.$$

$u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/u_{n-1}$ với mọi n tự nhiên.

Chứng minh rằng u_n nguyên với mọi n

Trần Nam Dũng

Bài 4/136. Cho $0 < a, b, c \leqslant 1$. Chứng minh

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1$$

Trần Xuân Đáng

Bài 5/136. Tam giác ABC có độ lớn hai góc B và C khác nhau. AH, AM, AP tương ứng là đường cao, trung tuyến, phân giác dựng từ A của tam giác. Chứng minh $MH = MP$ khi và chỉ khi $\sin B \sin C = \sin^2 (A/2)$.

Lê Quốc Hán

Bài 6/136. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên có bậc không quá 4, với tính chất: tồn tại 5 số nguyên khác nhau x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, sao cho.

$$P(x_1)P(x_2)P(x_3)P(x_4)P(x_5) = \div 3.$$

Phan Đức Chính

Bài 7/136. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x^6 - 10x^5 + 19x^4 + 62x^3 - 154x^2 - 96x + 257}{x^3 - 5x^2 - 3x + 16}$$

trên đoạn

$$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

Tạ Văn Tự

Bài 8/136. Gọi V là tập hợp tất cả các tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$, sao cho $|P(x)| \leqslant 1$ với mọi $x \in [0, 1]$. Tìm cực đại của $|P'(x)|$ với mọi $P(x)$ trong V.

Đỗ Bá Khang

Bài 9/136. Cho nửa hình cầu cố định và hai hình cầu nhỏ thay đổi nhưng luôn tiếp xúc nhau và nội tiếp trong nửa hình cầu trên. Chứng minh rằng tiếp điểm của hai hình cầu nhỏ luôn nằm trên một mặt cầu.

Phạm Đăng Long

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 10/136. Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c. Chứng minh.

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C}\right)^3 \leqslant \frac{a^2b^2c^2}{\text{tg}\frac{A}{2}\,\text{tg}\frac{B}{2}\,\text{tg}\frac{C}{2}}.$$

Lê Văn Như Hình
(12E chuyên Toán Vĩnh Phú)

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN TRONG LƯỢNG GIÁC

NGUYỄN ĐỨC THUẦN

Ta gọi *đẳng thức có điều kiện trong lượng giác* là những đẳng thức giữa các hàm số lượng giác được thỏa mãn với tất cả những giá trị thừa nhận được của đối số đồng thời chịu điều kiện ràng buộc nào đó. Chẳng hạn, $\text{cotg}a + \text{cotg}b + \text{cotg}c = \text{cotg}a\text{cotg}b\text{cotg}c$ với $a + b + c = 90°$. Ta thường gặp những dạng bài tập sau:

1. Cho trước sự liên hệ giữa đối số và đòi hỏi phải xác định sự liên hệ giữa hàm số lượng giác của các đối số đó

2. Cho trước một sự liên hệ giữa hàm số lượng giác của đối số và đòi hỏi tìm những sự liên hệ khác giữa hàm số lượng giác của tất cả các đối số đó.

3. Cho trước sự liên hệ giữa hàm số lượng giác của đối số và tìm sự liên hệ giữa chính những đối số đó. v.v...

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu $(a + b) = \pi/4$ thì

$$(1 + \text{tg}a)(1 + \text{tg}b) = 2.$$

Giải. Để cho vế trái của đẳng thức cần chứng minh có nghĩa thì $a, b \neq \pi/2 + k\pi$. Vì $(a + b) = \pi/4$, nên ta có:

$$\text{tg}(a+b) = 1 \Rightarrow (\text{tg}a + \text{tg}b)/(1-\text{tg}a\text{tg}b) = 1$$
$$\Rightarrow \text{tg}a + \text{tg}b + \text{tg}a\text{tg}b = 1$$
$$\Rightarrow (1 + \text{tg}a)(1 + \text{tg}b) = 2.$$

Ví dụ. 2. Chứng minh rằng nếu $\sin a = m\sin b$ và $\text{tg}a = n\,\text{tg}b$ thì một giá trị của $\cos a$ sẽ là

$$\sqrt{(m^2-1):(n^2-1)}.$$

Giải. Chia vế với vế các đẳng thức đã cho ta có

$$\cos a = (m/n)\cos b.$$

Do đó, ta có:

$$\sin b = \sin a/m,\ \cos b = n\cos a/m,$$
$$\sin^2 b + \cos^2 b = \sin^2 a/m^2 + n^2\cos^2 a/m^2.$$

Suy ra

$$m^2 = 1 - \cos^2 a + n^2\cos^2 a$$
$$m^2 - 1 = (n^2 - 1)\cos^2 a,$$
$$\cos^2 a = (m^2 - 1):(n^2 - 1).$$

Do đó, một trong các giá trị của $\cos a$ là $\sqrt{m^2-1):(n^2-1)}$.

Ví dụ 3. Thành lập hệ thức giữa ba góc nhọn a, b, c biết rằng: $\text{cotg}a\,\text{cotg}b + \text{cotg}a\,\text{cotg}c + \text{cotg}b\,\text{cotg}c = 1$,

Giải. Nhân cả hai vế đẳng thức đã cho với $\text{tg}a\text{tg}b\text{tg}c \neq 0$, ta có:

$$\text{tg}c + \text{tg}b + \text{tg}a = \text{tg}a\,\text{tg}b\,\text{tg}c$$
$$\Rightarrow \text{tg}c + \text{tg}b = \text{tg}a\,(\text{tg}b\,\text{tg}c - 1)$$
$$\Rightarrow -\text{tg}a = (\text{tg}c + \text{tg}b):(1 - \text{tg}b\,\text{tg}c)$$
$$\Rightarrow \text{tg}(-a) = \text{tg}(b + c)$$
$$\Rightarrow a + b + c = k\pi.$$

Nhưng vì a, b, c là 3 góc nhọn nên $0 < a + b + c < 3\pi/2$, và ta có $a + b + c = \pi$.

Sau đây, ta nêu ra một số ví dụ về một loại đẳng thức điều kiện đặc biệt trong lượng giác. (Ta gọi cho gọn loại đẳng thức đó là *đẳng thức trong tam giác.* Đó là những đẳng thức giữa các phần tử hoặc các hàm số lượng giác của góc trong tam giác.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu A, B, C là ba góc trong một tam giác thỏa mãn điều kiện $\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2) = 1/8$ thì $A = B = C = 60°$

Giải. Ta có từ đẳng thức đã cho:

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\times$$
$$\times\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8},$$

$$\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{4}.$$

Đặt $t=\sin(C/2)$, ta có phương trình bậc hai đối với t:

$$t^2-\cos\frac{A-B}{2}t+\frac{1}{4}=0$$

$$\Delta=\cos^2\frac{A-B}{2}-1.$$

Vì $\left|\cos\frac{A-B}{2}\right|\leqslant 1$ nên $\Delta\leqslant 0$.

Để cho phương trình bậc hai có nghiệm thì $\Delta=0$ tức là $\cos\frac{A-B}{2}=1$ ($\cos\frac{A-B}{2}\neq -1$ vì nếu bằng -1 thì $A-B=2\pi$. Điều này không thể có, vì A và B là góc của một tam giác).

Khi đó, ta có: $t^2-t+1/4=0$ tức $(t-1/2)^2=0$.

Vậy: $t=\sin(C/2)=1/2$
$C=\pi/3$.

Vì $\cos\frac{A-B}{2}=1$ nên $\frac{A-B}{2}=0$,

tức $A=B$.

Như vậy, tam giác ABC là tam giác cân và có một góc bằng $\pi/3$ nên nó là tam giác đều.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng, một tam giác ABC là đều khi và chỉ khi:

$$a(1-2\cos A)+b(1-2\cos B)+c(1-2\cos C)=0. \quad (1)$$

Giải. Điều kiện đủ: Nếu tam giác ABC là đều thì $\cos A=\cos B=\cos C=\cos(\pi/3)=1/2$ và ta có (1).

Điều kiện cần: Giả sử có (1).

Thay $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$, ta có:

$$\sin A(1-2\cos A)+\sin B(1-2\cos B)+\sin C(1-2\cos C)=0.$$

Khai triển và vận dụng công thức $\sin 2X=2\sin X\cos X$, ta có:

$$(\sin A+\sin B+\sin C)-(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=0. \quad (2)$$

Ta biến đổi $\sin A+\sin B+\sin C$

$$=\sin A+\sin B+\sin(A+B)$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+$$
$$+2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Ta biến đổi $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$$=2\sin A\cos A+2\sin(B+C)\cos(B-C)$$
$$=2\sin A\cos A+2\sin A\cos(B-C)$$
$$=2\sin A[\cos A+\cos(B-C)]$$
$$=2\sin A[-\cos(B+C)+\cos(B-C)]$$
$$=2\sin A\cdot 2\sin B\sin C=4\sin A\sin B\sin C$$
$$=32\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Do đó (2) tương đương với:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\times\left(1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=0.$$

Ta thấy rằng $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\neq 0$ vì nếu bằng không thì chẳng hạn $\cos(A/2)=0$, khi đó $A=\pi$. Điều này không thể xảy ra vì A là một góc của tam giác. Như vậy, ta chỉ có:

$$1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=0$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1/8.$$

Do đó, theo chứng minh trong *ví dụ 4*, ta kết luận rằng tam giác ABC là đều.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng, nếu các số đo các cạnh một tam giác là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì góc đối diện với cạnh có số đo là số hạng ở giữa không lớn hơn $60°$.

Giải. Ta gọi ba cạnh của tam giác là a, $a+d$, $a+2d$. ($d \geqslant 0$) và góc đối diện với cạnh $(a+d)$ là B. Theo định lý hàm số cosin, ta có:

$$(a+d)^2 = a^2 + (a+2d)^2 - 2a(a+2d)\cos B$$

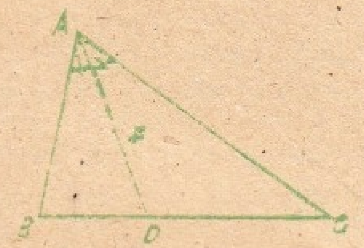
$$a^2+2ad+d^2 = a^2+a^2+4d^2+4ad-2(a^2+2ad)\cos B$$

$$\cos B = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+2ad+3d^2}{a^2+2ad}$$

Vì $\dfrac{a^2+2ad+3d^2}{a^2+2ad} \geqslant 1$ nên có $B \geqslant 1/2$

Do đó: $\cos B \geqslant \cos 60^\circ$. Suy ra $B \leqslant 60^\circ$.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng, đối với một tam giác, nếu tổng các nghịch đảo số đo của hai cạnh bằng nghịch đảo số đo đường phân giác của góc xen giữa hai cạnh trên thì góc xen giữa đó bằng 120°.



Hình 8

Giải. Ta có:

dt ABC = dt BAD + dt DAC

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cf\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bf\sin\frac{A}{2}$$

$$2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = (b+c)f\sin\frac{A}{2}$$

$$2bc\cos\frac{A}{2} = (b+c)f$$

$$\frac{b+c}{bc} = \frac{2\cos(A/2)}{f}$$

Nếu $1/b + 1/c = 1/f$ thì $2\cos\dfrac{A}{2} = 1$

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

Do đó $A/2 = 60^\circ$ tức $A = 120^\circ$.

Bài tập

1. Chứng minh rằng nếu $a+b+c = \pi/2$ thì ta có các đẳng thức

1) $\cot g a \cot g b \cot g c = \cot g a + \cot g b + \cot g c$

2) $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 2\cos a\cos b\cos c$.

2. Chứng minh rằng nếu $\operatorname{tg} a = 2\operatorname{tg} b$ thì $\sin(a+b) = 3\sin(a-b)$.

3. Biết rằng $\sin(2a+b) = 2\sin b$, $\cos a \neq 0$, $\cos(a+b) \neq 0$, hãy tìm sự liên hệ giữa $\operatorname{tg}(a+b)$ và $\operatorname{tg} a$.

4. Hãy chứng minh rằng nếu $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin a\sin b}{\cos a+\cos b}$ thì có một giá trị của $\operatorname{tg}(x/2)$ là $\operatorname{tg}(a/2)\operatorname{tg}(b/2)$.

5. Thành lập các hệ thức giữa ba góc nhọn a, b, c, biết rằng

1) $\sin^2 a+\sin^2 b-\sin^2 c = 2\sin a\sin b\sin c$,

2) $\operatorname{tg}(a+b)\sin c = \cos c$.

6. Tìm sự liên hệ giữa các góc a và b, biết rằng

$$\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

7. Chứng minh rằng tam giác ABC là cân khi ta có một trong các hệ thức sau đây:

1) $\sin C/\sin B = 2\cos A$.

2) $2\sin A\sin B/\sin C = \cot g(C/2)$.

3) $\sin(A/2)\cos^3(B/2) = \sin(B/2)\cos^3(A/2)$.

8. Chứng minh rằng tam giác ABC là vuông khi ta có một trong các hệ thức sau đây:

1) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$.

2) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$.

3) $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$.

4) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$.

9. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ABC vuông tại A là một trong các điều kiện sau đây:

1) $\operatorname{tg}(A/2) = (\sin B + \sin C) : (\cos B + \cos C)$.

2) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$.

3) $\sin A = (\sin B + \sin C) : (\cos B + \cos C)$.

4) $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$.

10. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để cho tam giác ABC có một góc bằng 60° là:

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$$

11. Tam giác ABC là đều khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2\operatorname{tg} A \end{cases}$$

12. Trong mọi $\triangle ABC$, ta có:

1) $a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4S$ (S là diện tích tam giác),

2) $bc\cos A - ac\cos B = b^2 - a^2$.

13. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là vuông tại A khi

$$c\cos 2B + b\sin 2B = c$$

VỀ MỘT LỚP BÀI TOÁN HÌNH HỌC

PHẠM THU HÀ

BÀI báo này giới thiệu với bạn đọc một phương pháp có ích cho việc giải nhiều bài toán hình học thường được coi là không mẫu mực và hay gặp trong các kỳ thi chuyên toán và học sinh giỏi.

Trước tiên chúng ta hãy làm quen với một khái niệm mới: *Lân cận bán kính r của một hình phẳng là tập hợp các điểm trên mặt phẳng có khoảng cách tới hình đã cho không vượt quá r.* Ở đây ta hiểu khoảng cách từ một điểm A tới một hình (H) là khoảng cách bé nhất từ điểm A đến một điểm bất kỳ của (H). Ví dụ lân cận bán kính r của một điểm O là hình tròn tâm O bán kính r, lân cận bán kính r của một hình tròn bán kính R là hình tròn đồng tâm bán kính $R + r$, còn lân cận bán kính r của một đoạn thẳng là một hình chữ nhật cùng với hai nửa hình tròn bán kính r ở hai đầu, v.v... Bạn đọc hãy tự tìm lấy lân cận bán kính r của một đa giác, một đường gấp khúc.

Phương pháp mà chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn dựa trên hai nguyên lý hình học rất đơn giản sau đây mà chứng minh xin nhường cho bạn đọc.

Nguyên lý 1: *Cho các hình phẳng (H_1), (H_2),..., (H_n) và (K). Nếu tổng diện tích các hình (H_1), (H_2),..., (H_n) mà nhỏ hơn diện tích hình (K) thì phải có một điểm của (K) mà nằm ngoài tất cả các hình (H_i) $(i = 1, 2,..., n)$.*

Nguyên lý 2: *Nếu các hình phẳng (H_1), (H_2),... (H_n) nằm trong hình phẳng (K) sao cho tổng diện tích của chúng lớn hơn diện tích (K) thì phải có hai hình (H_i) và (H_j) nào đó $(i, j \in \{1, 2,..., n\})$ có điểm chung.*

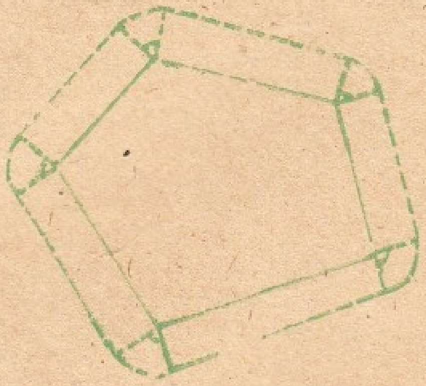
Bây giờ ta hãy làm quen với phương pháp mới thông qua một vài ví dụ.

Bài toán 1. *Một tờ giấy hình tròn bán kính 100cm có 9800 lỗ kim châm. Chứng minh rằng khi đó có thể cắt ra một hình tròn bán kính 1cm không có lỗ kim châm nào.*

Giải. Để hình tròn phải tìm không chứa lỗ kim châm nào thì tâm của nó phải nằm ngoài tất cả các lân cận bán kính 1cm của mọi lỗ kim châm. Mặt khác để hình tròn đó nằm trọn trong tờ giấy ban đầu tâm của nó phải nằm trong hình tròn đồng tâm với tờ giấy, bán kính 100 − 1 = 99 (cm) Mà tổng diện tích của 9800 lân cận bằng $9800.\pi.1^2 = 9800\pi$ (cm^2) nhỏ hơn diện tích của hình tròn bán kính 99cm ($= 9801\pi$ cm^2). Do đó theo nguyên lý 1 phải tồn tại điểm I nằm trong hình tròn bán kính 99cm và nằm ngoài mọi lân cận. Rõ ràng hình tròn tâm I bán kính 1cm là hình tròn phải tìm.

Bài toán 2 (*Đề dự bị thi vô địch quốc tế*). *Trong một hình vuông cạnh 38cm có 100 đa giác lồi, mỗi đa giác có diện tích $\leqslant \pi$ cm^2 còn chu vi thì $\leqslant 2\pi$ cm. Chứng minh rằng trong hình vuông tồn tại một hình tròn bán kính 1cm không cắt đa giác nào.*

Giải. Để hình tròn phải tìm không cắt đa giác nào, tâm của nó phải nằm ngoài các lân cận bán kính 1cm của tất cả các đa giác. Mặt khác để hình tròn bán kính 1cm nằm trọn trong hình vuông cạnh 38cm thì tâm của nó phải nằm trong hình vuông cạnh 36cm (nhận được từ hình vuông đã cho bằng cách tịnh tiến mỗi cạnh về phía trong 1cm). Ta phải chứng minh tồn tại một điểm như vậy.



Hình 1

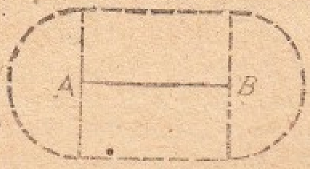
Diện tích lân cận bán kính r của một đa giác lồi (H.1) bằng:

diện tích đa giác + tổng diện tích các hình chữ nhật + tổng diện tích các hình quạt. Để ý rằng góc ở tâm của mỗi hình quạt chính bằng góc ngoài tương ứng của đa giác nên tổng diện tích các hình quạt chính là diện tích hình tròn bán kính 1cm. Do đó theo giả thiết, diện tích mỗi lân cận sẽ bé hơn $\pi + 2\pi \,.\, 1 + \pi \,.\, 1^2 = 4\pi$ (cm^2)

và tổng diện tích lân cận của 100 đa giác sẽ bé hơn $100 \cdot 4\pi = 400\pi\ (cm^2) < 100 \cdot 4 \cdot 3{,}2 = 1280 < 1296 = 36^2 (cm)^2$ là diện tích hình vuông. Theo nguyên lý 1 phải có điểm I nằm trong hình vuông cạnh 36cm và nằm ngoài các lân cận và đó chính là tâm của hình tròn phải tìm.

Bài toán 3. *Trong hình chữ nhật kích thước 10×20 có 132 đoạn thẳng độ dài 1. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được 2 điểm nằm trên 2 đoạn khác nhau có khoảng cách không vượt quá 1.*

Giải. Xét các lân cận bán kính 1/2 của mỗi đoạn thẳng (H.2).



Hình 2

Dễ dàng tính được diện tích của mỗi lân cận là

$$1 \times 1 + \pi \cdot (1/2)^2 = 1 + \pi/4.$$

Do đó tổng diện tích các lân cận bằng

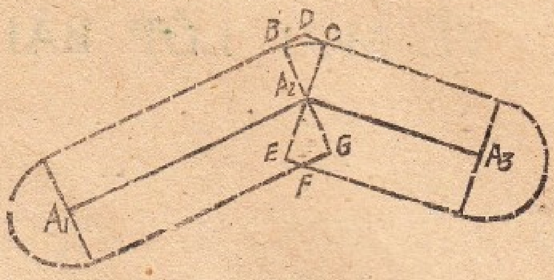
$$132\,(1 + \pi/4) > 132\,(1 + 3/4) = 231.$$

Mà các lân cận này đều nằm trong hình chữ nhật kích thước 11 × 21 (nhận được bằng cách tịnh tiến mỗi cạnh của hình chữ nhật đã cho ra phía ngoài 1/2). Theo nguyên lý 2 phải có 2 lân cận của hai đoạn thẳng có điểm chung, do đó trên hai đoạn này phải có hai điểm mà khoảng cách tới điểm chung đều không vượt quá 1/2, đó chính là hai điểm cần tìm.

Bài toán 4 (*Đề thi vô địch Balan*). *Một đường gấp khúc nằm trong một hình vuông cạnh 50cm có tính chất như sau: khoảng cách từ mỗi điểm của hình vuông đến đường gấp khúc không vượt quá 1. Chứng minh rằng độ dài đường gấp khúc lớn hơn 1248cm.*

Giải. Ta tính diện tích lân cận bán kính 1 của đường gấp khúc. Trước hết xét trường hợp đường gấp khúc gồm 2 đoạn A_1A_2 và A_2A_3 (H.3)

Để ý rằng diện tích hình quạt A_2BC bé hơn diện tích tứ giác A_2BDC, mà hai tứ giác A_2BDC



Hình 3

và A_2EFG đối xứng nhau qua A_2, do đó diện tích lân cận bán kính 1 của $A_1A_2A_3$ sẽ bé hơn

$$\pi \cdot 1^2 + 2\,(A_1A_2 + A_2A_3).$$

Bằng qui nạp theo số đoạn thẳng của đường gấp khúc ta suy ra diện tích của lân cận bán kính 1 của đường gấp khúc sẽ bé hơn $\pi + 2p$ (với p là độ dài đường gấp khúc). Theo giả thiết lân cận này phủ kín hình vuông cạnh 50, do đó diện tích lân cận phải lớn hơn diện tích hình vuông (theo nguyên lý 1).

Vậy $50^2 < \pi + 2p \Rightarrow p > 1250 - \pi/2 > 1248$ (đpcm).

Qua một vài ví dụ trên chắc các bạn đã có thể hình dung được phương pháp mà chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn. Vậy mời bạn hãy thử sức với các bài tập sau, và liệu chúng ta có thể mở rộng phương pháp trên cho các bài toán trong không gian được không?

1. Trong một hình chữ nhật kích thước 20×25 có 120 hình vuông đơn vị. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính 1/2 nằm trong hình chữ nhật mà không cắt hình vuông nào.

2. Chứng minh rằng một đa giác lồi diện tích S chu vi p bao giờ cũng chứa 1 hình tròn bán kính S/p.

3. Trong một hình chữ nhật kích thước 15×20 có 57 hình chữ nhật 1×2 đều có cạnh song song với cạnh của hình chữ nhật lớn. Chứng tỏ rằng tồn tại một hình vuông đơn vị nằm trong hình chữ nhật lớn cắt ít nhất hai hình chữ nhật con.

4. Cho đa giác lồi M. Gọi s là số ít nhất các hình tròn bán kính 1 phủ kín M, t là số nhiều nhất các hình tròn đôi một rời nhau có tâm thuộc M và bán kính 1/2. Chứng minh rằng $s \leqslant t$.

DANH SÁCH CÁC BẠN DỰ THI GIẢI TOÁN

(*Tiếp theo*)

Hà nội: Phạm Xuân Trung (8A PTCS Trưng Nhị); Nguyễn Quang Thái (10 CT ĐH Sư phạm); Trần Huy Đạt (7 CT Đống Đa); Nguyễn Phi Khanh (11 I Chu Văn An); Đặng Vũ Giang (lớp 12 ĐH Ngoại ngữ).

Hồ Chí Minh: Nguyễn Quang Thiều (10 CT) Trang Lâm Bằng, Nguyễn Hùng Quân, (11 CT) (Lê Hồng Phong).

Nghĩa Bình: Nguyễn Tiến Đức (10C): Huỳnh Đức Thắng, Trần Thanh Bình A, Lê Đức Tuấn.

Trần Duy Hinh. Võ Thành Nam, (11C); Nguyễn Hoành Cường (12I); (Trưng Vương, Qui Nhơn). Lê Thiện Thanh (10C), Nguyễn Anh Tuấn (11G), (An Nhơn 1). Phan Đức Bảo (11 E An Nhơn 2). Trịnh Đào Chiến, Lê Duy Can, (An Nhơn). Huỳnh Hữu Phúc (11M Quang Trung, Qui Nhơn). Nguyễn Hoàng Tuấn (11B9 Trần Quốc Tuấn, Quảng Ngãi). Nguyễn Minh Sơn (11C Phù Mỹ 1). Phạm Huy Toàn (9E Lê Lợi, Qui Nhơn). Võ Tấn Phát (9CT Qui Nhơn). Nguyễn Đức Tấn (8A CĐ Sư phạm).

Phú Khánh: Nguyễn Minh Ngân, Trần Xuân Nhâm, Đỗ Duy Khánh, Huỳnh Văn Thành, (10CT); Nguyễn Đức Huy (10C8); (Nguyễn Văn Trỗi, Nha Trang). Đặng Trung Thọ (11B Huỳnh Thúc Kháng, Vạn Ninh).

Các tỉnh khác: Nguyễn Minh Tuấn (10 CT), Phạm Cao Nhân (12 CT), (Thái Phiên, Hải Phòng). Nguyễn Văn Phúc (12 A Tiên Yên, Quảng Ninh). Phạm Mạnh Cường (11 A Việt Trì), Đỗ Mai Khanh (11 CT Hùng Vương), (Vĩnh Phú). Nguyễn Thanh Can (11 CT), Thân Di Ngữ (12 T), (Ngô Sĩ Liên, Hà Bắc). Nguyễn Văn Giang (11 E Công nghiệp 2, Hòa Bình), Nguyễn Duy Quyết (8B Bạch Thượng, Duy Tiên, Hà nam Ninh). Lê Thanh Hà, Trương Văn Cường, Trịnh Văn Hiệu, Đỗ Trọng Vinh, (11 CT Lam Sơn, Thanh Hóa), Nguyễn Việt Anh (10 CT Phan Bội Châu), Huyền Thắng Trung (11A Nguyễn Văn Trỗi, Can Lộc), (Nghệ Tĩnh). Lê Tự Lục (12CT Quốc học Huế), Nguyễn Hân (12A Đại Lộc, Quảng Nam Đà Nẵng). Nguyễn Tâm An (12I), Lương Tuấn Khải (12H), (Phan Bội Châu, Phan Thiết). Xà Phương Tâm (10C Pleiku 1), Nguyễn Bình Ngọc Khuê (9B Hội Thương 2, Pleiku), (Gia Lai Kông Tum). Phan Đình Nam (11B Đắc Min), Bùi Thị Hòa (12M Buôn Ma Thuột), (Đắc Lắc). Phạm Chí Thuận (10 CT), Trần Tiến Thành (11H), (Ngô Quyền, Biên Hòa, Đồng Nai), Lâm Đại (10 B Thủ Dầu Một), Lê Hồng Sơn (10A TH thị xã), (Sông Bé). Lê Ngọc Tùng (10A3 thị xã Tây Ninh). Lê Bá Tường, Nguyễn Ngọc An, Nguyễn Hà Thanh, (11 CT Long Xuyên, An Giang). Nguyễn Hữu Thọ, Hồ Đắc Thái, (10A2) Đốc Binh Kiều, Cai Lậy, Tiền Giang). Nguyễn Văn Ngoan (11F Mỏ Cày, Bến Tre). Lương Minh Thông (12 Cần Thơ Hậu Giang).

Bạn đọc tìm tòi

MỘT MỞ RỘNG NHỎ

Bài toán 6/106 của Báo Toán học và tuổi trẻ là:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có

$$\sqrt[n]{(n+1)!} \geqslant 1 + \sqrt[n]{n!} \qquad (1)$$

Qua lời giải của Trần Duy Liên — A₀8 ĐHTH Hà Nội, đăng trên số báo 109, tôi tìm thêm được một mở rộng nhỏ sau đây:

Rõ ràng bất đẳng thức (1) tương đương với

$$1 \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)!}} + \sqrt[n]{\frac{n!}{(n+1)!}}.$$

Nếu để ý, ta thấy bất đẳng thức (1) chỉ là một bất đẳng thức đặc biệt của bất đẳng thức:

$$\sqrt[n]{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

$$(a_i > 0) \qquad (2)$$

ta sẽ chứng minh được (1) nên chứng minh được (2). Ta chứng minh (2) như sau:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$1 \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)}} +$$

$$+ \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số dương ta có

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(a_1+1)\ldots(a_n+1)}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1+1} + \ldots + \frac{1}{a_n+1}\right) \qquad (*)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 \ldots a_n}{(a_1+1)\ldots(a_n+1)}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n+1}\right) \qquad (**)$$

Cộng (*) và (**) theo vế ta được kết quả cần chứng minh.

Bây giờ từ bất đẳng thức (2) nếu thay số 1 bằng số b bất kỳ ($b > 0$) ta thấy bất đẳng thức vẫn đúng, tức là ta có:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i + b)} \geqslant b + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \qquad (3)$$

(Chứng minh hoàn toàn tương tự).

Bây giờ nếu ở vế trái của (*) và (**) ta thay 1 bằng $b_1, b_2, \dots b_n$, $b_i > 0$, ta có các bất đẳng thức rộng hơn.

$$\sqrt[n]{\frac{b_1 \dots b_n}{(a_1+b_1)\dots(a_n+b_n)}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{b_n}{a_n+b_n}\right) \quad (***)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 \dots a_n}{(a_1+b_1)\dots(a_n+b_n)}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{a_n}{a_n+b_n}\right) \quad (****)$$

Cộng (***) và (****) theo vế và biến đổi, ta được bất đẳng thức

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\dots(a_n+b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1\dots a_n} + \sqrt[n]{b_1\dots b_n}$$

Bây giờ nếu để ý:

$$\frac{a}{a+b+\dots+l} + \frac{b}{a+b+\dots+l} \dots + \dots + \frac{l}{a+b+\dots+l} = 1,$$

và ta viết n bất đẳng thức dạng (***) nhưng ở đây a_i+b_i thay bằng tổng n số hạng $(a_i + b_i + \dots l_i)$ $i = 1, 2, \dots n$. Sau đó ta cộng theo vế và biến đổi tương đương, ta được bất đẳng thức (5) và cũng là bất đẳng thức tổng quát nhất:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i+\dots+l_i)} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} + \dots + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} l_i}. \quad (5)$$

Bây giờ ta đặt:

$$\sqrt[n]{a_i} = x_i,\ \sqrt[n]{b_i} = y_i, \dots, \sqrt[n]{l_i} = z_i$$

và biến bất đẳng thức (5) về dạng

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^n + y_i^n + \dots z_i^n\right) \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i + \prod_{i=1}^{n} y_i + \dots + \prod_{i=1}^{n} z_i\right)^n. \quad (6)$$

+ Nếu n = 2 thì ta được bất đẳng thức Bunhiacốpxki:

$$\left(x_1^2 + y_1^2 + \dots + z_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2 + \dots + z_2^2\right) \geqslant (x_1x_2 + y_1y_2 + \dots + z_1z_2)^2$$

+ Nếu n = 3 thì ta được

$$\left(x_1^3 + y_1^3 + \dots + z_1^3\right)\left(x_2^3 + y_2^3 + \dots + z_2^3\right) \times \left(x_3^3 + y_3^3 + \dots + z_3^3\right) \geqslant (x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + \dots + z_1z_2z_3)^3$$

là bất đẳng thức mở rộng của bài số 5/129 trong báo Toán học và tuổi trẻ số 1 năm 1983.

NGUYỄN VIỆT QUANG
(Lớp 10 ĐHTH Hà Nội)

CÁC BẠN DỰ THI GIẢI TOÁN CHÚ Ý

Để có đầy đủ thông tin về các bạn dự thi Tòa soạn đề nghị mỗi bạn đã gửi bài dự thi gửi về Tòa soạn các thông tin sau đây:

1. Họ và tên (chính thức trong giấy tờ ở nhà trường và bút danh ghi trong bài giải dự thi, nếu có).
2. Ngày, tháng, năm, sinh
3. Nam hay nữ.
4. Lớp. Trường. Huyện. Quận. Tỉnh. Thành phố.
5. Địa chỉ nhà riêng.

TÒA SOẠN

In 11.150 cuốn tại Xí nghiệp in 75 Hàng Bồ — Hà nội. Chỉ số: 12884 Giá: 1đ00
Số in 72/84 In xong và gửi lưu chiểu tháng 7/84