

VIỆN KHOA HỌC

VIỆT NAM

HỘI TOÁN HỌC

VIỆT NAM

Số 135

1

1984

# TOÁN HỌC

## tuổi trẻ

BẢO RA HAI THÁNG MỘT KỶ

Tổng biên tập: Nguyễn Cảnh Toàn

Phó Tổng biên tập: Phan Đức Chính

Trụ sở: 7 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

Điện thoại: 52825

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

## THẬT VÀ GIẢ ƠCLIT

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Tiếp theo câu chuyện bắt đầu ở báo Toán học và Tuổi trẻ số 130 (tháng 2/1983), tôi nhớ lại rằng, hồi học phổ thông, khi tôi nêu thắc mắc: "tại sao lại là  $a^2 = b^2 + c^2$  (định lý Pitago) mà không là  $a^2 = b^2 - c^2$ ? thì có bạn cùng lớp đã cho tôi là «điên»: «Cậu điên hay sao đấy». Thì cạnh huyền  $a$  lớn hơn từng cạnh góc vuông nên phải là + chứ - sao được. Hồi đó tôi không đủ lý lẽ để cãi lại bạn tôi nhưng vẫn mơ hồ cảm thấy rằng thắc mắc của mình không phải là hoàn toàn vô căn cứ. Nhưng trình độ phổ thông của tôi lúc đó không cho phép tôi đi xa hơn được chút nào theo hướng này, khác với điều đã xảy ra khi tôi thắc mắc tại sao lại là số mũ 2 ở  $a, b, c$ . Mãi đến về sau, khi đã có trình độ khá cao, tôi mới vỡ lẽ ra rằng ở đời này vẫn có thứ hình học trong đó định lý Pitago được diễn tả bằng công thức  $a^2 = b^2 - c^2$ , trong đó  $a$  là cạnh huyền. Và hôm nay, tôi muốn giới thiệu với các bạn thứ hình học đó chỉ với kiến thức phổ thông thôi. Dùng một hệ tọa độ Đề-các vuông góc ta thiết lập được một song ánh (tức là một sự

tương ứng mộtđóimột) giữa tập hợp các điểm trong mặt phẳng và tập hợp các cặp số thực sắp thứ tự: ứng với mỗi điểm ta có cặp số thực duy nhất trong đó số đầu là hoành độ và số thứ hai là tung độ của điểm đã cho; ngược lại, ứng với mỗi cặp số thực sắp thứ tự  $(a, b)$  thì có một điểm duy nhất có hoành độ bằng  $a$  và tung độ bằng  $b$ . Ta cũng thiết lập được một song ánh như vậy giữa tập hợp tất cả các vòng tròn định hướng có tâm trên một đường thẳng cho trước  $D$  và tập hợp các cặp số thực sắp thứ tự: ứng với mỗi vòng tròn ta có cặp số thực sắp thứ tự trong đó số đầu là hoành độ tâm vòng tròn (sau khi đã biến đường thẳng  $D$  thành một trục tọa độ) và số thứ hai là một số đại số có giá trị tuyệt đối bằng bán kính vòng tròn, có dấu là + hay - tùy theo vòng tròn đó được định hướng ngược hay thuận chiều kim đồng hồ; ngược lại, ứng với mỗi cặp số thực sắp xếp thứ tự  $(a, b)$  ta có vòng tròn mà tâm ở trên  $D$  có hoành độ  $a$ , bán kính bằng  $|b|$  và được định hướng ngược hay thuận chiều kim đồng hồ từ

theo  $b$  dương hay âm. Điều đó gọi cho ta ý sau đây: gọi mỗi vòng tròn có định hướng nói trên là một « điểm », hoành độ tâm vòng tròn là « hoành độ » của « điểm » và bán kính đại số của vòng tròn là « tung độ » của « điểm ».

Giữa hai điểm thông thường  $A_1(a_1, b_1)$  và  $A_2(a_2, b_2)$  có khoảng cách  $d$  được diễn tả theo các tọa độ  $a_1, b_1$  và  $a_2, b_2$  như sau:

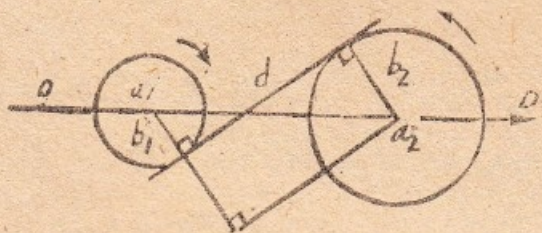
$$d^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 \quad (1)$$

Ta có được công thức (1) là nhờ định lý Pitago.

Trong thế giới vòng tròn định hướng nói trên, ta cũng thử đưa vào một khái niệm về « khoảng cách » giữa hai « điểm »: ta sẽ gọi chiều dài của một tiếp tuyến chung là khoảng cách giữa hai vòng tròn, tiếp tuyến chung đó là tiếp tuyến chung ngoài hay tiếp tuyến chung trong tùy theo hai vòng tròn là cùng hướng hay ngược hướng (h.1 và h.2).



Hình 1



Hình 2

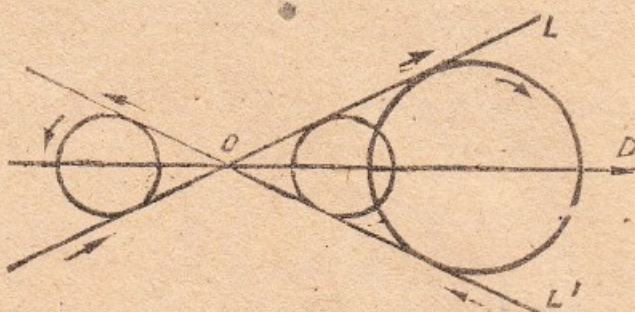
Như thế thì, trong mọi trường hợp, bạn đọc dễ thấy rằng « khoảng cách »  $d$  giữa hai « điểm » theo thứ tự có tọa độ  $(a_1, b_1)$  và  $(a_2, b_2)$  (h.1 và h.2) sẽ được diễn tả bởi công thức:

$$d^2 = (a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2 \quad (2)$$

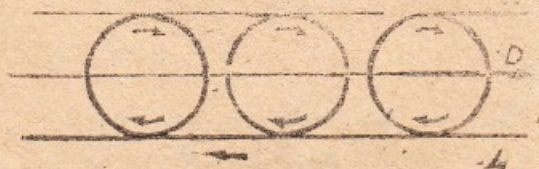
Công thức này chỉ khác công thức (1) ở một dấu tại về thứ hai.

Trong thế giới vòng tròn định hướng này thì « đường thẳng » là cái gì?

Vì mỗi vòng tròn định hướng có tâm trên  $D$  là một « điểm » nên « đường thẳng » phải là một tập hợp vòng tròn định hướng có tâm trên  $D$ . Cũng



Hình 3



Hình 4

dễ cảm thấy rằng tập hợp vòng tròn đó phải có chung một tiếp tuyến định hướng  $L$  sao cho hướng trên tiếp tuyến trùng với hướng trên mỗi vòng tròn tại tiếp điểm. Dĩ nhiên tập hợp đó còn có một tiếp tuyến chung thứ hai  $L'$  đối xứng với tiếp tuyến  $L$  và qua  $D$  nhưng hướng ngược lại với hướng đối xứng (h.3 và h.4). Nhưng chưa phải là hết chuyện với các « đường thẳng » như ở h.3 và h.4. Thực tế phức tạp hơn nhiều vì với những cặp vòng tròn không có tiếp tuyến chung, chẳng hạn như một cặp hai vòng tròn đồng tâm thì chắc chắn rằng « đường thẳng » do chúng xác định sẽ không có dạng như ở h.3 hay h.4. Để bao quát được mọi tình huống, ta chú ý rằng ở h.3, các vòng tròn định hướng xét từng đôi đều là vị tự của nhau (tâm vị tự là  $O$ ) còn ở h.4, các vòng tròn định hướng xét từng đôi là tịnh tiến của nhau dọc theo  $D$ . Bởi vậy, ta sẽ nói rằng một « đường thẳng » là một tập hợp những vòng tròn định hướng (tâm trên  $D$ ) đôi một vị tự (hay tịnh tiến) của nhau trong những phép vị tự cùng tâm (tâm này ở trên  $D$ ) hay những phép tịnh tiến dọc theo  $D$ .

Ta sẽ có ba loại « đường thẳng ». Loại thứ nhất gồm những « đường » mà bất cứ hai « điểm » nào trên một « đường » như vậy đều có khoảng cách thực ( $d^2 > 0$  tính theo (2)) (h.3 và h.4 cho ta những « đường thẳng » như vậy). Loại thứ hai gồm những « đường » mà bất cứ hai « điểm » nào trên một « đường » như vậy đều có khoảng cách ảo ( $d^2 < 0$  tính theo (2)). (Ví dụ « đường thẳng » gồm tất cả những vòng tròn định hướng đồng tâm). Loại thứ ba gồm những « đường thẳng », mà trên mỗi « đường » như vậy bất cứ hai « điểm » nào cũng có khoảng cách bằng không

$d^2 = 0$  tính theo (2)); đó là những "đường thẳng" gồm những vòng tròn định hướng tiếp xúc với nhau tại một điểm trên  $D$  (hai vòng cùng hướng thì tiếp trong với nhau, hai vòng khác hướng thì tiếp ngoài với nhau).

Hình học trong đó khoảng cách được tính bằng công thức (1) là hình học thông thường hay hình học  $\mathcal{O}$ clit. Hình học trong đó khoảng cách được tính bằng công thức (2) gọi là hình học giả -  $\mathcal{O}$ clit. Nó có ứng dụng rất quan trọng trong lý thuyết tương đối hẹp, một lý thuyết rất quan trọng của vật lý hiện đại. Có dịp tôi sẽ nói chuyện với các bạn về vấn đề này. Còn bây giờ, xin các

bạn hãy làm một vài công trình nghiên cứu nhỏ nhỏ sau đây:

1) Nghiên cứu xem trong hình học này tiên đề  $\mathcal{O}$ clit có nghiệm hay không (từ đó giải thích tại sao người ta gọi hình học này là giả -  $\mathcal{O}$ clit).

2) Nghiên cứu xem tất cả các đường thẳng cùng đi qua một điểm được chia cụ thể ra ba loại như thế nào? Hai đường thẳng song song có cùng một loại không?

3) Nghiên cứu xem trong hình học này, định lý về ba đường trung tuyến (của một tam giác) đồng quy có đúng hay không?

## LỜI GIẢI BÀI TOÁN 3/129

**T**ÒA soạn nhận được rất ít lời giải bài toán 3/129. Trong số những lời giải đúng, người giải lại dùng những kiến thức rất ít gặp đối với học sinh trung học, hoặc trình bày quá vắn tắt. Để có một lời giải dễ hiểu, phù hợp với phần lớn học sinh trung học và với các độc giả trẻ tuổi, yêu toán, thì phải trình bày tương đối dài. Vì vậy chúng tôi trình bày riêng lời giải bài toán này thành bài viết này.

**Bài 3/129. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên tố  $p$  có tính chất sau: không tồn tại  $p-1$  số tự nhiên liên tiếp sao cho có thể chia chúng thành hai nhóm để tích các số trong mỗi nhóm bằng nhau.**

**Bổ đề 1.** Tồn tại vô số số nguyên tố có dạng  $4k+3$ .

**Chứng minh:** Giả sử chỉ có hữu hạn số nguyên tố dạng  $4k+3$  là  $3, 7, 11, \dots, p_n$ . Xét số tự nhiên  $N = 4(7 \cdot 11 \cdot 19 \dots p_n) + 3$ . Dễ dàng thấy rằng số  $N$  lớn hơn mọi số nguyên tố  $3, 7, 11, \dots, p_n$ , mà  $N$  có dạng  $4k+3$  nên  $N$  là hợp số. Do số  $N$  không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số  $7, 11, 19, \dots, p_n$ , nên các thừa số nguyên tố của  $N$  đều có dạng  $4k+1$ . Nhưng do

$(4k_1+1)(4k_2+1) = 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 4k_3 + 1$ ,  
nên suy ra  $N$  có dạng  $4k+1$ , mâu thuẫn với dạng  $4k+3$  của  $N$ . Vậy phải có vô hạn số nguyên tố dạng  $4k+3$ .

**Bổ đề 2.** Với  $p$  là một số nguyên tố có dạng  $4k+3$ , không có số nguyên  $x$  nào để  $(x^2+1)$  chia hết cho  $p$ .

**Chứng minh:** Giả sử có số nguyên  $x_0$  để  $(x_0^2+1)$  chia hết cho  $p$ , tức là  $x_0^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Từ đó có

$$x_0^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}, \text{ hay } x_0^{p-1} - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod{p}. \text{ Nhưng theo định lý Fermat}$$

nhỏ thì  $x_0^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , nên ta có  $(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Với chú ý  $p$  là số nguyên tố dạng  $4k+3$ , ta có  $-2 \equiv 0 \pmod{p}$ , vô lý! Bổ đề 2 được chứng minh.

**Bổ đề 3.**  $(p-1)! + 1$  chia hết cho  $p$ , khi  $p$  là số nguyên tố.

**Chứng minh:** Với  $a$  là số bất kỳ trong các số  $2, 3, \dots, p-2$ , ta xét dãy số  $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ . Do  $ja - ia = (j-i)a$  không chia hết cho  $p$ , với  $i \neq j$  và  $i, j = 1, 2, \dots, p-1$ , nên các số trong dãy này khi chia cho  $p$  cho những số dư khác nhau và dĩ nhiên cũng không có số nào trong dãy chia hết cho  $p$ . Vậy các số dư của dãy khi chia cho  $p$  gồm  $1, 2, \dots, p-1$ . (1)

Xét  $b$  là một số bất kỳ trong các số  $1, 2, \dots, p-1$  sao cho  $ab \equiv 1 \pmod{p}$ .

Nếu  $b=1$  hoặc  $b=p-1$ , thì dễ thấy  $ab \not\equiv 1 \pmod{p}$ . Vậy  $b \neq 1$  và  $b \neq p-1$ .

Nếu  $b=a$  thì  $b^2 = ab \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow b^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow (b-1)(b+1) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow b=1$ ,

hoặc  $b = p - 1$ , vô lý vì  $b = a$ ,  $a \in \{2, 3, \dots, (p-2)\}$ .  
Vậy  $b \neq a$ .

Như vậy để  $ab \equiv 1 \pmod{p}$  thì  $a, b \in \{2, 3, \dots, p-2\}$  và  $a \neq b$ . Kết hợp với (1), ta có: với một số bất kỳ  $a \in \{2, 3, \dots, p-2\}$  thì sẽ có một và chỉ một số  $b \in \{2, 3, \dots, p-2\}$  và  $b \neq a$  để  $ab \equiv 1 \pmod{p}$ . Vậy tích  $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-2)$  gồm  $(p-3)/2$  cặp tích đồng dư 1 theo môđun  $p$ . Suy ra  $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$ . Vậy  $(p-1)! = 1 \cdot (p-1) \cdot (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-2)) \equiv -1 \pmod{p}$ , tức là  $(p-1)! + 1$  chia hết cho  $p$ .

Bây giờ giải bài toán 3/129, ta sẽ chứng minh rằng: bất kỳ một số nguyên tố  $p$  nào có dạng  $4k + 3$  đều thỏa mãn điều kiện bài toán.

Thực vậy, giả sử ngược lại là có số nguyên tố  $p$  dạng  $4k + 3$  mà tồn tại  $p-1$  số tự nhiên liên tiếp sao cho có thể chia chúng thành hai nhóm để tích các số trong mỗi nhóm bằng nhau. Để thấy khi chia  $p-1$  số tự nhiên liên tiếp cho

số nguyên tố  $p$  ta được các số dư khác nhau. Từ đó nếu có một số nào đó trong  $p-1$  số tự nhiên liên tiếp tồn tại trên chia hết cho  $p$  thì trong  $p-1$  số tự nhiên này không còn số nào khác chia hết cho  $p$ . Khi đó không thể chia  $p-1$  số tự nhiên đó thành hai nhóm để tích các số trong mỗi nhóm bằng nhau. Vậy tập hợp các số dư khi chia  $p-1$  số đó cho  $p$  là  $\{1, 2, \dots, p-1\}$ . Đặt tích các số trong mỗi nhóm là  $x$ , ta có

$$x^2 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

Theo bổ đề 3, ta có  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ , thay  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Điều này không thể có, do bổ đề 2.

Vậy mọi số nguyên tố dạng  $(4k + 3)$  đều thỏa mãn điều kiện bài toán. Tính vô hạn của các số nguyên tố này đã được bổ đề 1 chứng minh.

TẠ VĂN TỰ



**Bài 1/132.** Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  sao cho tổng các chữ số của nó bằng

$$n^2 - 1964n + 120.$$

Lời giải (của Trịnh Đào Chiên - trường trung học An Nhơn, Nghĩa Bình).

Ký hiệu  $S(n)$  là tổng các chữ số của số tự nhiên  $n$ . Khi đó, theo đề ra, ta có:

$$S(n) = n^2 - 1964n + 20. \quad (1)$$

Nhận xét rằng với mỗi số tự nhiên  $n$ , ta luôn có:

$$0 \leq S(n) \leq n.$$

Khi đó:

1) Nếu  $1 \leq n \leq 1963$  thì  $(n-1)(n-1963) \leq 0$  hay  $n^2 - 1964n + 1963 \leq 0$ . Do vậy  $n^2 - 1964n + 20 < 0$ . Trường hợp này (1) không thỏa mãn.

2) Nếu  $n = 1964$  thì  $S(1964) = 1 + 9 + 6 + 4 = 20$ .

Do vậy số  $n = 1964$  thỏa mãn (1).

3) Nếu  $n > 1964$  suy ra  $n - 1964 \geq 1$ .

Do vậy

$$\begin{aligned} n^2 - 1964n + 20 &> n^2 - 1964n = \\ &= n(n - 1964) \geq n. \end{aligned}$$

Suy ra  $n$  không thỏa mãn (1) trong trường hợp này.

Kết luận: Tồn tại duy nhất một số tự nhiên  $n = 1964$  thỏa mãn điều kiện bài ra.

N. D. M.

**Bài 2/132.** Trong một cuộc thi đấu cờ quốc tế có 16 người tham gia và thi đấu theo thể thức người nào cũng đấu với mỗi người khác một ván. Chứng minh rằng:

a. Khi mọi người đều đã đấu ít nhất 11 ván thì với một người A bất kỳ bao giờ cũng tìm được 3 người khác để cùng với A lập thành nhóm 4 người đã đấu một đấu với nhau.

b. Khi một người đầu đã đấu ít nhất 13 ván thì với một người E bất kỳ bao giờ cũng tìm được 5 người khác để cùng với E lập thành nhóm 6 người đã đấu một đấu với nhau.

Lời giải. a. Ta giải bài toán tổng quát: số người tham gia là  $3n + 1$  và mỗi người đã đấu ít nhất  $2n + 1$  ván.

Xét người A bất kỳ. Giả sử B là một người đã đấu với A. Số người chưa đấu với A nhiều nhất là  $n-1$ , số người chưa đấu với B nhiều nhất là  $n-1$ . Vậy ngoài A và B ra, trong  $3n-1$  người còn lại có ít nhất  $n+1$  người đã đấu với cả A và B. Xét người C bất kỳ trong  $n+1$  người đó. Vì C đã đấu ít nhất  $2n+1$  ván nên C đã đấu với một người D nào đó trong nội bộ  $n+1$  người nói trên. Vậy B, C, D là 3 người cùng với A lập thành nhóm 4 người đã đấu một đấu với nhau.

Với  $n=5$  ta có câu a của bài toán.

b. Xét người E bất kỳ và F là một người đã đấu với E. Số người chưa đấu với E nhiều nhất là 2 và số người chưa đấu với F nhiều nhất là 2. Vậy trong 14 người khác E và F, có ít nhất 10 người đã đấu với E và F. Mỗi người trong 10 người này ít nhất cũng đã đấu với 7 người trong nội bộ 10 người. Bài toán tổng quát ở phần a với  $n=3$  cho ta kết luận: Với một người A bất kỳ thuộc tập hợp 10 người đang xét bao giờ cũng tìm được 3 người B, C, D cũng thuộc tập hợp đó để A, B, C, D là 4 người đã đấu một đấu với nhau.

Vậy F, A, B, C, D là 5 người cùng với E lập thành nhóm 6 người đã đấu một đấu với nhau.

Phần b cũng có thể tổng quát hóa: số người thi đấu là  $5n+1$ , mỗi người đã đấu ít nhất  $4n+1$  ván. (Chứng minh tương tự trên).

Chú ý: Có thể phát biểu thành bài toán tổng quát chung: số người dự thi đấu là  $an+1$ ,  $n$ -tự nhiên,  $a$ -tự nhiên lẻ  $\geq 3$ , mỗi người đã đấu ít nhất  $(a-1)n+1$  ván, tìm được nhóm  $a+1$  người.

Các bạn gửi bài đều có lời giải đúng, song không tổng quát hóa như trên.

P. Q. G.

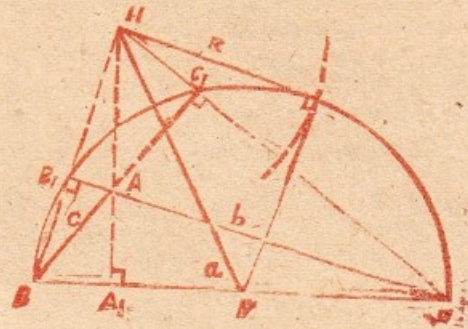
**Bài 3/132.** Hai đường tròn cắt nhau được gọi là trực giao với nhau nếu các tiếp tuyến của hai đường tròn tại giao điểm vuông góc với nhau.

Cho tam giác lồi ABC có độ dài các cạnh  $BC=a$ ,  $CA=b$ ,  $AB=c$ . Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đường tròn trực giao với cả ba đường tròn đường kính BC, CA, AB. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn đó theo  $a, b, c$ .

Lời giải (của Trần Quân - lớp 10 CT, trường Phan Chu Trinh, Đà Nẵng).

Giả sử tam giác ABC tù tại A. Gọi các đường tròn đường kính BC, CA, AB lần lượt là  $(c_1)$ ,  $(c_2)$ ,  $(c_3)$ . Để ý rằng hai đường tròn trực giao với nhau thì hai bán kính tại giao điểm của hai đường tròn vuông góc với nhau. Do đó tâm

của đường tròn trực giao với hai đường tròn  $(c_2)$  và  $(c_3)$  nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn này, tức là nằm trên đường cao  $AA_1$  của tam giác ABC. Tương tự như vậy tâm của đường tròn trực giao với các cặp đường tròn  $(c_1)$ ,  $(c_3)$  và  $(c_1)$ ,  $(c_2)$  tương ứng sẽ nằm trên các đường cao  $BB_1$  và  $CC_1$ . Ba đường cao này đồng qui tại trực tâm H cho nên tồn tại một đường tròn tâm duy nhất trực giao với cả ba đường tròn  $(c_1)$ ,  $(c_2)$ ,  $(c_3)$ .



Gọi M là trung điểm của BC, R là bán kính của đường tròn này, ta thấy  $R^2 = HM^2 - a^2/4$ . Ký hiệu S là diện tích của tam giác ABC, ta có  $AA_1 = 2S/a$ ,  $BB_1 = 2S/b$ ,  $CC_1 = 2S/c$ . Hai tam giác  $HBA_1$  và  $CBB_1$  là đồng dạng, từ đó

$$HB = CB, BA_1/BB_1.$$

Do đó

$$HB^2 = a^2 [c^2 - (2S/a)^2] / (2S/b)^2 = b^2 (a^2 c^2 - 4S^2) / (2S)^2$$

tương tự

$$HC^2 = c^2 (a^2 b^2 - 4S^2) / (2S)^2$$

Theo công thức về đường trung tuyến ta có:

$$\begin{aligned} 4HM^2 &= 2b^2 (a^2 c^2 - 4S^2) / (2S)^2 + \\ &\quad 2c^2 (a^2 b^2 - 4S^2) / (2S)^2 - a^2 \\ &= a^2 b^2 c^2 / S^2 - (a^2 + 2b^2 + 2c^2). \end{aligned}$$

Vậy:

$$R^2 = HM^2 - a^2/4 = a^2 b^2 c^2 / (25S^2) - (a^2 + b^2 + c^2)/2$$

Hay

$$\begin{aligned} R^2 &= a^2 b^2 c^2 [4p(p-a)(p-b)(p-c)] / \\ &\quad - (a^2 + b^2 + c^2)/2. \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{a^2 b^2 c^2 [4p(p-a)(p-b)(p-c)] - (a^2 + b^2 + c^2)/2}$$

trong đó

$$p = (a + b + c)/2.$$

N. Đ. T.

**Bài 4/132.** Hãy xác định các số thực  $p, q$  thỏa mãn các điều kiện sau đây:

a) Các phương trình  $x^2 + px + 1 = 0$ ,  $x^2 + qx + 2 = 0$  có một nghiệm chung:

b) Tổng  $|p| + |q|$  nhỏ nhất.

*Lời giải.* Cách 1 (của Trần Quân - 10CT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng). Từ điều kiện a, tồn tại số thực  $x$  sao cho

$$\begin{cases} x^2 + px + 1 = 0 \\ x^2 + qx + 2 = 0. \end{cases}$$

Do đó phương trình

$$2x^2 + (p+q)x + 3 = 0 \quad (1)$$

có nghiệm. Ta có

$$\Delta = (p+q)^2 - 24 \geq 0 \\ \Leftrightarrow |p+q| \geq 2\sqrt{6}.$$

Ta có

$$|p| + |q| \geq |p+q|, \text{ nên để } |p| + |q|$$

nhỏ nhất thì  $|p| + |q| = |p+q| = 2\sqrt{6}$ . Khi đó (1) có nghiệm kép  $x = \pm \sqrt{6}/2$ . Thay  $x = \pm \sqrt{6}/2$  vào hai phương trình đầu tiên thì tìm được

$$p = \pm 5/\sqrt{6}, q = \pm 7/\sqrt{6}.$$

Vì  $p, q$  cùng dấu nên chỉ có hai cặp  $p, q$  thỏa mãn điều kiện bài toán là

$$\begin{cases} p = 5/\sqrt{6} \\ q = 7/\sqrt{6} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} p = -5/\sqrt{6} \\ q = -7/\sqrt{6}. \end{cases}$$

*Cách 2* (của Lê Thanh Hà - 11 chuyên toán, Lam Sơn, Thanh Hóa). Gọi  $x_0$  là nghiệm chung của hai phương trình trong đầu bài. Thế thì  $x_0 \neq 0$ . Do đó

$$x_0^2 + px_0 + 1 = 0 \Rightarrow |p| = (x_0^2 + 1)/|x_0|$$

$$x_0^2 + qx_0 + 2 = 0 \Rightarrow |q| = (x_0^2 + 2)/|x_0|.$$

Vậy

$$|p| + |q| = (2x_0^2 + 3)/|x_0| \geq$$

$$2\sqrt{2x_0^2 \cdot 3}/|x_0| = 2\sqrt{6}.$$

Giá trị nhỏ nhất của  $|p| + |q|$  là  $2\sqrt{6}$ , đạt được khi  $2x_0^2 = 3 \Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{3}/2$ .

Từ đó tính được  $p, q$  (như cách 1)

**Bài 5/132.** Cho  $a$  là một số dương. Trong tất cả các cặp số  $(x, y)$  thỏa mãn điều kiện

$$\log_x 2 + y^2(x+ay) \geq 1,$$

hãy tìm cặp số

a) Có  $x$  lớn nhất,

b) Có  $y$  lớn nhất.

*Lời giải* (dựa theo lời giải của Nguyễn Đăng Cử - 11 chuyên toán, Phan Chu Trinh, Đà Nẵng)

Đặt điều kiện

$$x+ay > 0, x^2+y^2 > 0, x^2+y^2 \neq 1.$$

a) Tìm cực đại  $x$ : Xét trường hợp  $x^2+y^2 > 1$

Khi đó  $x+ay \geq x^2+y^2 \Rightarrow y^2 - ay + x^2 - x \leq 0 \Rightarrow$  tam thức bậc 2 của  $y$  có biệt số  $\geq 0$ :

$$\Delta = a^2 - 4x^2 + 4x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{1+a^2})/2 \leq x \leq (1 + \sqrt{1+a^2})/2$$

$\Rightarrow x$  lớn nhất là  $(1 + \sqrt{1+a^2})/2$ . Giá trị này đạt được khi  $y = a/2$ .

Trường hợp  $x^2+y^2 < 1 \Rightarrow x < 1 < (1 + \sqrt{1+a^2})/2$ .

Vậy  $x$  cực đại với cặp  $[(1 + \sqrt{1+a^2})/2, a/2]$

b) Tìm cực đại  $y$ : Trường hợp  $x^2+y^2 > 1$ .

$$x^2 + x - y^2 - ay \leq 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4y^2 + 4ay \geq 0$$

$$\Rightarrow (a - \sqrt{a^2-1})/2 \leq y \leq (a + \sqrt{a^2+1})/2.$$

Nếu  $(a + \sqrt{a^2+1})/2 \geq 1$

thì  $y_{\max} = (a + \sqrt{a^2+1})/2$  giá trị này đạt được với  $x = 1/2$ .

Trường hợp  $x^2+y^2 < 1, y < 1 \leq (a + \sqrt{a^2+1})/2$ . Với  $a \geq 3/4, y$  cực đại với cặp  $[1/2, (a + \sqrt{a^2+1})/2]$

Nếu  $a < 3/4$  thì với  $x=0, (a + \sqrt{a^2+1})/2 < y < 1$ ,  $(x, y)$  thỏa mãn điều kiện đầu bài  $\Rightarrow y$  có thể rất gần 1 nhưng không bằng 1  $\Rightarrow$  Trường hợp này không có  $y$  cực đại.

D.B.K.

**Bài 6/132.** Chứng minh rằng nếu có

$$a_1 \cos^2 x + a_2 \cos^2 2x + \dots + a_n \cos^2 nx \geq 1$$

với mọi  $x$  và  $n \geq 2$ , thì cũng có:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2n/(n-1).$$

*Lời giải.* Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Nếu  $\varphi = 2k\pi/(n+1)$  với  $k$  và  $n$  là các số nguyên và  $k$  không chia hết cho  $(n+1)$  thì

$$S = \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi = -1.$$

Thực vậy, có  $2 \sin(\varphi/2) \cdot S = \sum_{k=1}^n 2 \cos k\varphi \sin(\varphi/2)$

$$= \sum_{k=1}^n [\sin((k+1/2)\varphi) - \sin((k-1/2)\varphi)]$$

$$= \sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) - \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\text{Vậy: } S = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)}{2 \sin(\varphi/2)} - \frac{1}{2} \quad (\text{chú ý } \sin(\varphi/2) \neq 0 \text{ vì } k \text{ không chia hết cho } (n+1)). \text{ Do có}$$

$$\frac{2n+1}{2}\varphi = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2k\pi}{n+1} = \frac{(2n+1)k\pi}{n+1} = 2k\pi - k\pi/(n+1) = 2k\pi - \varphi/2, \text{ nên}$$

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) = -\sin(\varphi/2). \text{ Do vậy: } S = -1.$$

Bây giờ trở lại bài toán. Do đúng với mọi  $x$  nên nói riêng với  $x_1, x_2 = 2x_1, \dots, x_n = nx_1$  ta có:

$$\begin{cases} a_1 \cos^2 x_1 + \dots + a_n \cos^2 nx_1 \geq 1 \\ a_1 \cos^2 x_2 + \dots + a_n \cos^2 nx_2 \geq 1 \\ \dots \\ a_1 \cos^2 x_n + \dots + a_n \cos^2 nx_n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Chú ý rằng  $kx_2 = k \cdot 2x_1 = 2kx_1 = 2x_k$  nên hệ (1) trở thành:

$$\begin{cases} a_1 \cos^2 x_1 + \dots + a_n \cos^2 x_n \geq 1 \\ a_1 \cos^2 2x_1 + \dots + a_n \cos^2 2x_n \geq 1 \\ \dots \\ a_1 \cos^2 nx_1 + \dots + a_n \cos^2 nx_n \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức của (2) ta có:

$$a_1 T_1 + a_2 T_2 + \dots + a_n T_n \geq 3 \quad (3)$$

$$\text{Ở đó } T_i = \sum_{k=1}^n \cos^2 kx_i$$

Ta có

$$2T_i - n = \sum_{k=1}^n (2\cos^2 kx_i - 1) = \sum_{k=1}^n \cos k(2x_i).$$

Lấy  $2x_i = 2i\pi/(n+1)$ ; rõ ràng  $i$  không chia hết cho  $(n+1)$  vì  $1 \leq i \leq n$ , nên theo bổ đề ta có  $2T_i - n = -1$  hay

$$T_i = (n-1)/2 \text{ với mọi } i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Như vậy lấy  $x_1 = \pi/(n+1)$ , thì theo cách xác định  $x_2, \dots, x_n$  ở trên ta có  $x_2 = 2\pi/(n+1), \dots, x_n = n\pi/(n+1)$ , hay với mọi  $1 \leq i \leq n$  ta có  $2x_i = 2i\pi/(n+1)$ . Do vậy, theo (4) khi lấy  $x_i = \pi/(n+1)$  thì từ (3) ta có:

$$\frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq n \text{ hay}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2n/(n-1) \quad (\text{đ.p.c.m})$$

**Nhận xét:** Có ít bạn giải đúng bài toán này. Lời giải bài này tốt hơn cả là của các bạn Đỗ Trọng Vinh (11CT Lam Sơn, Thanh Hóa và Đào Thiện Cường (101 - Chu Văn An, Hà Nội).

**Bài 7/132** Cho tam giác ABC. Đường phân giác góc A cắt các đường trung tuyến đỉnh C và đỉnh B tại M và N. Gọi G là trọng tâm;  $p_a, m_b, m_c$  là độ dài đường phân giác đỉnh A, độ dài các đường trung tuyến đỉnh B và C;  $b, c$  là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh B và C của tam giác ABC.

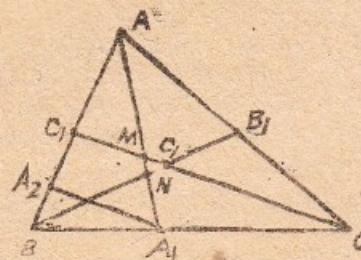
Chứng minh rằng: Nếu  $b \geq c$  thì:

$$a) MN \geq (4/9) p_a (b-c)/(b+c)$$

$$b) \frac{GN \cdot GM}{NM} = \frac{4}{9} \frac{m_b m_c (b-c)}{p_a (b+c)}$$

**Lời giải.** Gọi  $A_1, B_1, C_1$  là chân các đường phân giác đỉnh A, các đường trung tuyến đỉnh B và C. Từ  $A_1$  kẻ đường thẳng song song với  $CC_1$  cắt  $AB$  ở  $A_2$ . Ta có:

$$MA/MA_1 = C_1A/C_1A_2 = BC_1/C_1A_2 = BC/A_1C = 1 + A_1B/A_1C = 1 + c/b.$$



Do  $b \geq c$  nên  $MA_1 = MN + NA_1$  và chú ý

$MA/MA_1 + 1 = p_a/MA_1$  ta có:

$$p_a/(MN + NA_1) = (2b+c)/b. \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có  $NA/NA_1 = 1 + b/c$  và cũng chú ý  $NA/NA_1 + 1 = p_a/NA_1$ , ta có:

$$p_a/NA_1 = (2c+b)/c \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta rút ra được

$$MN = \frac{p_a(b^2 - c^2)}{(c + 2b)(b + 2c)} \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cosi cho 2 số ta có:  
 $(c + 2b)(b + 2c) \leq (9/4)(b + c)^2$ . Vậy phân a) được chứng minh:

$$MN \geq \frac{4}{9} \frac{p_a(b^2 - c^2)}{(b + c)^2} = \frac{4}{9} \frac{p_a(b - c)}{b + c}$$

Tiếp theo, do  $b \geq c$  nên  $MC_1 = GC_1 - GM$ ; Vậy:

$$\frac{MC_1}{MC} = \frac{(1/3)m_c - MG}{(2/3)m_c + MG} = \frac{c}{2b}$$

được:

$$MG = (2/3)(b - c)m_c/(c + 2b). \quad (4)$$

Chứng minh tương tự (với chú ý do  $b \geq c$  nên có  $NB_1 = NG + GB_1$ ) ta có:

$$NG = (2/3)(b - c)m_b/(2b + c) \quad (5)$$

Như vậy, từ (3), (4) và (5) ta có:

$$\frac{GN \cdot GM}{NM} = \frac{4}{9} \frac{(b - c)m_b m_c}{(b + c)p_a}$$

Phần b) cũng được chứng minh xong.

**Nhận xét:** Các bạn Nguyễn Ngọc Văn Khoa (10CT Phan Chu Trinh Đà Nẵng), Nguyễn Thanh Hà (12C Lý Thường Kiệt, Hà Nội) và Nguyễn Văn Hưng (11CT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng) có lời giải tương đối tốt.

T.V.T.

**Bài 8/132.** Trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho điểm B(-m, 0) và điểm C(m, 0). A là điểm trên mặt phẳng thỏa mãn điều kiện tung độ của A bằng ba lần tung độ của tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Tìm quỹ tích của I khi A biến thiên thỏa mãn điều kiện trên.

**Lời giải.** Đặt  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ , r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có

$$(a + b + c)r = 2dt(ABC) = 6dt(IBC) = 3ar$$

$$\Leftrightarrow b + c = 2a \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A = 2\sin(B + C)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 4\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{B-C}{2} = 2\cos \frac{B+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 3\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cotg \frac{B}{2} \cotg \frac{C}{2} = 3$$

Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ I đến trục Ox, ta có

$$\frac{BK \cdot CK}{IK^2} = 3 \Leftrightarrow m^2 - OK^2 = 3IK^2$$

Giả sử tọa độ của I là (x, y), thế thì  $OK = x$ ,  $IK = y$ , và ta có

$$m^2 - x^2 = 3y^2$$

Vậy quỹ tích của I là đường elip có phương trình

$$x^2 + 3y^2 = m^2$$

trừ hai điểm  $y = 0$ .

P.Q.G.

**Bài 9/132.** Xét các tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ;  $g_1(x) = \alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \alpha + \beta + \gamma$ ;  $f_1(x) = ag(1)x^2 + bg_1(0)x + cg_1(1)$ .

Chứng minh rằng nếu các phương trình  $f(x) = 0$ ;  $g(x) = 0$  có nghiệm,  $g_1(x) \neq 0$  trên đoạn  $[-1, 1]$ , thì phương trình  $f_1(x) = 0$  cũng có nghiệm.

**Lời giải** (của Trần Quân - lớp 10CT, Trường Phan Chu Trinh, Đà Nẵng). Đề ý rằng  $g_1(x) = \alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma = g(x+1)$  nên ta có thể viết:

$$f_1(x) = ag(2)x^2 + bg(1)x + cg(0)$$

$$= a(4\alpha + 2\beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta + \gamma)bx + c\gamma$$

Để chứng minh phương trình bậc hai  $f_1(x) = 0$  có nghiệm thì ta cần phải chứng tỏ rằng  $\Delta = b^2(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 4c\gamma a(4\alpha + 2\beta + \gamma) \geq 0$ . (1)

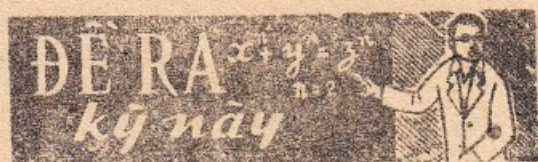
Theo giả thiết thì  $b^2 \geq 4ac$ ;  $\beta^2 \geq 4\alpha\gamma$  (vì các phương trình  $f(x) = 0$  và  $g(x) = 0$  có nghiệm) và  $g(x) \neq 0$  trên đoạn  $[0, 2]$  nên

$$g(0)g(2) = \gamma(4\alpha + 2\beta + \gamma) > 0 \quad (2)$$

Viết lại (1) dưới dạng

$$\Delta = (\alpha + \beta + \gamma)^2(b^2 - 4ac) + 4ac \times [((\alpha + \beta + \gamma)^2 - \gamma(4\alpha + 2\beta + \gamma))] \geq 0. \quad (1')$$





**Bài 1/135.** Chứng minh rằng nếu số  $N$  bằng tổng bình phương của 1984 số nguyên thì 1984  $\nmid N$  bằng tổng bình phương của 992, 1983 + 1 số nguyên.

Hà Huy Bằng

**Bài 2/135.** Trong một cuộc đấu cờ, điểm của  $n$  đấu thủ được ghi vào bảng vuông  $n^2$  ô. Ở thứ  $i \times j$  với  $i \neq j$  là điểm của đấu thủ  $i$  trong trận gặp đấu thủ  $j$  (thắng 1, hòa  $1/2$  và thua là 0 điểm). Các ô trên đường chéo chính ghi số 0.

Chứng minh rằng nếu có thể cắt bảng vuông theo cột thành hai hình chữ nhật  $n \times k$  và  $n \times (n-k)$  ô sao cho mỗi hình chữ nhật có đúng  $n/2$  tổng số điểm của mỗi đấu thủ, thì số  $n$  người dự đấu là một số chính phương.

Vũ Đình Hòa

**Bài 3/135.** Hãy tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  thỏa mãn tính chất sau: với mọi  $a, b$  nguyên thì

$$a^2 + b^2 : p \Leftrightarrow a : p, b : p.$$

Đỗ Đức Thái

**Bài 4/135.** Giả sử  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các đỉnh của một đa giác đều còn  $O$  là một điểm tùy ý bên trong đa giác đó. Chứng minh rằng có ít nhất một góc  $\angle A_i O A_j$  thỏa mãn bất đẳng thức

$$\pi(1-1/n) \leq \angle A_i O A_j \leq \pi.$$

Đặng Tử Ân

**Bài 5/135.** Cho  $A, B, C$  là ba góc của một tam giác (đo bằng radian). Hãy chứng minh rằng

$$\text{Acos}B + \text{sinAcos}C > 0$$

Đỗ Bá Khang

**Bài 6/135.** Cho  $n$  là số tự nhiên  $> 3$ ;  $a_1,$

$a_2, \dots, a_n$  là các số dương. Đặt  $p = \sum_{i=1}^n a_i$  và

$$S = \sum_{i=1}^n a_i / (p - a_i + 1) \text{ với qui ước } a_{n+1} = a_1.$$

1) Chứng minh rằng  $1 < S < 2$ .

2) Các bất đẳng thức trên có thể làm tốt hơn được không?

Nguyễn Minh Đức

**Bài 7/135.** a) Hãy xác định giá trị lớn nhất của  $a$  sao cho tồn tại số  $b$  để phương trình sau có ba nghiệm trong đoạn  $[-1, 1]$

$$x^3 - x^2 + bx - a = 0.$$

b) Chứng minh rằng khi đó cả ba nghiệm đều dương.

Nguyễn Đức Mậu

**Bài 8/135.** a) Chứng minh rằng không thể có 10 số nguyên tố lập thành cấp số cộng chứa trong 1984 số tự nhiên đầu tiên.

b) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất 9 số nguyên tố lập thành cấp số cộng chứa trong 1984 số tự nhiên đầu tiên.

Tạ Văn Tư

**Bài 9/135.** Cho hai đường tròn bằng nhau  $(c_1)$  và  $(c_2)$  tiếp xúc với nhau tại  $D$ . Vẽ đường kính  $MN$  của đường tròn  $(c_1)$  vuông góc với đường nối tâm hai đường tròn. Chứng minh rằng trên nửa đường tròn  $MN$  không chứa  $D$ , tồn tại điểm  $A$  sao cho hai tiếp tuyến của đường tròn  $(c_2)$  đi qua  $A$  cắt đường tròn  $(c_1)$  tại hai điểm  $B$  và  $C$  (khác  $A$ ) tạo nên tam giác  $CAB$  cân ( $CA = CB$ ). Chứng minh khi đó góc  $C > 90^\circ$ .

Phạm Quang Giám

## HỌC SINH TÌM TÀI

**Bài 10/135.** Cho biết  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 27$ , hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của đại lượng

$$A = x + y + z + xy + yz + zx.$$

Nguyễn Văn Loan

(1) C Quang Trung, Qui Nhơn

Tìm hiểu toán học hiện đại

## ĐỊNH LÝ BRAOE VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

HOÀNG ĐỨC TÂN

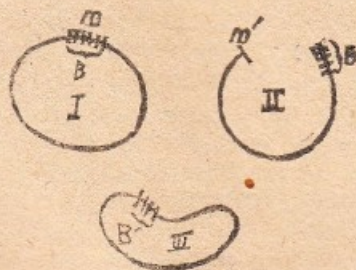
**T**RONG phạm vi bài báo này, chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc báo Toán học và tuổi trẻ một định lý nổi tiếng, mà nó có rất nhiều ứng dụng trong toán học. Trước hết, chúng ta hãy làm quen với một số khái niệm cần thiết:

1) Một ánh xạ từ hình  $A$  vào hình  $A'$  là qui luật mà theo đó mỗi một điểm  $m$  của hình  $A$  được ứng với một điểm  $m'$  xác định của hình  $A'$ . Điểm  $m'$  được gọi là ảnh của  $m$ , còn  $m$  được gọi là tạo ảnh của  $m'$ .

2) Ánh xạ hình  $A$  vào hình  $A'$  được gọi là liên tục tại điểm  $m \in A$ , nếu như một tập hợp điểm bất kỳ của  $A$  chứa các điểm khá gần điểm  $m$  được chuyển thành tập hợp điểm của hình  $A'$  cũng chứa các điểm khá gần điểm  $m'$ . Một ánh xạ toàn bộ hình  $A$  vào hình  $A'$  được gọi là liên tục, nếu như nó liên tục tại mọi điểm của hình  $A$ .

Xét một ví dụ minh họa cho khái niệm 2). Có 1 vòng dây cao su (I) chứa điểm  $m$ , và bộ phận  $B$  (phần gạch gạch) là gần điểm  $m$ . Ánh xạ là một phép biến dạng vòng dây (I). Phép biến đổi từ (I) sang (III) là liên tục tại  $m$  (vì sau phép biến dạng thì tập  $B'$  vẫn gần  $m'$ ), còn phép biến đổi từ (I) sang (II) là không liên tục tại  $m$  (vì sau phép biến dạng đó vòng dây cao su (I) đã bị đứt tại điểm  $m$  và do đó tập hợp  $B'$  không còn gần điểm  $m'$  nữa).

Sau đây ta sẽ xét tới một kết quả quan trọng của giải tích toán học.



Hình 1

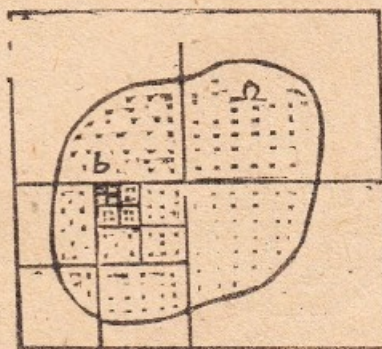
### Bổ đề Vaiectrass:

Giả sử ứng với mỗi điểm của miền hữu hạn  $\Omega$  nào đó của mặt phẳng, kẻ cả biên của miền  $\Omega$

(chẳng hạn, một hình tròn) có một đại lượng  $f$  nào đấy hoàn toàn xác định và thêm nữa là nếu ta lấy một điểm  $a$  bất kỳ trong số các điểm của miền  $\Omega$  thì dù cho  $\eta$  là một số dương nhỏ thế nào đi chăng nữa ta vẫn tìm được một số  $\varepsilon > 0$  khá bé sao cho hiệu số hai giá trị của  $f$  tại các điểm  $a$  và  $b$  ( $b \in \Omega$ ) bất kỳ sát với  $a$  một khoảng cách  $\varepsilon$ , về giá trị tuyệt đối là thỏa mãn điều kiện:  $|f_a - f_b| < \eta$  (ở đây ký hiệu  $f_x$  là giá trị của  $f$  tại điểm  $x$ ). Khi đó ta sẽ nói rằng đại lượng  $f$  là hàm liên tục của các điểm trong miền kín  $\Omega$ . Với khái niệm đó, Vaiectrass đã kết luận rằng:

**Bổ đề:** Nếu trên  $\Omega$  đại lượng  $f$  khắp nơi không âm và trên  $\Omega$   $f$  là tùy ý bé thì thế nào cũng tồn tại một điểm  $a \in \Omega$  mà tại đó  $f$  đúng bằng 0.

**Chứng minh:** Vì  $\Omega$  là miền hữu hạn, kín nên ta có thể phủ được  $\Omega$  bởi một hình vuông nào đó. Ta chia hình vuông đó thành 4 hình vuông con bằng nhau (xem hình 2).



Hình 2

Thế nào cũng có một trong các hình vuông con chứa các điểm thuộc  $\Omega$  mà tại đó  $f$  là bé tùy ý, bởi vì nếu không có các điểm như vậy ở mỗi trong các hình vuông con thì chúng sẽ không tồn tại trên cả hình vuông to và vì thế trong cả miền  $\Omega$  và điều đó là trái với giả thiết. Bây giờ ta lấy một cái nào đó trong các hình vuông con mà có chứa các điểm như vậy và ta lại chia nó thành 4 hình vuông con bằng nhau



Đó là điều mâu thuẫn. Vì thế các độ dài  $f$  của tất cả các vectơ dịch chuyển không thể lớn hơn hằng số  $\varepsilon > 0$  bất kỳ được. Tức là trong chúng có những vectơ ngắn tùy ý. Chính vì thế mà định lý Braoe đã được chứng minh.

Định lý Braoe đã cho ta một kết luận kỳ diệu về tính chất hình học, nếu bạn đọc coi hình tròn là một màng cao su và ánh xạ liên tục là phép biến dạng liên tục màng cao su đó (màng cao

su không có những lỗ thủng) một cách tùy tiện miễn là không được làm rách màng hay làm chúng dính lại, khi đó vẫn có kết luận của định lý (chú ý là màng cao su và cả phép biến dạng là phải làm trên cùng một mặt phẳng).

Có rất nhiều cách chứng minh cho định lý kỳ lạ này, song có lẽ cách chứng minh giới thiệu ở đây là đơn giản và dễ hiểu nhất.

### Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

## VÀI SUY DIỄN TỪ BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

TA VĂN TỰ

VỚI  $n$  số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (1)$$

Bất đẳng thức (1) quen thuộc được gọi là bất đẳng thức Côsi cho  $n$  số không âm. Bây giờ ta gọi  $P_k$  là tích tất cả các tổng  $k$  số hạng từ  $n$  số  $a_1, \dots, a_n$ . Khi đó ta có:  $P_1 = a_1 a_2 \dots a_n$ ;  $P_2 = (a_1 + a_2) \dots (a_1 + a_n) (a_2 + a_3) \dots (a_{n-1} + a_n) \dots$ ;  $P_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Với các ký hiệu này, bất

đẳng thức (1) được viết dưới dạng:  $P_n/n \geq \sqrt[n]{P_1}$ , và biểu thị mối liên hệ giữa hai số  $P_1$  với  $P_n$ . Từ đó, nảy ra vấn đề rộng hơn là nghiên cứu mối liên hệ giữa các số  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , với nhau! Để giải quyết vấn đề này, trước tiên ta xét mối quan hệ giữa  $P_k$  và  $P_{k-1}$  với  $k = 2, 3, \dots, n$  và mối quan hệ cần tìm được chỉ ra ở định lý dưới đây.

**Định lý:** Với  $n$  số không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , ta có bất đẳng thức:

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{C_n^k} P_k \geq P_{k-1}^{\frac{n-k+1}{k}} \quad (2)$$

trong đó  $C_n^k$  là tổ hợp chập  $k$  của  $n$  ( $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ) và  $2 \leq k \leq n$ .

**Chứng minh:** Theo định nghĩa về  $P_k$  ta thấy

$P_k$  có  $C_n^k$  thừa số, mỗi thừa số là 1 tổng  $k$  số hạng mà tập hợp  $k$  số hạng này là một tập hợp con  $k$  phần tử trong  $n$  phần tử  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Với tập hợp con thứ  $i$  là

$\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$  của tập hợp  $\{a_1, \dots, a_n\}$  ta đặt

$T_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}$  và viết được  $P_k = T_1 T_2 \dots T_N$

với  $N = C_n^k$ . Gọi  $H_j^i$  là tổng  $k-1$  số hạng thu được

từ tổng  $T_i$  bỏ đi số hạng  $a_{i_j}$  với  $j = 1, 2, \dots, k$ . Ta

dễ dàng có  $H_1^i + H_2^i + \dots + H_k^i = (k-1) \times$

$(a_{i_1} + \dots + a_{i_k}) = (k-1) T_i$ . Nhưng theo bất đẳng thức Côsi:

$$H_1^i + H_2^i + \dots + H_k^i \geq k \sqrt[k]{H_1^i H_2^i \dots H_k^i} \text{ nên}$$

$$T_i \geq \frac{k}{k-1} \sqrt[k]{H_1^i H_2^i \dots H_k^i} \quad \text{Vậy}$$

$$P_k = T_1 T_2 \dots T_N \geq \prod_{i=1}^N \left( \frac{k}{k-1} \sqrt[k]{H_1^i H_2^i \dots H_k^i} \right)$$

$$= \left( \frac{k}{k-1} \right)^N \prod_{i=1}^N \sqrt[k]{H_1^i H_2^i \dots H_k^i}, \text{ tức là có}$$

$$\left( \frac{k-1}{k} \right)^{C_n^k} P_k \geq \prod_{i=1}^N \sqrt[k]{H_1^i H_2^i \dots H_k^i} \quad (3)$$

trong đó ký hiệu  $\prod_{i=1}^m x_i = x_1 x_2 \dots x_m$ . Trước khi

chứng minh tiếp định lý ta chứng minh bổ đề sau:

**Bổ đề:** 1) Thừa số bất kỳ của  $P_{k-1}$  là phân tử của tập hợp các tổng  $H_j^i$  với  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $j = 1, 2, \dots, k$ .

2) Thừa số bất kỳ của  $P_{k-1}$  xuất hiện  $(n-k+1)$  lần trong tập hợp các tổng  $H_j^i$  ở trên.

Thực vậy, gọi  $B = a_1 + \dots + a_{k-1}$  là thừa số bất kỳ của  $P_{k-1}$ . Với số  $a_k$  khác, ta lập tổng:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = B + a_k. \text{ Do các}$$

số  $a_1, \dots, a_k$  là tập hợp gồm  $k$  phần tử trong  $n$  số  $a_1, \dots, a_n$ , nên tổng  $S$  là một thừa số của  $P_k$ .

Vậy, theo định nghĩa của  $H_j^i$ , hiển nhiên  $B$  là một phân tử của tập hợp  $\{H_j^i\}_{i=1, \dots, N; j=1, 2, \dots, k}$  và phần 1 của bổ đề được chứng minh.

Lại xét với thừa số bất kỳ  $B = a_1 + \dots + a_{k-1}$  của  $P_{k-1}$ . Rõ ràng thừa số  $B$  xuất hiện đúng 1

lần và chỉ xuất hiện trong các tổng  $H_j^i$  được xây dựng từ các tổng  $S$  được xác định như trên. Nhưng do có  $n - (k-1) = n - k + 1$  số  $a_k$  khác các

số  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  trong  $n$  số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nên có thể có  $(n-k+1)$  tổng  $S$  có dạng trên. Vì thế thừa số  $B$  được xuất hiện đúng  $(n-k+1)$  lần trong các tổng  $H_j^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  và  $j = 1, \dots, k$ . Bổ đề đã được chứng minh xong.

Trở lại việc chứng minh định lý. Theo bổ đề và với chú ý số thừa số của  $P_{k-1}$  là  $C_n^{k-1}$  và có hệ thức  $k C_n^k = (n-k+1) C_n^{k-1}$  do đó tập hợp  $\{H_j^i\}$  nói trên chỉ chứa các thừa số của  $P_{k-1}$ , nên ta có:

$$H_1^i H_2^i \dots H_k^i = P_{k-1}^{n-k+1}$$

và theo (3) ta có

$$\left( \frac{k-1}{k} \right)^{C_n^k} P_k \geq P_{k-1}^{\frac{n-k+1}{k}}$$

và định lý cũng được chứng minh xong.

Từ định lý ta suy ra được mối quan hệ giữa các  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  với nhau. Chẳng hạn cần so sánh  $P_k$  và  $P_{k-2}$ . Từ (2) suy ra:

$$P_k \geq \left( \frac{k}{k-1} \right)^{C_n^k} P_{k-1}^{\frac{n-k+1}{k}} \text{ và tương tự ta có:}$$

$$P_{k-1} \geq \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^{C_n^{k-1}} P_{k-2}^{\frac{n-k+2}{k-1}}. \text{ Vậy}$$

$$P_k \geq \left( \frac{k}{k-1} \right)^{C_n^k} \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^{\frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}} P_{k-2}^{\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)}}.$$

$$\text{Do } \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1} = C_n^k \text{ nên}$$

$$P_k \geq \left( \frac{k}{k-2} \right)^{C_n^k} P_{k-2}^{\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)}}.$$

Tương tự, giữa  $P_k$  và  $P_{k-3}$  ta có

$$P_k \geq \left( \frac{k}{k-3} \right)^{C_n^k} P_{k-3}^{\frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{k(k-1)(k-2)}}.$$

... giữa  $P_k$  và  $P_1$  ta có:

$$P_k \geq k^{\frac{C_n^k}{n}} P_1^{\frac{C_n^k}{n}} \quad (4)$$

Lại so sánh  $P_k$  với  $P_{k+1}$ . Từ (2) thay  $k$  bởi  $(k+1)$  và chú ý:

$$\frac{k+1}{n-k} C_n^{k+1} = C_n^k, \text{ ta có}$$

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^{C_n^k} \frac{k+1}{k+1} \geq P_k.$$

Kéo dài quá trình tương tự này, giữa  $P_k$  và  $P_n$  ta có:

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{C_n^k} P_n^{C_n^k} \geq P_k. \quad (5)$$

Kết hợp (4) với (5) ta thu được kết quả sau:

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{C_n^k} P_n^{C_n^k} \geq P_k \geq \frac{C_n^k}{1} P_n^{C_n^k/n}.$$

Từ đó ta đi đến:

$$\frac{1}{n} P_n \geq \frac{1}{k} P_k^{1/C_n^k} \geq P_1^{1/n}$$

hay rõ hơn:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{1}{k} P_k^{1/C_n^k} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (6)$$

Do bất đẳng thức Côsi được ứng dụng hiệu quả cho nhiều bài toán nên có vấn đề đặt ra là cần tìm các bất đẳng thức biểu thị mối quan hệ chặt chẽ hơn bất đẳng thức Côsi với hy vọng các bất đẳng thức mới này cho ứng dụng hiệu quả hơn, mạnh hơn so với bất đẳng thức Côsi. Một điều rất thú vị là, từ (6) rõ ràng ta có ngay hai bất đẳng thức:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{1}{k} P_k^{1/C_n^k}$$

$$\text{và } \frac{1}{k} P_k^{1/C_n^k} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \text{ với mọi } k=1, 2, \dots,$$

$n$ , biểu thị mối quan hệ chặt chẽ hơn bất đẳng thức Côsi cho  $n$  số không âm.

## Trao đổi với bạn đọc

# TỪ MỘT BÀI TOÁN THI ĐẠI HỌC

**T**RONG đề toán thi vào Đại học ở các tỉnh phía Nam tháng 7 năm 1982 có câu

Chứng minh rằng với mọi giá trị  $m$  phương trình:  $\cos x + m \cos 2x = 0$  luôn có nghiệm.

Đây là một bài toán khá đơn giản, tuy nhiên nhiều học sinh của trường chúng tôi khi dự thi đã đưa ra những cách giải quá cầu kỳ. Chẳng hạn.

*Cách thứ nhất.*

Biến đổi phương trình đã cho trở thành

$$2m \cos^2 x + \cos x - m = 0. \quad (1)$$

Khi  $m = 0$  thì (1)  $\Leftrightarrow \cos x = 0$

$$\Rightarrow x = (2k+1)\pi/2.$$

Khi  $m \neq 0$  ta chứng minh phương trình (1) cũng luôn có nghiệm. Thật vậy

Đặt  $X = \cos x$  với điều kiện  $|X| \leq 1$ .

$$(1) \Leftrightarrow 2mX + X - m = 0 \quad (2)$$

$\Delta = 1 + 8m^2 > 0$ . Suy ra phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt. Bây giờ ta chứng minh có ít nhất một nghiệm thỏa mãn  $|X| \leq 1$  thì bài toán sẽ được giải quyết xong. Thật vậy. Ta có:  $X_1, X_2 = -1/2$  ( $X_1, X_2$  là 2 nghiệm của (2)).  $|X_1 \cdot X_2| = 1/2$

nên:

$$- \text{ hoặc } |X_1| \leq 1$$

$$- \text{ hoặc } |X_2| \leq 1$$

$$- \text{ hoặc } |X_1| \leq 1 \text{ và } |X_2| \leq 1.$$

Từ đây ta có thể kết luận rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $m$ .

**Nhận xét:** Đa số những học sinh của trường chúng tôi đã giải theo cách này, có một số em đã giải theo cách thứ hai sau đây.

*Cách thứ hai*

Nhận thấy  $m = 0$  phương trình đã cho có nghiệm  $\cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\pi/2$ .

Ta chứng minh khi  $m \neq 0$  ứng với  $\cos x \neq 0$  thì phương trình đã cho cũng luôn có nghiệm. Thật vậy. Từ phương trình đã cho ta có thể viết thành:  $m \cos 2x = -\cos x$ .

$$\Leftrightarrow m(2\cos^2 x - 1) = -\cos x$$

$$\Leftrightarrow m(2\cos^2 x - 1)/\cos x = -1/m \quad (\text{Do } m \neq 0 \text{ và } \cos x \neq 0).$$

Đặt  $X = \cos x$ . Điều kiện  $|X| \leq 1$  thì:

$$(2X^2 - 1)/X = -1/m. \quad (3)$$

Nhận thấy rằng số nghiệm của phương trình (3) phụ thuộc vào số giao điểm của đường thẳng  $Y = -1/m$  và phân đường cong  $y = (2X^2 - 1)/X$  được giới hạn bởi hai đường thẳng  $X = -1$  và  $X = 1$ . Trên đồ thị vẽ trên mặt phẳng tọa độ  $OXY$  sẽ minh họa điều đó.

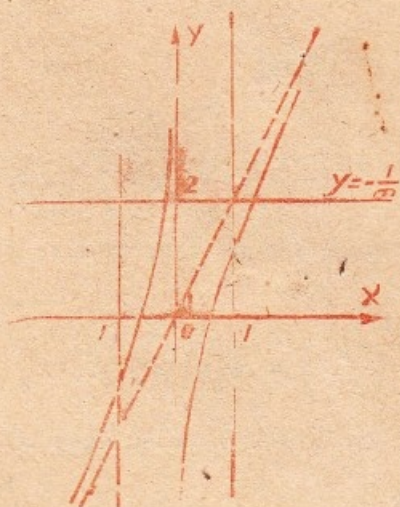
Đường cong  $Y = (2X^2 - 1)/X$  có tiệm cận đứng là  $X = 0$ , tiệm cận xiên  $Y = 2X$ . Xác định  $\forall X \neq 0$  Có đạo hàm cấp 1:  $Y' = 1/X^2 > 0$ . Các trục hoành tại:  $(-\sqrt{2}/2, 0)$  và  $(\sqrt{2}/2, 0)$ .

Như vậy với mọi  $m \neq 0$  thì đường thẳng  $Y = -1/m$  luôn cắt đồ thị  $Y = (2X^2 - 1)/X$  ( $|X| \leq 1$ ). Suy ra phương trình đã cho luôn có nghiệm  $\forall m$ .

**Nhận xét:** Đây là một cách giải khá dài, học sinh đã sử dụng quá nhiều kiến thức đồ thị. Đối với bài toán này học sinh chỉ cần nhớ đến tính chất của hàm số liên tục thì bài toán sẽ được giải quyết khá đẹp.

**Cách thứ ba:**

$$\text{Đặt } f(x) = \cos x + m \cos 2x$$



Ta có:

$$f(\pi/4) = \sqrt{2}/2, f(-\pi/4) = -\sqrt{2}/2 \\ \Rightarrow f(\pi/4) \cdot f(-\pi/4) = -1/2 < 0.$$

Mặt khác hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-\pi/4, \pi/4]$  nên phải tồn tại ít nhất 1 điểm  $x_0 \in (-\pi/4, \pi/4)$  sao cho  $f(x_0) = 0$ . Tức là  $x_0$  là một nghiệm của phương trình. Ta suy ra với mọi giá trị của  $m$  thì phương trình luôn có nghiệm.

Qua bài viết này tôi muốn trao đổi với những học sinh chuẩn bị thi nào Đại học là: phải tìm tôi để tìm một cách tối ưu cho một bài toán.

Lê Thị Bình Thái

(Trường P.T.T.H. An Nhơn Nghĩa Bình)

## DANH SÁCH DỰ THI GIỎI TOÁN

**Hà Nội:** Nguyễn Quảng Cường, Đặng Vũ Sơn, Nguyễn Việt Quang, Nguyễn Thiệu Dương, Nguyễn Tiến Dũng, (10 CT); Vũ Quý Dương, Nguyễn Tiến Nam, (12 CT); (ĐH Tổng Hợp), Nguyễn Quang Dũng, Đỗ Quang Đại, (12 CT, ĐH Sư phạm), Nguyễn Anh Minh, Trịnh Ngọc Thủy, Nguyễn Thị Huệ; Nguyễn Thủy Hào, Nguyễn Kim Minh, Đỗ Hải Yến, (12A Lê Quý Đôn), Đào Thiện Cường (101 Chu Văn An); Hồ Thu Phương (12 E) Nguyễn Bích Liên (12D), (Trường Định); Phạm Trung Nghĩa (10 B Thăng Long); Ngô Thanh Phương (12 P), Nguyễn Thanh Hà (12 C), (Lý Thường Kiệt); Trần Mạnh Cường (12 A Đan Phượng). **Thành phố Hồ Chí Minh:** Phạm Tuấn Huy, Nguyễn Quang Thiệu, Tạ Trí Nhân, Ngô Đình Đăng, Nguyễn Gia Bảo, (10 CT); Võ Thanh Hùng, Võ Đại Hoài Đức, (11 CT); (Lê Hồng Phong), Trần Quang Dũng (11 A Lương Văn Can); Ngô Anh Vũ (11 A6), Võ Duy Tâm (11 A7), (Nguyễn Trãi); Trần Anh Sơn (11 A3 Nguyễn Thái Bình); Nguyễn Quang Thiệu (10A Tôn Thọ Tường); Nguyễn Thành Úc (11 A5 Nguyễn Thượng Hiền); Nguyễn Thanh Quan (12P Vừa học vừa làm); Nguyễn Đình Kim (12 A1 Phú Nhuận); Nguyễn Tuấn Khôi (12 A1 Lê Quý Đôn). **Quảng Nam Đà Nẵng:** Lâm Tùng Giang, Trần Quân, Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Phú Quý, Nguyễn Ngọc Văn Khoa, (10 CT); Võ Anh Minh, Nguyễn Đăng Cũ, Nguyễn Văn Hưng, (11 CT); (Phan Chu Trinh), Lê Văn Bình (12 E, Núi Thành); Trần Văn Hưng (11/3 Thái Phiên); Trương Thị Hà (10 G Duy Xuyên D). (Còn nữa)

In 10.000c tại xi nghiệp in 75 Hàng Bồ Hà Nội  
Chỉ số: 12884. Số in 25/84. Gửi lưu chiều tháng 4 1984

Giá: 1đ00