VIỆN KHOA HỌC
VIỆT NAM

Số 133
5
1983

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Tổng biên tập: **Nguyễn Cảnh Toàn**
Phó Tổng biên tập: **Phan Đức Chính**

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội
Dây nói: **528 25**

GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ

PHAN ĐỨC CHÍNH

Phương pháp đồ thị là một phương pháp rất có hiệu lực để giải một loạt bài toán: có những bài toán cổ điển trong chương trình PTTH và những bài toán không mẫu mực trong phần thực hành ở các lớp PT chuyên toán.

Các bạn đang học ở các lớp PTTH thông thường cần chú ý đến các bài toán cổ điển nêu trong các ví dụ 1, 2, 3 dưới đây: chúng tôi đặc biệt chọn những bài toán liên quan đến việc biện luận tham số, các kiểu toán này thường gặp trong đề thi tuyển vào Đại học và Cao đẳng.

Ví dụ 1. *Với những giá trị nào của m thì phương trình sau đây có nghiệm*

$$\cos^4 x + m\sin^2 x + 2 = 0\ ?$$

Giải. Đặt $t = \cos^2 x$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ thì phương trình trên trở thành.

$$t^2 - mt + m + 2 = 0. \qquad (1)$$

Như vậy ta cần xác định m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm t với $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Kinh nghiệm giảng dạy của tôi cho hay rằng đại đa số các bạn học sinh thường giải bài toán trên bằng cách so sánh các số 0 và 1 với các nghiệm của (1), thật là cầu kỳ. Có cách giải trong sáng hơn như sau.

Hiển nhiên $t = 1$ không phải là nghiệm của (1). Vì vậy (1) tương đương với

$$m = (t^2 + 2)/(t + 1) = t + 1 + 3/(t - 1),$$

khi đó bài toán đã cho trở thành. *Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm*

$$y = t + 1 + 3/(t - 1) \qquad (2)$$

tại ít nhất một điểm với hoành độ $0 \leqslant t < 1$.

Để giải, không cần vẽ đồ thị hàm (2), ta chỉ việc lập bảng biến thiên của nó như sau

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Như vậy trong khoảng $(0, 1)$, hàm (2) là nghịch biến, và trong khoảng đó, nó lấy mọi giá trị $y \leqslant -2$. Thành thử đáp số của bài toán là $m \leqslant -2$.

Ví dụ 2. *Với những giá trị nào của a thì bất phương trình* $2x + 1 \geqslant a(\sqrt{1-x} + 1)$ *có nghiệm?*

Giải. Đặt $t = \sqrt{1-x}$ $(t \geqslant 0)$, thì $x = 1 - t^2$, bất phương trình trên trở thành

$$-2t^2 + 3 \geqslant a(t + 1).$$

Ta chỉ xét các $t \geqslant 0$, vậy nó tương đương với

$$(-2t^2 + 3)/(t + 1) \geqslant a,$$

và bài toán trở thành: *xác định a để hàm số* $y = (-2t^2 + 3)/(t + 1) = -2t + 2 + 1/(t + 1)$ (3) *có phần đồ thị ứng với* $t \geqslant 0$ *nằm trên đường thẳng* $y = a$.

Hàm (3) có đạo hàm

$$y' = -2 - 1/(t + 1)^2 < 0$$

vậy nó nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$. Với $t = 0$, ta có $y = 3$, từ đó suy ra kết quả phải tìm: $a \leqslant 3$.

Ví dụ 3. *Tìm các giá trị m sao cho phương trình*

$$x + \sqrt{4x^2 - 1} = mx + 1/2$$

có đúng hai nghiệm.

Giải. Ta phải xác định m sao đường thẳng D có phương trình

$$y = mx + 1/2$$

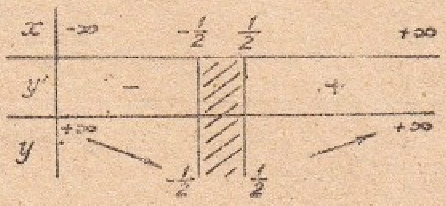
cắt đồ thị của hàm số

$$y = x + \sqrt{4x^2 - 1} \qquad (4)$$

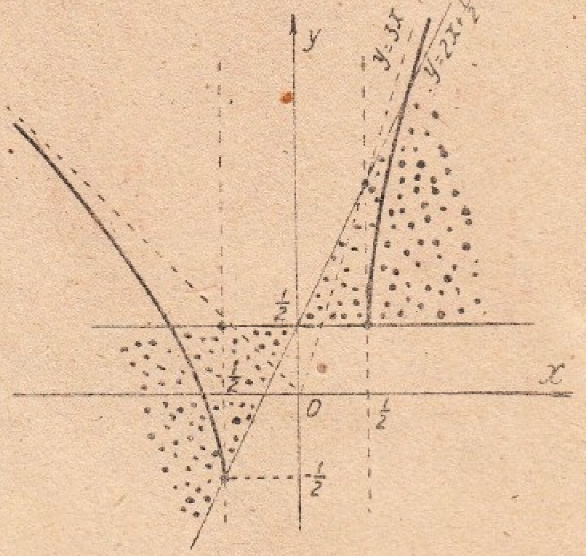
tại hai điểm. Đường thẳng D có hệ số góc m và đi qua điểm $(0; 1/2)$. Đồ thị của hàm (4) có tiệm cận xiên về bên phải $y = 3x$ và tiệm cận xiên về bên trái $y = -x$. Hàm (4) được xác định với $|x| \geqslant 1/2$ và có đạo hàm

$$y' = 1 + 4x/\sqrt{4x^2 - 1}.$$

Vậy hiển nhiên $y' > 0$ khi $x > 1/2$. Với $x < -1/2$, để ý rằng $|2x| > \sqrt{4x^2 - 1}$, vậy $y' < 0$ từ đó suy ra bảng biến thiên



dựa vào đó, ta vẽ được đồ thị



Nghiên cứu đồ thị và các tiệm cận xiên của nó, ta thấy rằng yêu cầu của bài toán được thỏa mãn nếu đường thẳng D nằm trong miền chấm (hình vẽ), giới hạn bởi các đường thẳng $y = 1/2$ và $y = 2x + 1/2$, vậy các giá trị phải tìm của m là

$$0 \leqslant m \leqslant 2.$$

Sau đây là hai ví dụ nữa cho các bạn chuyên toán.

Ví dụ 4. *a, b, c, h là bốn số dương cho trước, x, y, z là ba số thực thay đổi, ràng buộc bởi điều kiện*

$$ax + by + cz = k \ (k \text{ cố định}).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = a\sqrt{h^2 + x^2} + b\sqrt{h^2 + y^2} + c\sqrt{h^2 + z^2}$$

(Bài toán này nảy sinh ra từ một bài toán hình học của tác giả đã đăng trong báo TH và TT, số 5 + 6-1980).

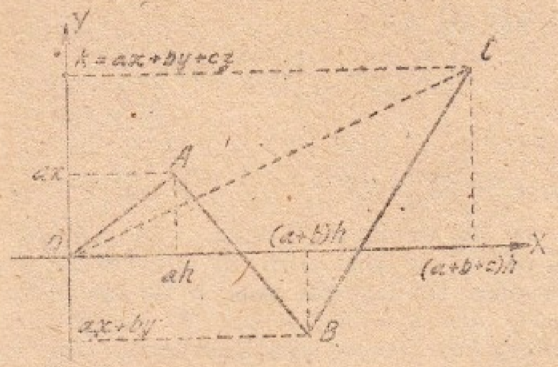
Giải. Trên mặt phẳng tọa độ OXY, xét các điểm

$$A\,(ah;\ ax),\ B\,((a + b)h;\ ax + by),$$
$$C\,((a + b + c)h;\ ax + by + cz).$$

Có thể thấy ngay rằng

$$OA = a\sqrt{h^2 + x^2},\ AB = b\sqrt{h^2 + y^2},$$
$$BC = c\sqrt{h^2 + z^2}.$$

Vì vậy S là độ dài đường gấp khúc $OABC$: S nhỏ nhất nếu đường gấp khúc ấy trùng với



đoạn thẳng OC (do C là điểm cố định), điều này xảy ra khi

$$\frac{ax}{ah} = \frac{ax+by}{ah+bh} = \frac{ax+by+cz}{ah+bh+ch}$$

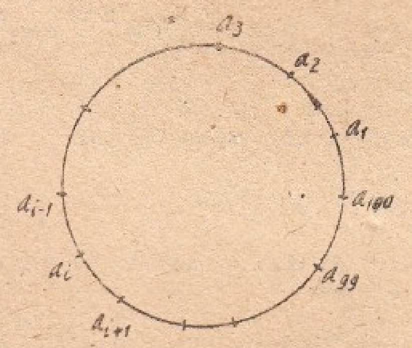
tức là

$$x = y = z = k/(a+b+c).$$

Khi đó

$$S_{min} = OC = \sqrt{k^2 + (a+b+c)^2h^2}$$

Ví dụ 5. *100 số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ có tổng bằng 0. Người ta viết các số ấy theo thứ tự trên một đường tròn định hướng (hình vẽ). Chứng minh rằng tồn tại một chỉ số i sao cho tất cả các tổng*



$$S_1 = a_{i+1}$$
$$S_2 = a_{i+1} + a_{i+2}$$
$$S_3 = a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{99} = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i-1}$$
$$S_{100} = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i-1} + a$$

đều không âm.

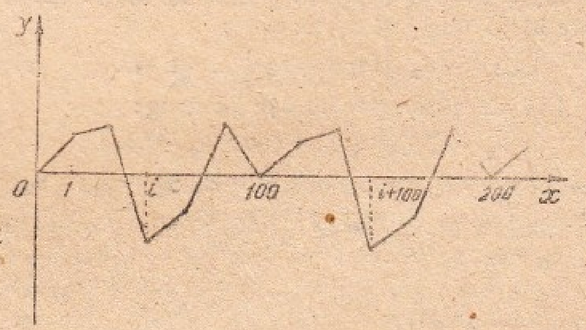
Giải. Nếu n là một số tự nhiên $\geqslant 100$, thì $n = 100m + r$ với $0 \leqslant r \leqslant 99$, và ta đặt

$$a_n = a_r \text{ nếu } r > 0,\ a_n = a_{100} \text{ nếu } r = 0.$$

Chẳng hạn $a_{172} = a_{72}$, $a_{200} = a_{100}$. Với k là một nguyên không âm, ta đặt

$$f(0) = 0,\ f(k) = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Trên mặt phẳng tọa độ, xem các điểm A_k $(k; f(k))$ $(k = 0, 1, \ldots)$ Nối các điểm A_k với A_{k+1} $(k = 0, 1, \ldots)$, ta được một đường gấp khúc, tuần hoàn với chu kỳ 100 (hình vẽ). Xét một chu kỳ, chẳng hạn từ 0 đến 100. Gọi i là giá trị sao cho $f(i)$ nhỏ nhất: đồ thị của $f(x)$ chứng tỏ rằng đó là chỉ số i phải tìm (có thể có nhiều chỉ số i như vậy).



Hiển nhiên trong ví dụ này, cũng như cả trong 4 ví dụ trên, có thể đưa ra một lời giải không dùng đến đồ thị. Nhưng các lời giải đã nêu dùng phương pháp đồ thị chắc chắn có đủ sức thuyết phục để các bạn tự rút ra kết luận cần thiết.

VỀ MỘT TỔNG VÔ HẠN

TẠ VĂN TỰ

Tổng vô hạn (số hạng) $T = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/n^2 + \ldots$ là giới hạn của tổng hữu hạn $T_n = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/n^2$ khi $n \to \infty$. Tổng vô hạn này được gắn với tên tuổi của hai nhà toán học Thụy sĩ: I-a-cốp Bec-nu-li (1654 – 1705) và Lê-ô-na Ơ-le (1707 – 1783). I-a-cốp Bec-nu-li nổi tiếng một phần do đã phát minh ra và tính được giá trị của nhiều tổng vô hạn. Tổng vô hạn các nghịch đảo của các số bình phương trên cũng do ông đề xuất nhưng để tìm giá trị của tổng vô hạn đó, ông hoàn toàn bị bất lực. Có lần Bec-nu-li viết: «Cho đến nay, tôi đã cố gắng nhiều nhưng vẫn không tìm ra. Ai tìm được và cho biết thì tôi xin cảm ơn vô cùng». Lê-ô-na Ơ-le là học trò của I-ô-gan. Bec-nu-li (1667 – 1748), em trai của I-a-cốp; đã tập trung nhiều thời gian vào tính giá trị của tổng vô hạn trên. Sau nhiều lần chỉ tìm được các giá trị gần đúng, cuối cùng ông đã tìm ra được giá trị đúng bằng một phương pháp cực kỳ táo bạo [1].

Xét phương trình đại số bậc n:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

có n nghiệm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ khác không. Theo định lý Viet ta có:

$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = (-1)^n a_n/a_0$, do vậy $a_n \neq 0$ và ta viết được:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$$

$$= (a_0/a_n)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n) = a_n\frac{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}{(-1)^n\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$$

$$= a_n(1-x/\alpha_1)(1-x/\alpha_2)\dots(1-x/\alpha_n) \qquad (1)$$

Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, so sánh các hệ số ứng với x, ta có

$$a_{n-1} = -a_n(1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + \dots + 1/\alpha_n) \qquad (2)$$

Lại xét phương trình bậc $2n$ dạng:

$$b_n - b_{n-1}x^2 + \dots + (-1)^n b_0x^{2n} = 0$$

có $2n$ nghiệm khác không $\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2, \dots, \alpha_n, -\alpha_n$. Thế thì, tương tự (1) ta có:

$$b_n - b_{n-1}x^2 + \dots + (-1)^n b_0x^{2n} =$$

$$= b_n(1-x/\alpha_1)(1+x/\alpha_1)\dots(1-x/\alpha_n)(1+x/\alpha_n)$$

$$= b_n(1-x^2/\alpha_1^2)(1-x^2/\alpha_2^2)\dots(1-x^2/\alpha_n^2). \qquad (3)$$

và tương tự (2) ta có:

$$b_{n-1} = b_n(1/\alpha_1^2 + 1/\alpha_2^2 + \dots + 1/\alpha_n^2) \qquad (4)$$

Bây giờ Ơle xét phương trình $\sin x = 0$ hay ở dạng khai triển theo bậc của x là phương trình đại số bậc vô hạn:

$$x/1! - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots = 0. \qquad (5)$$

Nó có vô hạn nghiệm $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots$ Sau khi bỏ nghiệm 0 đi và chia vế trái của (5) cho x ta có phương trình:

$$1 - x^2/6 + x^4/5! - x^6/7! + \dots = 0$$

với vô hạn nghiệm $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \dots$ Đến đây Ơle áp dụng tương tự kết quả như trường hợp hữu hạn, theo (3) có:

$$1 - x^2/6 + x^4/5! - x^6/7! + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\dots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\dots$$

và theo (4) có:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \dots + \frac{1}{n^2\pi^2}$$

hay:

$$T = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/n^2 + \dots = \pi^2/6 \qquad (6)$$

Sau khi tìm ra kết quả, mặc dù có nhiều cơ sở để tin vào phát minh của mình nhưng ông vẫn thấy kết luận của mình là táo bạo vì thiếu cơ sở đảm bảo các kết quả (3) và (4) trong trường hợp phương trình bậc hữu hạn vẫn đúng cho trường hợp phương trình bậc vô hạn (!). Về sau, toán học cao cấp đã xác nhận tính đúng đắn của kết luận (6), nhưng với kiến thức không sơ cấp. Dưới đây sẽ chứng minh kết quả (6) bằng phương pháp dễ hiểu và với kiến thức sơ cấp.

Sử dụng công thức Moavrơ ($i = \sqrt{-1}$) và khai triển nhị thức Niutơn ta có:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n =$$

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j (i\sin\alpha)^j \cos^{n-j}\alpha$$

$$= (\cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \dots)$$

$$+ i(C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \dots)$$

Từ đó suy ra

$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \dots \qquad (7)$$

Sử dụng (7) thay n bằng $(2n+1)$ ta có:

$$\sin(2n+1)\alpha = C_{2n+1}^1\cos^{2n}\alpha\sin\alpha - C_{2n+1}^3\cos^{2n-2}\alpha\sin^3\alpha + C_{2n+1}^5\cos^{2n-4}\alpha\sin^5\alpha - \dots$$

$$= \sin^{2n+1}\alpha\,(C_{2n+1}^1\cot g^{2n}\alpha - C_{2n+1}^3\cot g^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^5\cot g^{2n-4}\alpha - \dots). \qquad (8)$$

Ta thấy n giá trị $\alpha_i = i\pi/(2n+1)$, $i = 1, \dots, n$ là nghiệm của phương trình $\sin(2n+1)\alpha = 0$ nhưng không có giá trị nào trong đó là nghiệm của phương trình $\sin\alpha = 0$, nên từ (8) ta có n giá trị α_i trên cũng là nghiệm của phương trình:

$$C_{2n+1}^1 \cot g^{2n}\alpha - C_{2n+1}^3 \cot g^{2n-2}\alpha + C_{2n+1}^5 \cot g^{2n-4}\alpha - \ldots = 0$$

hay n giá trị $x_i = \cot g^2 \frac{i\pi}{2n+1}$, $i=1,\ldots,n$ là nghiệm của phương trình đại số bậc n:

$$C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + C_{2n+1}^5 x^{n-2} - \ldots = 0.$$

Vì thế theo định lý Viét ta có:

$$\cot g^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot g^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \ldots + \cot g^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3} \quad (9)$$

Khi áp dụng công thức $1 + \cot g^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$, từ (9) ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{i\pi}{2n+1}} = n + \sum_{i=1}^{n} \cot g^2 \frac{i\pi}{2n+1} = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3} \quad (10)$$

Lại có: $0 < \sin\alpha < \alpha < \mathrm{tg}\alpha$ hay $1/\sin\alpha > 1/\alpha > \cot g\alpha > 0$, ở đó $0 < \alpha < \pi/2$, nên với $\alpha = i\pi/(2n+1)$, $i = 1, \ldots, n$ ta có:

$$1/\sin^2 \frac{i\pi}{2n+1} > \left(\frac{2n+1}{i\pi}\right)^2 > \cot g^2 \frac{i\pi}{2n+1}.$$ Do vậy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{i\pi}{2n+1}} > \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{i\pi}\right)^2 > \sum_{i=1}^{n} \cot g^2 \frac{i\pi}{2n+1}$$

Theo (9), (10) ta có:

$$\frac{2n(n+1)}{3} > \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} > \frac{n(2n-1)}{3}$$

hay

$$\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{3} > T_n > \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{3} \quad (11)$$

Từ (11), theo định lý giới hạn, ta có

$$T = \lim_{n \to \infty} T_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tới đây, cách giải này chắc sẽ làm vừa lòng nhiều bạn trẻ yêu toán. Để có được cách giải đó, điều đầu tiên xuất phát từ ý nghĩ về bài toán đó là: mặc dù Béc-nu-li còn gặp khó khăn mặc dù bài toán đó được giải bằng phương pháp không sơ cấp... nhưng vẫn dám làm và tin tưởng rằng sẽ tìm được phương pháp mới tốt hơn và phù hợp đối với kiến thức của mình.

Đó là tư tưởng tiến công trong học tập!

(1) *Mười năm sau khi có dịp quay lại vấn đề này, Ơ-le đã tìm được một phương pháp tin cậy để tính tổng vô hạn đó.*

Bài 1/130. *Tại một quầy bán văn phòng phẩm có bán hai loại vở. Giá mỗi quyển vở là số nguyên đồng. A mua 10 quyển vở, B mua 16 quyển vở và C mua 26 quyển vở. Mỗi người phải trả 56 đồng. Bạn hãy tìm giá mỗi quyển vở mỗi loại.*

Lời giải (của **Trần Nam Dũng** — 12CT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng; **Vũ Ngọc Văn Khoa** — 2/25 Trần Cao Vân, Đà Nẵng và một số bạn khác).

Gọi giá hai loại vở là x và y, giả sử $x > y$. Số vở loại x đồng mà A, B, C mua tương ứng là a, b, c. Ta có

$$xa + y(10 - a) = 56$$
$$xb + y(16 - b) = 56$$
$$xc + y(26 - c) = 56$$

hay

$$(x - y)a + 10y = 56 \quad (1)$$
$$(x - y)b + 16y = 56 \quad (2)$$
$$(x - y)c + 26y = 56 \quad (3)$$

Vì $x - y > 0$ nên từ (3) có $26y < 56 \Rightarrow y < 3$.

1) $y = 1$: Từ (1) và (2) cho

$$(x - y)a = 46$$
$$(x - y)b = 40$$

$\Rightarrow a/b = 23/20 \Rightarrow a \vdots 23$, vô lý vì $a \leqslant 10$.

2) $y = 2$: (1) cho $x - y = 36/a \Rightarrow x - y \geqslant 36/10$. (3) cho $(x - y)c = 4 \Rightarrow x - y \leqslant 4$. Vậy $x - y = 4 \Rightarrow x = 6$. Thay $x - y = 4$ và $y = 2$ vào (1), (2), (3) ta được $a = 9$, $b = 6$, $c = 1$ là các số nguyên < 10. Vậy giá hai loại vở là 6 đồng và 2 đồng.

Nhận xét: Các bạn *Vũ Lê Tú* (7A chuyên toán Chu Văn An, Hà Nội, *Nguyễn Văn Hưng* (11 chuyên toán Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), *Nguyễn Thanh Hà* (12 C Lý Thường Kiệt, Hà Nội), *Huỳnh Đức Thắng* (10C Trưng Vương, Qui Nhơn), *Đỗ Đình Việt* (12G An Nhơn I, Nghĩa Bình), *Nguyễn Huyền Trung* (10A Nguyễn Văn Trỗi, Can Lộc, Nghệ Tĩnh) cũng có lời giải tốt.

Bài 2/130. *Chứng minh rằng ít nhất một trong các phương trình bậc hai sau đây có nghiệm (thực)*:

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$
$$bx^2 + 2cx + a = 0,$$
$$cx^2 + 2ax + b = 0.$$

Lời giải. Các biệt số của ba phương trình lần lượt là:

$$\Delta'_1 = b^2 - ac,$$
$$\Delta'_2 = c^2 - ba,$$
$$\Delta'_3 = a^2 - cb.$$

Ta có

$$\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 =$$
$$= [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]/2 \geqslant 0.$$

Vậy ít nhất một $\Delta'_i \geqslant 0 \Rightarrow$ ít nhất một trong ba phương trình cho có nghiệm.

P.H.

Bài 3/130. *Gọi S là tổng tất cả các ước số của số N. Hãy tìm tất cả các số có dạng $N = pqr^n$ thỏa mãn điều kiện $S = 3N$, trong đó p, q, r là các số nguyên tố khác nhau.*

Lời giải. Từ đề bài ta có

$$(p + 1)(q + 1)(r^n + r^{n-1} + \ldots + 1) = 3pqr^n$$

hay

$$(1 + 1/p)(1 + 1/q) = 3r^n(r - 1)/(r^{n+1} - 1). \qquad (1)$$

Do p, q là các số nguyên tố khác nhau nên $(1 + 1/p)(1 + 1/q) \leqslant (1 + 1/2)(1 + 1/3) = 2$. Vậy từ (1) có: $3r^n(r - 1)/(r^{n+1} - 1) \leqslant 2 \Leftrightarrow 3 \geqslant r + 2/r^n$. Từ đây với chú ý r là số nguyên tố, ta có $r = 2$. Khi này

$$\frac{(p + 1)(q + 1)}{pq} = \frac{3.2^n}{2^{n+1} - 1} > \frac{3}{2},$$

và từ đó ta có

$2 > pq - 2p - 2q$ hay $6 > (q - 2)(p - 2)$.

Do p, q, r là 3 số nguyên tố khác nhau, mà $r = 2$ nên: $(q - 2)(p - 2) \geqslant 3$ và p, q là các số lẻ. Vậy $(p - 2)(q - 2)$ chỉ nhận các giá trị lẻ 3 và 5. Vì vai trò p, q như nhau, nên không ảnh hưởng đến kết quả ta giả thiết $p > q$.

a) Với $(p - 2)(q - 2) = 3$ ta có $p = 5$; $q = 3$ và thế vào (1) ta tìm ngay được $n = 5$. Vậy $N = 5.3.2^3 = 120$.

b) Với $(p - 2)(q - 2) = 5$ ta có $p = 7$; $q = 3$ và thế vào (1) ta cũng tìm ngay được $n = 5$. Vậy $N = 7.3.2^5 = 672$.

Tóm lại: có hai số thỏa mãn đề bài là 120 và 672.

Nhận xét: Có nhiều bạn giải được bài này nhưng lại phân tích theo các trường hợp chẵn, lẻ của q nên lời giải còn dài. Lời giải bài này tốt hơn cả là của các bạn: *Tạ Trung Phong* (HT 8A2601, Hải-Hưng), *Nguyễn Văn Hưng* (11 CT, Phan Châu Trinh Đà Nẵng).

Bài 4/130 *Cho $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là một hoán vị của dãy $(1, 2, \ldots, n)$. Hãy tìm tất cả các giá trị có thể có của*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i - i|.$$

Lời giải. Trước hết ta có nhận xét
$|a_i - i| + (a_i + i) = 2\max\{a_i, i\}$. Từ đó có

$$S_n + 2\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} \{|a_i - i| + (a_i + i)\}$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n} \max\{a_i, i\}.$$

Vậy S_n là một số chẵn.

$$S_n = 2\sum_{i=1}^{n} \max\{a_i, i\} - n(n + 1);\ \text{vậy}$$
$$S_n \leqslant 4\{n + (n - 1) + \ldots + (n/2 + 1)\} - n(n + 1) = n^2/2$$

nếu n chẵn, và

$$S_n \leqslant 4\{n + (n - 1) + \ldots + ([n/2] + 2)\} + 2([n/2] + 1) - n(n - 1) = (n^2 - 1)/2$$

nếu n lẻ.

Trong cả hai trường hợp, dấu đẳng thức đạt được tại hoán vị $(n, n-1, \dots, 1)$, tức là đối với hoán vị này thì S_n có giá trị lớn nhất.

Xét một hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ có số $a_p < a_{p+1}$ $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ và gọi S_n tương ứng với nó là $S_n^{(1)}$. Đổi chỗ hai số a_p và a_{p+1} cho nhau ta được hoán vị mới có S_n tương ứng là $S_n^{(2)}$. Ta có

$$S_n^{(2)} - S_n^{(1)} = A + B, \text{ với}$$

$$A = |a_{p+1} - p| - |a_{p+1} - (p+1)|,$$

$$B = |a_p - (p+1)| - |a_p - p|.$$

Ta thấy A và B chỉ nhận các giá trị $0, 1, -1$, nhưng ít nhất một trong A, B nhận giá trị 1. Vậy $S_n^{(2)} - S_n^{(1)}$ chỉ có thể bằng 0 hoặc bằng 2.

Xuất phát từ hoán vị $(1, 2, \dots, n)$ có $S_n = 0$ ta thực hiện các phép đổi chỗ lần lượt các số $n-1$, $n-2, \dots, 1$ cho từng số đứng liền sau. Đối với mỗi số ta tiến hành đến khi chúng ở vị trí cuối cùng. Cuối cùng ta được hoán vị $(n, n-1, \dots, 1)$. Như vậy, S_n tăng từ 0 đến giá trị lớn nhất của nó, mỗi phép đổi chỗ thì S_n không đổi hoặc tăng 2 đơn vị. Vậy S_n nhận mọi giá trị chẵn trong các số từ 0 đến $n^2/2$.

Ở trên ta đã chứng minh S_n là một số chẵn vậy tất cả các giá trị có thể có của S là tất cả các số chẵn từ 0 đến $n^2/2$.

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Văn Hưng* (11 CT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng); ***Nguyễn Phương Lan*** (11H Lý Thường Kiệt, Hà Nội) có lời giải tốt

Bài 5/130. Đặt $T = x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1x_2 - \dots - x_1x_n - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n$

với $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh rằng, với $n \geqslant 3$ ta có:

$$(3n - n^2)/2 \leqslant T \leqslant 1.$$

Lời giải: Ta cố định các biến $x_2, x_3, \dots, x_n$, riêng biến $x_1 = x$ biến thiên trong đoạn $[0, 1]$ Khi đó T có dạng $T = kx + b$ với các số cố định: $k = 1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n$ và $b = x_2 + \dots + x_n - x_2x_3 - \dots - x_2x_n - x_3x_4 - \dots - x_{n-1}x_n$.

Rõ ràng, khi này các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm tuyến tính đạt được tại 0 hoặc 1 là các nút của đoạn $[0, 1]$. Chú ý rằng các số $x_2, x_3, \dots, x_n$ tuy là cố định nhưng trước khi cố định chúng lấy các giá trị tùy ý thuộc đoạn $[0, 1]$. Do vậy, sau khi áp dụng tương tự các lập luận trên vào $x_2, x_3, \dots$, ta có kết quả là: các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của T đạt được khi một vài số trong các số x_i bằng 1, còn các số còn lại bằng 0. Gọi số các số bằng 1 là m, vậy m là số nguyên và $0 \leqslant m \leqslant n$. Khi đó,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m \text{ và } x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = C_m^2$$

nên $T = m - m(m-1)/2 = (3m - m^2)/2$. Nếu coi m là biến liên tục thì đây là phương trình parabol mà đồ thị của nó quay bề lõm xuống dưới, tọa độ đỉnh là $(3/2, 9/8)$ và cắt trục hoành ở 0 và 3. Bài toán của ta m — nguyên và $0 \leqslant m \leqslant n$ mà tại $m = 1$, $m = 2$ (là các giá trị nguyên không âm gần hoành độ của đỉnh nhất), giá trị của T đều bằng 1, nên giá trị lớn nhất $T_{max} = 1$ đạt được tại $m = 1$ hoặc $m = 2$. Còn vì $n \geqslant 3$ nên T_{min} đạt được tại $m = n$ và $T_{min} = (3n - n^2)/2$

Nhận xét: Các bạn *Trần Nam Dũng* (12CT, Phan Chu Trinh, Đà Nẵng) *Nguyễn Ngọc Văn Khoa* (2/25, Trần Cao Vân, Đà Nẵng) có lời giải tương đối tốt.

T.V.T.

Bài 6/130 *Giả sử $a > 0$, lập dãy số (x_k) $(k = 0, 1, 2, \dots)$ theo qui luật*

$$x_0 = a, \; x_{k+1} = x_k + 1/x_k^2 \; (k = 0, 1, \dots).$$

1) Chứng minh rằng tồn tại hai số dương α và A, và hãy xác định hai số ấy, sao cho

$$\lim_{n \to \infty} (x_n^{\alpha}/n) = A.$$

2) Chứng minh rằng tồn tại một số dương B sao cho với mọi n

$$\sum_{k=1}^{n} (1/x_k^4) < B.$$

Lời giải. 1) Ta có với $k = 0, 1, \dots$

$$x_{k+1}^3 = x_k^3 + 3 + 3/x_k^3 + 1/x_k^6 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$x_{k+1}^3 > x_k^3 + 3.$$

Viết các bất đẳng thức này cho k từ 0 đến $n-1$, rồi cộng lại thì được

$$x_n^3 > x_0^3 + 3n, \; (n \geqslant 1 \quad (2)$$

Nhờ (2), từ (1) suy ra với $k \geqslant 1$

$$x_{k+1}^3 < x_k^3 + 3 + 3/(x_0^3 + 3k) + 1/(x_0^3 + 3k)^2$$

$$< x_k^3 + 3 + 1/k + 1/(9k^2).$$

Viết các bất đẳng thức này cho k từ 1 đến $n-1$, rồi cộng lại thì được

$$x_n^3 < x_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}(1/k) + (1/9)\sum_{k=1}^{n-1}(1/k^2)$$

$$< x_1^3 + 3n + \sum_{k=1}^{n}(1/k) + (1/9)\sum_{k=1}^{n}(1/k^2) \quad (3)$$

Để ý rằng $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$
$= 1 + (1-1/2) + (1/2-1/3) + \ldots + [1/(n-1) - 1/n]$
$= 2 - 1/n < 2,$ (4)
và theo bất đẳng thức Côsi – Bunhiakốpxki

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2n,$$

do đó

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \sqrt{2n} \quad (5)$$

Nhờ (4) và (5), từ (2) và (3) suy ra

$$x_0^3/n + 3 < x_n^3/n < x_1^3/n + 3 + \sqrt{2/n} + 2/(9n)$$

Cho $n \to \infty$, ta thấy rằng

$$\lim_{n\to\infty}(x_n/n) = 3.$$

Vậy $\alpha = 3$ và $A = 3$.

2) Để ý rằng

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots$$

Ta có với $k = 0, 1, \ldots$

$$\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k x_{k+1}} = \frac{1}{x_k^3 x_{k+1}} > \frac{1}{x_{k+1}^4}.$$

Viết các bất đẳng thức này cho $k = 0, 1, \ldots, n-1$, rồi cộng lại thì được

$$1/x_0 - 1/x_n > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^4},$$

do đó

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^4} < 1/x_0 = 1/a.$$

Nhận xét. Bạn *Trần Nam Dũng* (12 CT, Phan Chu Trinh, Đà Nẵng) có lời giải tốt nhất. Tuy nhiên trong lời giải phần 1), bạn không sử dụng ước lượng (5) mà dùng kiến thức cao cấp hơn (hàm $\ln n$).

Bài 7/130. *Tìm tất cả các hàm $f(x)$, xác định với mọi x và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y \text{ với mọi } x \text{ và } y.$$

Lời giải. Cho x và y lần lượt các giá trị $x = t - \pi/2, y = \pi/2$; $x = \pi/2, y = t - \pi/2$; $x = 0, y = t - \pi$, thì từ hệ thức đã cho suy ra
$f(t) + f(t-\pi) = 2f(t-\pi/2)\cos(\pi/2) = 0,$
$f(t) + f(\pi - t) = 2f(\pi/2)\cos(t-\pi/2) = 2f(\pi/2)\sin t,$
$f(t-\pi) + f(\pi - t) = 2f(0)\cos(t-\pi) = -2f(0)\cos t.$
Cộng hai hệ thức đầu và để ý đến hệ thức thứ ba, thì được $f(t) = f(0)\cos t + f(\pi/2)\sin t$.

Từ đó suy ra rằng dạng tổng quát của các hàm phải tìm là $f(x) = A\cos x + B\sin x$, trong đó A, B là hai số tùy ý.

Nhận xét. Các bạn *Nguyễn Kim Hưng và Trần Nam Dũng* (lớp 11 và 12 CT, Phan Chu Trinh, Đà Nẵng) có lời giải đúng.

Phan Đức Chính

Bài 8/130. *Cho n số thực tùy ý $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng hàm số*

$$f(x) = a_n\cos nx + \ldots a_1\cos x$$

không thể chỉ nhận các giá trị dương.

Lời giải. Đặt $S(x) = \sum_{k=1}^{n}\cos kx.$

Với điều kiện $\sin(x/2) \neq 0$, ta có

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\cos kx\sin(x/2)/(2\sin(x/2))$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[\sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x]/(2\sin(x/2))$$

$$= [\sin(n+1/2)x - \sin(x/2)]/(2\sin(x/2)).$$

Ta chọn $x_m = 2m\pi/(n+1)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ thì có

$$S(x_m) = -1.$$

Chú ý rằng, $kx_m = mx_k$, với mọi $k, m = 1, 2, \ldots, n$. Ta có

$$\sum_{m=1}^{n} f(x_m) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx_m$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\cos mx_k\right)a_k = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\cdot a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-a_k) = -\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Nếu $f(x)$ chỉ nhận các giá trị dương thì

$$\sum_{m=1}^{n} f(x_m) > 0 \Rightarrow -\sum_{k=1}^{n} a_k > 0.$$

Nhưng $f(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k$,

do đó $f(0) < 0$: mâu thuẫn! Vậy $f(x)$ không thể chỉ nhận các giá trị dương.

Bài 9/130 *Trong mặt phẳng cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi A_1, A_2, A_3, lần lượt là hình chiếu của A trên các đường thẳng CD, DB, BC; B_1, B_2, B_3 lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng DC, CA, AD; C_1, C_2, C_3 lần lượt là hình chiếu của C trên các đường thẳng AB, BD, DA: D_1, D_2, D_3 lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BA, AC, CB.*

Chứng minh rằng

$$A_1B_1C_1D_1 \backsim A_2B_2C_2D_2 \backsim A_3B_3C_3D_3$$

Lời giải. Dễ dàng chứng minh được các tứ giác $A_iB_iC_iD_i$ $(i = 1, 2, 3)$ đều đồng dạng với tứ giác $ABCD$ bằng cách sau:

— Nếu $ABCD$ là tứ giác lồi thì chứng minh $\triangle A_iB_iC_i \backsim \triangle ABC$, $\triangle A_iB_iD_i \backsim \triangle ABD$.

— Nếu $ABCD$ không là tứ giác lồi, chẳng hạn D nằm trong $\triangle ABC$ thì chứng minh

$\triangle A_iB_iD_i \backsim \triangle ABD$, $\triangle A_iC_iD_i \backsim \triangle ACD$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét: Các bạn *Huỳnh Đức Thắng* (11 C Trưng Vương, Qui Nhơn), *Huỳnh Hữu Phúc* (11A Quang Trung, Qui Nhơn), có lời giải tốt.

Nhiều bạn mắc sai lầm, chỉ chứng minh các tứ giác có các góc bằng nhau rồi kết luận chúng đồng dạng (như vậy thì mọi hình chữ nhật đều đồng dạng với nhau (?). Có bạn lại ngược lại, chỉ chứng minh các tứ giác có các cạnh tỉ lệ rồi kết luận chúng đồng dạng.

Bài 10/130. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3x} - 2} + \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3x} + 4} = 3.$$

Lời giải. Cách 1 (của ***Nguyễn Thanh Hà*** — 12C Lý Thường Kiệt, Hà Nội).

Điều kiện để phương trình có nghĩa: $x \geqslant 0$. Phương trình đã cho được biến đổi như sau:

$$\sqrt{x^2 - 3\sqrt{3x} + 4} = 3 - \sqrt{x^3 - 2\sqrt{3x} + 2}$$

$$6\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3x} - 2} = \sqrt{3x} + 3$$

$$36(x^2 - 2\sqrt{3x} - 2) = 3x + 9 + 6\sqrt{3x}$$

$$12x^2 - 108 - (x - 3) - 26\sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{3}) = 0$$

$$12(x + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{3}) - (\sqrt{x} + \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3}) - 26\sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{3}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{3})(12x\sqrt{x} + 12\sqrt{3x} + 35\sqrt{x} + 9\sqrt{3}) = 0$$

1) $\sqrt{x} - \sqrt{3} = 0$, ta có $x = 3$, thử lại ta thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

2) $12x\sqrt{x} + 12\sqrt{3x} + 35\sqrt{x} + 9\sqrt{3} = 0$

Vì vế trái $\geqslant 9\sqrt{3}$ nên phương trình này vô nghiệm.

Cách 2 (của ***Huyền Thắng Trung*** — 11A Nguyễn Văn Trỗi, Can Lộc, Nghệ Tĩnh).

Trước hết ta thấy $x = 3$ nghiệm của phương trình đã cho. Ta chứng minh nghiệm đó là duy nhất.

— Nếu $x > 3$ thì $x^2 > 3\sqrt{3x}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 3\sqrt{3x} + 4} > 2.$$

và

$$x^2 - 2\sqrt{3x} - 2 = x^2 - 3\sqrt{3x} + \sqrt{3x} - 2 > 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3x} - 2} > 1.$$

Vậy vế trái của phương trình lớn hơn 3, tức là lớn hơn vế phải.

— Nếu $x < 3$ thì $\sqrt{x^2 - 3\sqrt{3x} + 4} < 2$ và $\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3x} - 3} < 1$, vậy vế trái phương trình nhỏ hơn vế phải.

Các bạn khác giải bằng cách đặt ẩn phụ cũng có những lời giải tốt.

P. H.

Ghi chú: Vì số báo 130 xuất bản muộn, nên khi chuẩn bị đề in số báo 133 này Tòa soạn chưa nhận được nhiều bài giải của các bạn gửi đến. Do vậy có thể còn nhiều bạn có lời giải tốt các bài toán trên nhưng gửi đến Tòa soạn chậm nên không được nêu tên.

T. S.

CÁC ĐỀ TOÁN THI

Bài 1/133. Có n đội bóng thi đấu để xếp hạng mỗi đội đấu một trận với mỗi đội khác. Đội thắng được 2 điểm, đội hòa được 1 điểm, đội thua được 0 điểm. Nếu hai đội có cùng tổng số điểm thì được xếp hạng trên dưới theo một tiêu chuẩn nào đó. Bảng kết quả cho biết: đội đứng thứ nhất được 8 điểm, đội đứng thứ hai được 6 điểm, đội đứng thứ ba được 5 điểm, các đội còn lại có số điểm khác nhau. Hỏi số đội đã tham gia và số điểm của mỗi đội còn lại.

Phan Đức Chính

Bài 2/133. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$x(x^2+y)+y(x-y^2)+x^2(y+1)-y^2(x-1)=1964^{20}$$

[illegible]

Bài 3/133. Tìm ba chữ số cuối cùng của số

$$1983^{1984^{1985^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2000}}}}}}$$

Trần Quang Minh

Bài 4/133. Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, \ldots a_n$ thỏa mãn các tính chất

1) $a_i \leqslant 1983$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) BSCNN $(a_i, a_j) > 1983$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$ và $i \neq j$.

Chứng minh rằng

$$1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n < 3/2.$$

Tạ Văn Tự

Bài 5/133. Tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leqslant 1$ khi $|x| \leqslant 1$.

Chứng minh rằng với mọi $M \geqslant 1$ $|f(x)| \leqslant 2M^2 - 1$ khi $|x| \leqslant M$.

Phan Đức Chính

Bài 6/133. Giả sử a là một số đã cho trước và $P(x)$ là một đa thức. Xét các số $|1 - P(0)|$, $|a - P(1)|$, $|a^2 - P(2)|$, $|a^3 - P(3)|$. (*)

1) Chứng minh rằng nếu $a \geqslant 3$, thì với mọi đa thức $P(x)$ bậc không quá 2, trong các số (*) có ít nhất một số $\geqslant 1$.

2) Chứng tỏ rằng nếu $1 < a < 3$, thì tồn tại một đa thức $P(x)$ bậc không quá 2 sao cho tất cả các số (*) đều nhỏ hơn 1

Phan Đức Chính

Bài 7/133. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M ở trong tam giác sao cho $MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bùi Hưng

Bài 8/133. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Đặt $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$, $A_1B_1 = c_1$, $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$.

Chứng minh rằng

$$(a/a_1)^2 + (b/b_1)^2 + (c/c_1)^2 \geqslant 12.$$

Đào Trường Giang

Bài 9/133. Trong tam giác ABC, các đường phân giác của các góc A, B, C cắt nhau tại I và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1. Gọi S, S_1 và d tương ứng là diện tích tam giác ABC, diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ và khoảng cách từ I tới tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Hãy chứng minh rằng

1) $S_1/S = (IA_1/IA) \cdot (IB_1/IB) \cdot (IC_1/IC)$

2) $d = R\sqrt{1 - S/S_1}$

Tạ Văn Tự

Bài 10/133. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Trên cạnh SC (đối diện với SA) lấy một điểm C_1.

Chứng minh rằng trong các thiết diện tạo thành do một mặt phẳng đi qua AC_1 cắt hình chóp và cắt cả SB, SD, thì thiết diện song song với BD là thiết diện có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích thiết diện nhỏ nhất đó khi cạnh đáy của hình chóp bằng 1, cạnh bên bằng $\sqrt{3}$ và $SC_1 = \sqrt{3}/3$.

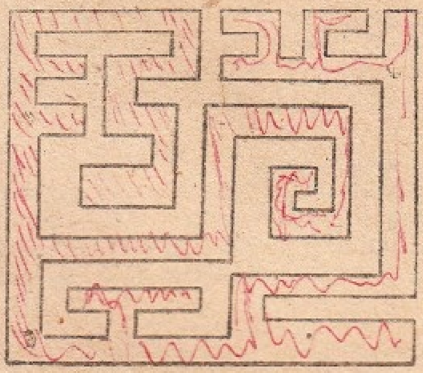
Phạm Quang Giám

ĐỊNH LÍ JORDAN

VĂN NHƯ CƯƠNG

1. Trên mặt phẳng P vẽ một đường tròn C. Đường tròn này chia mặt phẳng thành hai miền. Về mặt trực quan điều đó thật là hiển nhiên. Nếu xem P như một tờ giấy và dùng kéo cắt theo đường tròn C thì ta sẽ được hai miếng; một là hình tròn và một là tờ giấy khuyết hình tròn. Nếu thay đường tròn C bằng một đường elip, hoặc một hình vuông, một tam giác, v.v..., thì kết quả cũng tương tự.

Bây giờ ta hãy thay C bằng một đường cong kín (không tự cắt) bất kỳ, chẳng hạn một đường gấp khúc kín như trên hình vẽ 1.



Hình 1

Liệu đường cong này có chia mặt phẳng thành hai miền hay không? Rõ ràng là trường hợp này ít hiển nhiên hơn nhiều so với các trường hợp trên. Tuy nhiên cũng có thể dự đoán rằng câu trả lời cũng giống như các trường hợp trên. Có nghĩa là: «Mọi đường cong kín (không tự cắt) trên mặt phẳng P luôn luôn chia mặt phẳng thành hai miền, một miền trong và một miền ngoài».

Định lý này được Camille Jordan (1838 – 1922) phát biểu lần đầu tiên trong cuốn «Giáo trình giải tích» nổi tiếng của ông. Cả một thế hệ các nhà toán học lớn đã tìm thấy ở cuốn sách những tư tưởng của toán học hiện đại, và những phương pháp lập luận chính xác. Chứng minh của Jordan về định lí trên rất dài dòng, rắc rối và điều đáng ngạc nhiên hơn là không hoàn toàn triệt để. Các nhà toán học đã phải bỏ nhiều công sức để khắc phục những thiếu sót trong chứng minh đó. Chứng minh chặt chẽ đầu tiên của định lí Jordan rất phức tạp và rất khó hiểu ngay cả đối với những người có trình độ toán học tốt. Gần đây, người ta tìm thấy một vài cách chứng minh đơn giản hơn. Cái khó khăn chủ yếu của định lí là lớp các đường cong kín rộng hơn rất nhiều so với lớp các đa giác chẳng hạn, hoặc so với lớp các đường cong «trơn». (Có thể hình dung một cách trực quan "đường cong kín" như sau: lấy một sợi dây mảnh, nối hai đầu lại thành một vòng dây và đặt nó tùy tiện lên mặt phẳng sao cho nó không tự cắt. Một cách chính xác, đường cong kín được định nghĩa như là ảnh của đường tròn qua một phép biến đổi liên tục hai chiều).

2. Dưới đây sẽ trình bày chứng minh định lí Jordan cho trường hợp đa giác (ta luôn luôn hiểu là đa giác đơn, tức là không tự cắt, nhưng không nhất thiết là lồi). Tuy trường hợp này chưa tổng quát nhưng vẫn thường gặp trong nhiều bài toán quan trọng cụ thể, chúng ta sẽ chứng minh rằng:

Nếu S là một đa giác nằm trong mặt phẳng P thì tập hợp $P \setminus S$ được chia làm hai tập con $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ với các tính chất sau đây:

1) Hai điểm thuộc cùng tập hợp $\mathbf{A}$ (hoặc cùng tập hợp $\mathbf{B}$) có thể nối với nhau bằng một đường gấp khúc không cắt S.

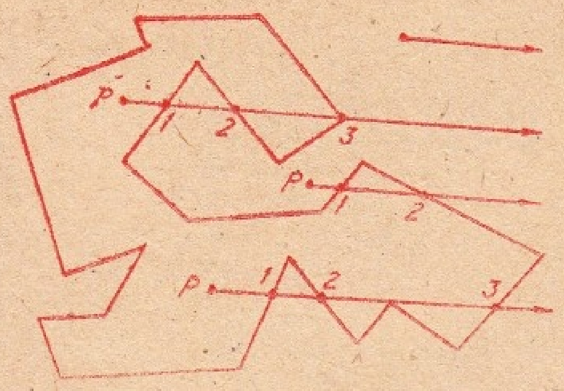
2) Bất kỳ đường gấp khúc nào nối một điểm thuộc tập $\mathbf{A}$ với một điểm thuộc tập $\mathbf{B}$ đều cắt S.

Chứng minh: Ta hãy cố định trong mặt phẳng P một tia nào đó không song song với bất kỳ một cạnh nào của đa giác S.

Với mỗi điểm $p \in P \setminus S$ ta hãy vẽ một tia có gốc p và song song với tia cố định đã chọn, rồi đếm số giao điểm của tia vừa dựng với S. Nếu số giao điểm đó là chẵn (hoặc lẻ) thì ta nói rằng điểm p có chỉ số chẵn (hoặc có chỉ số lẻ).

Ta cần quy ước thêm trong trường hợp tia vừa dựng đi qua một điểm của đa giác S. Khi đó:

a) Nếu hai cạnh của S xuất phát từ đỉnh đó nằm về một phía của tia, thì đỉnh đó không tính là một giao điểm. Những đỉnh như vậy gọi là đỉnh loại 1.



Hình 2

b) Nếu hai cạnh của S xuất phát từ đỉnh đó nằm về hai phía của tia, thì đỉnh đó được tính như là một giao điểm. Những đỉnh này được gọi là đỉnh loại 2. (Xem hình 2).

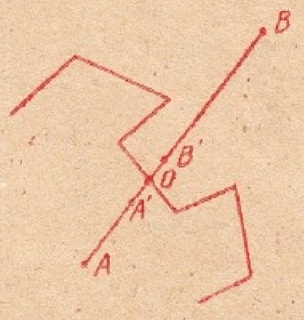
Ta chứng minh một số tính chất đơn giản của «chỉ số».

1) Nếu đoạn thẳng AB không cắt **S** thì hai điểm A và B có cùng chỉ số (tức là cùng chẵn hoặc cùng lẻ). Thật vậy, nếu ta xét một điểm M thay đổi từ A đến B với các tia gốc M tương ứng, thì số giao điểm của tia đó với S chỉ thay đổi khi tia đó đi qua một đỉnh của S. Nhưng theo qui ước a) và b) thì khi đó hoặc là số giao điểm không thay đổi (trường hợp a) hoặc số giao điểm được ± 2 (trường hợp b). Như vậy chỉ số của M trên đoạn AB không thay đổi.

2) Nếu A và B là hai điểm có thể nối với nhau bởi một đường gấp khúc không cắt S thì A và B có cùng chỉ số.

Tính chất này là hệ quả trực tiếp của tính chất 1).

3) Nếu đoạn thẳng AB chỉ cắt **S** tại một điểm không phải đỉnh loại 1 thì chỉ số của A và B phải khác nhau.



Hình 3

Thật vậy, giả sử AB cắt một cạnh nào đó của S tại O và không cắt cạnh nào khác.

Nếu AB song song với tia đã chọn thì rõ ràng số giao điểm ứng với tia gốc A và tia gốc B hơn kém nhau một đơn vị. Vậy chỉ số A và B khác nhau.

Nếu AB không song song với tia đã chọn thì ta hãy lấy trên đoạn AO một điểm A' và trên đoạn OB điểm B'. Dễ dàng thấy rằng nếu ta chọn A' và B' khá gần O thì chỉ số của chúng khác nhau (bạn đọc hãy chứng minh điều đó). Nhưng vì chỉ số của A và A', của B và B' đều giống nhau (tính chất 1) nên suy ra chỉ số của A và B khác nhau (xem hình 3).

Bây giờ ta hãy chia tập hợp $P \setminus S$ thành hai tập con như sau: tập **A** gồm những điểm có chỉ số chẵn và tập **B** gồm những điểm có chỉ số lẻ.

Trước hết ta thấy rằng nếu A và B là hai điểm sao cho $A \in$ **A** và $B \in$ **B** thì mọi đường gấp khúc nối A và B đều cắt **S** vì nếu có một đường gấp khúc như thế không cắt S thì theo tính chất 2) A và B phải có cùng chỉ số, tức là cùng thuộc **A**, hoặc cùng thuộc **B**.

Bây giờ giả sử C và D là hai điểm cùng thuộc tập hợp **A** (trường hợp cùng thuộc **B** lập luận hoàn toàn tương tự). Ta phải chứng minh rằng có một đường gấp khúc nối C và D mà không cắt S.

Nếu đoạn thẳng CD không cắt S thì không còn gì phải chứng minh nữa. Ta hãy xét trường hợp đoạn CD cắt S, và gọi C' là giao điểm gần C nhất, D' là giao điểm gần D nhất (mà C' và D' không phải là đỉnh loại 1) (xem hình 4).

Hình 4

Gọi C_1 là một điểm trên đoạn CC' và khá gần C'. Từ C_1 ta xây dựng một đường gấp khúc «song song» với một trong hai phần của S nối C' và D' (đường nét đứt trên hình vẽ) và gọi D_1 là giao điểm của đoạn CD với đường gấp khúc vừa dựng. Điểm D_1 sẽ nằm trên đoạn CD' hay đoạn $D'D$?

Ta thấy rằng C, C_1, D_1, D đều cùng thuộc tập **A** (vì chỉ số của chúng giống nhau). Nếu D_1

nằm trên đoạn CD' tức là đoạn thẳng D_1D cắt S tại D' thì theo tính chất 3) chỉ số của D_1 và D phải khác nhau. Bởi vậy D_1 phải nằm trên đoạn thẳng I_1D.

Từ đó suy ra rằng ta có thể nối C với D bởi một đường gấp khúc không cắt S; đường gấp khúc đó gồm đoạn CC_1, rồi tiếp đến đường gấp khúc đã dựng nối C_1 với D_1 và cuối cùng là đoạn thẳng D_1D.

Vậy định lí Jordan cho đa giác đã được chứng minh.

Tập hợp **A** gồm những điểm có chỉ số chẵn sẽ là «miền ngoài» của đa giác S. Thật vậy nếu ta lấy một điểm khá xa theo hướng của tia đã chọn thì dễ thấy rằng nó có chỉ số chẵn (số giao điểm bằng 0) bởi vậy nó thuộc **A**. Tập hợp **B** gồm những điểm có chỉ số lẻ là «miền trong» của đa giác.

Dầu cho một đa giác phức tạp và rắc rối như thế nào (kiểu như hình vẽ 1) bao giờ ta cũng có thể xác định dễ dàng một điểm nào đó là nằm trong hoặc nằm ngoài đa giác. Chỉ cần vẽ qua điểm đó một tia và đếm số giao điểm. Nếu số giao điểm là chẵn thì điểm đó nằm ngoài đa giác, nếu số giao điểm là lẻ thì điểm đó nằm trong đa giác.

Tìm hiểu sâu toán phổ thông

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

LÊ THỐNG NHẤT

TRONG số báo 113, chúng ta đã bàn về một số phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Ở bài này, tôi muốn trao đổi thêm về phương pháp dựa vào miền giá trị của hàm số.

Trước hết ta nhắc lại khái niệm miền giá trị của hàm số là gì? Cho hàm số $y = f(x)$, miền giá trị của hàm số là tất cả các giá trị của y sao cho tồn tại x mà $y = f(x)$. Nếu hàm số cho bởi công thức giải tích thì ta có thể coi đẳng thức $y = f(x)$ là phương trình đối với ẩn x, còn tham số là y. Vậy trong trường hợp này để tìm miền giá trị của y, ta làm bài toán: «Tìm các giá trị của tham số y sao cho phương trình $y=f(x)$ đối với ẩn x, có nghiệm».

Thí dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Giải: Ta tìm miền giá trị bằng cách tìm giá trị của y để phương trình

$$y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$ có nghiệm đối với ẩn x.

Do $x^2+x+1 \neq 0$ nên phương trình trên tương đương:

$$yx^2 + (y-1)x + y - 1 = 0. \qquad (1)$$

Khi $y = 0$ ta có phương trình: $-x-1=0$, phương trình có nghiệm $x=-1$. Vậy $y=0$ là một trong các giá trị cần tìm. (Ở bài báo số 113 bỏ sót trường hợp này ở ví dụ 4).

Khi $y \neq 0$ ta có (1) là phương trình bậc 2, muốn có nghiệm thì:

$$\Delta = (y-1)^2 - 4y(y-1) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)(y-1-4y) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)(-1-3y) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow -1/3 \leqslant y \leqslant 1;\ y \neq 0.$$

Kết hợp cả $y=0$ và $y \neq 0$ đã xét ta có đáp số

$$-1/3 \leqslant y \leqslant 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của y là 1 và nhỏ nhất của y là $-1/3$.

Ở thí dụ 1, ta mới đưa về biện luận phương trình đơn giản. Ta xét thí dụ phức tạp hơn:

Thí dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{-4^{|x|} + 2^{|x|+2}}{4^{|x|} - 2^{|x|+1} + 2}.$$

Giải: Ta hãy tìm y để phương trình:

$$y = \frac{-4^{|x|} + 2^{|x|+2}}{4^{|x|} - 2^{|x|+1} + 2}$$

có nghiệm. Đặt $X = 2^{|x|}$ ta thấy do $|x| \geqslant 0$ nên $X = 2^{|x|} \geqslant 1$. Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi phương trình:

$$y = \frac{-X^2 + 4X}{X^2 - 2X + 2}$$

có ít nhất một nghiệm thỏa mãn $X \geqslant 1$.

Do $X^2 - 2X + 2 \neq 0$ nên phương trình tương đương với

$$(y+1)X^2 - 2(y+2)X + 2y = 0. \qquad (2)$$

Với $y = -1$ ta có: $-2X - 2 = 0$, không thỏa mãn $X \geqslant 1$. Vậy $y = -1$ không nằm trong những giá trị cần tìm. Với $y \neq -1$ ta có (2) là phương trình bậc (2): cần phải biện luận và so sánh nghiệm của (2) với số 1. Ta có:

$$\triangle' = -y^2 + 2y + 4.$$

$$af(1) = (y+1)(y-3),$$

$$1 - S/2 = -1/(y+1).$$

Ta có bảng sau:

y	$\triangle'$	$af(1)$	$1-S/2$	Nghiệm của (2)
	$-$	$+$	$+$	vô nghiệm
$1-\sqrt5$	0	$+$	$+$	$x_1 = x_2 = -(1+\sqrt5) > 1$
	$+$	$+$	$+$	$x_1 < x_2 < 1$
-1		0	$=$	$x = -1$
	$+$	$-$	$-$	$x_1 < 1 < x_2$
3	$+$	0	$-$	$x_1 = 1 < x_2 = S/2$
	$+$	$+$	$-$	$1 < x_1 < x_2$
$1+\sqrt5$	0	$+$	$-$	$x_1 = x_2 = \sqrt5 - 1 > 1$
	$-$	$+$	$-$	vô nghiệm

Nhìn vào bảng ta thấy với $-1 < y \leqslant 1 + \sqrt5$ thì phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn $X \geqslant 1$.

Từ đó ta kết luận $y_{max} = 1 + \sqrt5$ còn y_{min} là không tồn tại.

Như vậy phương pháp này còn chứng tỏ được sự tồn tại hay không của các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Bây giờ ta chuyển sang làm với những hàm số không chỉ là 1 đối số. Chẳng hạn ta xét lại ví dụ 12 của bài đã nói «Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $S = x + y$».

Đây là nội dung của bài thi khối A, vào các trường Đại học năm 1970. Có rất nhiều lời giải cho bài này, nay xin trình bày 1 lời giải chưa từng giới thiệu.

Ta coi S là tham số, ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = S \end{cases} \qquad (3)$$

Miền giá trị của S chính là những giá trị của S làm cho hệ trên có nghiệm. Ta có:

$$(x+y)^2 - 2xy = x^2 + y^2 = 1$$

Vậy: $\quad xy = (S^2 - 1)/2$

Do đó x, y là nghiệm của phương trình (do định lý Vi-ét):

$$X^2 - SX + (S^2 - 1)/2 = 0. \qquad (4)$$

Hệ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (4) có nghiệm, hay

$$\triangle = S^2 - 2(S^2 - 1) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - S^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 \geqslant S^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt2 \geqslant S \geqslant -\sqrt2.$$

Vậy $S_{max} = \sqrt2$; $S_{min} = -\sqrt2$.

Ta có thể giải ví dụ 1 của bài viết số 113 bằng cách này. Bây giờ ta xét ví dụ phức tạp hơn:

Thí dụ 3. Biết: $\sin^2 x + \sin y = 1/2$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$S = \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 y.$$

Giải: Ta tìm $S \geqslant 0$ để $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = 1/2 \\ \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 y = S \end{cases}$ (5)

có nghiệm.

Hệ (5) tương đương với $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 3/2 \\ 1/\cos^2 x + 1/\cos^2 y = S + 2 \end{cases}$

Từ đó suy ra:

$$(\cos^2 x + \cos^2 y)/(\cos^2 x \cos^2 y) = S + 2$$

hay $\cos^2 x \cos^2 y = \dfrac{3}{2(S+2)}$

Vậy $\cos^2 x$, $\cos^2 y$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - (3/2)X + \frac{3}{2(S+2)} = 0. \qquad (6)$$

Do $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$; $\leqslant \cos^2 y \leqslant 1$, nên để (5) có nghiệm thì (6) phải có tất cả các nghiệm thỏa mãn $0 \leqslant X \leqslant 1$. Ta có hệ điều kiện

$$\begin{cases} \Delta = 9 - 24/(S+2) \geqslant 0 \\ af(0) = 3/(S+2) > 0 \\ -b/2a - 0 > 0 \\ af(1) = 3/(S+2) - 1 \geqslant 0 \\ -b/2a - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (9S - 6)/(S+2) \geqslant 0 \\ S \geqslant -2 \\ (-S + 1)/(S+2) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} S \geqslant 2/3 \\ S \leqslant -2 \end{array}\right. \\ S > -2 \\ -2 \leqslant S \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2/3 \leqslant S \leqslant 1.$$

Vậy $S_{\max} = 1$; $S_{\min} = 2/3$.

Cuối cùng các bạn hãy tự làm các bài tập

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

1) $y = \dfrac{\sin^2 x + 2\cos x + 1}{\sin^2 x - 2\cos x + 2}$;

2) $y = \dfrac{1 - 3 \cdot 4^{|x|}}{4^{|x|} + 2^{|x|+1} + 1}$.

Bài 2: Biết: $\cos x + \cos y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

$$S = \cos(x/2) + \cos(y/2).$$

---

200 năm ngày mất

LÊÔNA ƠLE

(1707 — 1783)

Sử sách đã ghi lại ngày 18 tháng 9 năm 1783, ngày thiên tài toán học Lêôna Ơle ngừng làm toán và cũng là ngày ông từ trần. Nhưng tên tuổi và sự nghiệp của Ơle vẫn còn sống mãi với khoảng 50 công thức, phương trình, định lý, con số và những ký hiệu toán học được mang tên ông.

Lêôna sinh ngày 15 tháng 4 năm 1707 tại Benden, Thụy sĩ. Nghề nghiệp của người cha và các bài giảng của Giôhan Becnuli đã dẫn Ơle đến với toán học. Năm 20 tuổi (1727), Lêôna Ơle đến làm việc ở Viện Hàn lâm khoa học Pêtecbua, vừa mới thành lập và là nơi thu hút các tài năng trẻ của trung và tây Âu đến làm việc. Tám năm sau (1735), khi Viện Hàn lâm Pêtecbua phải tiến hành những tính toán thiên văn để thiết lập bản đồ, Ơle đã đảm nhận với thời hạn 3 ngày một khối lượng công việc mà các viện sĩ cho rằng phải cần mấy tháng mới làm được, và ông đã hoàn thành công việc với thời hạn làm mọi người kinh ngạc: một ngày một đêm! Tuy vậy, để có được một kỳ công như thế, ông đã phải làm việc hết sức tập trung và cực kỳ căng thẳng, cho nên ông bị hỏng mất mắt phải. Với một mắt còn lại, Ơle vẫn làm việc say sưa với năng suất không hề giảm sút.

Năm 1741 ông trở về làm việc ở Viện Hàn lâm khoa học Beclin (Đức) theo yêu cầu của vua Friedrich đệ nhị. Ở đây ông đã cống hiến toàn lực cho khoa học, ngày đêm miệt mài nghiên cứu và sáng tạo, tham gia công tác lãnh đạo giới toán học, đóng góp trong công tác tổ chức và cả trong những công việc quản lý, hành chính.

Ở Beclin Ơle vẫn duy trì quan hệ chặt chẽ với Viện Hàn lâm Pêtecbua. Chính M. V. Lômnônôxôp, nhà bác học Nga trẻ tuổi và tài năng, «người cha của nền khoa học Nga», đã được Ơle thư từ trao đổi, dìu dắt và được tiếp nhận tới Beclin.

Trong thời gian này Ơle làm việc rất có kết quả và đã trở thành nhà toán học bậc thầy của châu Âu.

Năm 1766 Lêôna Ơle đến Pêtecbua lần thứ hai theo một thỏa thuận với Nữ hoàng Nga Katêrina đệ nhị. Bốn năm sau (1770), do ngày đêm làm toán quên mình, con mắt còn lại của Ơle bị hỏng nốt.

Tiếp theo đó một loạt bất hạnh đã xảy đến với Ơle: nhà cháy, mất sạch của cải, người vợ thân yêu của ông qua đời! Song những tổn thất vật chất và tinh thần đó cùng với sự giảm sút sức khỏe của tuổi già vẫn không ảnh hưởng tới sức sáng tạo và năng suất lao động của Ơle. Ông đọc cho người khác viết hết công trình này đến công trình khác. Từ năm 1766 cho đến lúc qua đời ông đã để lại 416 công trình, tức trung bình 25 công trình mỗi năm (trước đó từ 7 đến 14 công trình mỗi năm). Khi ông mất, số công trình chưa công bố của ông để lại đã được đăng trên tạp chí của Viện Hàn lâm đến 80 năm sau mới hết, gấp 4 lần con số mà chủ tịch Viện Hàn lâm Pêtecbua đã có lần yêu cầu ông trước lúc ông qua đời.

Những công trình của Ơle đề cập đến hầu hết các lĩnh vực của toán học thời bấy giờ và đến nhiều ngành khoa học và kỹ thuật khác. Theo nhà nghiên cứu lịch sử tên tuổi Liên xô A. P. Yuskêvich, 40% nghiên cứu của Ơle dành cho đại số, lý thuyết số và giải tích, 18% cho hình học, 28% cho cơ học và vật lý, 11% cho thiên văn. Phần còn lại dành cho lý thuyết đường đạn, bản đồ, tàu thuyền và xây dựng, lý thuyết âm nhạc, thần học và triết học. Năm 1911, ở quê hương ông, toàn bộ những công trình của ông được in thành bộ sách với tên đề «Leonhardi Euleri Opera Omnia» gồm 85 quyển cỡ lớn với gần 40.000 trang. Sự xuất bản này là một đài kỷ niệm văn hóa xứng đáng với công lao to lớn của thiên tài toán học Ơle.

Ở chương trình phổ thông, chúng ta đã biết đến tên tuổi Ơle qua «đường thẳng Ơle, đường tròn Ơle» (đường tròn 9 điểm) trong tam giác, định Ơle về liên hệ giữa số đỉnh, cạnh và mặt trong một đa diện lồi, v.v... Chúng ta đã và đang làm toán với những ký hiệu của Ơle: số π, số i $(=\sqrt{-1})$, sin, cos, tg, cotg, Δx (số gia), Σ (tổng), f(x) hàm f của x), v.v...

Những thành tựu sâu sắc, phong phú và muôn vẻ của Lêôna Ơle là những minh họa tuyệt vời cho nhận định: «Toán học chỉ cho ta những phương pháp hoặc những con đường dẫn tới chân lý. Toán học làm cho những chân lý ẩn khuất nhất trở thành minh bạch và phơi bày chúng ra trước ánh sáng. Một mặt toán học làm giàu sự hiểu biết của chúng ta, mặt khác nó làm cho suy nghĩ của chúng ta thêm sâu sắc.

Cuộc đời của Lêôna Ơle là một tấm gương sáng chói về tinh thần lao động sáng tạo không biết mỏi. Đối với Ơle, làm toán cũng tự nhiên và cần thiết cho đời sống như là thở hút khí trời vậy. Sống là lao động sáng tạo, sống là làm toán, và ông chỉ ngừng làm toán khi trái tim ngừng đập.

NGÔ ĐẠT TỨ

THÔNG BÁO THÊM VỀ CUỘC THI GIẢI TOÁN

Như đã thông báo, các đề thi của «cuộc thi giải toán kỷ niệm 20 năm ngày báo THvTT ra số đầu» được đăng trong mục «đề ra kỳ này» của ba số báo 4, 5, 6 – 1983.

Đối tượng dự thi là tất cả các bạn yêu toán đang học ở các trường phổ thông. Người dự thi không nhất thiết phải giải được nhiều bài toán thi. Lời giải mỗi bài toán phải viết riêng và có đề tên và địa chỉ để tiện cho việc chấm.

Người dự thi có thể gửi dần các bài về tòa soạn báo theo địa chỉ trên báo. Thời hạn chậm nhất (theo dấu của bưu điện nơi gửi) là: đề đăng trên số 4: 10-1-1984, số 5: 29-2-1984, số 6: 10-3-1984.

In 9300c tại Xí nghiệp In 75, 77 Hàng Bồ – Hà Nội.
Số in 198/83. In xong và gửi lưu chiểu tháng 12/1983 Chỉ số: 12884 Giá: 1,00đ