VIỆN KHOA HỌC
VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Số 129
1
1983

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN
Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG
Dây nói: 52825

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH HÀM

PHAN ĐỨC CHÍNH

TÒA soạn báo Toán học tuổi trẻ có nhận được một số lời giải bài toán số 1 trong kỳ thi Toán ở Lúc-xem-bua:

Bài toán 1. *Hãy tìm một hàm số $f(x)$ xác định với mọi x hữu tỷ, thỏa mãn các điều kiện*

$$f(1) = 2,\ f(xy) = f(x)\,f(y) - f(x+y) + 1$$

với mọi x, y hữu tỷ.

Các lời giải gởi đến kể ra cũng đáp ứng được yêu cầu đòi hỏi, vì bài toán nói rằng: hãy tìm một hàm... Do đó chẳng cần dài dòng có thể đưa ngay ra hàm số $f(x) = x + 1$, xác định với mọi số hữu tỷ.

Nhưng đó không phải là thâm ý của bài toán! Thực chất bài toán đòi hỏi tìm tất cả các hàm số thỏa mãn các điều kiện đã nêu. Và thực tế là $f(x) = x + 1$ (x hữu tỷ) là nghiệm duy nhất của bài toán. Rất tiếc trong các l... không có bạn nào c... nhất ấy.

Đồng chí *Phạm* ... soạn có hỏi tôi: ... hàm $f(x)$ xác định với x hữu tỷ, liệu có mở rộng được cho mọi số thực x chăng?

Bài toán 1 thuộc loại «phương trình hàm», tức là ẩn là hàm số và phải tìm tất cả các hàm số nghiệm bài toán. Phép giải một phương trình thông thường nói chung đã là việc không đơn giản, lẽ dĩ nhiên phép giải một phương trình hàm lại càng phức tạp hơn.

Trong một bài toán về phương trình hàm, hàm số phải tìm buộc phải thỏa mãn một (hay nhiều) hệ thức đại số cơ bản. Và nói chung, nếu không buộc thêm một vài điều kiện phụ, thì có vô số hàm số có dạng rất khác nhau, nghiệm bài toán. Chẳng hạn:

Bài toán 2. *Tìm tất cả các hàm $f(x)$, xác định với mọi số thực x, và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

...*c và y.*

...àm số nghiệm bài to...

trong đó C là một hằng số tùy ý, cố định. Nhưng không thể kết luận rằng

$$f(x) = Cx \text{ với mọi số thực } x. \tag{1}$$

Chẳng hạn, với A và C là hai hằng số tùy ý, cố định, hàm

$$f(x) = \begin{cases} Ar + Cs \text{ nếu } x \text{ có dạng } x = r\sqrt{2} + s, \\ \qquad \text{với } r, s \text{ hữu tỷ,} \\ 0 \text{ nếu } x \text{ không biểu diễn dưới dạng trên:} \end{cases}$$

là một nghiệm của bài toán.

Để bài toán 2 chỉ có nghiệm (1), cần đặt thêm điều kiện phụ. Thông thường, đối với đa số các phương trình hàm, đó là điều kiện: $f(x)$ *liên tục*.

Khái niệm liên tục hết sức quan trọng trong toán học. Nhưng khái niệm ấy rất tinh vi, nó phải dựa trên quan niệm chặt chẽ về số thực. Vì vậy, ở trình độ phổ thông, nếu có thì cũng chỉ có thể đề cập đến khái niệm liên tục một cách sơ lược.

Đến đây các bạn đã hiểu vì sao trong bài toán 1, chỉ nói đến hàm $f(x)$ xác định với x hữu tỷ. Dù sao câu hỏi của đồng chí Giám đã thôi thúc tôi: mở rộng bài toán 1 cho các số thực, không phải sử dụng khái niệm liên tục. Nói cách khác, có thể là hệ thức đại số trong bài toán 1 đã ngầm bao gồm khái niệm liên tục?

Nghĩ sâu hơn, tôi thấy rằng đúng là như vậy. Đồng thời có thể giảm nhẹ giả thiết, tôi đã đi đến:

Bài toán 3. *Giả sử $f(x)$ là một hàm số xác định với mọi số thực x, và thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1 \tag{2}$$

với mọi x và y. Thế thì $f(x)$ phải là một trong hai hàm sau đây:

— hoặc $f(x) = 1$ với mọi x;

— hoặc $f(x) = x + 1$ với mọi x.

Hệ thức (2) tuy có vẻ đơn giản, nhưng hơi khó làm việc. Đặt $g(x) = f(x) - 1$, thì bài toán 3 tương đương với.

Bài toán 3'. *Giả sử $g(x)$ là một hàm số xác định với mọi số thực x, và thỏa mãn điều kiện*

$$g(xy) = g(x)\,g(y) + g(x) + g(y) - g(x + y) \tag{3}$$

…ới mọi x và y. Thế thì:

…oặc $g(x)$ đồng nhất bằng 0;

…$(x) = x$ với mọi x.

1) Trong (3), cho $x = y = 0$ thì được

$$g(0) = g^2(0) + 2g(0) - g(0).$$

Vậy $g(0) = 0$.

2) Trong (3), cho $y = 1$, ta được

$$g(x) = g(x)\,g(1) + g(x) + g(1) - g(x + 1),$$

Vậy

$$g(x + 1) = g(1)[g(x) + 1]. \tag{4}$$

Nếu $g(1) = 0$, thì $g(x + 1) = 0$ với mọi x, tức là $g(x)$ đồng nhất bằng 0, trái với giả thiết. Thành thử $g(1) \neq 0$. Trong (4), cho $x = -1$, thì được

$$0 = g(0) = g(-1 + 1) = g(1)[g(-1) + 1],$$

mà $g(1) \neq 0$, nên $g(-1) = -1$.

3) Trong (3) cho $y = -1$ thì được

$$g(-x) = g(-1)\,g(x) + g(-1) + g(x) - g(x - 1)$$
$$= -1 - g(x - 1).$$

Nhân cả hai vế này với $-g(1)$, thì theo (4)

$$-g(1)g(-x) = g(1)[1 + g(x - 1)] = g(x) \tag{5}$$

Trong hệ thức này, cho $x = -1$, thì được

$$-g^2(1) = g(-1) = -1.$$

Vậy $g^2(1) = 1$. Nếu $g(1) = -1$, thì (4) trở thành

$$g(x + 1) = -1 - g(x),$$

do đó

$$g(x + 2) = -1 - g(x + 1)$$
$$= -1 + 1 + g(x) = g(x),$$

đặc biệt $g(2) = g(0) = 0$. Nhưng khi đó

$$-1 = g(1) = g(2.1/2) = g(2)g(1/2) +$$
$$+ g(2) + g(1/2) - g(2 + 1/2) = g(1/2) - g(1/2) = 0,$$

mâu thuẫn. Vậy ta phải có $g(1) = 1$, và (4), (5) trở thành

$$g(x + 1) = g(x) + 1, \quad g(-x) = -g(x).$$

4) Lại theo (3), (và theo trên, $g(x + 2) =$

$$= g(x + 1) + 1 = g(x) + 2 \text{ và } g(2) = 2$$

$$g(2x) = g(2)g(x) + g(2) + g(x) - g(x + 2)$$
$$= 2g(x) + 2 + g(x) - g(x) - 2 = 2g(x).$$

5) Để ý rằng

$$-g(xy) = g(-xy)$$
$$= g(x)g(-y) + g(x) + g(-y) - g(x - y)$$
$$\ldots (x)g(y) + g(x) - g(y) - g(x - y).$$

…i (3), suy ra

… $= 2g(x) = g(2x)$.

… thì ta có

… $+ y)$

đúng với mọi u, v, hãy viết lại

$$g(x) + g(y) = g(x + y).$$

Khi đó từ (3), ta được

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

Tóm lại, hàm $g(x)$ có các tính chất:

i) $g(1) = 1$,

ii) $g(x + y) = g(x) + g(y)$ với mọi x, y,

iii) $g(xy) = g(x)\, g(y)$ với mọi x, y.

Từ ii) bằng phép quy nạp, ta được $g(nx) = ng(x)$ với mọi n nguyên. Do đó với n nguyên, m nguyên dương

$$g(n/m) = ng(1/m),\ 1 = g(n.1/m) = mg(1/m).$$

Vậy

$$g(n/m) = n/m.$$

Từ iii) để ý rằng nếu $x \geqslant 0$ thì $g(x) \geqslant 0$ bởi vì khi đó

$$g(x) = g(\sqrt{x}.\sqrt{x}) = g^2(\sqrt{x}) \geqslant 0,$$

thành thử nếu $x \geqslant y$ thì

$$0 \leqslant g(x - y) = g(x) + g(-y) = g(x) - g(y),$$

hay $g(x) \geqslant g(y)$.

Giả thử x là một số thực, tùy ý. Nếu x hữu tỷ, ta có ngay $g(x) = x$. Nếu x vô tỷ, chẳng hạn bằng cách xấp xỉ thiếu và thừa số x, ta tìm được hai dãy số hữu tỷ

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_n > \ldots,\ \lim r_n = x,$$
$$s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \ldots,\ \lim s_n = x,$$

Vì mới mọi n

$$s_n < x < r_n$$

nên

$$g(s_n) \leqslant g(x) \leqslant g(r_n)$$

hay

$$s_n \leqslant g(x) \leqslant r_n.$$

Cho $n \to \infty$ thì $s_n \to x$, $r_n \to x$, vậy $g(x) = x$.

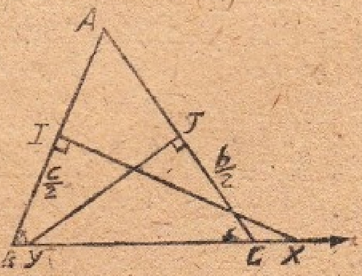
GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI QUỐC TẾ NĂM 1980 TẠI PHẦN LAN

Trên báo Toán học và tuổi trẻ số 2 năm 1982 đã giới thiệu và đăng đề toán của các kỳ thi toán quốc tế năm 1980 tại Phần Lan và Lúc-xem bua. Tòa soạn nhận được không nhiều bài giải của các bạn gửi đến. Riêng đối với các bài toán thi ở Phần Lan, chỉ có bạn *Nguyễn Văn Minh* (lớp 12/1 trường Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) gửi lời giải nhiều bài, trong đó giải tốt các bài số 2, 3 và 6.

Dưới đây là đầu đề và lời giải các bài toán thi ở Phần Lan.

Bài 1. *Trong tam giác ABC, các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt đường thẳng BC tại X, Y. Chứng minh rằng để BC = XY, một điều kiện đủ là tgBtgC = 3. Hãy chứng tỏ rằng điều kiện này không phải là cần và hãy tìm điều kiện cần và đủ để BC = XY.*

Lời giải. Vì X, Y là n... thẳng BC, nên để lập lu... hình vẽ, ta hãy định h... B đến C như trên hìn...



Hình 1

Đồng thời ta cũng định hướng các góc B và C như trên hình ấy, khi đó dù góc B hay C là nhọn hay tù, ta luôn luôn có

$$\overline{BX} = c/(2\cos B),\ \overline{YC} = b/(2\cos C),$$

vậy

$$\overline{BC} = \overline{BX} + \overline{XY} + \overline{YC}$$
$$= \overline{XY} + c/(2\cos B) + b/(2\ldots$$

1) Nếu $\overline{BC} = \overline{XY}$, thì từ (1) và từ định lý hàm số sin, suy ra

$$0 = \frac{\sin C}{\cos B} + \frac{\sin B}{\cos C}$$

$$= \frac{\sin B\cos B + \sin C\cos C}{\cos B\cos C}$$

$$= \frac{\sin 2B + \sin 2C}{2\cos B\cos C}$$

$$= \frac{\sin(B+C)\cos(B-C)}{\cos B\cos C}$$

$$= \frac{\sin A\cos(B-C)}{\cos B\cos C}$$

Vì sin $A \neq 0$, nên

$$0 = \frac{\cos(B-C)}{\cos B\cos C} = \frac{\cos B\cos C + \sin B\sin C}{\cos B\cos C}$$

$$= 1 + \text{tg}B\text{tg}C$$

hay

$$\text{tg}B\text{tg}C = -1$$

(Dĩ nhiên kết quả này còn tương đương với: $|B-C| = \pi/2$).

2) Nếu $\overline{BC} = \overline{YX} = a$, thì từ (1) suy ra

$$2a = \frac{c}{2\cos B} + \frac{b}{2\cos C},$$

do đó theo định lý hàm số sin, và sử dụng phép biến đổi ở trên

$$4\sin A = \frac{\sin C}{\cos B} + \frac{\sin B}{\cos C} = \frac{\sin A\cos(B-C)}{\cos B\cos C},$$

Vì sin A ≠ 0. nên suy ra

$$4 = \frac{\cos(B-C)}{\cos B\cos C} = \frac{\cos B\cos C + \sin B\sin C}{\cos B\cos C}$$

$$= 1 + \text{tg}B\text{tg}C,$$

hay

$$\text{tg}B\text{tg}C = 3.$$

Thành thử điều kiện cần và đủ để $BC = XY$ là hoặc $\text{tg}B\text{tg}C = -1$ hoặc $\text{tg}B\text{tg}C = 3$.

Như vậy $\text{tg}B\text{tg}C = 3$ chỉ là một điều kiện đủ để $BC = XY$, nhưng không phải là điều kiện cần.

Một vài bạn có cách giải khác, nhưng lời giải còn sai sót. Có bạn viết kết luận

$$\ldots XY \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg}B\text{tg}C = 3 \\ |B - C| = \pi/2 \end{cases}$$

nghiêm trọng (do thiếu chữ « hoặc »); chỉ có thể hiểu cách viết đó là hai đẳng thức phải đồng thời thỏa mãn.

Bài 2. *Dãy* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *được xác định như sau:*

$$a_0 = 1/2,$$

$$a_{k+1} = a_k + (1/n)\,a_k^2 \quad (0 \leqslant k < n).$$

Chứng minh rằng $1 - 1/n < a_n < 1$.

Lời giải. Để ý rằng

$$1/2 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Có thể viết quy luật xác định dãy số dưới dạng

$$a_{k+1} = a_k + a_k^2/n = a_k\,(n + a_k)/n,$$

do đó

$$\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{n}{a_k(n + a_k)} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{n + a_k} \qquad (1)$$

1) Do $a_k > 0$, nên từ (1) suy ra

$$1/a_{k+1} > 1/a_k - 1/n.$$

Viết các bất đẳng thức này với $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, rồi cộng lại thì được

$$1/a_n > 1/a_0 - n/n = 2 - 1 = 1,$$

vậy $a_n < 1$.

2) Với $0 \leqslant k \leqslant n$, ta có $a_k < 1$, nên lại từ (1) suy ra

$$1/a_{k+1} < 1/a_k - 1/(n+1)$$

Viết các bất đẳng thức này với $k = 0, 1, \ldots, n-1$, rồi cộng lại thì được

$$1/a_n < 1/a_0 - n/(n+1) = 2 - n/(n+1)$$
$$= (n+2)/(n+1),$$

vậy

$$a_n > (n+1)/(n+2) = 1 - 1/(n+2),$$

và dĩ nhiên $a_n > 1 - 1/n$.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Văn Minh* có lời giải tốt, bằng cách đưa ra bất đẳng thức kép

$$\frac{n}{2n+1-k} < a_k < \frac{n}{2n-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Để chứng tỏ rằng bất đẳng thức kép này đúng, bạn Minh nhận xét nó đúng cho $k = 1$, sau đó dùng phép quy nạp theo k.

... mặt phương pháp, việc đưa ra ... có phần « không tự nhiên », ... của một quá trình đoán

... ên cũng là một phương ... ùng kiểu loại. Đây là một bài toán do Thụy Điển đề nghị làm đề thi trong kỳ thi Toán thế giới lần 16 (1974) nhưng lần ấy, Hội đồng giám khảo cho rằng bài ấy quá khó!):

« Cho a là một số thực, $0 < a < 1$, và n là một số tự nhiên tùy ý. Với mỗi n lập dãy số

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

theo quy luật

$$a_0 = a, \ a_{k+1} = a_k + a_k^2/n \ (0 \leqslant k < n).$$

Hãy chứng minh rằng tồn tại một số thực A (phụ thuộc vào a) sao cho $0 < n(A - a_n) < A^3$ ».

Bài 3. *Xem phương trình*

$$x^n + 1 = y^{n+1}$$

trong đó n là một số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình không có nghiệm nguyên dương (x, y) với x và $n+1$ nguyên tố cùng nhau.

Lời giải (của bạn *Nguyễn Văn Minh*). Giả sử ngược lại, phương trình có nghiệm nguyên dương (x_0, y_0) mà $(x_0, n+1) = 1$, ta có

$$x_0^n = (y_0 - 1)(y_0^n + y_0^{n-1} + \ldots + 1) \quad (1)$$

Ta biểu diễn $A = y_0^n + y_0^{n-1} + \ldots + 1 = k(y_0 - 1) + n + 1$.

Nếu A và $y_0 - 1$ có cùng một ước số nguyên tố $p > 1$ thì p cũng là ước số của $n+1$, và theo (1) thì p cũng là ước số của x_0^n, do đó p là ước số của x_0. Mâu thuẫn vì $(x_0, n+1) = 1$. Vậy $(y_0 - 1, y_0^n + y_0^{n-1} + \ldots + 1) = 1$. Từ đây và từ (1) suy ra

$$y_0^n + y_0^{n-1} + \ldots + 1 = x_0^n \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $x_0 > y_0$ (vì $n > 1$) $\Rightarrow x_0 \geqslant y_0 + 1$

$$x_0^n \geqslant (y_0 + 1)^n = y_0^n + ny_0^{n-1} + \ldots + ny_0 + 1 > y_0^n + y_0^{n-1} + \ldots + 1,$$

mâu thuẫn với (2). Vậy điều giả sử ngược lại là sai, $\Rightarrow$ d.p.c.m.

Bài 4. *Một đa giác lồi $2n$ cạnh nội tiếp trong hình tròn, có $n-1$ cặp cạnh đối song song. Với những giá trị nào của n thì hai cạnh đối còn lại cũng song song.*

Lời giải. 1) Ta chứng minh nếu n lẻ thì đa giác lồi $2n$ cạnh nội tiếp đã có $n-1$ cặp cạnh đối song song thì cặp cạnh đối còn lại cũng song song. Giả sử đa giác $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ có $A_iA_{i+1} // A_{n+i}A_{n+i+1}$ với $i = 1, 2, \ldots, n-1$; ta chứng minh $A_1A_{2n} // A_nA_{n+1}$. Gọi độ dài cung A_iA_{i+1} là a_i với $i = 1, 2, \ldots, n-1$ và độ dài cung $A_{2n}A_1$ là a_{2n}. Từ $A_1A_2 // A_{n+1}A_{n+2}$ suy ra

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{2n} \quad (1)$$

Tương tự, từ $A_iA_{i+1} // A_{n+i}A_{n+i+1}$, $i = 2, \ldots, n-1$, suy ra

$$a_3 + a_4 + \ldots + a_{n+1} = a_{n+3} + \ldots + a_{2n} + a_1 \quad (2)$$

$$a_4 + a_5 + \ldots + a_{n+2} = a_{n+4} + \ldots + a_{2n} + a_1 + a_2 \quad (3)$$

$$\ldots$$

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{2n-2} = a_{2n} + a_1 + \ldots + a_{n-2} \quad (n-1)$$

Với các đẳng thức trên, lấy (1) trừ (2), (3) trừ (4), ..., $(n-2)$ trừ $(n-1)$ vế với vế rồi cộng tất cả kết quả lại thì được

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = a_{n+1} + \ldots + a_{2n-1}$$

Đẳng thức này chứng tỏ $A_1A_{2n} // A_nA_{n+1}$.

2) Với n chẵn thì có đa giác $2n$ cạnh nội tiếp có duy nhất cặp cạnh đối không song song.

Thật vậy, từ một đa giác $2(n-1)$ cạnh, $n-1$ lẻ, có tất cả các cặp cạnh đối song song và không bằng nhau (chẳng hạn đa giác chia đường tròn ngoại tiếp thành các cung có độ dài $\pi/3(n-1)$, $2\pi/3(n-1)$ xen kẽ nhau), ta gọi một cặp cạnh đối là AB, CD. Lấy E trên cung AB và F trên cung CD sao $EAB = FDC$;

Khi đó sẽ có $AE // DF$. Dễ dàng chứng minh được EB và CF không song song với nhau. Đa giác $2n$ cạnh có các đỉnh là các đỉnh của đa giác $2(n-1)$ cạnh này và hai đỉnh là E và F sẽ có duy nhất cặp cạnh đối EB, CF không song song với nhau.

Bạn *Nguyễn Văn Minh* dựng đa giác $2n$ cạnh có duy nhất cặp cạnh đối không song song xuất phát từ một hình thang nội tiếp chứa tâm hình tròn có cạnh bên không song song. Thiếu sót của bạn Minh là không hạn chế độ dài cạnh bên hình thang (theo n) để đảm bảo dựng được đa giác theo yêu cầu.

Bài 5. *Một đường thẳng song song với trục hoành được gọi là « có tính tam giác » đối với đường cong*

$$y = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s,$$

nếu nó cắt đường cong này tại 4 điểm khác nhau A, B, C, D (theo thứ tự ấy) và từ các đoạn AB, AC, AD có thể lập được một tam giác.

Chứng minh rằng với đường cong trên thì mọi đường thẳng song song với trục hoành, cắt đường cong tại 4 điểm khác nhau, hoặc đồng thời có tính tam giác, hoặc đồng thời không có tính tam giác.

Lời giải. Đường thẳng $y = m$ cắt đường cong

$$y = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$$

tại 4 điểm A, B, C, D có hoành độ tương ứng là a, b, c, d thì a, b, c, d là nghiệm của phương trình

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s - m = 0$$

$y = m$ có tính tam giác nếu $AB + AC > AD$

$$\Leftrightarrow a + d < b + c \qquad (1)$$

$y = m$ không có tính tam giác nếu $AB + AC \leqslant AD$

$$\Leftrightarrow a + d \geqslant b + c \qquad (2)$$

Đổi biến $X = x - p/4 \Leftrightarrow x = X + p/4$

Phương trình trên trở thành

$$X^4 + tX^3 + uX^2 + vX + w = 0$$

Dễ thấy được $t = 0$ và $v = (p^3 - 4pq + 8r)/8$

Tất nhiên nghiệm của phương trình này là $\alpha = a + p/4$, $\beta = b + p/4$, $\gamma = c + p/4$, $\eta = d + p/4$, và

$$(1) \Leftrightarrow \alpha + \eta < \beta + \gamma \qquad (1')$$

$$(2) \Leftrightarrow \alpha + \eta \geqslant \beta + \gamma \qquad (2')$$

Theo Vi-et ta có

$$\alpha + \beta + \gamma + \eta = t = 0 \qquad (3)$$

và $v = -(\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\eta + \alpha\gamma\eta + \beta\gamma\eta)$

Theo (3) thì $\alpha = -(\beta + \gamma + \eta)$, nên

$v = -[-(\beta + \gamma + \eta)(\beta\gamma + \beta\eta + \gamma\eta) + \beta\gamma\eta]$

hay

$$v = (\beta + \gamma)(\beta + \eta)(\gamma + \eta) \qquad (4)$$

Từ biểu thức của v tính theo p, q, r ở trên, ta thấy với mỗi đường cong thì v được xác định duy nhất. Ta chứng minh: nếu $v > 0$ thì mọi đường $y = m$ cắt đường cong tại 4 điểm đều có tính tam giác, nếu $v \leqslant 0$ thì trái lại.

Do $a < b < c < d$ nên $\alpha < \beta < \gamma < \eta$

$$\Rightarrow \beta + \gamma < \beta + \eta < \gamma + \eta \qquad (5)$$

và $\qquad \beta + \eta > \alpha + \gamma \Rightarrow \beta + \eta > 0 \qquad (6)$

(Suy ra (6) do (3)).

— Nếu $v > 0$ thì từ (4), (5), (6) suy ra

$$\beta + \gamma > 0 \qquad (7)$$

Từ (7) và (3) suy ra $(1') \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow$ đ.p.c.m.

— Nếu $v \leqslant 0$ thì từ (4), (5), (6) suy ra

$$\beta + \gamma \leqslant 0 \qquad (8)$$

Từ (8) và (3) suy ra $(2') \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow$ đ.p.c.m.

Bài 6. *Trong dạng thập phân của số $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$, hãy tìm chữ số hàng đơn vị và chữ số đầu tiên sau dấu phẩy.*

Lời giải. Ta có bổ đề:

Bổ đề. Với a và n là các số tự nhiên, thì tồn tại số tự nhiên N để cho

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = N + \sqrt{N^2 - 1}$$

Chứng minh:

$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}\sqrt{a^2 - 1} + C_n^2 a^{n-2}(\sqrt{a^2 - 1})^2 + \ldots + (\sqrt{a^2 - 1})^n$

Đặt $N = a^n + C_n^2 a^{n-2}(\sqrt{a^2 - 1})^2 + C_n^4 a^{n-4}(\sqrt{a^2 - 1})^4 + \ldots$

bằng tổng tất cả các số hạng nguyên của khai triển trên. Đặt tổng tất cả các số hạng còn lại bằng V, ta chứng minh $V = \sqrt{N^2 - 1}$. Ta có

$$(a + \sqrt{a^2 - 1})^n = N + V \qquad (1)$$

$$(a - \sqrt{a^2 - 1})^n = N - V \qquad (2)$$

Nhân (1) và (2) vế với vế sẽ được $N^2 - V^2 = 1$

$\Rightarrow V = \sqrt{N^2 - 1}$ (đ.p.c.m).

Trở lại bài toán, ta có

$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2.990} =$

$(5 + \sqrt{24})^{990} = (5 + \sqrt{25 - 1})^{990}$

$N = 5^{990} + \ldots + C_{990}^{990-2k}\, 5^{990-2k}(25 - 1)^k + \ldots + (25 - 1)^{495}$

Có chữ số hàng đơn vị là 9.

Chữ số hàng đơn vị của $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980} = N + \sqrt{N^2 - 1}$ là chữ số hàng đơn vị của $N + (N - 1)$, là 7.

Chữ số đầu tiên sau dấu phẩy là chữ số hàng đơn vị của $10\sqrt{N^2 - 1} = \sqrt{100N^2 - 100}$.

Do $N > 101/20$ nên

$$\sqrt{100N^2 - 100} > 10N - 1$$

Hiển nhiên $\sqrt{100N^2 - 100} < 10N$.

Vậy chữ số đầu tiên sau dấu phẩy của $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$ là chữ số hàng đơn vị của $10N - 1$, là 9.

T. S.

GIẢI BÀI kỳ trước

Bài 1/126. *Tìm số điện thoại của một cơ quan biết rằng số đó có dạng $\overline{abcba}$ với*

$$c/2 < a < c \qquad (*)$$

và tổng các chữ số của số đó bằng $\overline{bb}$.

Lời giải (của *Võ Đức Minh* – lớp 10 CT trường Phan Châu Trinh, Đà Nẵng).

Theo giả thiết ta có

$$2a + 2b + c = \overline{bb} = 11b$$
$$\Leftrightarrow 2a + c = 9b$$

Vậy $2a + c$ chia hết cho 9. Vì $a < c$ nên $2a + c < 27$. Vậy $2a + c$ chỉ có thể bằng 9 hoặc 18.

a) Nếu $2a + c = 9$ thì không có a, c thỏa mãn (*).

b) Nếu $2a + c = 18$ thì $2a = 18 - c \geqslant 18 - 9 \rightarrow a \geqslant 5$.

Nếu $a \geqslant 6$ thì $c = 18 - 2a \leqslant 18 - 12 = 6 \Rightarrow a$, c không thỏa mãn (*). Vậy $a = 5 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow b = 2$.

Số điện thoại đó là 52825 thỏa mãn các điều kiện đã nêu.

Bài 2/126. *Chứng minh rằng ngoài nghiệm $x = y = 0$ thì phương trình*

$$x^{1964}\,(x^{1964} + y^{18}) = y^{1982}$$

không còn nghiệm nguyên (x, y) nào khác.

Lời giải. Dễ thấy $x = y = 0$ là nghiệm của phương trình và một trong hai số x, y bằng không thì số kia cũng bằng không. Mặt khác, ta thấy ngay là, nếu phương trình có nghiệm nguyên (x, y) thì $(-x, -y)$ cũng là nghiệm của nó. Nên thay cho việc phải chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên (x, y) với $y \neq 0$ ta sẽ chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên (x, y) với $y > 0$.

Thực vậy, đặt $m = x^{1964}$ phương trình đã cho trở thành:

$$m(m + y^{18}) = y^{1982} \leftrightarrow m^2 + my^{18} - y^{1982} = 0 \quad (1)$$

Xét $\Delta = y^{36} + 4y^{1982}$. Do $y > 0$, nguyên, ta có: $(2y^{991} + 1)^2 = 4y^{1982} + 4y^{991} + 1 > 4y^{1982} + y^{36} > (2y^{991})^2$. Vậy Δ là số tự nhiên không chính phương, do đó $\sqrt{\Delta}$ là số vô tỷ. Từ đó phương trình (1) không có nghiệm nguyên và do vậy phương trình đã cho cũng không có nghiệm nguyên (x, y) với $y > 0$.

Tóm lại, phương trình đã cho chỉ có một nghiệm nguyên $x = y = 0$.

Nhận xét: Các bạn *Mai Thế Đua, Nguyễn Trí Trường* (12A, Bình Lục, Hà Nam Ninh) có lời giải tốt. Các bạn *Lê Văn Bình* (11E, Núi Thành, Quảng Nam – Đà Nẵng), *Phạm Thanh Phương, Đỗ Quang Đại* (11 CT, ĐHSP I Hà Nội) có lời giải tương đối tốt.

Tạ Văn Tự

Bài 3/126. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

Lời giải (của nhiều bạn).

Cho một trong ba ẩn bất kỳ giá trị bằng 0, ta chỉ được nghiệm (0, 0, 0). Ta chứng minh phương trình không có nghiệm nguyên khác 0.

Giả sử ngược lại, phương trình có nghiệm nguyên (x, y, z) mà $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Gọi d là ước chung lớn nhất của ba số x, y, z, ta có $x = dx_1$, $y = dy_1$, $z = dz_1$ và

$$x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $x_1^3 \vdots 2 \Rightarrow x_1 \vdots 2$; đặt $x_1 = 2x_2$ thì (1) trở thành

$$4x_2^3 + y_1^3 = 2z_1^3 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $y_1 \vdots 2$; đặt $y_1 = 2y_2$ thì (2) trở thành

$$2x_2^3 + 4y_2^3 = z_1^3 \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $z_1 \vdots 2$.

Như vậy x_1, y_1, z_1 còn một ước chung là 2, đó là điều vô lý!

Bài 4/126. *Tìm điều kiện cần và đủ để một số tự nhiên n có thể biểu diễn được dưới dạng:*

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$$

trong đó x_1, x_2, x_3 là những số nguyên không âm.

Lời giải:

a) Điều kiện cần:

Đặt $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, ta có:

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3) \times [(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)].$$

Vậy $n = S_1(S_1^2 - 3S_2)$.

Nếu $S_1 = 3k$, với k nguyên không âm thì $n = 3k(9k^2 - 3S_2)$

Vậy $n \vdots 9$

Nếu $S_1 = 3k \pm 1$ thì $n = (3k \pm 1)(9k^2 \pm 6k \pm 1 - 3S_2)$.

Vậy n không chia hết cho 3.

Tóm lại nếu n biểu diễn được dưới dạng trên thì n không chia hết cho 3 hoặc $n \vdots 9$.

b) Điều kiện đủ:

Ta sẽ chứng minh khi n không chia hết cho 3 hoặc n chia hết cho 9 thì n biểu diễn được dưới dạng trên. Thực vậy:

Nếu $n = 3k \pm 1$, với k nguyên không âm thì:

$$n = k^3 + k^3 + (k+1)^3 - 3k \cdot k(k+1)$$

hay $n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$ với $x_1 = x_2 = (n-1)/3$ và

$x = (n+2)/3$ là các số nguyên không âm.

Nếu $n = 3k+2$, với k nguyên không âm thì

$$n = k^3 + (k+1)^3 + (k+1)^3 - 3k(k+1)(k+1)$$

Nếu $n = 9k$, với k là số tự nhiên thì:

$$n = k^3 + (k+1)^3 + (k-1)^3 - k(k+1)(k-1)$$

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Thanh Dương* (12/1, trường Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), *Vũ Quỳnh* (12B, Ngô Quyền, Hải Phòng) có lời giải tốt; Các bạn *Trần Nam Dũng* (lớp 11 CT, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), *Nguyễn Văn Minh* (12/1 Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) có lời giải tương đối tốt.

Tạ Văn Tự

Bài 5/126. *Người ta rải 35 viên bi trên một mặt sàn hình vuông có cạnh bằng 10m. Chứng minh rằng khi các hòn bi đã đứng yên thì có thể tìm được trên mặt sàn ít nhất một hình chữ nhật có diện tích lớn hơn 3m² không chứa viên bi nào* (tức là không có điểm nào của hình chữ nhật là điểm tiếp xúc của một viên bi với mặt sàn).

Lời giải (của *Nguyễn Thanh Dương* — 12/1 Phan Châu Trinh, Đà Nẵng).

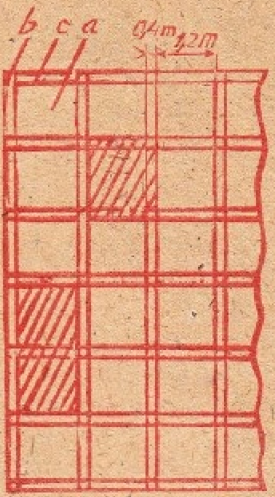
Chia mặt sàn thành các ô vuông a, b, các ô chữ nhật c như hình vẽ.

Ta chứng minh có ít nhất một hình chữ nhật có diện tích lớn hơn $3m^2$, là hình chữ nhật tạo bởi $a + 2b + 3c$ hoặc tạo bởi $2a + c$, không chứa bi.

Gọi tính chất để có hình chữ nhật như thế là A, ngược lại là *không A*.

Ta có nhận xét:

— Nếu một ô vuông a nào đó trống (không có bi) thì để *không A*, các ô b, c xung quanh ô a đó phải có tổng số ít nhất 2 viên bi và nếu chỉ có hai viên thì hai viên bi đó phải nằm



ở hai ô c khác nhau (Vì nếu trái lại thì sẽ có hình chữ nhật tạo bởi $a + 2b + 3c$ trống).

— Nếu có hai ô a trống kề nhau (cách nhau 1 ô c) thì để *không A*, trong ô c ở giữa đó phải có ít nhất một viên bi. (Vì nếu trái lại thì hình chữ nhật tạo bởi hai ô a và ô c đó trống).

Từ nhận xét trên suy ra: để không A thì tổng số bi trên các ô b, c phải lớn hơn số ô a trống.

Gọi n là số ô a trống. Số bi trên các ô a có bi là x thì

$$x \geqslant 36 - n$$

(vì có tất cả 36 ô a).

Số bi trên các ô b, c là y thì để *không A*:

$$y \geqslant n + 1$$

Như vậy $x + y \geqslant 37$.

Ta chỉ có 35 viên bi nên tất phải có A (đ.p.c.m).

Nhận xét: Có thể thay số bi bằng 36, xét thêm trường hợp không có ô a trống.

Một số bạn khác còn giải theo các cách khác.

Bài 6/126. a) *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:*

$$(1/3)\cos A + (1/4)\cos B + (1/5)\cos C \leqslant 5/12$$

Đối với dạng tam giác ABC như thế nào thì có dấu đẳng thức?

b) *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:*

$$\cos A + (1/2)\cos B + (1/3)\cos C < 7/6$$

Ngoài ra, với mỗi số $\varepsilon > 0$ tùy ý luôn tồn tại ít nhất một dạng tam giác ABC để cho:

$$\cos A + (1/2)\cos B + (1/3)\cos C > 7/6 - \varepsilon$$

Lời giải (của *Đặng Trường Sơn* — 12 CT Đại học Tổng hợp Hà Nội).

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Với mọi $\triangle ABC$ và $x, y, z \in R$; $xyz > 0$, ta luôn có:

$$(1/x)\cos A + (1/y)\cos B + (1/z)\cos C \leqslant x/(2yz) + y/(2zx) + z/(2xy)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin A : \sin B : \sin C = x : y : z$.

Chứng minh:

Từ $(y\cos A + x\cos B - z)^2 + (y\sin A - x\sin B)^2 \geqslant 0$, khai triển và rút gọn ta được:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz\cos A - 2xz\cos B +$
$2xy(\cos A\cos B - \sin A\sin B) \geqslant 0$

hay gọn hơn:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz\cos A - 2xz\cos B - 2xy\cos C \geqslant 0$

Ta viết bất đẳng thức cuối cùng này dưới dạng:

$2yz\cos A + 2xz\cos B + 2xy\cos C \leqslant x^2 + y^2 + z^2$

và chia cả 2 vế cho $2xyz$ (>0) thì có ngay điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y\sin A - x\sin B = 0 & (1) \\ y\cos A + x\cos B - z = 0 & (2) \end{cases}$$

Đặt $k = x/\sin A$, từ (1) ta có $\sin A/x = \sin B/y = \sin C/z = 1/k$ và kết hợp với (2) ta có:

$k(\cos A\sin B + \cos B\sin A) - z = 0 \Leftrightarrow$
$k\sin(A+x) - z = 0$ hay $\sin(A+B)/z = \sin C/z = 1/k$

Như vậy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$\sin A/x = \sin B/y = \sin C/z$ hay $\sin A : \sin B : \sin C = x : y : z$.

Bây giờ ta sử dụng bổ đề trên để giải bài toán của ta.

a) Ở đây $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ nên theo bổ đề có:

$(1/3)\cos A + (1/4)\cos B + (1/5)\cos C \leqslant$
$3/(2.4.5) + 4/(2.3.5) + 5/(2.3.4) = 5/12.$

Vì rằng $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ và theo định lý Pitago, nên đối với $\triangle ABC$ vuông tại C, có các cạnh thỏa mãn $a : b : c = 3 : 4 : 5$ thì có dấu bằng.

b) Theo bổ đề ta có:

$\cos A + (1/2)\cos B + (1/3)\cos C \leqslant$
$1/(2.2.3) + 2/(2.1.3) + 3/(2.1.2) = 7/6.$

Nếu ở đây có dấu bằng thì $\triangle ABC$ phải có 3 cạnh tỷ lệ với 1, 2, 3. Điều này không xảy ra vì tổng 2 cạnh của một tam giác phải lớn hơn cạnh còn lại (mà ở đây $1 + 2 = 3$). Vậy ta phải có:

$\cos A + (1/2)\cos B + (1/3)\cos C < 7/6.$

Với mọi số $\varepsilon > 0$ (chỉ cần xét với các số $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý), ta xét dạng $\triangle ABC$ cân đỉnh C sao cho $\cos A = 1 - \varepsilon/2 = \cos B$. Lúc đó dễ thấy $\cos C = \cos[\pi - (A+B)] > \cos(\pi - A) = -\cos A = \varepsilon/2 - 1$

Do vậy với dạng $\triangle ABC$ đó thì:

$\cos A + (1/2)\cos B + (1/3)\cos C >$
$(1 - \varepsilon/2) + (1/2)(1 - \varepsilon/2) + (1/3)(\varepsilon/2 - 1) =$
$7/6 - (7/12)\varepsilon > 7/6 - \varepsilon$ (đ.p.c.m).

Nhận xét: Các bạn *Vũ Quỳnh* (12B, Ngô Quyền, Hải Phòng), ***Nguyễn Văn Minh***, *Nguyễn Thanh Dương* (12/1, Phan Châu Trinh – Đà Nẵng), *Phạm Thanh Phương* và *Đỗ Quang Đại* (11 CT, ĐHSPHN) có lời giải tương đối tốt.

Tạ Văn Tư

Bài 7/126. *Cho dãy số* $x_1, x_2, \dots, x_{1982}$ *với tính chất*:

1) $x_1 = x_{1982} = 1$, *và*

2) $x_i = (x_{i-1} + x_{i+1})/[i(1983 - i)] + 1$; *với* $i = 2, 3, \dots, 1981$.

Chứng minh rằng

a) $x_2 = x_{1981}$, $x_3 = x_{1980}, \dots, x_{991} = x_{992}$;

b) $1 \leqslant x_i < 1 + 1/1980$.

Lời giải (của *Trần Nam Dũng*—lớp 11 CT trường Phan Châu Trinh, Đà Nẵng)

a) Ta chứng minh dãy số thỏa mãn hai tính chất ở đầu bài tồn tại duy nhất: Đặt $x_2 = a + 1$ thì từ tính chất 2) suy ra

$$x_3 = 2.1981\,a - 1.$$

Tiếp tục tính được

$$x_4 = 3.1980\,(2.1981\,a - 2) - a - 1$$

. . . .

Tóm lại, mọi x_i là biểu thức bậc nhất của a. Mà $x_{1982} = 1$ (duy nhất) nên a là duy nhất. Vậy mọi x_i được xác định duy nhất.

Dãy số $x_{1982}, x_{1981}, \dots, x_2, x_1$ thỏa mãn tính chất đầu ở bài, vậy phải có

$$x_2 = x_{1981},\ x_3 = x_{1980}, \dots, x_{991} = x_{992}.$$

b) Đặt $m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{1982}\}$ thì nếu $m = x_i$ với $1 < i < 1982$ thì

$$m = x_i = (x_{i-1} + x_{i+1})/[i(1983 - i)] + 1 \geqslant 2m/[i(1983 - i)] + 1$$

$\Rightarrow m \geqslant i(1983 - i)/[i(1983 - i) - 2] > 1 = x_1$. Vô lý!

Vậy $m = x_1 = x_{1982} = 1$.

Đặt $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{1982}\}$ thì dễ thấy $M \neq x_1$ và x_{1982}.

$$M = x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{i(1983 - i)} + 1 \leqslant \frac{2M}{i(1983 - i)} + 1 < \frac{2M}{2.1981} + 1$$

(do $2.1981 < 3.1980 < \dots < 991.992$):

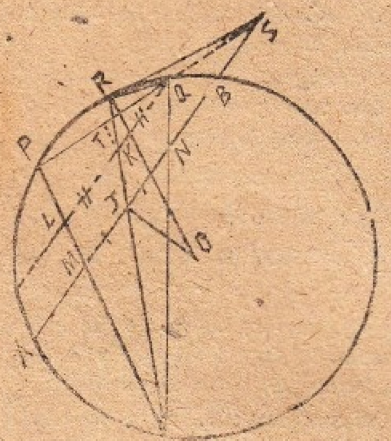
Vậy $M < M/1981 + 1 \Leftrightarrow M < 1981/1980 = 1 + 1/1980$.

Tóm lại $1 \leqslant x_i \leqslant 1 + 1/1980$ với mọi $i = 1, 2, \dots, 1982$.

Các bạn: *Đỗ Quang Đại* và *Phạm Thanh Phương* (lớp 11 CT trường ĐSHP Hà Nội)

Nguyễn Thanh Đương và *Nguyễn Văn Minh* (lớp 12/1 trường Phan Châu Trinh, Đà Nẵng), *Đặng Trường Sơn* (lớp 12 CT trường ĐH Tổng hợp Hà Nội) cũng có lời giải tốt.

Bài 8/126. *Trong mặt phẳng cho đường tròn (v) và một dây cung AB tùy ý. Gọi I là trung điểm của AB, M và N là hai điểm nằm trên AB và đối xứng với nhau qua I. Lấy điểm C tùy ý trên đường tròn; các đường thẳng CM và CN theo thứ tự cắt lại đường tròn (v) ở P và Q. đường thẳng PQ cắt đường thẳng AB ở S. Gọi Q là giao điểm thứ hai của CI với đường tròn (v). Chứng minh rằng đường thẳng SR là tiếp tuyến của đường tròn (v).*



Lời giải.

Từ Q kẻ đường thẳng song song với AB, cắt CI ở K và CM ở L. Như vậy, do $IM = IN$ nên ta có $KL = KQ$. Gọi T là trung điểm của PQ, thế thì KT là đường trung bình của tam giác QPL, nên ta có: $KT // PL$ và do đó:

$$\widehat{MPQ} = \widehat{KTQ}$$

Mặt khác, ta có $\widehat{CPQ} = \widehat{CRQ}$ do cùng chắn cung CQ trong đường tròn (v). Vậy suy ra $\widehat{KTQ} = \widehat{KRQ}$ và $TKRQ$ là một tứ giác nội tiếp. Trong tứ giác nội tiếp $TKRQ$ ta có:

$\widehat{TRK} = \widehat{TQK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung TK).

Do $QL // AB$ nên ta có $\widehat{TQK} = \widehat{TSI}$, suy ra $\widehat{TRK} = \widehat{TSI}$ và tứ giác $TRSI$ nội tiếp được. Vì I là trung điểm của AB, T là trung điểm của PQ nên $OI \perp AB$, $OT \perp PQ$ và do đó các điểm I, T nằm trên đường tròn đường kính OS. Điểm R nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ITS, nên R cũng nằm trên đường tròn đường kính SO, nghĩa là $OR \perp RS$ và vì vậy SR là tiếp tuyến của đường tròn (v) tại R.

Nhận xét. Số các bạn tham gia giải bài này ít. Các bạn sau đây có lời giải gọn hơn cả: *Đặng Trường Sơn* (12 CT ĐHTH Hà Nội), *Phạm Thanh Phương* và *Đỗ Quang Đại* (11CT ĐHSP Hà Nội). Hai bạn *Nguyễn Thanh Dương* và *Nguyễn Văn Minh*, (12/1 trường Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) cũng giải đúng, sử dụng cả định lý Mê-nê-la-uýt và định lý hàm số cosin trong tam giác. Tuy nhiên không có bạn nào có nhận xét thêm rằng bài toán còn có thể phát biểu dưới dạng tổng quát hơn.

Thật vậy, phân tích kỹ đề toán ta thấy rằng ta chỉ đả động đến dây cung AB trong đường tròn (v) khi sử dụng trung điểm I của nó để chứng minh rằng $OI \perp AB$. Bởi vậy, ta sẽ được một bài toán tổng quát hơn bằng cách thay dây cung AB bằng một đường thẳng d bất kỳ và trung điểm I của nó thì thay bằng hình chiếu (vuông góc) I của tâm O đường tròn (v) trên d. Ngoài ra, còn có thể chuyển dạng phát biểu dưới hình thức « tĩnh » của bài toán sang dạng phát biểu dưới hình thức « động » bằng cách cho điểm C chuyển động trên đường tròn (v). Khi đó điểm $S = AB \times PQ$ thay bằng $S = d \times PQ$ cũng chuyển động trên d, nhưng các tiếp tuyến SR, SR' kẻ từ S của đường tròn (v) có tính chất sau đây:

Đường thẳng nối C với một trong hai tiếp điểm (R hoặc R') thì: hoặc luôn luôn đi qua một điểm cố định (điểm I) hoặc luôn luôn song song với chính nó (song song với đường thẳng d). Đề nghị các bạn giải tiếp bài toán trong trường hợp bài toán được phát biểu dưới hình thức « động » vừa nêu lên ở trên.

Nguyễn Đăng Phất

Bài 9/126. *Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Dựng một hình chữ nhật có mỗi cạnh (hoặc phần kéo dài của cạnh đó) đi qua một trong các điểm đã cho và sao cho tỷ số hai kích thước bằng một số (dương) k cho trước.*

Bài toán có thể có vô số lời giải được không? Trong trường hợp đó hãy tìm quỹ tích tâm của các hình chữ nhật ấy.

Lời giải

a) Phân tích. Giả sử đã dựng được một hình chữ nhật $MNPQ$ thỏa mãn đề bài, sao cho: $(MN) \ni A$, $(NP) \ni B$, $(PQ) \ni C$, $(QM) \ni D$ và $MQ/MN = k$. (Trong hình vẽ lấy $k = 2$). Ta dựng đường thẳng $Au \perp BD$, cắt PQ ở E, rồi kẻ $AH \perp PQ$, $BK \perp MQ$. Dễ thấy rằng:

$$\triangle AEH \backsim \triangle BDK,$$

do đó

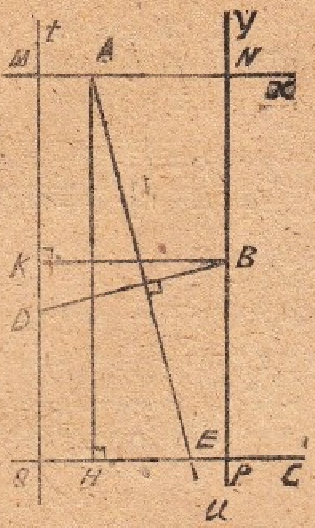
$$AE/BD = AH/BK = MQ/MN = k;$$

suy ra : $AE = kBD$ (xác định), từ đó điểm E được hoàn toàn xác định trên Au. Suy ra cách dựng sau.

b) Cách dựng: Trước hết, dựng $Au \perp BD$.

— Trên Au lấy điểm E, xác định bởi $AE = kBD$, rồi nối CE.

— Qua A dựng $Ax // (CE)$, qua B dựng $By \perp CE$, qua D dựng $Dt \perp CE$.



— Cuối cùng, được các giao điểm :

$$M = Ax \times Dt,\ N = Ax \times By,\ P = (CE) \times By,$$
$$Q = (CE) \times Dt.$$

c) Chứng minh. Dễ dàng chứng minh được rằng nếu $E \neq C$ và nếu $Ax \neq (CE)$ thì $MNPQ$ dựng được như trên là một hình chữ nhật có các cạnh (hoặc cạnh kéo dài) MN, NP, PQ, QM lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D cho trước và có tỉ số các kích thước $MQ : MN = k$. (Đề nghị các bạn kiểm tra lại).

d) Biện luận. Bài toán có lời giải hay không tùy thuộc ở tất cả các phép dựng nêu trên có thực hiện được hay không. Phân tích kỹ từng bước dựng ta thấy rằng: Trước hết, đường thẳng Au luôn luôn dựng được và duy nhất, điểm E luôn luôn dựng được và có 2 điểm như vậy (ở về hai phía của A trên Au và cùng cách A một khoảng bằng kBD). Sau nữa, đường thẳng CE phải xác định và Ax phải $\neq (CE)$, nghĩa là E phải $\neq C$, hơn nữa E phải $\notin (AC)$. Ta có kết quả sau đây :

1) Nếu AC không vuông góc với BD (suy ra $E \neq C$, (CE) xác định và duy nhất, và cũng suy ra $E \notin (AC)$, từ đó $Ax \neq (CE)$ thì bài toán có 2 lời giải.

2) Nếu $AC \perp BD$ và $AC \neq kBD$ (suy ra $E \in (AC)$, tuy $E \neq C$, nhưng khi đó $Ax \equiv (CE)$, bài toán không có lời giải.

3) Nếu $AC \perp BD$, đồng thời $AC = kBD$ (suy ra $E \equiv C$ và do đó bất kỳ đường thẳng nào qua C cũng đóng được vai trò của đường thẳng (CE) và chứa cạnh PQ của hình chữ nhật phải dựng), bài toán có vô số lời giải.

Trong trường hợp này, ta thấy rằng các trục đối xứng của mỗi hình chữ nhật ấy luôn luôn đi qua các điểm cố định là các trung điểm R và S của các đoạn thẳng AC, BD và vì vậy, dễ dàng suy ra quỹ tích giao điểm O của các trục đó (tâm của các hình chữ nhật) là một đường tròn, đó là *đường tròn đường kính RS*.

Nhận xét. Chú ý rằng kết quả của phần biện luận nêu ở trên còn phụ thuộc vào hai sự lựa chọn chủ quan của ta (đề cập trong phần phân tích của bài toán dựng hình của ta):

— Một là, thứ tự của 4 điểm A, B, C, D đã cho nằm trên các cạnh liên tiếp của hình chữ nhật phải dựng.

— Hai là, tỉ số của hai cạnh liên tiếp (hai kích thước) của hình chữ nhật phải dựng có thể chọn một trong hai giá trị, k và $1/k$ (trong trường hợp $k \neq 1$ và hình chữ nhật khác hình vuông).

Đối với sự lựa chọn thứ nhất, có 3 cách chọn khác nhau hai cặp điểm đã cho thuộc một cặp cạnh đối diện nào đó của hình chữ nhật phải dựng: $(A, C; B, D)$, $(A, B; C, D)$ và $(A, D; B, C)$.

Bởi vậy trong trường hợp bài toán có lời giải nhưng chỉ có một số hữu hạn lời giải thì số lời giải hữu hạn tối đa có thể đạt được là 12. Bài toán sẽ vô nghiệm trong trường hợp $ABCD$ là một tứ diện trực tâm (các cạnh đối diện vuông góc) và tỉ số các cạnh đối diện $\neq k$ và cũng $\neq 1/k$.

Các bạn *Đặng Trường Sơn* (12 CT ĐHTH Hà Nội), *Phạm Thanh Phương* và *Đỗ Quang Đại* (11 CT, ĐHSP Hà Nội) có lời giải tốt hơn cả. Một số bạn biện luận vụn vặt, không có cơ sở lý luận, chẳng hạn chia ra các trường hợp thẳng hàng hay không thẳng hàng của 4 điểm đã cho.

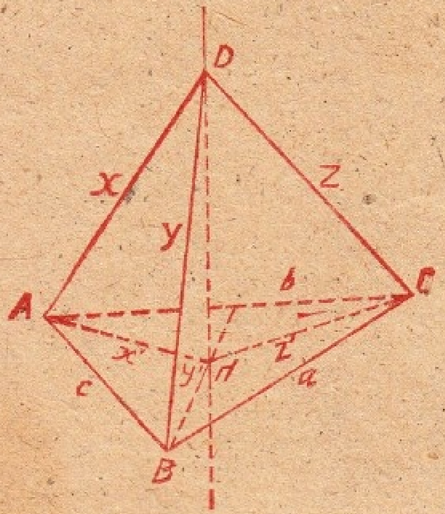
Nguyễn Đăng Phất

Bài 10/126. *Cho tam giác ABC. Tìm trong không gian một điểm D sao cho ABCD là một tứ diện trực tâm, đồng thời từ ba đoạn thẳng DA, DB, DC có thể dựng được một tam giác tương đương với tam giác ABC.*

Lời giải. Trong đề bài đã đăng, đã định nghĩa tứ diện trực tâm là tứ diện có các cạnh đối vuông góc. Còn có thể định nghĩa tứ diện trực tâm là tứ diện mà hình chiếu của mỗi đỉnh trên mặt đối diện trùng với trực tâm của mặt. Các bạn hãy tự chứng minh hai định nghĩa đó là tương đương.

Như vậy để giải xong bài toán là tìm được tất cả các điểm D trên đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng của tam giác ABC và đi qua trực tâm H của tam giác, sao cho từ ba đoạn thẳng DA, DB, DC có thể dựng được một tam giác.

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = x$, $DB = y$, $DC = z$, $HA = x'$, $HB = y'$, $HC = z'$



Dễ dàng chứng minh được

$$x'^2 + a^2 = y'^2 + b^2 = z'^2 + c^2 = 4R^2 \qquad (1)$$

Từ đó dễ chứng minh được với mọi D trên Δ thì

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = z^2 + c^2 \qquad (2)$$

Nếu từ x, y, z có thể dựng được một tam giác thì diện tích S của tam giác đó thỏa mãn đẳng thức.

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (x+y+z)(y+z-x) \times \\ &\times (z+x-y)(x+y-z) \\ &= (y^2+z^2-x^2)x^2 + (z^2+x^2-y^2)y^2 + \\ &+ (x^2+y^2-z^2)z^2. \end{aligned}$$

Mặt khác diện tích S_0 của tam giác ABC thỏa mãn đẳng thức:

$$\begin{aligned} 16S_0^2 &= (b^2+c^2-a^2)a^2 + (c^2+a^2-b^2)b^2 + \\ &+ (a^2+b^2-c^2)c^2. \end{aligned}$$

Vậy để hai tam giác có diện tích bằng nhau thì cần và đủ là:

$$\begin{aligned} &(y^2+z^2-x^2)x^2 + (z^2+x^2-y^2)y^2 + \\ &+ (x^2+y^2-z^2)z^2 = (b^2+c^2-a^2)a^2 + \\ &+ (c^2+a^2-b^2)b^2 + (a^2+b^2-c^2)c^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Sau khi biến đổi thì hệ hai phương trình (2) và (3) tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = z^2 + c^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases} \qquad (*)$$

Khi giải hệ này các bạn thấy hệ luôn có nghiệm dương duy nhất:

$$x = \sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)/3},$$
$$y = \sqrt{(2c^2+2a^2-b^2)/3},$$
$$z = \sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)/3},$$

và nghiệm này thỏa mãn bất đẳng thức tam giác (các bạn có thể chứng minh dễ dàng bằng cách chú ý x, y, z là nghiệm của (3) nên phải có

$$(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) > 0).$$

Như vậy những điểm D trên Δ thỏa mãn hệ(*) là những điểm cần tìm và nếu có thì chỉ có hai điểm đối xứng nhau qua H và xác định bởi:

$$\begin{aligned} DH^2 &= x^2 + x'^2 = x^2 + (4R^2 - a^2) \\ &= (2b^2+2c^2-a^2)/3 - a^2 + 4R^2 \\ &= 2(a^2+b^2+c^2)/3 - 4R^2 \\ \Rightarrow DH &= \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)/3 - 4R^2}. \end{aligned}$$

Biện luận: Ta đã có với mọi D trên $\triangle$ thì

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = z^2 + c^2,$$

nên điều kiện để có nghiệm là trên $\triangle$ có điểm D không trùng với H thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (4)$$

— Nếu $x'^2 + y'^2 + z'^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2$ thì không thể có (4) bao giờ cũng có

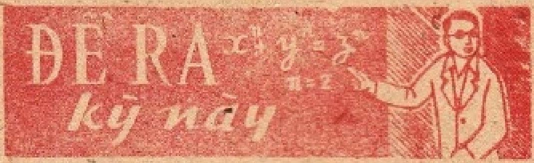
— Nếu $x'^2 + y'^2 + z'^2 < a^2 + b^2 + c^2$ thì bao giờ cũng có hai điểm D đối xứng nhau qua H thỏa mãn (4), vì tổng $x^2 + y^2 + z^2$ tăng dần từ $x'^2 + y'^2 + z'^2$ đến ∞ khi D chạy trên Δ, từ H và xa dần H, phải có vị trí để tổng đó bằng $a^2 + b^2 + c^2$.

Điều kiện $x'^2 + y'^2 + z'^2 < a^2 + b^2 + c^2$ tương đương với

$$\begin{aligned} &(4R^2 - a^2) + (4R^2 - b^2) + (4R^2 - c^2) \\ &\quad < a^2 + b^2 + c^2 \\ &\quad \Leftrightarrow R^2 < (a^2 + b^2 + c^2)/6 \\ &\quad \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 3/2. \end{aligned}$$

Các bạn *Đặng Trường Sơn* (12CT, ĐHTH Hà Nội) và *Nguyễn Văn Minh* (12/1, Phan Châu Trinh Đà Nẵng) có lời giải tương đối tốt. Một số bạn có thiếu sót là không để cập đến bất đẳng thức tam giác.

Nguyễn Đăng Phất



Bài 1/129. Chứng minh biểu thức :

$$1^{100} - 2^{100} + 3^{100} - 4^{100} + \dots + 1983^{109}$$

chia hết cho 200283.

Đào Trường Giang (Vĩnh Phú)

Bài 2 129. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x(x+1) = y(y+1)(y^2+2)$$

Trần Xuân Đáng (ĐHTH Huế)

Bài 3/129. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên tố p có tính chất sau : không tồn tại $p-1$ số tự nhiên liên tiếp sao cho có thể chia chúng thành hai nhóm để tích các số trong hai nhóm bằng nhau.

Đỗ Đức Thái (Hà Nội)

Bài 4/129. Trong mặt phẳng cho hai tia Ox, Oy vuông góc với nhau, và cho một điểm M cố định nằm trong góc vuông xOy. Gọi d là một đường thẳng thay đổi, quay quanh M, cắt Ox và Oy theo thứ tự tại A và B. Hãy chỉ ra vị trí của d sao cho

1) Tam giác vuông OAB có diện tích nhỏ nhất ?

2) Tam giác vuông OAB có tổng $OA + OB$ nhỏ nhất ?

3) Tam giác vuông OAB có cạnh huyền AB nhỏ nhất.

Phan Đức Chính (Hà Nội)

Bài 5/129. 1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ là những số không âm. Chứng minh rằng

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3a_3)^3 \leqslant$$

$$\leqslant (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3) \times$$

$$\times (b_1^3 + (b_2^3 + b_3^3)(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3) ;$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = a_3 : b_3 : c_3$$

2) Hãy mở rộng kết quả trên.

Phan Đức Chính

Bài 6/129. x, y, z là ba số dương thay đổi, bị ràng buộc bởi điều kiện

$$a/x + b/y + c/z = 1.$$

trong đó a, b, c là ba số dương cố định cho trước. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

1) $P = xyz$;

2) $S_1 = x + y + z$;

3) $S_2 = x^2 + y^2 + z^2$.

(Cần chỉ rõ mỗi giá trị nhỏ nhất của P, S_1, S_2 ứng với những giá trị nào của x, y, z).

Phan Đức Chính

Bài 7/129. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 90°$; đường cao AH, trung tuyến BM và phân giác trong CP đồng qui. Chứng minh $BH = AC$.

Phạm Quang Giám (Hà Nội)

Bài 8/129. Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích những điểm sao cho tích các khoảng cách từ đó đến các cặp đỉnh và cạnh đối diện của tam giác bằng nhau.

Nguyễn Đăng Phất (Hà Nội)

Bài 9/129. Tìm điều kiện cần và đủ để các đỉnh của một tứ diện là tâm của bốn mặt cầu tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một.

Nguyễn Đăng Phất

Bài 10/129. Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm O nằm trong nó. Các đường thẳng qua AO, BO, CO, DO cắt mặt tứ diện tương ứng tại A_1, B_1, C_1, D_1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

1) $OA/OA_1 + OB/OB_1 + OC/OC_1 + OD_1/OD_1$;

2) $OA_1/OA + OB_1/OB + OC_1/OC + OD_1/OD$.

Đỗ Đức Thái

VỀ KHÁI NIỆM «PHẦN NGUYÊN CỦA MỘT SỐ»

NGUYỄN ĐỨC THUẦN

Để phục vụ cho việc giải các bài toán có liên hệ tới khái niệm «phần nguyên một số», xin nêu sơ lược ở đây khái niệm và một số tính chất đơn giản của *phần nguyên một số* đồng thời giải một vài bài toán giúp bạn đọc làm quen. Phần cuối cùng của bài này, sẽ nói qua về việc vẽ đồ thị hai dạng hàm số có chứ phần nguyên thường hay gặp nhất.

Phần nguyên của một số x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, ký hiệu là $[x]$. Chẳng hạn $[3,8] = 3$; $[0,4] = 0$; $[0] = 0$; $[-1,7] = -2$; $[8/3] = 2$; $[\sqrt{15}] = 3$, v.v.... Với khái niệm phần nguyên của một số bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh các tính chất đơn giản sau đây:

I. Từ đẳng thức $[y] = n$, ta suy ra: 1) n là số nguyên; 2) $y = n + \alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$; 3) $0 \leqslant y - n < 1$.

II. Nếu $[u] = [v]$ thì $u = m + \alpha$ và $v = m + \beta$ $(0 \leqslant \alpha < 1$ và $0 \leqslant \beta < 1)$. Do đó, $u - v = \alpha - \beta$ và $-1 < u - v < 1$.

III. Nếu $[x + y] = x$ thì x là số nguyên, $0 \leqslant y < 1$.

IV. Nếu n là số nguyên thì $[n + x] = n + [x]$.

V. Với mọi số thực x, y, $[x + y] \geqslant [x] + [y]$.

VI. Với n là số nguyên không âm, $[nx] \geqslant n[x]$.

VII. Với mọi số tự nhiên N và q, $[N/q].q \leqslant N$,
$$([N/q] + 1)\,q > N.$$

Ta hãy giải một số bài toán.

1. Giải phương trình

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}$$

Đặt $(2x-1)/3 = y$, phương trình đã cho có dạng

$$[y] + [y + 1/2] = (5y - 1)/2$$
$$[2y] = (5y - 1)/2.$$

Đặt $(5y - 1)/2 = t$, ta sẽ có: $[(4t + 2)/5] = t$, trong đó t là số nguyên.

Theo tính chất I thì $0 \leqslant (4t + 2)/5 - t < 1$. Từ đó, ta suy ra $-3 < t \leqslant 2$. Do đó, t chỉ lấy những giá trị nguyên -2; -1; 0; 1; 2 và các giá trị tương ứng của x sẽ là: $-2/5$; $1/5$; $4/5$; $7/5$; 2.

2. Giải phương trình

$$[-x^2 + 3x] = [x^2 + 1/2] \qquad (1)$$

Vì $x^2 + 1/2 > 0$ nên $[x^2 + 1/2] \geqslant 0$. Do đó $[-x^2 + 3x] = [x^2 + 1/2] = n \geqslant 0$ (2), trong đó n là số nguyên.

Biểu thức $x^2 + 1/2$ có thể lấy giá trị lớn bao nhiêu cũng được. Nhưng, biểu thức $-x^2 + 3x$ thì không như vậy. Thật thế, $-x^2 + 3x = -(x^2 - 3x) = -((x - 3/2)^2 - 9/4) = 9/4 - (x - 3/2)^2 \leqslant 9/4$.

Từ đó suy ra rằng giá trị lớn nhất của $-x^2 + 3x$ là $9/4$. Do đó $[-x^2 + 3x] < 3$, và trong (2) n chỉ có thể lấy những giá trị 0, 1, 2. Với ba giá trị này, ta có:

$$1)\begin{cases}[-x^2 + 3x] = 0,\\ [\ \ x^2 + 1/2] = 0;\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}[-x^2 + 3x] = 1,\\ [\ \ x^2 + 1/2] = 1;\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}[-x^2 + 3x] = 2,\\ [\ \ x^2 + 1/2] = 2.\end{cases}$$

Căn cứ vào tính chất I, từ ba hệ phương trình trên, ta suy ra:

$$1)\begin{cases}0 \leqslant -x^2 + 3x < 1,\\ 0 < -x^2 + 1/2 < 1;\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}1 \leqslant -x^2 + 3x < 2.\\ 1 \leqslant x^2 + 1/2 \leqslant 2;\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}2 \leqslant -x^2 + 3x < 3.\\ 2 \leqslant x^2 + 1/2 < 3;\end{cases}$$

Từ ba hệ bất phương trình này, ta rút ra được $0 \leqslant x \leqslant (3 - \sqrt{5})/2$; $\sqrt{2}/2 \leqslant x < 1$; $\sqrt{3}/2 \leqslant x < \sqrt{10}/2$. Đó là nghiệm của (1).

3. Một đoàn quân bành trướng Trung quốc âm mưu sau một số ngày sẽ chuyển quân hết xuống gây rối ở biên giới Việt Trung. Mỗi ngày chúng định vượt một chặng đường mà số kilômet vừa bằng số ngày đã định để chuyển quân. Nhưng, mỗi ngày chúng trung bình chỉ nhích được 20 km và tính ra cứ 2 ngày đi chúng lại phải chốt quân một ngày để dàn áp những những người bỏ ngũ mà chúng đuổi bắt được. Do đó, thời gian chuyển quân của chúng kéo dài thêm 37 ngày nữa — Hỏi, lúc trước, chúng định chuyển quân trong bao nhiêu ngày?

Giải. Đặt x là số ngày mà bọn bành trướng Trung quốc định chuyển quân. Như vậy, đường chuyển quân của chúng dài x^2 km. Nhưng, trên thực tế số ngày chuyển quân là $x + 37$, trong đó số ngày nghỉ lại là $[(x + 37)/3]$. Do đó số ngày thực tế đi đường là

$$(x + 37) - [(x + 37)/3].$$

Vậy có phương trình:

$$20(x + 37 - [(x + 37)/3]) = x^2.$$

Vì phần nguyên của một số u là số nguyên lớn nhất không vượt quá u, nên từ định nghĩa đó, ta suy ra: $[u] = u - \alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$. Ở đây, ta có:

$$\left[\frac{x + 37}{3}\right] = \frac{x + 37}{3} - \alpha$$

trong đó α chỉ có thể lấy những giá trị 0, 1/3, 2/3 vì $0 \leqslant \alpha < 1$ và $x + 37$ là số nguyên.

1) Với $\alpha = 0$ thì $[(x + 37)/3] = (x + 37)/3$ và phương trình cần giải biến đổi được thành: $3x^2 - 40x - 1480 = 0$. Do đó, ta không rút ra được x nguyên.

2) Với $\alpha = 1/3$ thì $[(x + 37)/3] = (x + 36)/3$ và phương trình cần giải biến đổi được thành:

$$3x^2 - 40x - 1500 = 0 \rightarrow x = 30.$$

3) Với $\alpha = 2/3$ thì $[(x + 37)/3] = (x + 35)/3$ và phương trình cần giải biến đổi được thành $3x^2 - 40x - 1520 = 0$. Do đó, ta không rút ra được x nguyên.

Vậy đáp số bài toán là 30 ngày.

4. Chứng minh trong dãy số tự nhiên (A) 1, 2, 3, 4, ..., n tồn tại $[n/q]$ phần tử chia hết cho số tự nhiên q.

Nếu $q > n$ thì hiển nhiên mệnh đề trên là đúng.

Giả sử $q < n$. Ta phải chứng minh các phần tử của (A) chia hết cho q là như sau:

$$1 \cdot q,\ 2 \cdot q, \ldots, [n/q] \cdot q \qquad (B)$$

Theo tính chất VII, ta có: $[n/q]q \leqslant n$. Do đó số tự nhiên $[n/q] \cdot q$ chia hết cho q có mặt trong dãy số (A). Số $([n/q] + 1) \cdot q$ cũng chia hết cho q, nhưng không có mặt trong dãy số (A), vì nó lớn hơn n. Như vậy, ta đã chứng minh được các phần tử của (A) chia hết cho q là mọi phần tử (B) mà trong (B) có đúng $[n/q]$ phần tử.

5. Chứng minh: Trong sự phân tích ra thừa số nguyên tố của số n! thì số mũ của thừa số nguyên tố p nào đó sẽ là: $[n/p] + [n/p^2] + \ldots + [n/p^m]$, trong đó $p^m \leqslant n$ và $p^{m+1} > n$.

Theo mệnh đề đã chứng minh trong bài toán 4 thì số các thừa số của tích 1, 2, 3... n chia hết cho p là $[n/p]$, chia hết cho p^2 là $[n/p^2]$, chia hết cho p^3 là $[n/p^3]$, v.v... Điều này chứng tỏ rằng *số lần* mà số nguyên tố p có mặt trong sự phân tích $n!$ ra thừa số nguyên tố là bằng tổng $[n/p] + [n/p^2] + \ldots + [n/p^m]$ với $p^m \leqslant n$ và $p^{m+1} > n$.

6. Tính tổng

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots$$

trong đó n là số tự nhiên.

(Bài toán này rút ra từ một trong các bài toán thi toán phổ thông quốc tế tháng 5 năm 1968, tổ chức tại Matscơva. Lời giải trình bày sau đây là phỏng theo bài giải của học sinh phổ thông *M.Uynliam* (Anh).

Trước hết, ta thấy các số hạng của tổng cần tìm có dạng $[x + 1/2]$. Vậy, ta hãy xét xem có thể biến đổi biểu thức $[x + 1/2]$ như thế nào.

Mọi số x đều có thể biểu diễn được dưới dạng $x = k + \alpha$ hoặc $x = k + 1/2 + \alpha$, trong đó k là số nguyên và $0 \leqslant \alpha < 1/2$.

Với $x = k + \alpha$, ta có $[k + \alpha + 1/2] = k$, $[2k + 2\alpha] = 2k$, $[k + \alpha] = k$, tức là $[x + 1/2] = [2x] - [x]$.

Với $x = k + 1/2 + \alpha$, ta có: $[k + 1/2 + \alpha + 1/2] = k + 1$, $[2k + 2\alpha + 1] = 2k + 1$, $[k + 1/2 + \alpha] = k$, tức là trong trường hợp này cũng có:

$$[x + 1/2] = [2x] - [x].$$

Gọi tổng cần tính là S và viết dưới dạng $[n/2 + 1/2] + [n/4 + 1/2] + \ldots + [n/2^{k+1} + 1/2] + \ldots$

Do đó, ta có:

$$S = [n] - [n/2] + [n/2] - [n/4] + \ldots + [n/2^k] - [n/2^{k+1}] + \ldots$$

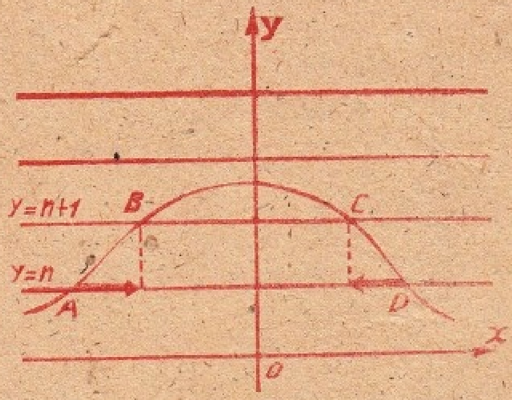
Vì với $k > \log_2 n$ thì số hạng $[n/2^k]$ và các số hạng sau nữa đều bằng không, nên ta có $S = n$.

Bây giờ xin nói qua về cách vẽ đồ thị các hàm số có dạng $y = [f(x)]$ và $y = f([x])$ suy từ đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = [f(x)]$. Giả sử, đã có đồ thị hàm số $y = f(x)$. Muốn vẽ đồ thị của hàm số $y = [f(x)]$, ta làm như sau:

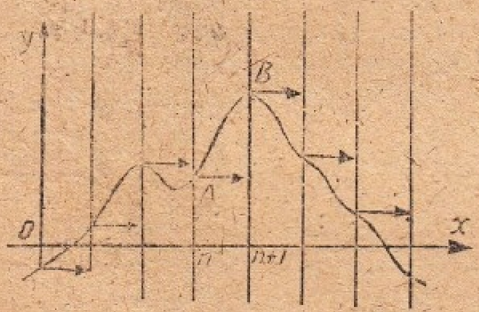
1) Kẻ các đường thẳng $y = n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ và ta có các *băng* tạo bởi các đường thẳng $y = n$ và $y = n + 1$.

2) Lấy những điểm giao của các đường thẳng $y = n$ và $y = n + 1$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$. Những điểm này phải thuộc vào đồ thị hàm số $y = [f(x)]$ vì có tung độ là những số nguyên (trong hình dưới là các điểm A, B, C, D).



3) Muốn có các điểm khác của đồ thị hàm số $y = [f(x)]$ ta vẽ các hình chiếu vuông góc của các phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong mỗi băng tạo bởi các đường thẳng $y = n$ và $y = n + 1$ trên đường thẳng $y = n$. Hình chiếu đó thuộc vào đồ thị hàm số $y = [f(x)]$ vì một điểm M bất kỳ trên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tung độ là y_0, mà $n < y_0 < n + 1$ thì $[y_0] = n$.

Vẽ đồ thị hàm số y = f([x]). Giả sử, đã có đồ thị hàm số $y = f(x)$. Muốn vẽ đồ thị của hàm số $y = f([x])$ ta làm như sau:



1) Kẻ các đường thẳng $x = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ và ta có các băng tạo bởi các đường thẳng $x = n$ và $x = n + 1$.

2) Lấy những giao điểm của các đường thẳng $x = n$ và $x = n + 1$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$. Những điểm này phải thuộc vào đồ thị hàm số $y = f([x])$ vì có hoành độ là những số nguyên (trong hình dưới là các điểm A, B).

3) Muốn có các điểm khác của đồ thị hàm số $y = f([x])$, ta vẽ các hình chiếu vuông góc của phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong mỗi băng tạo bởi các đường thẳng $x = n$ và $x = n + 1$ trên đường thẳng $y = f(n)$. Hình chiếu đó thuộc vào đồ thị hàm số $y = f([x])$ vì một điểm N bất kỳ trên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hoành độ là x_0, mà $n < x_0 < n + 1$ thì $[x_0] = n$.

Bạn đọc hãy thử sức với các bài tập sau:

1. Giải phương trình

1) $\left[\dfrac{8x + 19}{7}\right] = \left[\dfrac{16(x + 1)}{11}\right]$.

2) $\left[\dfrac{2x - 1}{3}\right] = \left[\dfrac{x + 1}{2}\right]$

3) $[x]^2 - [x] = 2$.

2. Chứng minh $n!$ không chia hết cho 2^n

3. Chứng minh

$[x] + [x + 1/n] + \ldots + [x + (n - 1)/n] = [nx]$.

4. Vẽ đồ thị các hàm số $y = [x]^2$; $y = [a^x]$ với $a > 1$; $y = [\sin x]$; $y = [\lg x]$; $y = \cos [x]$; $y = a^{[x]}$ $(0 < a < 1)$

5. Giải bằng đồ thị các phương trình 2) và 3) của bài 1.

BẠN ĐỌC CẦN BIẾT!

Các bạn cần mua báo Toán học và tuổi trẻ thì đến cơ quan phát hành báo chí tại địa phương mình ở để liên hệ mua báo. Tòa soạn là cơ quan xuất bản, không có nhiệm vụ phát hành, nên không nhận đặt mua báo tại tòa soạn.

Báo TH v TT

In 8000c tại xí nghiệp in 75 Hàng Bò Hà Nội
Chỉ số: 12884. Số in 30/83. Gửi lưu chiểu tháng 4-1983

Giá: 1đ00