

HỘI TOÁN HỌC

VIỆT NAM



Số 126

4

1982

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHỨNG

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Điện thoại: 52825

KỶ THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 23

ĐẶNG KHẮC NHÂN

KỶ thi toán quốc tế lần thứ 23 được tổ chức tại Hungari vào tháng 7 năm 1982 có 30 nước tham gia. Mỗi nước được cử 1 học sinh dự thi. Tổng số thí sinh là 119 (Angiêri chỉ cử 3 học sinh). Học sinh phải làm 6 bài toán trong 2 ngày, mỗi ngày làm 3 bài trong 4 giờ 30 phút. Bài 1 và bài 4 của Anh, bài 2 và bài 5 của Hà Lan, bài 3 của Liên Xô và bài 6 của Việt Nam. Hội đồng giám khảo đã quyết định tặng 61 giải, trong đó có 10 giải nhất, 20 giải nhì và 31 giải ba. Bốn học sinh của nước ta đã đạt 4 giải: giải nhất: Lê Tự Quốc Thắng — học sinh trường Lê Hồng Phong thành phố Hồ Chí Minh; giải nhì: Trần Minh — học sinh lớp chuyên toán trường Đại học Tổng hợp Hà Nội và Ngô Phú Thanh học sinh trường Quốc học Huế; giải ba: Nguyễn Hữu Hoàn — học sinh lớp chuyên toán trường Đại học Tổng hợp Hà Nội.

Dưới đây là đề bài:

1. $f(n)$ là một hàm số xác định với mọi số nguyên dương n và lấy những giá trị không âm, thỏa mãn các tính chất sau đây:

a) Với mọi cặp (m, n) , $f(m+n) - f(m) - f(n)$ lấy giá trị 0 hoặc 1;

b) $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ và $f(9999) = 3333$.

Tính $f(1982)$.

2. Giả sử $A_1 A_2 A_3$ là một tam giác không cân có các cạnh là a_1, a_2 và a_3 (a_i là cạnh đối diện $A_i, i = 1, 2, 3$). M_i là trung điểm của cạnh a_i ; T_i là điểm tiếp xúc của vòng tròn nội tiếp tam giác với cạnh a_i và S_i là điểm đối xứng của T_i qua đường phân giác trong của góc ở đỉnh A_i . Chứng minh rằng các đường thẳng $M_1 S_1, M_2 S_2$ và $M_3 S_3$ có một điểm chung.

3. Xét các dãy $|x_n|$ những số thực dương thỏa mãn tính chất sau đây:

$$1 = x_0 > x_1 > \dots > x_n > \dots$$

a) Chứng minh rằng với mỗi dãy như vậy tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ sao cho

$$x_0^2/x_1 + x_1^2/x_2 + \dots + x_{n-1}^2/x_n > 3.999.$$

b) Tìm một dãy như vậy thỏa mãn:

$$x_0^2/x_1 + x_1^2/x_2 + \dots + x_{n-1}^2/x_n < 4$$

với mọi $n \geq 1$.

4. Giả sử n là một số dương. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ có nghiệm nguyên (nghĩa là có một cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình) thì nó có ít nhất ba nghiệm nguyên. Chứng minh rằng với $n = 2891$ phương trình trên không có nghiệm nguyên.

5. Các đường chéo AC và CE của một lục giác đều $ABCDEF$ được chia theo thứ tự bởi những điểm M và N nằm trong các đoạn thẳng đó, sao cho $AM/AC = CN/CE = \lambda$. Tính λ khi B, M và N thẳng hàng.

6. Giả sử C là một hình vuông mà chiều dài của mỗi cạnh là 100; $L = A_0A_1 \dots A_n$ là một đường gấp khúc không đóng ($A_0 \neq A_n$) và không tự cắt, chứa trong C , sao cho với mọi điểm P thuộc cạnh của C tồn tại một điểm của L mà khoảng cách tới P không quá $1/2$. Chứng minh rằng tồn tại điểm X và Y thuộc L sao cho khoảng cách giữa X và Y bé hơn hoặc bằng 1 và sao cho bộ phận của đường gấp khúc L nằm giữa X và Y có chiều dài lớn hơn hoặc bằng 198.

Sau đây là một trong các cách giải gọn nhất của các bài trên.

Lời giải bài 1 (của Lê Tự Quốc Thắng).

Vì $f(m+n) - f(m) - f(n)$ bằng 0 hay 1 nên suy ra $f(m+n) \geq f(m) + f(n)$.
 $f(2) - f(1) - f(1) \geq 0$, mà $f(2) = 0$, nên ta suy ra $f(1) = 0$.

Ta lại có $f(3) - f(2) - f(1)$ bằng 0 hoặc 1, mà $f(2) = f(1) = 0$, nên $f(3)$ bằng 0 hoặc 1. Do $f(3) > 0$, nên ta có $f(3) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(6) &\geq f(3) + f(3) = 2 \\ f(9) &\geq f(6) + f(3) \geq 3 \\ f(12) &\geq f(6) + f(6) \geq 4 \\ f(15) &\geq f(12) + f(3) \geq 5 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$f(9999) \geq f(9996) + f(3) \geq 3333.$$

Vì giả thiết có $f(9999) = 3333$, nên ta phải có dấu « $\geq$ » ở các bất đẳng thức trên, nghĩa là $f(3n) = n$, $\forall n = 1, 2, \dots, 3333$.

$$\text{Như vậy } f(1980) = 660; f(1983) = 661.$$

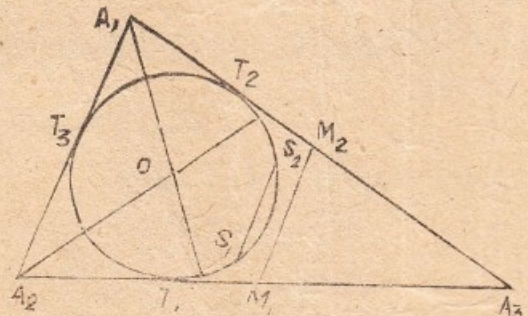
Mặt khác, nếu a, b là các số tự nhiên, $a > b$, thì $f(a) \geq f(b) + f(a-b) \geq f(b)$ (vì $a > b$ nên $a-b$ là số tự nhiên).

$$\text{Do đó: } 660 = f(1980) \leq f(1982) \leq f(1983) = 661, \text{ tức } 660 \leq f(1982) \leq 661.$$

Ta chứng minh $f(1982) = 660$. Thật vậy, nếu $f(1982) = 661$ thì $f(3964) = f(1982 + 1982) \geq 2 \cdot f(1982) = 1322$; $f(5946) = f(3964 + 1982) \geq f(3964) + f(1982) = 1322 + 661$, tức $f(5946) \geq 1983$. Mà

$5946 = 3 \cdot 1982$ nên theo trên $f(5946) = 1982$, xảy ra mâu thuẫn. Lập luận tương tự, ta suy ra với $n \leq 3333$, thì $f(n) = \lfloor n/3 \rfloor$.

Lời giải bài 2. T_2 và T_3 đối xứng nhau qua phân giác góc A_1, S_1 và T_1 cũng đối xứng nhau qua đường phân giác của A_1 . Mà đường phân giác qua tâm O , nên cũng là một trục đối xứng của đường tròn nội tiếp. Vì vậy $S_1T_2 = -T_1T_3$ (cung định hướng).



Tương tự, đối với đường phân giác của góc A_2 :

$T_2T_3 = -S_2T_1$ (T_2 đối xứng với S_2 ; T_3 đối xứng với T_1). Cộng hai đẳng thức trên, vẽ theo vế, ta được: $S_1T_3 = -S_2T_3$ (nghĩa là các cung nhỏ T_3S_1, T_3S_2 về giá trị thì bằng nhau).

Do đó: $S_2S_1 \parallel A_1A_2$. Mà $A_1A_2 \parallel M_1M_2$, nên $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. Tương tự, ta có $S_1S_3 \parallel M_1M_3$, $S_2S_3 \parallel M_2M_3$.

Hai tam giác $S_1S_2S_3$ và $M_1M_2M_3$ có các cạnh tương ứng song song nên chúng đồng dạng phối cảnh. Do đó M_1S_1, M_2S_2 và M_3S_3 đồng quy tại tâm đồng dạng.

Ta còn phải chứng minh không thể xảy ra trường hợp tâm đồng dạng ở vô cùng, tức là phải chứng minh hai tam giác $M_1M_2M_3$ và $S_1S_2S_3$ không thể bằng nhau. Cụ thể ta chứng minh tam giác $S_1S_2S_3$ nhỏ hơn tam giác $M_1M_2M_3$.

Thật vậy, các điểm S_1, S_2, S_3 nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ nên phải nằm bên trong tam giác. (chú ý tam giác $A_1A_2A_3$ không cân).

- Nếu S_1S_2 nằm cùng phía với A_3 đối với đường M_1M_2 thì rõ ràng $S_1S_2 < M_1M_2 \Rightarrow \text{đ.p.c.m.}$

- Nếu S_1S_2 nằm khác phía với A_3 đối với M_1M_2 (như hình vẽ) thì rõ ràng đường cao dựng từ S_3 của tam giác $S_1S_2S_3$ có độ dài ngắn hơn độ dài đường cao tương ứng của tam giác $M_1M_2M_3 \Rightarrow \text{đ.p.c.m.}$

Lời giải bài 3. Ta chứng minh mọi dãy số dương $\{x_n\}$, $1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$ đều có:

$$x_0^2/x_1 + x_1^2/x_2 + \dots + x_{n-1}^2/x_n \geq 2^{1+1/2+\dots+1/2^{n-2}}$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} & x_0^2/x_{n-2} + x_{n-1}^2/x_n \geq \\ & \geq x_{n-2}^2/x_{n-1} + x_{n-1}^2/x_{n-1} \geq \\ & \geq 2\sqrt{\left(x_{n-2}^2/x_{n-1}\right)\left(x_{n-1}^2/x_{n-1}\right)} = 2x_{n-2} \\ & x_{n-3}^2/x_{n-2} + x_{n-2}^2/x_{n-1} + x_{n-1}^2/x_n \geq \\ & \geq x_{n-3}^2/x_{n-2} + 2x_{n-2} \\ & \geq 2\sqrt{2}x_{n-3} = 2^{1+1/2}x_{n-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_0^2/x_1 + \dots + x_{n-1}^2/x_n \geq \\ & 2^1 + 1/2 + \dots + 1/2^{n-2} \cdot x_0 \\ & = 2^1 + 1/2 + \dots + 1/2^{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } C_n = 2^1 + 1/2 + \dots + 1/2^{n-2} = 4 \cdot 2^{-1/2^{n-2}}$$

Ta tính được với $n=14$ thì $C_n > 3,999$.

Quả vậy $4 \cdot 2^{-1/2^{n-2}} > 3,999$ tương đương với

$$\begin{aligned} 2 & < (4/3,999) \cdot 2^{n-2} \\ (4/3,999) \cdot 2^{n-2} & > (1 + 1/4000) \cdot 2^{n-2} \\ & > 1 + 2^{n-2}/4000 = 1 + 4096/4000 > 2. \end{aligned}$$

b) Dãy $x_0 = 1, x_1 = 1/2, x_2 = 1/4, \dots, x_n = 2^{-n}$ thỏa mãn:

$$\forall n \geq 1: x_0^2/x_1 + \dots + x_{n-1}^2/x_n < 4.$$

Thật vậy, $\forall k$ thì

$$x_k^2/x_{k+1} = 2^{-2k/2^{-(k+1)}} = 2^{-(k-1)}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} & x_0^2/x_1 + \dots + x_{n-1}^2/x_n = 2 + 1 + 1/2 + \dots + 1/2^{n-2} \\ & = (2 - 1/2^{n-2}) : (1/2) = 4 - 1/2^{n-2} < 4. \end{aligned}$$

Lời giải bài 4 (của Nguyễn Hữu Hoàn).

Giả sử (x, y) là nghiệm của $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ (*)

ta có:

$$\begin{aligned} & y^3 - 3y^2x + 3x^2y - x^3 + 3x^3 - 3x^2y - x^3 = n \\ & (y-x)^3 + 3x^2(x-y) - x^3 = n \\ & \text{hay } (y-x)^3 - 3(y-x)(-x)^2 + (-x)^3 = n. \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ cặp $(y-x, -x)$ và do đó cả $(-y, x-y)$ cũng là nghiệm của (*).

Bây giờ ta chứng minh rằng phương trình (*) luôn có ba nghiệm khác nhau, nếu có một nghiệm (x, y) .

+ Nếu $x^2 + y^2 \neq 0$ thì không thể xảy ra $(x, y) = (y-x, -x)$ hoặc $(y-x, -x) = (-y, x-y)$ hoặc $(-y, x-y) = (x, y)$. Vì mỗi trong 3 đẳng thức trên đều dẫn đến $x=y=0$. Như vậy với $x^2 + y^2 \neq 0$ thì phương trình (*) nếu có một nghiệm thì có 3 nghiệm khác nhau: $(x, y), (y-x, -x), (-y, x-y)$.

+ Nếu $x=y=0$ nghĩa là $n=0$ thì vô lý, vì giả thiết cho n là số nguyên dương.

Bây giờ ta chứng minh rằng với $n=2891$ thì phương trình (*) không có nghiệm nguyên. Giả sử ngược lại (x, y) là nghiệm của (*). Với $n=2891$ thì $n:9$ dư 2.

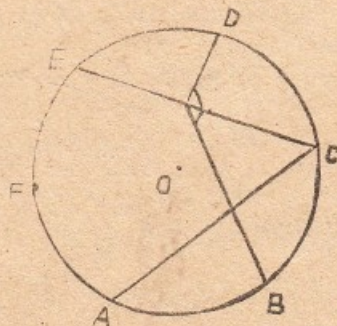
Lập phương của một số hoặc chia hết cho 9, hoặc có dạng $(3k \pm 1)^3$ thì chia cho 9 dư ± 1 . Nhưng nếu x^3 (hoặc y^3) mà $:9$ thì $3xy^2:9$ nên y^3 (hay x^3): 9 dư 2 do $n \equiv 2 \pmod{9}$. Vô lý vì $a^3 \equiv \pm 1 \pmod{9}$.

Vậy x và y đều có dạng $3k \pm 1$. $3xy^2$ không chia hết cho 9 nên $3xy^2 \equiv \pm 3 \pmod{9}$.

Nếu $3xy^2:9$ dư 3 thì $x^3 + y^3:9$ dư 5 do $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 2 \pmod{9}$, nhưng $x^3 + y^3$ chỉ có các số dư là $1+1=2, 1+8=9, 8+8=16$ khi chia cho 9, vô lý!

Nếu $3xy^2$ chia cho 9 dư 6 thì $x^3 + y^3$ chia cho 9 dư 8, vô lý! Vậy không tồn tại một cặp (x, y) để $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891$.

Lời giải bài 5. Nếu quay AC quanh tâm O ngược chiều kim đồng hồ một góc bằng 120° thì



nó sẽ trùng với CE , do đó M trùng với N . Như vậy đoạn MB , với phép quay đó, sẽ trùng với đoạn ND .

Vậy ta có $BND = 120^\circ$.

N nằm trên cung tròn tâm C , bán kính bằng CO .

Từ đó tính được $\lambda = CN : CE = CD : CE = 1/\sqrt{3}$.

Lời giải bài số 6. Gọi A_0 là một trong hai đầu mút của L . Khi $M, N \in L$, ta sẽ viết $M \leq N$ nếu độ dài phần đường gấp khúc từ A_0 đến M bé hơn hay bằng độ dài phần đường gấp khúc từ A_0 đến N .

Gọi $ABCD$ là hình vuông đã cho. Trên L lấy các điểm A', B', C', D' sao cho các độ dài AA', BB', CC', DD' không vượt quá $1/2$. Ta luôn luôn có thể giả sử $A' < D' < B'$. Tập hợp các điểm của L được chia làm hai tập hợp con: L_1 gồm các điểm $\leq D'$, L_2 gồm các điểm $> D'$. Tập hợp các điểm của đoạn thẳng AB cũng được chia làm hai tập hợp con L', L_2' ; L_1' gồm những

điểm của AB cách L_1 một khoảng $\leq 1/2$. Dễ thấy rằng:

a) L_1' không rỗng vì chứa A .

L_2' không rỗng vì chứa B .

b) $L_1' \cup L_2' = AB$.

c) L_1' là hợp hữu hạn của những đoạn thẳng (hoặc đặc biệt là những điểm).

Từ đó suy ra rằng ít nhất có một điểm $M \in L_1' \cup L_2'$. Gọi X là điểm $\in L_1'$ và Y là điểm $\in L_2'$ sao cho $MX \leq 1/2$, $MY \leq 1/2$. Khi đó $XY \leq 1$.

Phần đường gấp khúc giới hạn bởi X, Y phải chứa D' , vì $X < D' < Y$, bởi vậy, nếu gọi l là độ dài của nó thì

$$l \geq XD' + D'Y \geq 99 + 99 = 198.$$

BÀI TOÁN RAMXAY

LÊ THỐNG NHẤT

DỒ chính là nội dung của bài toán 1/117 câu a, trên báo Toán học và tuổi trẻ, mà bạn Vũ Đình Hòa đã sưu tầm, giới thiệu với các bạn. Ta nhắc lại bài toán: "Từ 6 người tùy ý ta có thể chọn ra 3 người, đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau". Bài toán được giải nhờ phép suy luận khá hay. Hãy lấy ra 1 người tùy ý mà ta gọi là A , còn lại 5 người ta chia thành 2 nhóm theo quan hệ quen hoặc không quen A , như vậy sẽ có một nhóm có nhiều hơn 2 người, ta gọi nhóm này là $\mathcal{H}$ và ta lấy 3 người của $\mathcal{H}$. Nếu nhóm $\mathcal{H}$ quen A thì ta thấy có 2 khả năng:

1) 3 người trong $\mathcal{H}$ không hề quen nhau thì bài toán giải xong.

2) 3 người trong $\mathcal{H}$ có 2 người quen nhau thì 2 người này cùng A lập thành nhóm 3 người đôi một quen nhau, bài toán giải xong.

Nếu nhóm $\mathcal{H}$ không quen A , ta cũng có 2 khả năng:

1) 3 người trong $\mathcal{H}$ quen nhau đôi một thì bài toán giải xong.

2) 3 người trong $\mathcal{H}$ có 2 người không quen nhau thì 2 người này cùng A lập thành nhóm 3 người không hề quen nhau, bài toán giải xong.

Vậy thực chất của bài toán này là cho 6 đối tượng và 2 quan hệ để nối 2 đối tượng với nhau. Các đối tượng ở đây là « người » và 2 quan hệ là « quen » và « không quen ». Phát biểu trừu tượng bài toán dưới dạng sau: « Cho 6 đối tượng và giữa 2 đối tượng được ràng buộc bởi 1 trong 2 quan hệ I hoặc II. Thế thì tìm được 3 đối tượng mà đôi một ràng buộc nhau bởi cùng một quan hệ ».

Cách phát biểu trừu tượng cho ta thấy thực chất của vấn đề đề từ đó có thể phát biểu bài toán thành nhiều dạng bằng cách hãy cụ thể các đối tượng và các quan hệ. Chẳng hạn:

1) Cho các đối tượng là « điểm trên mặt phẳng » và 2 quan hệ là « nối với nhau bởi 1 đường cong » và « không nối với nhau bởi 1 đường cong » ta có bài toán: « Cho 6 điểm trên mặt phẳng và trên mặt phẳng có rất nhiều đường cong. Chứng minh luôn tìm được 3 điểm mà hoặc là chúng

được nối đôi một bởi các đường cong hoặc là chúng không được nối với nhau đôi một bởi các đường cong.

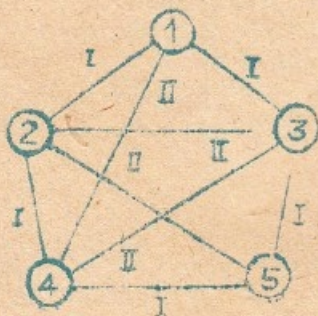
2) Cho các đối tượng là «điểm trên mặt phẳng mà không có 3 điểm nào thẳng hàng» và 2 quan hệ là «nối với nhau bởi đoạn thẳng màu đỏ» và «nối với nhau bởi đoạn thẳng màu xanh» ta có bài toán:

«Cho 6 điểm không có 3 điểm nào thẳng hàng trên mặt phẳng. Giữa 2 điểm bất kỳ được nối với nhau bởi 1 đoạn thẳng đỏ hoặc xanh. Chứng minh tồn tại một tam giác mà đỉnh là trong các điểm đã cho, có các cạnh được tô bởi cùng 1 màu».

Các bạn hãy phát biểu thêm cho nhiều dạng khác. Bây giờ ta khai thác tới bài toán. Trước hết ta chú ý tới những số lượng:

- 1) Có 6 đối tượng.
- 2) Có 2 quan hệ.
- 3) Tìm được 3 đối tượng có cùng quan hệ.

Giữa các con số 6, 2, 3 có liên quan gì trong bài toán? Có thể thay 1 trong 3 con số đó mà bài toán vẫn đúng hay không? Ta thử thay con số 6 bởi một số $n > 6$ thì bài toán hiển nhiên đúng, còn nếu thay số 6 bởi số $n < 6$ thì bài toán không đúng. Ta cho phần ví dụ khi $n=5$, bởi sơ đồ 1. Với $n=4$; 3 chỉ việc bớt 1; 2 đối tượng ở sơ đồ 1 là ta có phần ví dụ. Như vậy con số 6 là con số nhỏ nhất để bài toán thỏa mãn. Thế là ta có bài toán:



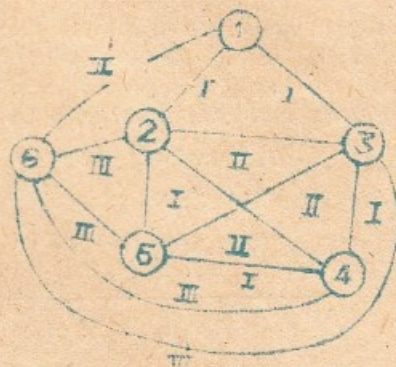
Sơ đồ 1

«Trong một hội nghị người ta cần tìm ra 3 người hoặc là đều cùng quen nhau đôi một hoặc là không hề quen nhau, vậy chỉ cần lấy ít nhất bao nhiêu người một cách hù dọa để trong số những người này sẽ chọn được 3 người theo yêu cầu?».

Các bạn hãy phát biểu dạng triu tượng và các dạng cụ thể khác của bài toán vừa nêu.

Bây giờ ta tìm cách thay con số 2 của bài toán. Nếu thay số 2 bởi số 1 thì bài toán là tầm thường. Nếu thay số 2 bởi số $m > 2$ thì thế nào? Ta xét trường hợp $m=3$, khi đó bài toán trở thành: «Cho 6 đối tượng và giữa 2 đối tượng bất kỳ bị ràng buộc bởi 1 trong 3 quan hệ I, II, III, thế thì tồn tại 3 đối tượng mà đôi một ràng buộc nhau bởi cùng một quan hệ».

Ta thấy bài toán này sai, bằng cách cho phần ví dụ bằng sơ đồ 2. Ta thấy sơ đồ 2 là phát triển từ sơ đồ 1 bằng cách thêm đối tượng 6 và cho đối tượng này quan hệ với 5 đối tượng kia bằng quan hệ III.



Sơ đồ 2

Như vậy là phải thay số 6 hoặc số 3 trong bài toán khi $m=3$ để bài toán đúng. Nếu thay số 3 bởi số $t > 3$ thì bài toán càng sai khi giữ nguyên số 6, còn $t=2$ thì bài toán tầm thường. Vậy ta giữ $t=3$ còn thay số 6 bởi số n nào cho thích hợp?

Khi nghiên cứu lời giải của trường hợp $n=6$ $m=2$, $t=3$, ta thấy khi lấy bớt đi một đối tượng thì số còn lại chia thành 2 nhóm không bằng nhau về số lượng. Tương tự như vậy khi $m=3$ thì sau khi lấy 1 đối tượng A thì số còn lại phải chia thành 3 nhóm theo quan hệ đối với A và số lượng 3 nhóm này cũng không bằng nhau, hơn nữa phải có một nhóm $\mathcal{H}$ đặc biệt với số lượng thích hợp để lập luận cho bài toán đúng. Giả sử nhóm $\mathcal{H}$ quan hệ với A theo quan hệ I, mà trong các đối tượng thuộc $\mathcal{H}$ có 2 đối tượng quan hệ I với nhau thì bài toán đúng (nhưng điều này vẫn là may mắn), ta phải xét đến trong $\mathcal{H}$ không hề có quan hệ I, vậy các đối tượng của $\mathcal{H}$ chỉ quan hệ với nhau bởi 2 quan hệ II và III, để bài toán đúng với $\mathcal{H}$ thì $\mathcal{H}$ phải có 6 đối tượng là ít nhất (theo trường hợp đã xét) Vậy toàn bộ phải có ít nhất là 17 đối tượng (vì $17-1=16$ mà 16 chia 3 phải có nhóm $\mathcal{H}$ đặc biệt ít nhất 6 đối tượng), thì ta lập luận hoàn toàn giống như bài toán ban đầu và có kết quả đúng. Ta có bài toán:

«Cho 17 đối tượng và giữa 2 đối tượng bất kỳ ràng buộc nhau bởi 1 trong 3 quan hệ I, II, III. Thế thì tồn tại 3 đối tượng đôi một ràng buộc nhau bởi cùng 1 quan hệ».

Thật lý thú khi cho 17 đối tượng là 17 nhà bác học, còn quan hệ ràng buộc là «trao đổi, 1 trong 3 đề tài», ta có bài toán số 4 của kỳ thi vô địch toán quốc tế lần thứ 6 tổ chức tại Liên Xô năm 1964.

Vậy con số 17 có thể là con số nhỏ nhất trong khi $m=3$ và $t=3$ hay không? Các bạn hãy cho phần vi dụ khi $n=16$ để khẳng định câu hỏi trên.

Nếu giữ nguyên $t=3$ thì khi thay đổi m ta phải thay đổi n . Gọi U_m là số đối tượng ít nhất ứng với m quan hệ để bài toán với $t=3$ đúng, ta dự đoán một công thức truy hồi sau:

$$U_m = m(U_{m-1} - 1) + 2.$$

$$\text{Chẳng hạn: } U_1 = 3; U_2 = 2(3-1) + 2 = 6;$$

$$U_3 = 3(6-1) + 2 = 17.$$

Theo công thức dự đoán thì

$$U_4 = 4(17-1) + 2 = 66.$$

v.v...

Ta chứng minh bằng qui nạp công thức này dễ dàng, đề nghị các bạn hãy thực hiện.

Bây giờ ta lại đi theo một hướng khác của bài toán mà như phần b bài 1/117 đã gợi ý tức là ở phần b bài 1/117 bạn Vũ Đình Hòa cho $n=18$; $m=2$, $t=4$. Tức là giữ nguyên con số $m=2$ của bài toán còn thay đổi n và t . Thực chất ở đây con số $t=4$ cần ấn định trước, còn phải truy con số n . Với $n=18$ bài toán đúng nhưng đây đã phải là con số nhỏ nhất chưa? Nếu gọi V_t là số đối tượng nhỏ nhất cần có ứng với t để bài toán đúng khi cho $m=2$ quan hệ thì có thể tính được V_t qua t và V_{t-1} theo công thức truy hồi nào?

Sau cùng các bạn thử thay đổi cả m và t để tìm $Q_{m,t}$ đối tượng nhỏ nhất để bài toán đúng?

Mong các bạn tiếp tục suy nghĩ và chúng ta sẽ trở lại gặp nhau trên tờ báo này.



Bài 1/123. Cho tập hợp A gồm 992 số tự nhiên phân biệt, mỗi số chưa vượt quá k .

Tìm giá trị lớn nhất của k sao cho trong A có ít nhất một số là bội của số khác.

Lời giải. Ta xét tất cả các tập hợp A_i ($i=1, 2, 3, \dots, 991$) với A_i gồm 992 số tự nhiên liên tiếp kể từ i trở lên như sau:

$$A_1 = \{1, 2, 3, \dots, 992\},$$

$$A_2 = \{2, 3, 4, \dots, 993\},$$

$$\dots, A_{990} = \{990, 991, \dots, 1981\},$$

và

$$A_{991} = \{991, 992, \dots, 1982\}.$$

Để thấy rằng trong mỗi tập hợp A_i trên đều tồn tại ít nhất một số là bội số của số khác cũng thuộc A_i . Vậy đến đây ta đã tìm thấy số k thỏa mãn đầu bài là 1982. Ta chứng minh rằng 1982 chính là giá trị lớn nhất trong các số k phải tìm.

Thật vậy, giả sử $k > 1982$ tức $k = 1982 + a$ (a nguyên dương). Xét tập hợp gồm 992 số hạng sau, mỗi số chưa vượt quá k :

$$A = \{991 + a, 992 + a, \dots, 1981 + a, 1982 + a\}, \text{ có } 1982 + a < 2(991 + a),$$

tức số lớn nhất thuộc A luôn nhỏ hơn 2 lần số nhỏ nhất thuộc A . Từ đây suy ra trong A không tồn tại một số nào là bội số của số khác thuộc A , trái với yêu cầu của đầu bài.

Tóm lại số lớn nhất phải tìm là 1982.

L. H.

Bài 2/123. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y, z) của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1982 \\ x + y + z = 68. \end{cases}$$

Lời giải. Bình phương của số tự nhiên n , khi chia cho 8, cho số dư 1 (nếu n lẻ), hoặc 0 (nếu n có dạng $4k$), hoặc 4 (nếu n có dạng $4k+2$). Vì $1982 \equiv 6 \pmod{8}$ nên từ phương trình thứ nhất, ta suy ra rằng trong ba số x, y, z , phải có hai số lẻ và một số dạng $4k+2$.

Mặt khác, bình phương của số tự nhiên n , khi chia cho 3, cho số dư 0 (nếu n chia hết cho 3),

hoặc 1 (nếu n không chia hết cho 3). Vì $1982 \equiv 2 \pmod{3}$ nên từ phương trình đầu, ta suy ra rằng trong ba số x, y, z , phải có một số chia hết cho 3 và hai số không chia hết cho 3, tức là hai số này có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$. Trong phương trình thứ hai, ta có $68 \equiv 2 \pmod{3}$; vậy hai số ấy phải đồng thời có dạng $3k+1$.

Tóm lại, ta đã chứng tỏ rằng trong ba số x, y, z , có hai số lẻ và hai số dạng $3k+1$, như vậy phải có một số vừa lẻ, vừa có dạng $3k+1$, tức là có dạng $6k+1$. Có thể coi rằng $z = 6k+1$.

$$\text{Vì } z^2 < 1982 < 45^2,$$

nên z chỉ có thể lấy một trong 8 giá trị: 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43.

Như vậy ta phải tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1982 - z^2 \\ x + y = 68 - z. \end{cases}$$

với z lấy các giá trị ở trên. Muốn vậy, dễ ý rằng

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= 2(x^2 + y^2) - (x+y)^2 \\ &= 2(1982 - z^2) - (68 - z)^2 \\ &= -3z^2 + 136z - 660. \end{aligned} \quad (1)$$

Bằng phép thử, cho z lần lượt 8 giá trị đã nêu, ta thấy rằng chỉ với giá trị $z = 19$ thì về cuối cùng ở (1) mới là một số chính phương, và ta đi đến nghiệm của hệ đã cho: (10, 19, 39) (cùng các hoán vị của bộ số này).

Bài 3/123. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = |x| + y \\ y^2 = |y| + x \end{cases}$$

Lời giải của Nguyễn Hoàng Cường (Trung Vương, Qui Nhơn).

Xét hệ phương trình qua các trường hợp sau:

a) $x \leq 0, y \leq 0$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^2 = -x + y \\ y^2 = -y + x. \end{cases}$$

Cộng hai phương trình ta được $x^2 + y^2 = 0$ vậy $x = 0, y = 0$. Từ đây và hệ phương trình đã cho, ta thấy chỉ cần xét thêm các trường hợp cả x và y đều khác không.

b) $x > 0, y > 0$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^2 = x + y \\ y^2 = y + x, \end{cases}$$

tức ta có $x = y$ và $x^2 = 2x$. Ta thấy ngay hệ có nghiệm $x = y = 2$.

c) $x > 0, y < 0$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^2 = x + y \\ y^2 = -y + x. \end{cases}$$

Cộng hai phương trình ta được $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Nếu $|y| > 1$ thì $\Delta' = 1 - y^2 < 0$, tức hệ vô nghiệm.

Nếu $|y| \leq 1$ thì từ phương trình thứ 2 của hệ ta có

$$x = y^2 + y = y(y+1) \leq 0, \text{ trái với điều kiện } x > 0.$$

Như vậy trong trường hợp này hệ cũng vô nghiệm.

d) $x < 0, y > 0$. Vì trong hệ đã cho vai trò của x và y là như nhau nên trường hợp này cũng giống như trường hợp c).

Tóm lại hệ phương trình đã cho chỉ có hai nghiệm

$$x = y = 0 \text{ và } x = y = 2.$$

L. H.

Bài 4/123. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) để $|(p+1)^{2m} - p^n|$ đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó p là số nguyên tố.

Lời giải của Nguyễn Hoàng Cường (Qui Nhơn).

1. Nếu n chẵn.

$$\begin{aligned} |(p+1)^{2m} - p^n| &= |(p+1)^m - p^{n/2}| \times \\ &\times [(p+1)^m + p^{n/2}] \geq |(p+1)^m + p^{n/2}| \geq 2p+1 \end{aligned}$$

(vì p và $p+1$, một số là chẵn, một số là lẻ, nên hiệu các lũy thừa của chúng ≥ 1).

Vậy nếu chỉ xét n chẵn thì giá trị nhỏ nhất của $|(p+1)^m - p^n| = 2p+1$, đạt được khi $m = 1, n = 2$.

2. Nếu n lẻ.

$$\text{Chỉ cần tìm } (m, n) \text{ để } |(p+1)^m - p^n| \leq 2p+1.$$

a) Trường hợp $(p+1)^{2m} - p^n < 0$. Ta có $p > 1$, và

$$\begin{aligned} 1 &\leq p^n - (p+1)^{2m} \leq 2p+1 \\ \Leftrightarrow 2 &\leq p^n - p^{2m} - \dots - 2mp \leq 2p+2 \\ \Leftrightarrow 2/p &\leq p^{n-1} - p^{2m-1} - \dots - 2m \\ &\leq (2p+2)/p \leq 3. \end{aligned} \quad (*)$$

Đặt $A = p^{n-1} - p^{2m-1} - \dots - 2m$ thì A chỉ có thể bằng 1, 2, 3.

Ta có

$$p^n - (p+1)^{2m} = Ap - 1.$$

+ Nếu $A = 1 \Rightarrow p^n - (p+1)^{2m} = p - 1$. Về trái lẽ nên $p = 2$, ta có

$$2^n - 3^{2m} = 1.$$

Về trái là bội số của 4 trừ 1 khi $n > 1$ nên không thể bằng về phải; còn nếu $n = 1$ thì về trái < 0 cũng không thể bằng về phải.

+ Nếu $A = 2 \Rightarrow p^n - (p+1)^{2m} = 2p - 1$

$$\Leftrightarrow (p^n + 1) + 2^{2m} - (p+1)^{2m} = 2(p+1).$$

Vì n lẻ nên $p^n + 1 \vdots p+1$. Nhưng 2 không chia hết cho $p+1$. Vậy $A \neq 2$.

+ $A = 3$. Từ (*) suy ra $p = 2$, trở về trường hợp $A = 1$. Vậy trường hợp này cũng không có nghiệm.

b) Trường hợp $(p+1)^{2m} - p^n > 0$. Ta có

$$1 \leq (p+1)^{2m} - p^n \leq 2p+1.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq p^{2m} + \dots + 2mp - p^n \leq 2p$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq B = p^{2m-1} + \dots + 2m - p^{n-1} \leq 2.$$

B nguyên nên chỉ có thể bằng 0, 1, 2. Ta có

$$(p+1)^{2m} - p^n = Bp + 1.$$

$$+ B = 0 \Rightarrow (p+1)^{2m} - p^n = 1$$

$$\Leftrightarrow [(p+1)^m - 1][(p+1)^m + 1] = p^n$$

$\Rightarrow (p+1)^m - 1 = p^r, (p+1)^m + 1 = p^s$ với r, s nguyên và $r + s = n$. $\Rightarrow p^s - p^r = 2$, chỉ xảy ra khi $p = 2, r = 1, s = 2 \Rightarrow n = 3$.

Giá trị bé nhất của $|(2+1)^{2m} - 2^n|$ bằng 1, khi $m = 1, n = 3$.

+ $B = 1 \Rightarrow (p+1)^{2m} - p^n = p + 1$. Về trái lẽ, về phải chẵn. Vậy $B \neq 1$.

$$+ B = 2 \Rightarrow (p+1)^{2m} - p^n = 2p + 1$$

$$\Leftrightarrow (p+1)^{2m} - p^n + p^2 = (p+1)^2. \quad (**)$$

Ta có $|p^n - p^2|$ không thể là bội của $(p+1)^2$, vì nếu vậy thì $n > 1$ và $|p^n - p^2| = p^n - p^2 = p^2(p^{n-2} - 1)$; nhưng $p^{n-2} - 1$ với $n - 2$ lẻ không chia hết cho $p+1$. Vậy không thể có (**).

Tóm lại: Với $p = 2$ thì $|(p+1)^{2m} - p^n|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1, khi $m = 1, n = 3$. Với p là số nguyên tố lẻ thì $|(p+1)^{2m} - p^n|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2p+1$, khi $m = 1, n = 2$.

P.Q.G.

Bài 5/123. Giải và biện luận theo k bất phương trình

$$x + \sqrt{k + \sqrt{x}} < k.$$

Lời giải. Viết bất phương trình đã cho dưới dạng

$$\sqrt{k + \sqrt{x}} < k - x.$$

ta thấy rằng đề các căn thức có nghĩa, và do về phải lớn hơn về trái, cần đặt điều kiện cho nghiệm x và tham số k :

$$x \geq 0, k + \sqrt{x} \geq 0, k - x > 0,$$

tức là

$$k > x \geq 0. \quad (*)$$

Với các điều kiện đã đặt, ta có thể bình phương hai vế và được

$$k + \sqrt{x} < k^2 - 2kx + x^2$$

hay

$$0 < k^2 - (2x+1)k + (x^2 - \sqrt{x}).$$

Coi về phải là một tam thức bậc hai đối với k , ta phân tích được

$$0 < (x + \sqrt{x} + 1 - k)(x - \sqrt{x} - k). \quad (1)$$

Do điều kiện (*), ta có $x - \sqrt{x} - k < 0$, vậy với điều kiện ấy, bất phương trình (1) tương đương với

$$x + \sqrt{x} + 1 - k < 0.$$

hay, với $t = \sqrt{x} \geq 0$,

$$t^2 + t + (1 - k) < 0. \quad (2)$$

Trước hết, để (2) có nghiệm, ta phải có

$$\Delta = 1 - 4(1 - k) = 4k - 3 > 0,$$

hay

$$k > 3/4.$$

Khi đó về trái của (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1 < t_2$, và bất phương trình (2) có nghiệm

$$t_1 < t < t_2.$$

Vì $t = \sqrt{x} \geq 0$, nên để bất phương trình đã cho có nghiệm, ta cần phải có $t_2 > 0$. Theo hệ thức Viet, $t_1 + t_2 = -1$, vậy $t_1 < 0$, thành thử t_1, t_2 có dấu trái nhau, do đó lại theo hệ thức Viet $0 > t_1 t_2 = 1 - k$, từ đó suy ra $k > 1$. Ngược lại, nếu $k > 1$, thì $t_1 t_2 = 1 - k < 0$, vậy t_1, t_2 khác dấu, mà $t_1 < t_2$, do đó $t_1 < 0 < t_2$, và bất phương trình (2) có nghiệm

$$0 \leq \sqrt{x} < t_2.$$

hay

$$0 \leq x < k - (1 + \sqrt{4k - 3})/2 \quad (3)$$

Tóm lại:

- nếu $k \leq 1$: bất phương trình vô nghiệm,

- nếu $k > 1$: bất phương trình có nghiệm (3).

Bài 6/123. Giả sử a, b, c là ba số không âm, liên hệ với nhau bằng biểu thức: $a + b + c = 1$.

Tìm tập hợp tất cả các giá trị có thể có được của biểu thức sau đây

$$S = \frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c}$$

Lời giải của bạn Nguyễn Hoàng Cường (Quy Nhơn).

$$\text{Do } 1 \geq 1 - (a-b)^2$$

nên $a/(1+b-a) \geq a(1+a-b)$. Cũng vậy, ta có $b/(1+c-b) \geq b(1+b-c)$, $c/(1+a-c) \geq c(1+c-a)$
 $\Rightarrow S \geq a(1+a-b) + b(1+b-c) + c(1+c-a)$
 $= a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
 $= 1 + [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]/2 \geq 1$.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a = b = c$.

Ta chứng tỏ S nhận mọi giá trị thực lớn hơn hay bằng 1.

Lấy k tùy ý, $k \in [1, +\infty)$. Có 2 trường hợp:

$$1) k \geq \sqrt{2}$$

Ta chọn $c = 0$, còn phải tìm a, b sao cho $a + b = 1$ và $a/2b = b/a = k$.

Dễ dàng suy ra được:

$$a = \frac{k+2-\sqrt{k^2-2}}{3+2k}, \quad b = \frac{k+1+\sqrt{k^2-2}}{3+2k}$$

Với các giá trị này, rõ ràng a, b, c không âm và $a + b + c = 1$.

$$2) 1 \leq k < \sqrt{2}$$

Ta chọn $c = 1/3$; a, b được tính từ hệ phương trình: $a + b + 2/3$

$$\text{và } \frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+1/3-b} + \frac{1/3}{1+a-1/3} = k. \text{ Từ}$$

đó ta có:

$$a^2(27+18k) - (27+3k)a + 15 - 10k = 0. \text{ Chọn}$$

ng nghiệm a là

$$\frac{9+k-3\sqrt{(k-1)(9k+11)}}{18+12k}$$

$$\text{Do } k < \sqrt{2} \Rightarrow k < 3/2, \text{ vì vậy}$$

ta có

$$k^2 < \frac{9}{4} = \frac{180}{80} \Leftrightarrow (9+k)^2 > 9(k-1)(9k+11),$$

hay $a > 0$, và

$$b = \frac{3+7k+3\sqrt{(9k+11)(k-1)}}{18+12k} > 0.$$

Dễ thấy $a + b + c = 1$.

Tóm lại, ta luôn luôn tìm được a, b, c không âm, tổng bằng 1, để có $S = k$. Đây là điều phải chứng minh.

L.H.

Bài 7/123. Hãy tìm các tứ diện có thể tích lớn nhất nằm trọn bên trong một khối lập phương cho trước.

Lời giải.

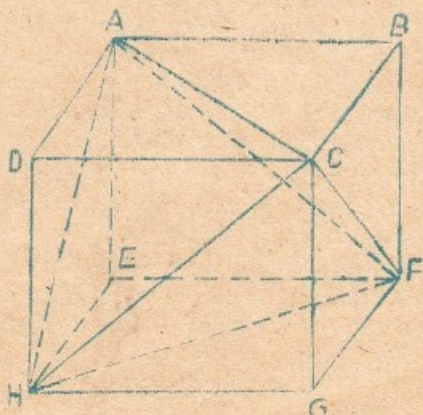
1. Trước hết tìm tứ diện có thể tích lớn nhất nằm trọn bên trong một mặt cầu cho trước. Ta thấy tứ diện đó:

- Các đỉnh phải nằm trên mặt cầu, vì nếu không thì có tứ diện lớn hơn bao lấy nó cũng nằm trọn trong mặt cầu.

- Phải là tứ diện đều vì nếu tứ diện $MNPQ$ không đều (có các đỉnh nằm trên mặt cầu) thì có ít nhất hai cạnh kề nhau không bằng nhau, chẳng hạn $NP > NQ$. Trong đường tròn ngoại tiếp tam giác NPQ (đường tròn nằm trên mặt cầu), dựng tam giác cân $N'PQ$ nội tiếp, ta có diện tích $N'PQ > \text{diện tích } NPQ \rightarrow$ tứ diện $MN'PQ$ có thể tích lớn hơn thể tích tứ diện $MNPQ \rightarrow MNPQ$ không phải là tứ diện có thể tích lớn nhất trong các tứ diện nằm trọn bên trong mặt cầu.

Dễ thấy rằng tất cả các tứ diện đều, có các đỉnh trên mặt cầu, đều bằng nhau nên đều là các tứ diện có thể tích lớn nhất.

2. Cho lập phương $ABCDEFGH$. Dựng mặt cầu (O) ngoại tiếp lập phương đó. Các tứ diện đều $ACFH$ và $BEDG$ là các tứ diện có thể tích lớn



nhất nằm trọn trong mặt cầu (O) phải là các tứ diện có thể tích lớn nhất trong các tứ diện nằm trọn trong lập phương. Ngoài ra trong lập phương, bất kỳ tứ diện nào khác cũng là tứ diện có đỉnh không nằm trên mặt cầu, hoặc là tứ diện không đều, nên sẽ có thể tích nhỏ hơn thể tích hai tứ diện nói trên.

Tóm lại chỉ có hai tứ diện $ACFH$ và $BEDG$ là có thể tích lớn nhất trong các tứ diện nằm trọn trong lập phương $ABCDEFGH$.

Bài 8/123. Trong không gian cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Hỏi bốn điểm đã cho phải thỏa mãn điều kiện gì để bốn đường tròn, mỗi đường đi qua ba trong bốn điểm đó, bằng nhau?

Lời giải. 1. Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

a) A, B, C, D lập thành tứ giác lồi. Giả sử BC là một cạnh của tứ giác, vì đường tròn đi qua B, C, D bằng đường tròn đi qua B, C, A nên hai đường tròn đó phải trùng nhau. Vậy trong trường hợp này, điều kiện bốn điểm A, B, C, D phải thỏa mãn là bốn điểm đó phải nằm trên một đường tròn.

b) Một trong bốn điểm nằm trong tam giác lập bởi ba điểm còn lại. Giả sử D nằm trong tam giác ABC . Để thấy rằng nếu D là trực tâm của tam giác ABC thì các đường tròn nói trong đầu bài bằng nhau. Điểm D không thể ở vị trí khác vì ba đường tròn bằng nhau chỉ có thể cắt nhau ở duy nhất điểm. Vậy trong trường hợp này, điều kiện bốn điểm A, B, C, D phải thỏa mãn là mỗi điểm là trực tâm của tam giác lập bởi ba điểm còn lại.

2. Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Bốn đường tròn, mỗi đường đi qua ba trong bốn điểm A, B, C, D đều nằm trên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$; các đường tròn đó bằng nhau nên mặt phẳng chứa các đường tròn đó phải cách đều tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Vậy tâm hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ phải trùng nhau.

Các tam giác mặt của tứ diện không thể có góc tù, vì nếu trái lại chẳng hạn tam giác ABC có góc tù thì đường vuông góc với mặt phẳng chứa ABC , kẻ từ tâm đường tròn ngoại tiếp tứ diện sẽ cắt mặt phẳng đó tại điểm ngoài tam giác, điểm đó không phải là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tứ diện với mặt ABC , trái với kết quả trên.

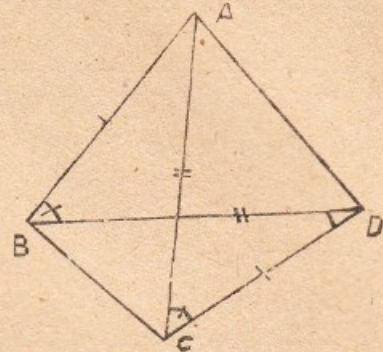
Các đường tròn ngoại tiếp các mặt của tứ diện bằng nhau nên hai góc của hai mặt đối diện với cùng một cạnh bất kỳ phải bằng nhau (không bù nhau vì các góc đều không tù).

Ta chứng minh các cạnh đối nhau của tứ diện $ABCD$ phải bằng nhau. Thật vậy, giả sử trái lại chẳng hạn

$$AB > CD \quad (1)$$

thì thì đo góc BAC bằng góc BDC nên suy ra

$$BD > AC \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra góc ABD nhỏ hơn góc ACD , mâu thuẫn (!)

3. **Kết luận:** Điều kiện bốn điểm A, B, C, D phải thỏa mãn là: hoặc bốn điểm nằm trên một đường tròn, hoặc chúng là đỉnh của một tứ diện trực tâm, hoặc chúng lập thành một tứ diện có các cạnh đối bằng nhau.

Bài 9/123. Cho hình chóp đều $S.ABCDEF$. Từ một điểm O trên đường cao SH của hình chóp ta dựng mặt phẳng π , cắt SA, SB, SC, SD, SE, SF tại $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$. Chứng minh các hệ thức:

$$1) \quad 1/SA_1 + 1/SD_1 = 1/SB_1 + 1/SE_1 \\ = 1/SC_1 + 1/SF_1 ;$$

$$2) \quad 1/SA_1 + 1/SC_1 + 1/SE_1 = \\ = 1/SB_1 + 1/SD_1 + 1/SF_1.$$

Lời giải. Nếu π song song với đáy hình chóp thì các hệ thức phải chứng minh là hiển nhiên, nên ta giả sử π không song song với đáy hình chóp. Trước hết ta chứng minh bổ đề: Nếu AD là phân giác của góc A trong tam giác ABC , $A = 2\alpha$, thì

$$1/AB + 1/AC = 2\cos\alpha/AD.$$

Thật thế, ta có diện tích tam giác ABC bằng diện tích tam giác ABD cộng với diện tích tam giác ADC , suy ra

$$AB \cdot AC \cdot \sin 2\alpha = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha + AC \cdot AD \cdot \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB + AC}{AB \cdot AC} = \frac{\sin 2\alpha}{AD \cdot \sin \alpha}$$

$$\Leftrightarrow 1/AC + 1/AB = 2\cos\alpha/AD \quad (\text{đpcm}).$$

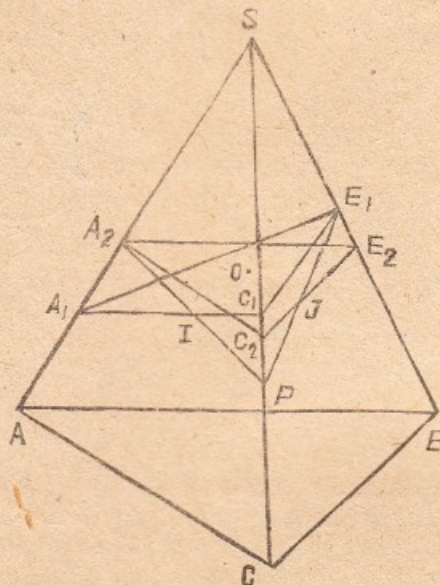
1) Gọi α là góc giữa đường cao của hình chóp với các cạnh bên, áp dụng bổ đề trên, ta có

$$\begin{aligned} 1/SA_1 + 1/SD_1 &= 1/SB_1 + 1/SE_1 \\ &= 1/SC_1 + 1/SF_1 = 2\cos\alpha/SO \end{aligned}$$

2) Ta tính $1/SA_1 + 1/SC_1 + 1/SE_1$.

Qua O dựng mặt phẳng song song với đáy hình chóp, cắt SA, SC, SE tương ứng tại A_2, C_2, E_2 .

Không mất tổng quát, ta có thể giả sử vị trí của các điểm A_i, C_i, E_i ($i=1,2$) như hình vẽ.



Mặt phẳng A_2C_1O cắt SC tại P , cắt A_1C_1 tại I , cắt C_2E_2 tại J . I nằm trên hai mặt phẳng $A_1C_1E_1$ và A_2E_1O nên phải nằm trên giao tuyến E_1O của hai mặt phẳng đó, suy ra SI là phân giác của góc ASC . Chứng minh tương tự, ta có SJ là phân giác của góc CSE .

Áp dụng bổ đề trên, ta có

$$1/SA_1 + 1/SC_1 = 1/SA_2 + 1/SP$$

$$1/SP + 1/SE_1 = 1/SC_2 + 1/SE_2$$

$$\Rightarrow 1/SA_1 + 1/SC_1 + 1/SE_1 =$$

$$1/SA_2 + 1/SC_2 + 1/SE_2 = 3\cos\alpha/SO$$

Bằng cách tương tự ta tính được

$$1/SB_1 + 1/SD_1 + 1/SF_1 = 3\cos\alpha/SO.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ban Nguyễn Hoàng Cường (Qui Nhơn) có lời giải tốt.

P.Q.G.

Bài 10/123. Giải phương trình

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{(x^2-1)(x-1)} +$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{(x^2-1)(x+1)} = \sqrt{2x^3}.$$

Lời giải. Điều kiện nghiệm phương trình phải thỏa mãn: $x \geq 0$. Ta biến đổi vế trái của phương trình; để cho gọn, ta đặt $x-1=a$, $x+1=b$, vế trái bằng

$$\begin{aligned} &\sqrt{a} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt{b} + \sqrt[3]{ab^2} = \\ &= \sqrt{a + \sqrt[3]{a^2b} + b + \sqrt[3]{ab^2}} + 2\sqrt{(a + \sqrt[3]{a^2b})(b + \sqrt[3]{ab^2})} \\ &= \sqrt{a + \sqrt[3]{a^2b} + b + \sqrt[3]{ab^2} + 2\sqrt{ab + a\sqrt[3]{ab^2} + b\sqrt[3]{a^2b} + ab}} \\ &= \sqrt{a + \sqrt[3]{a^2b} + b + \sqrt[3]{ab^2} + 2(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2})} \\ &= \sqrt{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3} \end{aligned}$$

Trở lại biến x , ta phải giải phương trình

$$(*) \sqrt[3]{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{(x^2-1)(x-1)}} = \sqrt{2x^3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{(x^2-1)(x-1)})^3 = 2x^3$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)} \times (\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{(x^2-1)(x-1)}) = 2x^3.$$

Nhưng do (*):

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{(x^2-1)(x-1)} = \sqrt[3]{2x^3},$$

phương trình trở thành:

$$2x + 3\sqrt[3]{x^2-1} \sqrt[3]{2x} = 2x^3$$

$$\Leftrightarrow x[3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x^2-1} - 2(x^2-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{x^2-1}[3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{(x^2-1)^2}] = 0$$

Ta có:

$$1) x = 0$$

$$2) \sqrt[3]{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại nghiệm } x = -1)$$

$$3) 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(x^2-1)^2 = 27.2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = \sqrt{27/2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (2 + \sqrt{27})/2 \Rightarrow x = \sqrt{(2 + 3\sqrt{3})/2}.$$

(loại nghiệm âm).

Vậy phương trình có 3 nghiệm;

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \sqrt{(2 + 3\sqrt{3})/2}.$$

P.Q.G.



CÁC ĐỀ TOÁN THI GIAI TOÁN 1982 — 1983

Bài 1/126. Tìm số điện thoại của một cơ quan, biết rằng số đó có dạng $abcba$, với $c/2 \leq a < c$, và tổng các chữ số của số đó bằng bb .

Tô Thành Tuấn
(T.p. Hồ Chí Minh)

Bài 2/126. Chứng minh rằng ngoài nghiệm $x = y = 0$ thì phương trình

$$x^{1964} (x^{1964} + y^{18}) = y^{1982}$$

không còn nghiệm nguyên (x, y) nào khác.

Trần Văn Khải (Quốc học Huế)

Bài 3/126. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

Phạm Quang Giám (Hà Nội)

Bài 4/126. Tìm điều kiện cần và đủ để một số tự nhiên n có thể biểu diễn được dưới dạng

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$$

trong đó x_1, x_2, x_3 là những số nguyên không âm

Ngô Duy Ninh (Quy Nhơn)

Bài 5/126. Người ta rải 35 hòn bi trên một mặt sàn hình vuông có cạnh bằng 10m. Chứng minh rằng khi các hòn bi đã đứng yên, có thể tìm được trên mặt sàn ít nhất một hình chữ nhật có diện tích lớn hơn $3m^2$, sao cho hình chữ nhật đó không chứa một hòn bi nào cả (lúc là không có điểm nào của hình chữ nhật là điểm tiếp xúc của một hòn bi với mặt sàn).

Phạm Quang Giám

Bài 6/126. a) Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$(1/3) \cos A + (1/4) \cos B + (1/5) \cos C \leq 5/12.$$

Tam giác ABC có dạng như thế nào thì có dấu đẳng thức?

b) Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\cos A + (1/2) \cos B + (1/3) \cos C < 7/6$$

và với mỗi số $\varepsilon > 0$ tùy ý, luôn tồn tại ít nhất một dạng tam giác ABC để cho

$$\cos A + (1/2) \cos B + (1/3) \cos C > 7/6 - \varepsilon.$$

Trần Văn Khải

Bài 7/126. Cho dãy số $x_1, x_2, \dots, x_{1982}$ với tính chất

$$1) \quad x_1 = x_{1982} = 1, \text{ và}$$

$$2) \quad x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{i(1983-i)} + 1$$

với mọi $i \in \{2, 3, \dots, 1981\}$.

Chứng minh rằng:

$$a) \quad x_2 = x_{1981}, x_3 = x_{1980}, \dots, x_{991} = x_{992}$$

$$b) \quad 1 \leq x_i < 1 + 1/1980.$$

Vũ Đình Hòa (CHDC Đức)

Bài 8/126. Trong mặt phẳng cho một đường tròn và một dây cung AB tùy ý. Gọi I là điểm giữa của AB . M và N là hai điểm của AB đối xứng với nhau qua I . Lấy điểm C tùy ý trên đường tròn; các đường thẳng CM, CN và CI cắt lại đường tròn tương ứng ở P, Q và R . Đường thẳng PQ cắt đường thẳng AB ở S . Chứng minh rằng đường thẳng SR là tiếp tuyến của đường tròn đã cho.

Vũ Đình Hòa

Bài 9/126. Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Hãy dựng một hình chữ nhật sao cho các đường thẳng chứa mỗi cạnh của nó đi qua một trong các điểm đã cho và sao cho tỉ số hai kích thước cạnh hình chữ nhật bằng một số k cho trước.

Trong trường hợp bài toán có vô số lời giải, hãy tìm qui tích tâm của các hình chữ nhật.

Nguyễn Đăng Phát (Hà Nội)

Bài 10/126. Cho tam giác ABC . Tìm trong không gian một điểm D sao cho $ABCD$ là một tứ diện trực tâm, đồng thời từ ba đoạn thẳng DA, DB, DC có thể dựng được một tam giác tương đương với tam giác ABC .

(Chú thích: Tứ diện trực tâm là tứ diện có các cạnh đối diện vuông góc với nhau, cũng là tứ diện có các đường cao đồng qui).

Nguyễn Đăng Phát

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

VỀ CÁC SỐ NGUYÊN TỐ

NGÔ DUY NINH

CÁC số nguyên tố là vấn đề trung tâm, và là cửa ngõ để bước vào lâu đài số học. Chẳng những như thế, mà nó còn ảnh hưởng sâu sắc đến cả các ngành toán học khác. Vì vậy nó đã thu hút sức lực của rất nhiều nhà toán học của mọi thế kỷ.

Cách đây 2200 năm, người Hy Lạp đã chứng minh rằng: số các số nguyên tố là vô hạn. Tuy nhiên, người ta muốn có một công thức để viết ra một số nguyên tố lớn tùy ý. Nhưng việc tìm kiếm một công thức như vậy chẳng mang lại một kết quả gì hơn việc đi tìm hòn đá thần kỳ để biến mọi kim loại thành vàng, hoặc một công thức toàn năng và toàn mỹ để giải mọi bài toán: "có những ước mơ lớn lao vẫn chỉ là mơ ước mà thôi".

Tuy không tìm ra một công thức có ích như vậy, song người ta có thể biểu diễn khá đẹp một số nguyên tố theo mọi số nguyên tố.

ĐỊNH LÝ SIERPINSKI: Gọi p là số nguyên tố thứ n , và

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} p_n 10^{-2^n}$$

thì

$$p_n = [10^{2^n \alpha}] - 10^{2^{n-1}} [10^{2^{n-1} \alpha}].$$

Người ta nghĩ rằng có thể tìm được mọi số nguyên tố từ các số tự nhiên bằng cách gan lọc, và phương pháp đầu tiên ra đời là cái "sàng" của Eratosthène - nhà bác học cổ Hy Lạp, đưa ra từ thế kỷ 3 trước công nguyên. Và sau này là một loạt các "sàng" cải tiến từ "sàng" Eratosthène. Ngoài ra, cũng có một số định lý để nghiệm biết một số nguyên tố hay không; chẳng hạn định lý Wilson, và

ĐỊNH LÝ LUCAS: Một số p là nguyên tố khi và chỉ khi tồn tại số nguyên a để $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ và với mọi số n là ước của $p-1$, $n < p-1$ thì $a^n - 1$ không chia hết cho p .

Việc áp dụng định lý Lucas để tìm một số nguyên tố là không thực tế vì nó còn lâu hơn cách dùng "sàng" của Eratosthène.

Dù không đạt được điều mong muốn, các nhà toán học vẫn không nản chí. Họ khảo sát bài

toán theo khía cạnh khác và tìm cách giảm nhẹ các yêu cầu bằng cách xét các khoảng cách giữa hai số nguyên tố liên tiếp $p_{n+1} - p_n$. Để thấy chỉ có $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ là hai số nguyên liên tiếp, còn lại: $p_{n+1} - p_n \geq 2$.

Đầu tiên người ta xét các số nguyên tố liên tiếp có khoảng cách bằng 2 và gọi là cặp số nguyên tố sinh đôi, chẳng hạn, cặp 3, 5; 5, 7; 10016957, 10016959; hoặc: 1.000.000.009.649, 1.000.000.009.651.

Có một điều kiện cần và đủ để cho biết các số nguyên tố sinh đôi nhưng thực tế không áp dụng được:

XY MỆNH ĐỀ 1: Điều kiện cần và đủ để một số lẻ n với n và $n+2$ đều là số nguyên tố là $(n-1)!$ không chia hết cho n và $n+2$.

Trong các tài liệu khoảng 20 năm gần đây, các nhà toán học lại nghiên cứu về các bộ bốn số nguyên tố liên tiếp gần nhau nhất, gọi là bộ sinh bốn, có nghĩa là các số nguyên tố có dạng:

$$p_k = n - 4, p_{k+1} = n - 2,$$

$$p_{k+2} = n + 2, p_{k+3} = n + 4.$$

Hai cặp số cộng thừa nhất (có công sai lớn nhất) chứa tất cả các cặp số nguyên tố sinh đôi (trừ 3 và 5) là $6n+5$ và $6n+7$. Tương tự 4 cặp số cộng thừa nhất chứa các bộ sinh bốn (trừ 5, 7, 11, 13) là $30n+11$, $30n+13$, $30n+17$, $30n+19$.

Từ các biểu thức này suy ra, tất cả các bộ sinh bốn đầu tiên cho đến 10.000 (trừ 5, 7, 11, 13) là khi cho $n = 0, 3, 6, 27, 49, 108, 187, 314$. Và cũng suy ra các chữ số cuối cùng của bộ sinh bốn là 1, 3, 7, 9. Năm 1959, V.A. Goluber đã tính trong 10 triệu số tự nhiên đầu tiên có 899 bộ sinh bốn và 15 triệu số đầu tiên có 1209 bộ sinh bốn. Bộ sinh bốn lớn nhất tính đến năm 1965 là bộ với số nguyên tố nhỏ nhất 2863.308.731, do Ferrier chỉ ra.

Mặc dù dường như việc chứng minh rằng: tập hợp số nguyên tố sinh đôi cũng như sinh bốn đều vô hạn là đơn giản, mà cũng không ai làm nổi, điều này chứng tỏ ý thức tò mò của con người có thể dễ dàng đưa đến một giả định toán học đơn giản một cách kỳ lạ, mà tính đúng hoặc sai của nó lại thật khó chứng minh!

Cứ mỗi lần gặp khó khăn ta nên suy nghĩ để đổi hướng đi cho hợp lý, và các nhà toán học đã làm như vậy. Thay vì khảo sát các khoảng cách của hai số nguyên tố liên tiếp, họ lại nghiên cứu về sự phân bố của số nguyên tố trên các đoạn số tự nhiên để cho nó chứa ít nhất một số nguyên tố. Nhà toán học Pháp J.L.F Bertrand đã phát biểu một định đề nhưng không chứng minh (nó liên quan đến một định lý của ông trong lý thuyết nhóm các phép thế).

ĐỊNH ĐỀ BERTRAND (Thường gọi: bất đẳng thức Tehebychev): Với $n > 3$, giữa n và $2n-2$ luôn tồn tại một số nguyên tố.

Năm 1852 định đề này được nhà toán học Nga: P.L.Tehebychev chứng minh.

Ngoài ra cũng đã đạt được một số kết quả:

MỆNH ĐỀ 2: Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ thì giữa n và $n(1+\varepsilon)$ có ít nhất một số nguyên tố.

MỆNH ĐỀ 3: Giữa n^2 và $(n+1)^2$ luôn có hai số nguyên tố.

Gần với bài toán trên là bài toán ước lượng số nguyên tố thứ n , p_n theo n . Dựa vào cách chứng minh tính vô hạn của tập hợp số nguyên tố ta suy ra: $p_n < 2^{2^{n-1}}$. Cố gắng hơn ta có thể

chứng minh $p_n < 2^{(n+4)/2}$ hay hơn chút nữa

$p_n < 2^{(n+8)/3}$, và xa hơn: $p_n < 2^{(n+24)/6}$ với

mọi $n \geq 1$. Nhưng các kết quả này còn quá thô sơ, bởi vì: chẳng hạn với $n=48$ ta có $p_{48} = 223$, trong khi đó số nguyên tố không vượt quá $2^{(48+24)/6} = 2048$ là $p_{279} = 2039$ (!).

Tuy nhiên, ta cũng tìm được một công thức ước giá mạnh hơn, theo các số nguyên tố còn lại:

$$p_n < e \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i^{1/(p_i-1)}}$$

với mọi $n \geq 2$. Trong đó e là số siêu việt, $e = 2,718281 \dots$

Mặc dù không tìm được công thức đơn giản để cho biết một số nguyên tố, các nhà toán học lại mơ ước đến một dãy số vô hạn gồm toàn các số nguyên tố. Hai mươi năm trước đây người ta cứ ngỡ rằng ước mơ đó đã thành sự thật (!) bởi vì đã chứng minh được.

ĐỊNH LÝ 1: Có một số thực A (vô tỉ) sao cho $[A^{3n}]$ lấy các giá trị nguyên tố với mọi số tự nhiên n .

ĐỊNH LÝ 2: Tồn tại số thực $\alpha = \alpha_0$ sao cho các số $[2^{\alpha_0}], [2^{\alpha_1}], \dots$ xác định bởi công thức truy toán: $\alpha_{m+1} = 2^{\alpha_m}$, $m = 0, 1, \dots$ đều là số nguyên tố.

Nhưng hai định lý này chỉ chứng tỏ ước mơ của ta là có cơ sở khoa học, nhưng lại không chỉ ra một dãy số như thế, và mãi đến nay việc xác định các số thực A và α_0 vẫn không có gì hy vọng.

Tuy đã giảm nhẹ yêu cầu, nhưng kết quả thu được chẳng có gì đặc sắc, người ta tiếp tục giảm nhẹ hơn nữa yêu cầu, chỉ nghiên cứu về sự phân bố các số nguyên tố trong dãy số tự nhiên.

Ferma (1601 - 1665) đã phát biểu rằng: các số $F_n = 2^{2^n} + 1$ đều là số nguyên tố, nhưng điều

này chỉ đúng với 5 số đầu tiên ứng với $0 \leq n \leq 4$. Đến năm 1732, Leonhard Euler (1707-1783) đã chứng minh rằng F_n chỉ có ước số dạng $k \cdot 2^{n+2} + 1$ với k là số tự nhiên, trên cơ sở đó ông tìm được

ng nghiệm tự nhiên của phương trình: $2^{2^5} + 1 = (a \cdot 2^7 + 1)(b \cdot 2^7 + 1)$ là: $a=5$, $b=52347$; tức là số Ferma thứ 6: F_5 là hợp số, và sau này người ta cũng chứng minh được $F_6 = 2^{2^6} + 1 \equiv 1071 \cdot 2^8 + 1 = 274177$, $F_{1945} = 5 \cdot 2^{1947} + 1$ và một số các số Ferma hợp số khác.

Đặc biệt, các số Ferma lại góp phần quyết định vào cuộc đời của ông hoàng toán học Gauss, khi ông còn là một thanh niên đang lưỡng lự giữa hai con đường, hiến dâng tài năng xuất sắc của mình cho toán học hay ngôn ngữ học. Đó là phát minh về cách dựng các đa giác đều bằng compa và thước kẻ có liên quan chặt chẽ đến số nguyên tố Ferma. Công trình hoàn thành ngày 30 tháng 3 năm 1796 và công bố ngày 1 tháng 6 năm ấy, khi ông vừa tròn mười tám tuổi (!).

Tập hợp số Ferma hợp số là hữu hạn hay vô hạn đến nay vẫn chưa được giải quyết, mặc dầu đã có nhiều dãy tương tự được chứng minh, chẳng hạn: Với mọi số tự nhiên $k \neq 1$, tồn tại vô số số tự nhiên n để $2^{2^n} + k$ là hợp số, hoặc tồn tại vô số số lẻ $k \neq 1$ để $2^{2^n} + k$ đều là hợp số với mọi $n \geq 1$.

Ngoài ra còn có một kết quả hay sau đây:

ĐỊNH LÝ ERDOS PAL: Có vô số số tự nhiên k sao cho các số $2^n + k$ ($n \geq 1$) đều là hợp số.

Năm 1644, Mersenne lại nghiên cứu các số dạng: $M_n = 2^n - 1$. (sau này gọi là số Mersenne). Về phần này xin xem bài báo "Số nguyên tố Mersenne" của Phan Đức Chính (Báo THTT số 1 năm 1982). Ở đây xin nói thêm một cách tìm số Mersenne hợp số, và các phát minh của nhà toán học xuất sắc Euler:

MỆNH ĐỀ 4: Nếu số Mersenne: $M_p = 2^p - 1$ là số nguyên tố thì: $3^{2^{p-1}} + 1$ chia hết cho M_p .

Năm 1750, khi nghiên cứu sự phân hoạch của các số, Euler đã đưa ra đồng nhất thức (sau này mang tên ông):

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{(3k^2-k)/2}$$

Từ đây Euler đã rút ra một định luật kỳ lạ nhất thuộc về tổng các ước số của nó.

ĐỊNH LÝ EULER: Nếu gọi $\sigma(n)$ là tổng các ước số của n , thì:

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \dots$$

cứ tiếp tục như vậy chừng nào mà số dưới dấu σ còn là số không âm, tuy nhiên nếu có xuất hiện số hạng $\sigma(0)$ thì ta thay nó bằng n .

Trong đó dãy số các hiệu cho n là 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, ... chính là các số mũ theo thứ tự tăng dần của chuỗi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{(3k^2-k)/2}$$

và dấu cộng trừ xen kẽ nhau: hai dấu cộng rồi hai dấu trừ...

Định lý Euler đặc sắc về mấy phương diện và đến bây giờ vẫn còn có giá trị toán học to lớn. Đặc biệt, từ đó Euler đã chứng minh được số $M_{31} = 2^{31} - 1$ là nguyên tố, đây là số nguyên tố lớn nhất thời đó.

Sau này người ta tìm được một công thức tổng quát hơn công thức Euler: Với số k cho trước; đặt:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^k = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

thì với mọi $n \geq 1$ ta có:

$$\sigma(n) = \sum_{m=1}^{n-1} a_m \sigma(n-m) + na_n/k,$$

Đến năm 1883, viện hàn lâm khoa học Peter-sbourg đã nhận được bài báo «số $2^{61} - 1 = 2305.843.009.213.693.951$ là số nguyên tố»; mà tác giả nhà toán học tự học lỗi lạc người Nga: Pervusin. Đáng tiếc là chúng ta biết rất ít về công việc mà Pervusin đã thực hiện ở một tình huống nghiệp hời lánh xa các trung tâm văn-hóa để chứng minh số M_{61} là nguyên tố.

Viện hàn lâm đã từ chối việc công bố số Pervusin vì viện sĩ V. Ya. Bunyakovskii không chịu trách nhiệm đảm bảo không có sai sót trong khi giới thiệu số Pervusin. Mãi đến năm 1887, sau khi Zeelkhov cũng chứng minh M_{61} là số nguyên tố, thì mới có quyết định công bố công trình của Pervusin để bảo đảm quyền ưu tiên cho ông.

Về tính vô hạn của các số nguyên tố Mersenne đến nay vẫn chưa được giải quyết, tuy nhiên ta có một mệnh đề đơn giản:

MỆNH ĐỀ 5: Hai điều khẳng định sau đây là tương đương: + Có hữu hạn số n và $n+1$ có một ước số nguyên tố.

- Số nguyên tố Mersenne và số nguyên tố Ferma là hữu hạn.

Nói chung, những số dạng đặc biệt như số Ferma và số Mersenne rất thuận tiện cho việc thử trên máy tính vì nhờ dạng cực kỳ đơn giản khi viết trong hệ đếm nhị phân. Tuy vậy, việc kiểm nghiệm các số này có là hợp số hay không cũng không phải là đơn giản. Chẳng hạn, năm 1957 máy tính điện tử ở Thụy Điển phải mất 5.5 giờ mới chứng minh được số M_{3217} là nguyên tố và 109 giờ để chứng minh số M_{413} là hợp số, tuy vậy vẫn không tìm ra một ước số nào của nó; cũng như chưa tìm ra một ước số nào của các số Mersenne nhỏ hơn nhiều, dù rằng người ta đã biết từ lâu nó là hợp số, chẳng hạn: $M_{101} = 2^{101} - 1$ có 31 chữ số và $M_{257} = 2^{257} - 1$ có 77 chữ số.

Nhân đây cũng xin nêu ra một mệnh đề có liên quan đến sự biểu diễn các số nguyên tố trong hệ đếm nhị phân, được phát minh ra khi nghiên cứu các số nguyên tố bằng máy tính điện tử.

MỆNH ĐỀ 6: Tồn tại số tự nhiên n sao cho có vô hạn các số nguyên tố có thể viết dưới dạng một dãy nhị phân chứa đúng n chữ số 1 (số các số 0 đứng giữa các số 1, tất nhiên là không hạn chế).

Mặc dù nhờ những phương tiện của lý thuyết số hiện đại, điều khẳng định này vẫn chưa được chứng minh.

(còn tiếp)

Bạn đọc tìm tôi

MỘT CÁCH NHÌN KHÁC « ĐỊNH LÝ HÀM SỐ CÔSIN »

LÊ QUỐC HÂN

Có lẽ không thể liệt kê hết các ứng dụng của định lý hàm số cosin trong việc giải toán.

Tuy nhiên, tôi cũng xin đóng góp một cách nhìn khác về định lý này, và từ đó suy ra thêm những ứng dụng của nó.

1. Từ định lý « Hàm số cosin » chuyển thành định lý « Hàm số cotang ».

Giả sử a, b, c là 3 cạnh của tam giác ABC . Thế thì:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 4 \cdot (1/2) bc \sin A \cos A / \sin A \Rightarrow \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 4S \cotg A, \end{aligned}$$

trong đó S là diện tích tam giác ABC . Tương tự: $b^2 = a^2 + c^2 - 4S \cotg B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 4S \cotg C$.

2. Làm mạnh một bất đẳng thức quen thuộc

Từ các kết quả trên, ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S (\cotg A + \cotg B + \cotg C).$$

Nhưng nếu A, B, C là 3 góc của một tam giác, thì $\cotg A + \cotg B + \cotg C \geq \sqrt{3}$ (hãy chứng minh), nên

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} S. \quad (1)$$

Bất đẳng thức này đối với các bạn không có gì là lạ.

Điều thú vị hơn, là ở chỗ, nếu thêm vào về phải một lượng không âm mới:

$$Q = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

thì ta vẫn có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} S + Q. \quad (2)$$

Thật vậy, khi đó

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - Q &= 2(bc + ca + ab) - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 4S(1/\sin A + 1/\sin B + 1/\sin C) - 4S(\cotg A + \cotg B + \cotg C) \end{aligned}$$

$$= 4S [\tg(A/2) + \tg(B/2) + \tg(C/2)] \geq 4\sqrt{3} S, \text{ bởi vì:}$$

Nếu $A + B + C = \pi$ thì

$$\tg(A/2)\tg(B/2) + \tg(B/2)\tg(C/2) + \tg(C/2)\tg(A/2) = 1.$$

và do đó từ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow$

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \text{ ta có}$$

$$\tg(A/2) + \tg(B/2) + \tg(C/2) \geq \sqrt{3}.$$

So với (1), ta thấy (2) mạnh hơn nhiều.

Đến đây, nảy ra câu hỏi: liệu có biểu thức nào bé hơn $a^2 + b^2 + c^2$ mà vẫn lớn hơn $4\sqrt{3} S$ không? Ta nghĩ ngay đến biểu thức:

$$ab + bc + ca.$$

$$\text{Mặc dù có } ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{nhưng vẫn có: } ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3} S \quad (3)$$

Bạn có thể kiểm tra được điều đó không?

Riêng tôi, tôi xin mách với bạn cách chứng

minh một bất đẳng thức mạnh hơn, mà từ đó suy được ra (3); đó là:

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3} S + P \quad (4)$$

trong đó $P = (1/2) Q \geq 0$.

Thật vậy, ta có $(ab + bc + ca) - P = 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3} S$ (chứng minh trên).

3. Vài ứng dụng khác.

Nhìn vào « định lý hàm số cotang », bạn có thể nghĩ rằng chỉ những bài toán nào có liên quan đến diện tích hay hàm số cotang của các góc trong tam giác mới dùng đến nó. Thật ra không phải hoàn toàn như vậy. Ta lấy bài toán đã từng được chọn làm đề thi toán quốc tế làm ví dụ:

« Cho một tam giác vuông ABC , cạnh huyền a được chia làm n đoạn bằng nhau (n là một số lẻ). Gọi α là góc mà từ điểm A ta nhìn thấy đoạn thẳng (một trong n đoạn bằng nhau nói trên) có chứa điểm giữa của cạnh huyền. Chứng minh rằng: $\tg \alpha = 4nh/(n^2 - 1)a$, trong đó h là đường cao của tam giác.

Đáp án bài này khá dài. Thật ra có thể giải gọn hơn như sau: Gọi đoạn thẳng đó là DE và điểm giữa cạnh huyền là M . Trong tam giác ADE có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 4S_{\triangle ADE} \cotg \alpha$$

$$= 2AM^2 + DE^2/2 - 4(S_{ABC} \cotg \alpha)/n$$

$$\rightarrow \tg \alpha = 1/\cotg \alpha = (4S_{ABC}/n) : (2AM^2 - DE^2/2)$$

$$= (4ah/2n) : (2(a/2)^2 - a^2/2n^2)$$

$$= 4nh/(n^2 - 1)a.$$

Bây giờ, bạn hãy dùng « định lý hàm số cotang » nói trên để giải các bài toán sau:

1) Nếu m_a, m_b, m_c là các trung tuyến của một tam giác có diện tích S và $Q = (m_a - m_b)^2 + (m_b - m_c)^2 + (m_c - m_a)^2$ thì ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3} S + Q.$$

2) Nếu r, r_a, r_b, r_c là bán kính vòng tròn nội tiếp tam giác và bằng tiếp các góc A, B, C của tam giác với chu vi $2P$ thì ta có:

$$r(r_a + r_b + r_c) \geq p\sqrt{3}$$

3) Nếu A_1, B_1, C_1 là hình chiếu từ một điểm M trong tam giác ABC xuống cạnh BC, CA, AB thì ta có:

$$\cotg \widehat{AA_1B} + \cotg \widehat{BB_1C} + \cotg \widehat{CC_1A} = 0.$$