HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

Số 125
3
1982

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN
Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG
Dây nói: 52825

VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CỦA SỐ NGUYÊN TỐ

NGÔ DUY NINH

Các bạn thân mến!

Một hôm nhân đọc bài báo «Một tính chất của số 30» trong số báo 61 (số 7 + 8 năm 1971), tôi mới nảy sinh ý định viết bài này để trao đổi với các bạn một bất đẳng thức về các số nguyên tố.

Trong số báo đã nêu có đề ra bài toán: «Tìm tất cả các số tự nhiên n, sao cho tất cả các số nguyên tố với n và không quá n đều là số nguyên tố». Bài toán này đưa đến chứng minh bất đẳng thức:

$$p_n^2 < p_1 p_2 \cdots p_{n-1} \text{ với } n \geqslant 5 \qquad (1)$$

trong đó p_i là số nguyên tố thứ i.

Tuy nhiên, bất đẳng thức này suy ra dễ dàng từ bất đẳng thức Trêbưsep:

$$p_n < 2p_{n-1} \qquad (2)$$

Nhưng để chứng minh (2) phải dùng đến kiến thức cao cấp trong đó có chuỗi và tích phân xác định). Để giải bài toán đặt ra, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (1). Cuối cùng bài báo có viết:

«Năm 1907, dưới sự hướng dẫn của nhà toán học Đức Mooc-đen, một học sinh đại học là Bông-dơ đã tìm ra cho bất đẳng thức (1) một cách chứng minh hết sức đơn giản, độc đáo, không những không dùng đến công cụ của toán học cao cấp mà Trêbưsep đã dùng, mà thậm chí không dùng đến kiến thức toán học nào vượt ra ngoài kiến thức số học ở lớp 5! Tất nhiên, chứng minh rất đơn giản này cũng phải một vài ba trang giấy. Các bạn yêu số học hãy thử luyện mình qua việc tìm một cách chứng minh ngắn gọn của bất đẳng thức (1)!»

Sau một thời gian suy nghĩ, tìm tòi, có những lúc tưởng như tuyệt vọng, nhưng cuối cùng tôi đã tìm ra một cách chứng minh bất đẳng thức (1), tuy không đơn giản lắm, nhưng cũng không vượt ra ngoài kiến thức của trường phổ thông. Phần còn lại của bài này trình bày cách chứng minh đó.

Trước hết, ta cần một bổ đề quen thuộc mà có lẽ phần chứng minh bạn đều biết:

Bổ đề: Nếu $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ với $p_k \leqslant n \leqslant p_{k+1}$ và p_i là số nguyên tố thứ i, thì ta có:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{\infty} [n/p_i^j].$$

Chú ý rằng $[x] \leqslant x$, nên ta suy ra

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{\infty} [n/p_i^j] < \sum_{j=1}^{\infty} (n/p_i^j) = n/(p_i - 1).$$

Vì vậy, từ bổ đề ta suy ra được một bất đẳng thức

$$n! < \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{1/(p_i-1)} \right)^n \tag{3}$$

Ngoài ra ta lại có bất đẳng thức sau đây:

$$n! > \left(\frac{n+1}{e} \right)^n \tag{4}$$

Trong đó: $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = 2,718281\ldots = e$, là số siêu việt.

Ta dùng phép quy nạp theo n để chứng minh (4). Trước hết chú ý rằng:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > (1 + 1/n)^n.$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $n+1$ số dương, gồm n số $(1 + 1/n)$ và một số 1, ta có

$$\left(\frac{n(1 + 1/n) + 1}{n+1} \right)^{n+1} > (1 + 1/n)^n$$

hay:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > (1 + 1/n)^n \text{ (đpcm).}$$

Vậy, ta suy ra được:

$$e = \lim_{k\to\infty} (1 + 1/k)^k > (1 + 1/n)^n; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Trở lại chứng minh (4).

Rõ ràng (4) đúng với $n = 1$.

Giả sử có: $n! > \left(\frac{n+1}{e} \right)^n$

thì:

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{e} \right)^n (n+1).$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(\frac{n+1}{e} \right)^n (n+1) > \left(\frac{n+2}{e} \right)^{n+1}$$

hay $$e > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Nhưng điều này đúng, như đã chứng minh ở trên, vậy (4) cũng đúng với $n+1$, do đó (4) đúng với mọi số tự nhiên n.

Từ (3) và (4) ta suy ra được:

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{1/(p_i-1)} > (n+1)/e \text{ với } p_k \leqslant n < p_{k+1}.$$

Lấy $n = p_{k+1} - 1$ thì ta được bất đẳng thức:

$$p_{k+1} < e \prod_{i=1}^{k} p_i^{1/(p_i-1)} \tag{5}$$

Ta nhận thấy, từ (5) suy ra được (1) nếu chứng minh được:

$$e^2 \prod_{i=1}^{k} p_i^{2/(p_i-1)} < \prod_{i=1}^{k} p_i \quad (k \geqslant 5).$$

Nhưng điều này đúng, bởi vì:

$$p_i^{2/(p_i-1)} < p_i (i > 2) \text{ và}$$

$$e^2 \prod_{i=1}^{5} p_i^{2/(p_i-1)} < \prod_{i=1}^{5} p_i.$$

Từ (5) ta cũng có thể rút ra một hệ quả khác:

$$p_n < 2^{(n+4)/2}. \tag{6}$$

Thật vậy, rõ ràng (6) đúng với $n < 4$, xét khi $n \geqslant 4$. Khi đó chú ý rằng vì:

$$(1 + 1/n)^n < e < 3 \leqslant n + 1 \quad (n \geqslant 2),$$

nên suy ra:

$$2 > \sqrt{3} > \sqrt[3]{4} > \ldots > \sqrt[n]{n+1} > \ldots$$

do đó:

$$p_4^{1/(p_4-1)} = \sqrt[6]{7} > p_5^{1/(p_5-1)} > \ldots > p_{n-1}^{1/(p_{n-1}-1)}.$$

Vậy, (5) suy ra:

$$p_n < e \prod_{i=1}^{n-1} p_i^{1/(p_i-1)}$$

$$< e.2\sqrt{3}\sqrt[4]{5}(\sqrt[6]{7})^{n-4} < 2^4(\sqrt[6]{7})^{n-4}$$

$$< 2^4(\sqrt{2})^{n-4} = 2^{(n+4)/2} \text{ (đpcm).}$$

Có lẽ bạn sẽ rất khó khăn mới chứng minh được:

$$n! > \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{1/(p_i+1)} \right)^n \text{ với } p_{k+1} > n \geqslant p_k.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$n! < \left(\frac{1+2+\ldots+n}{n} \right)^n = \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

Từ hai bất đẳng thức này ta suy ra:

$$\frac{n+1}{2} > \prod_{i=1}^{k} p_i^{1/(p_i+1)}.$$

Lấy $n = p_{k+1} - 1$ thì được:

$$p_{k+1} > 2 \prod_{i=1}^{k} p_i^{1/(p_i+1)}.$$

Như vậy, ta đã tìm ra một bất đẳng thức kẹp cho một số nguyên tố bất kỳ:

$$e \prod_{i=1}^{k} p_i^{1/(p_i-1)} > p_{k+1} > 2 \prod_{i=1}^{k} p_i^{1/(p_i+1)} \qquad (7)$$

Các bạn thân mến! Bất đẳng thức (7) này khó có thể suy ra từ bất đẳng thức (2) của Trêbư-sep (việc làm này đối với tôi thì đành chịu bó tay). Mong các bạn hãy suy nghĩ, đào sâu thêm cho bất đẳng thức (7), đồng thời tìm ra những ứng dụng hay của nó trong toán học.

VỀ MỘT CÔNG THỨC TỔNG QUÁT

NGUYỄN HOÀNG

TRONG đại số, chúng ta thường gặp biểu thức nguyên:

$$F(n, k) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k \qquad (1)$$

với n và k là những số tự nhiên. Các biểu thức dạng (1) nhiều khi làm cho lời giải của một số bài toán trở nên cồng kềnh và nếu thực hiện các phép toán với n khá lớn thì mất nhiều thời gian, dù có làm trên máy tính điện tử đi nữa. Bởi vậy, người ta đã tìm các biểu thức giải tích khác tương đương, thay thế cho dạng (1). Chẳng hạn, chúng ta đã quen biết các biểu thức với $k = 1, 2, 3, 4$ như sau:

$$\left.\begin{aligned} F(n, 1) &= \frac{n(n+1)}{2} \\ F(n, 2) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ F(n, 3) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ F(n, 4) &= \frac{n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]}{30} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Tuy vậy, việc tìm kiếm các biểu thức dạng (2) không đơn giản. Thông thường, chúng được tìm thấy trong một số bài toán riêng biệt, không có quan hệ trực tiếp với nhau. Còn các biểu thức dạng (2) với $k > 4$ thì vẫn chưa được đề cập rộng rãi trong các sách toán.

Dưới đây, chúng ta sẽ xét một công thức tổng quát mà từ đó cho phép tìm ra tất cả các biểu thức dạng (2) với k là số tự nhiên tùy ý.

Trước hết, ta quy ước $0^0 = 1$ và chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi số tự nhiên n, k:

$$(n+1)^{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} C_{k+1}^{i} \sum_{j=0}^{n} j^{k+1-i} \qquad (3)$$

Thật vậy, từ đẳng thức hiển nhiên:

$$(n+1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \left[(j+1)^{k+1} - j^{k+1}\right] \qquad (4)$$

áp dụng công thức nhị thức Niu-tơn đối với $(j+1)^{k+1}$, ta có:

$$(n+1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^{i} j^{k+1-i} - j^{k+1}\right] \qquad (5)$$

Hay là:

$$(n+1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{i=1}^{k+1} C_{k+1}^{i} j^{k+1-i}\right] \qquad (6)$$

Ở vế phải của (6), chuyển dấu xích-ma từ ngoài vào trong sẽ thu được đẳng thức (3).

Bây giờ, chúng ta sẽ dẫn tới công thức tổng quát mong muốn.

Khai triển vế phải của (3), ta có:

$$(n+1)^{k+1} = C_{k+1}^{1} \sum_{j=0}^{n} j^k + \sum_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^{i} \sum_{j=0}^{n} j^{k+1-i} \qquad (7)$$

Chú ý rằng, $C_{k+1}^{1} = k+1$ và $0^k = 0$, nên (7) có thể viết lại:

$$(k+1) \sum_{j=1}^{n} j^k = (n+1)^{k+1} - \sum_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^{i} \sum_{j=0}^{n} j^{k+1-i}$$

Hay là:

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = F(n, k) =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left\{(n+1)^{k+1} - \sum_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^{i} \sum_{j=0}^{n} j^{k+1-i}\right\} \qquad (8)$$

Đây chính là công thức tổng quát cần tìm. Các bạn có thể kiểm chứng các biểu thức dạng (2) với $k > 4$ được lập ra bởi công thức (8):

$$F(n,\ 5) = \frac{n^2(n+1)^2[2n(n+1)-1]}{12}$$

$$F(n,\ 6) = \frac{n(n+1)(2n+1)[3n^2(n+1)^2 - 3n(n+1)+1]}{42}$$

$$F(n,\ 7) = \frac{n^2(n+1)^2[3n^2(n+1)^2 - 4n(n+1)+2]}{24}$$

v.v...

Tuy nhiên, độc giả cần lưu ý thêm, việc tìm ra các biểu thức dạng (2) nhờ công thức (8) sẽ không đơn giản trong thực hành khi k khá lớn. Vì vậy, có thể dùng các công thức tổng quát dưới đây để xác lập đúng đắn các biểu thức dạng (2) một cách nhanh chóng hơn:

Nếu ký hiệu:

$$f(n,\ l) = \frac{a_{l-1}\, n^{l-1}(n+1)^{l-1} - a_{l-2}\, n^{l-2}(n+1)^{l-2} + \ldots + (-1)^{l+1} a_0}{a_l} \qquad (9)$$

trong đó a_j $(j = 0, 1, \ldots, l)$ là các số nguyên đã tối giản, thì với k chẵn hoặc lẻ sẽ có các công thức tổng quát tương ứng như sau:

$F(n,\ 2l) = n(n+1)(2n+1)f(n,\ l) \quad (k = 2l) \quad$ (10a)

$F(n,\ 2l+1) = n^2(n+1)^2 f(n,\ l) \quad (k = 2l+1) \quad$ (10b)

Khi cần tìm biểu thức dạng (2) cho $F(n,\ k)$ bất kỳ, ta chỉ việc thiết lập l phương trình bậc nhất với $l+1$ ẩn số là a_0, a_1, a_l. Từ hệ phương trình này, ta dễ dàng tìm được l biểu thức biểu diễn l ẩn số qua một ẩn số còn lại. Chỉ việc chọn giá trị nguyên nhỏ nhất cho ẩn số đó sao cho tất cả các ẩn số được biểu diễn qua nó đều nguyên là thu được $f(n,\ l)$ cụ thể. Cuối cùng là việc ghép $f(n,\ l)$ vào (10a) hoặc (10b) tùy theo $k = 2l$ hay $k = 2l+1$. Độc giả có thể kiểm tra lại phương pháp này một cách dễ dàng.

GIẢI BÀI kỳ trước

Bài 1/122. *Học sinh A rất giỏi toán. Có lần thầy giáo đố A đoán hai số nguyên dương, mà thầy đã viết bỏ trong phong bì dán kín, nhưng chỉ cho A biết tổng bình phương hai số ấy. A trả lời: «Em chịu, không đoán được». Thầy giáo cho biết thêm. Hai số ấy có tổng lớn hơn 12» Khi đó A nói: «Em đoán ra rồi» và A đưa ra kết quả đúng!*

Bạn hãy tìm hai số mà thầy giáo đố A, cần giải thích chặt chẽ lập luận của bạn.

Lời giải. Gọi hai số phải tìm là x và y. Lúc đầu thầy giáo cho A biết tổng $S = x^2 + y^2$. Có những số S' phân tích được theo cách duy nhất thành tổng bình phương của hai số tự nhiên, chẳng hạn $S' = 10\ (= 1^2 + 3^2)$, $S' = 25\ (= 3^2 + 4^2)$, v.v... Nếu thầy giáo cho A một số S' như vậy, hẳn A sẽ tìm ra kết quả. Vì vậy, số S đã cho phân tích được ít nhất theo hai cách thành tổng bình phương của hai số tự nhiên.

Nhưng khi thầy giáo cho biết $x + y > 12$ thì A tìm ra kết quả. Điều đó có nghĩa rằng trong các cách phân tích số S thành tổng bình phương hai số tự nhiên, *có đúng một cách* ứng với hai số có tổng lớn hơn 12.

Vì vậy mặc dù chúng ta không biết số S mà thầy giáo đã cho A, nhưng do nhận xét vừa rồi, ta thấy rằng số S cũng là tổng bình phương của hai số tự nhiên a và b, với $a + b \leqslant 12$.

Như vậy một mặt ta có $S = x^2 + y^2$, với x và y là hai số tự nhiên, $x + y \geqslant 13$. Từ đây suy ra

$$S = x^2 + y^2 = (1/2)(x+y)^2 + (1/2)(x-y)^2$$
$$\geqslant (1/2)(x+y)^2 \geqslant 169/2.$$

Vậy $\quad S \geqslant 85.$

Mặt khác ta cũng có $S = a^2 + b^2$, với a và b là hai số tự nhiên, $a + b \leqslant 12$. Do đó

$$S = a^2 + b^2 = (1/2)(a+b)^2 + (1/2)(a-b)^2$$
$$\leqslant 72 + (1/2)(a-b)^2$$

Thành thử

$$(1/2)(a-b)^2 + 72 \geqslant 85$$

Từ đó suy ra (với giả thiết $a > b$)

$$a - b \geqslant 6$$

Cùng với $a + b \leqslant 12$, suy ra $b \leqslant 3$.

Với $b = 1$, từ $a + b \leqslant 12$, $a^2 + b^2 \geqslant 85$, ta thấy chỉ có thể hoặc $a = 10$ hoặc $a = 11$. Nhưng các số $101\ (= 10^2 + 1^2)$, $122\ (= 11^2 + 1^2)$ chỉ phân tích được theo cách duy nhất thành tổng của hai số chính phương.

Với $b = 2$, ta thấy chỉ có thể chọn hoặc $a = 9$, hoặc $a = 10$. Số $85 = 9^2 + 2^2$ còn có cách phân tích $85 = 6^2 + 7^2$, và không còn có cách phân tích khác nữa. Số $104 = 10^2 + 2^2$ không có cách phân tích khác thành tổng của hai số chính phương.

Với $b = 3$, ta thấy chỉ có thể chọn $a = 9$. Nhưng số $90 = 9^2 + 3^2$ không có cách phân tích khác thành tổng của hai số chính phương.

Thành thử hai số phải tìm là 6 và 7.

Bài 2/122. *Cho 2n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$ thỏa mãn các điều kiện*

i) $b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_n$.

ii) với mọi $k = 1, 2, ..., n$, ta có

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 < b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2.$$

Chứng minh rằng:

1) $a_1 + a_2 + ... + a_n < b_1 + b_2 + ... + b_n$;

2) $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j < \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_i b_j$.

Lời giải. 1) Ta chứng minh bằng quy nạp theo k rằng

$a_1 + a_2 + ... + a_k < b_1 + b_2 + ... + b_k \quad (k \leqslant n) \quad (1)$

Quả vậy, với $k = 1$, do $a_1, b_1 > 0$ và $a_1^2 < b_1^2$, nên $a_1 < b_1$.

Giả sử (1) đã đúng cho tới k, ta hãy chứng minh rằng nó cũng đúng cho $k + 1$ $(k + 1 \leqslant n)$. Ta có

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2} < \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2,$$

hay
$$0 < \sum_{i=1}^{k+1} b_i(b_i - a_i) \quad (2)$$

Mặt khác, do giả thiết qui nạp và do giả thiết i), ta có

$0 \leqslant (b_2 - b_1)(b_1 - a_1)$

$0 \leqslant (b_3 - b_2)(b_1 - a_1 + b_2 - a_2)$

. . . .

$0 \leqslant (b_{k+1} - b_k)(b_1 - a_1 + ... + b_k - a_k)$.

Cộng các bất đẳng thức này cùng với (2) thì được

$$0 < b_{k+1}\left[\sum_{i=1}^{k+1}(b_i - a_i)\right]$$

từ đó suy ra

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i < \sum_{i=1}^{k+1} b_i.$$

Nhận xét quan trọng: Nếu ở điều kiện ii), thay các bất đẳng thức ngặt bằng các bất đẳng thức suy rộng

$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 \leqslant b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2 \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$,

thì lập luận trên chứng tỏ rằng ở kết luận 1), ta có

$a_1 + a_2 + ... + a_k \leqslant b_1 + b_2 + ... + b_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$.

2) Đặt $a'_1 = a_1, ..., a'_{n-1} = a_{n-1}$,

và lấy $a'_n > a_n$ sao cho

$$a_1^2 + ... + a_{n-1}^2 + a_n'^2 = a_1'^2 + a_2'^2 + ... + a_n'^2$$
$$= b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2. \quad (3)$$

thì theo nhận xét trên, ta có

$a'_1 + a'_2 + ... + a'_n \leqslant b_1 + b_2 + ... + b_n$.

Hai vế bất đẳng thức đều dương, bình phương hai vế ta được

$$\sum_{i=1}^{n} a_i'^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a'_i a'_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_i b_j$$

Vậy do (3), ta suy ra

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a'_i a'_j \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_i b_j.$$

Nhớ rằng $a'_i = a_i$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$, $a'_n > a_n$, nên

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j < \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_i b_j.$$

P.Đ.C.

Bài 3/122. *Tìm tất cả các số nguyên tố có 3 chữ số sao cho nếu ta thay đổi vị trí của các chữ số theo thứ tự bất kỳ ta vẫn có các số là những số nguyên tố.*

Lời giải (của bạn *Đặng Trường Sơn* – 9 CT, ĐHTH Hà Nội):

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$, theo đầu bài $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$ đều là các số nguyên tố.

Ta nhận thấy rằng a, b, c phải đồng thời lẻ và không có số nào chia hết cho 5. Do đó a, b, c chỉ có thể là một trong các số 1, 3, 7, 9.

Hơn nữa ta thấy không thể $a = b = c$ vì nếu trái lại thì $\overline{abc} \vdots 3$. Do đó bộ 3 số (a, b, c) chỉ có thể là:

(1, 1, 3); (1, 1, 7); (1, 1, 9); (3, 3, 1); (3, 3, 7); (3, 3, 9); (7, 7, 1); (7, 7, 3); (7, 7, 9); (9, 9, 1); (9, 9, 3); (9, 9, 7); (1, 3, 7); (1, 3, 9); (1, 7, 9); (3, 7, 9);

Bằng phép thử trực tiếp (sử dụng các điều kiện chia hết cho 3, 7 và 11) Ta có:

$117 \vdots 3$; $119 \vdots 7$; $133 \vdots 7$; $339 \vdots 3$; $177 \vdots 3$; $377 \vdots 13$; $779 \vdots 19$; $993 \vdots 3$; $799 \vdots 17$; $371 \vdots 7$; $319 \vdots 11$; $791 \vdots 7$ và $793 \vdots 13$.

Còn các bộ số (1, 1, 3); (3, 3, 7); (9, 9, 1) là thỏa mãn bài ra: hoán vị các chữ số ta sẽ có các số nguyên tố khác nhau.

Ví dụ: Đối với (1, 1, 3), ta có các số: 113, 131, 311.

Bài 4/122. *Hãy tìm các bộ ba số nguyên a, b, c sao cho hệ phương trình*

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 & (1) \\ bx^2 + cx + a = 26 & (2) \\ cx^2 + ax + b = -26 & (3) \end{cases}$$

có nghiệm nguyên.

Lời giải :

Cộng vế với vế của cả 3 phương trình (1), (2) (3) ta được:

$$(a + b + c)(x^2 + x + 1) = 0$$

Nhưng do $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4 > 0$ với mọi x nên ta suy ra $a + b + c = 0$ (*). Khi ấy rõ ràng (1) có hai nghiệm là 1 và c/a. Nhưng 1 không phải là nghiệm của hệ vì không thỏa mãn (2) và (3). Vậy để hệ có nghiệm nguyên thì c/a phải là nghiệm nguyên của hệ. Thay $x = c/a$ vào (2) ta có:

$b(c/a)^2 + c(c/a) + a = 26$. Kết hợp với $a + b + c = 0$, ta được:

$$a^3 - 26a^2 = c^3 \qquad (4).$$

Do $c = ax$ nên $c^3 = a^3x^3$, thay vào (4) ta được $a^3 - 26a^2 = a^3x^3 \Leftrightarrow a^3(1 - x^3)$

$$= 26a^2 \to a = 26/(1 - x^3) \qquad (5)$$

Vì a và x là nguyên nên $26 \vdots 1 - x^3$. Vậy

$1 - x^3 \in \{-1; 1; -2; 2; -13; 13; -26; 26\}$. Vậy x^3 chỉ có thể nhận các giá trị $0, -1, 27 \Leftrightarrow x$ nhận các giá trị nguyên là $-1, 0, 3$. Thay giá trị của x vào (5), và $x = c/a$, và kết hợp với điều kiện (*) ta nhận được các bộ (a, b, c) tương ứng với giá trị của x là $(13, 0, -13)$; $(26, -26, 0)$ $(-1, 4, -3)$. Thay các giá trị tương ứng của a, b, c tìm được vào hệ ta thấy thỏa mãn,

Vậy các bộ 3 số nguyên (a, b, c) thỏa mãn yêu cầu đầu bài là $(13, 0, -13)$; $26, -26, 0)$ và $(-1, 4, -3)$.

L.T.H.

Bài 5/122. *Lấy 9 chữ số 1, 2,..., 9 viết thành bốn số có 2 hoặc 3 chữ số sao cho chúng lập thành các cặp số có tích bằng nhau:*

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{xyz} \times \overline{uv} \qquad (*)$$

Cho biết cách viết ứng với giá trị của tích ở mỗi vế của (*) lớn nhất là

$$98 \times 76 = 532 \times 14 \ (= 7448)$$

Hãy tìm tất cả các cách viết ứng với giá trị của tích có chữ số hàng đơn vị là 6.

Lời giải. Để chữ số hàng đơn vị của tích bằng 6 thì (b, d) cũng như (z, v) mỗi cặp phải nhận một trong các cặp giá trị sau: (1, 6), (2, 3), (2, 8) (4, 9), (7, 8).

Ta xét tất cả các trường hợp ứng với giá trị của (b, d) và (z, v):

1) (1, 6) và (2, 3)
2) (1, 6) và (2, 8)
3) (1, 6) và (4, 9)
4) (1, 6) và (7, 8)
5) (2, 3) và (4, 9)
6) (2, 3) và (7, 8)
7) (2, 8) và (4, 9)
8) (4, 9) và (7, 8)

— Trường hợp thứ nhất không thể có vì khi đó

$$\overline{xyz} \times \overline{uv} \geqslant \min(\overline{4yz} \times \overline{5v}, \overline{5yz} \times \overline{4v}) > 7448 \text{ (tích lớn nhất).}$$

— Trường hợp thứ hai không thể có vì khi đó

$$\overline{xyz} \times \overline{uv} \geqslant \min(\overline{3yz} \times \overline{4v}, \overline{4yz} \times \overline{3v}) > 7448$$

— Trường hợp thứ ba không thể có vì khi đó

$$\overline{xyz} \times \overline{uv} \geqslant \min(356 \times 21, 351 \times 26, 256 \times 31, 251 \times 36) > 7448.$$

— Chứng minh tương tự, sẽ thấy trường hợp thứ tư không thể có.

— Xét trường hợp (b, d), (z, v) nhận các cặp giá trị (2, 3), (4, 9).

Vì $\overline{16z} \times \overline{5v}$, $\overline{15z} \times \overline{6v}$, $\overline{65z} \times \overline{1v}$ đều lớn hơn 7448, nên chỉ có thể $x = 5$, $u = 1$, $y = 6$. Thử trực tiếp ta thấy (*) không thỏa mãn.

— Trường hợp (b, d), (z, v) nhận các cặp giá trị (2, 3), (7, 8). (a, c) phải nhận cặp (9, 6), vì nếu nhận cặp nhỏ hơn thì

$$\overline{ab} \times \overline{cd} < 6.000$$

mà $\overline{xyz} \times \overline{4v} \geqslant \min(152 \times 43, 153 \times 42) > 6.000$. x phải bằng 1, vì nếu không thì

$$\overline{xyz} \times \overline{uv} > 7448.$$

Còn lại (y, u) nhận cặp (5, 4).

Các trường hợp có thể của $\overline{ab} \times \overline{cd}$ là

$92 \times 63 = 5796$, $93 \times 62 = 5766$

$97 \times 68 = 6596$, $98 \times 67 = 6566$

Các trường hợp có thể của $\overline{xyz} \times \overline{uv}$ là

$158 \times 47 = 7356$, $152 \times 43 = 6533$,

$153 \times 42 = 6426$, $143 \times 52 = 7436$.

Như vậy không có trường hợp nào thỏa mãn $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{xyz} \times \overline{uv}$.

— Trường hợp (b, d), (z, v) nhận các cặp giá trị (2, 8), (4, 9).

Tương tự trường hợp trên, chứng minh được (a, c) nhận cặp (6, 7), $x = 1$ (y, u) nhận cặp (5, 3). Phép thử trực tiếp cho ta nghiệm:

$$64 \times 79 = 158 \times 32 \ (= 5056).$$

— Trường hợp (b, d), (z, v) nhận các cặp giá trị (4, 9), (7, 8). Dễ chứng minh được (a, c) nhận cặp (5, 6), $x = 1$, (y, v) nhận cặp (3, 2). Phép thử trực tiếp cho ta hai nghiệm:

$$54 \times 69 = 138 \times 27 \quad (= 3726);$$

$$58 \times 67 = 134 \times 29 \quad (= 3886).$$

Tóm lại có ba cách viết để tích mỗi vế đẳng thức (*) có chữ số hàng đơn vị bằng 6.

Nhận xét: Các bạn *Phạm Thanh Phương* và *Đỗ Quang Đại, Trần Thanh Trúc, Bùi Hoàng Quân* (chuyên toán ĐHSP I Hà Nội); *Lương Anh Tuấn* 11 P2 Võ Thị Sáu, HCM); *Tô Thành Tuấn* (7A 4 – 279, HCM); *Nguyễn Anh Tuấn A* (1) Thăng Long, Hà Nội) có lời giải tương đối tốt.

Bài 6/112. *Trên đường tròn đường kính AB ta lấy hai điểm M và N phân biệt. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của M và N trên AN và AM. Chứng minh $EF \perp AB$.*

Lời giải. Ta loại trừ các trường hợp làm cho đầu bài toán vô nghĩa; đó là trường hợp M hoặc N trùng với A và trường hợp góc MAN bằng 90°. Nếu M hoặc N trùng với B thì kết quả là hiển nhiên, nên ta giả sử M và N không trùng với B.

Sau khi vẽ hình, các bạn dễ chứng minh được bốn điểm M, N, E, F nằm trên cùng một đường tròn. Từ đó có

$$\widehat{AFE} = \widehat{ANM}$$

Mặt khác

$$\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$$

vì cùng chắn cung AM của đường tròn cho trước. Vậy:

$$\widehat{AFE} = \widehat{ABM}$$

Vì $AF \perp BM$, nên suy ra $EF \perp AB$ (đpcm).

Nhận xét: Nếu trình bày chứng minh chi tiết thì phải xét ba trường hợp, trong mỗi trường hợp hình vẽ có đặc thù riêng; đó là các trường hợp:

– M và N cùng phía với nhau đối với AB,

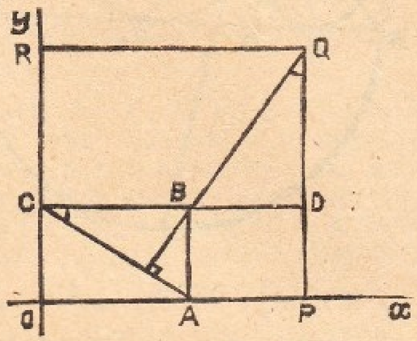
– M và N khác phía nhau đối với AB và $\widehat{MAN} < 90°$,

– $\widehat{MAN} > 90°$.

Nhiều bạn trình bày chứng minh chi tiết, nhưng xét thiếu trường hợp; hoặc chỉ vẽ ngẫu nhiên vị trí của M và N rồi chứng minh, song ngôn ngữ của chứng minh không phù hợp với hình vẽ trong trường hợp khác.

Bạn *Võ Đại Hoài Đức* (9A1 Hà Huy Tập, quận Bình Thạnh, thành phố Hồ Chí Minh) có lời giải hoàn chỉnh.

Bài 7/122. *Cho góc $\widehat{xOy} = 90°$. Một hình chữ nhật OABC có chu vi không đổi, thay đổi sao cho các cạnh OA, OC của nó luôn nằm trên các tia Ox và Oy. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải. Dựng hình vuông $OPQR$ có cạnh bằng nửa chu vi (không đổi) của hình chữ nhật $OABC$ và có P, R nằm tương ứng trên Ox, Oy. Ta chứng minh đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC luôn đi qua Q, tức là chứng minh $BQ \perp AC$. Thật vậy, giả sử CB cắt PQ ở D, ta dễ dàng chứng minh được hai tam giác BDQ và ABC bằng nhau. Vậy ta có

$$\widehat{BQD} = \widehat{ACB}$$

Vì $QD \perp CB$ nên $BQ \perp AC$ (đpcm).

P.Q.G.

Bài 8/122. *Một điểm C chuyển động trên đường tròn đường kính AB. Kẻ $CD \perp AB$. Gọi (v_1) là đường tròn tiếp xúc với DA, CD và cung AC, (v_2) là đường tròn tiếp xúc với DB, CD và cung CB. Các đường tròn (v_1), (v_2) tiếp xúc với AB tại E_1, E_2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CE_1E_2. Chứng minh rằng CI luôn luôn đi qua 1 điểm cố định.*

Lời giải (của *Đặng Trường Sơn* – ĐHTH Hà Nội):

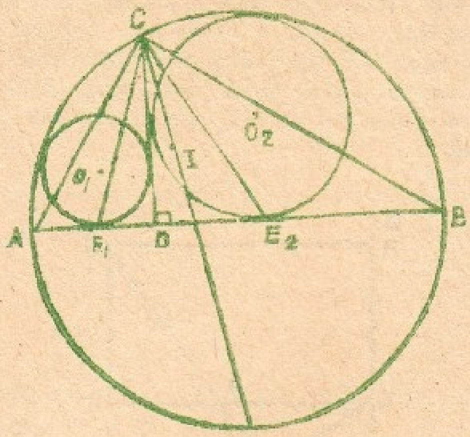
Ta sẽ chứng minh CI là phân giác của góc ACB, từ đó sẽ suy ra CI đi qua điểm cố định F là điểm giữa cung AB khác phía với C.

Gọi O_1, r_1; O_2, O_2 và O, R tương ứng là các cặp tâm và bán kính của (v_1), (v_2) và đường tròn có đường kính AB. Ta có:

$$OO_2^2 = OE_2^2 + O_2E_2^2$$

tức $$(R - r_2)^2 = (AD + r_2 - R)^2 + r_2^2$$

Hay $$(AD + r_2)^2 = 2R.AD.$$



Vậy ta có: $AE_2^2 = AB.AD = AC^2 \Rightarrow$ Tam giác AE_2C cân $\Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{DCE_2} = \widehat{AE_2C} = \widehat{EB_2C} + \widehat{E_2CB}$.

Nhưng $\widehat{ACD} = \widehat{E_2BC}$ nên $\widehat{DCE_2} = \widehat{E_2CB}$ hay

$$\widehat{E_2CB} = \widehat{BCD}/2 = \widehat{A}/2 \qquad (1)$$

Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh $\widehat{ACE_1} = \widehat{E_1CD}$ hay

$$\widehat{ACE_1} = \widehat{B}/2 \qquad (2)$$

Ta có: $$\widehat{ICA} = \widehat{ACE_1} + \widehat{E_1CI} \qquad (3)$$

Nhưng $\widehat{E_1CI} = 90^\circ - \widehat{CIE_1}/2 = 90^\circ - \widehat{CE_2E_1} =$

$$= 90^\circ - (\widehat{E_2CB} + \widehat{B})$$

Do (1), $$\widehat{E_1CI} = 90^\circ - (\widehat{A}/2 + \widehat{B}) \qquad (4)$$

Do (2) và (4) nên (3) cho ta

$$\widehat{ICA} = \widehat{B}/2 + 90^\circ - (\widehat{A}/2 + \widehat{B}) = 90^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})/2 = 45^\circ$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

L.T.H.

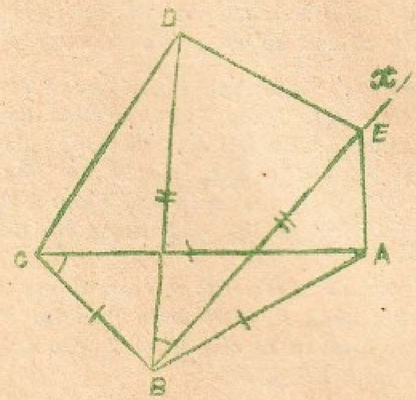
Bài 9/122 *Cho tam giác ABC. D là một điểm bất kỳ nằm ngoài mặt phẳng của tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

1) Từ ba đoạn thẳng DA, DB, DC có thể dựng được một tam giác (T) nào đó.

2) Hai tam giác (T) và (T') có diện tích bằng nhau, trong đó (T') đóng vai trò của tam giác (T) ứng với điểm D', đối xứng với điểm D qua tâm O của tam giác đều ABC.

Lời giải

1) *Cách 1.* Qua đỉnh B ta dựng tia Bx sao cho $\widehat{DBx} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ và $\widehat{ABx} = \widehat{DBC}$. Điều này bao giờ cũng có thể thực hiện được bởi vì với tia đó ta sẽ có góc tam diện $B(DAx)$ bằng góc tam diện $B(ADC)$. (Dễ thấy rằng quay góc 180° xung quanh đường phân giác Bp của góc $\widehat{ABD}$ thì góc tam diện $B(DAx)$ sẽ đến trùng với góc tam diện $B(ADC)$.



Sau đó trên tia Bx ta lấy điểm E sao cho $BE = BD$: thế thì BDE là một tam giác đều và do đó: $DE = DB$, đồng thời ta được $\triangle BAE = \triangle BCD$ (cgc) và do đó: $EA = DC$. Tam giác DAE là tam giác (T) cần tìm, có ba cạnh bằng DA, DB, DC. Cách giải này là của *Bùi Hoàng Quân* — Lớp 11CT ĐHSP Hà Nội 1.

Sau đây là hai cách giải khác.

Cách 2 (*Đặng Trường Sơn* — 11CT ĐHTH Hà Nội):

Trên các tia $[DA)$, $[DB)$ và $[DC)$ ta lấy các điểm A', B' và C' sao cho: $DA.DA' = DB.DB' = DC.DC' = 1$. Dễ thấy rằng các cặp tam giác sau đây là đồng dạng: DBC, $DC'B'$; DCA, $DA'C'$; và DAB, $DB'A'$. Từ đó suy ra:

$$B'C' = \frac{BC}{DB.DC} = \frac{BC.DA}{DA.DB.DC},$$

$$C'A' = \frac{CA.DB}{DA.DB.DC} \quad \text{và} \quad A'B' = \frac{AB.DC}{DA.DB.DC}$$

Do đó ta được:

$$DA/B'C' = DB/C'A' = DC/A'B'.$$

Các hệ thức này chứng tỏ rằng các cạnh $B'C'$, $C'A'$ và $A'B'$ của tam giác $A'B'C'$ tỉ lệ với DA, DB, DC và như vậy thì từ ba đoạn thẳng DA, DB, DC ta luôn luôn dựng được một tam giác (T) nào đó, đồng dạng với tam giác $A'B'C'$.

Cách 3. Chiếu vuông góc điểm D lên mặt phẳng của tam giác đều ABC: $DP \perp (ABC)$. Trong mặt phẳng của tam giác đều ABC, dễ dàng chứng minh được rằng từ ba đoạn thẳng PA, PB, PC luôn luôn dựng được một tam giác (chẳng hạn, sử dụng phép quay góc 60° xung quanh điểm B, biến tam giác BCP thành tam giác BAQ;

thế thì $PQ = PB$, $QA = PC$ và PAQ là tam giác có các cạnh bằng PA, PB, PC). Sau đó, chỉ việc áp dụng định lý Pi-ta-go vào các tam giác vuông PDA, PDB và PDC ta có ngay đ.p.c.m (mỗi đoạn thẳng DA, DB, DC có độ dài nhỏ hơn tổng các độ dài của hai đoạn kia).

2) Gọi D' là điểm đối xứng của điểm D qua tâm O của tam giác đều ABC và đặt: $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$; $D'A = a'$, $D'B = b'$, $D'C = c'$.

Áp dụng định lý (thứ nhất) về đường trung tuyến vào các tam giác DAA', DBB' và DCC', ta có ngay các hệ thức sau: (i) $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 (= 2OD^2 + 2R^2)$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC). Mặt khác, gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua tâm O của tam giác đều ABC; thế thì A' cũng là đối xứng của O qua cạnh BC. Áp dụng định lý về đường trung tuyến vào ba tam giác DAA', DBC và DOA', sau khi tính toán và rút gọn ta được hệ thức:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(OD^2 + R^2).$$

Cũng có thể suy ra hệ thức trên nhanh chóng hơn bằng cách tính

$$a^2 + b^2 + c^2 = \overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2.$$

$$\overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 = 3\overrightarrow{DO}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 +$$

$$+ 2\overrightarrow{DO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(DO^2 + R^2),\ \text{vì}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}.$$

Cũng tính tương tự như trên, ta được kết quả (ii) $a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2$ $(= 3OD^2 + 3R^2)$.

Từ các hệ thức (i) và (ii), dễ dàng suy ra các hệ thức sau:

$$a^4 + b^4 + c^4 = a'^4 + b'^4 + c'^4$$

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = b'^2c'^2 + c'^2a'^2 + a'^2b'^2.$$

Từ đó suy ra:

$$(b^2 + c^2 - a^2)a^2 + (c^2 + a^2 - b^2)b^2 + (a^2 + b^2 - c^2)c^2 =$$

$$= (b'^2 + c'^2 - a'^2)a'^2 + (c'^2 + a'^2 - b'^2)b'^2 +$$

$$(a'^2 + b'^2 - c'^2)c'^2.$$

Hay là, viết cho gọn hơn thì như sau:

(iii) $\Sigma (b^2 + c^2 - a^2)a^2 = \Sigma (b'^2 + c'^2 - a'^2)a'^2$.

Vế trái và vế phải hệ thức (iii) này theo thứ tự biểu thị $16S^2$ và $16S'^2$ trong đó S, S' là diện tích của các tam giác (T) và (T') (tương ứng với các điểm D và D' đối xứng nhau qua O của tam giác đều ABC). Vậy $S = S'$ (đ.p.c.m).

N.Đ.P.

Bài 10/122. *Chứng minh rằng từ C_{2n}^{n} người tùy ý bao giờ ta cũng có thể chọn ra được $n+1$ người hoặc đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau.*

(Trong đề bài in trong số báo 122, có đề bài in C_{2n}^{n} thành C_{2}^{n}; có thể là do rụng chữ trong khi in. Vậy bài này không tính làm bài thi giải toán).

Lời giải. Với a, b là hai số tự nhiên lớn hơn 1 tùy ý, ta đặt $N(a, b)$ là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho từ $N(a, b)$ người tùy ý bao giờ cũng có thể chọn được hoặc a người đôi một quen biết nhau, hoặc b người đôi một không quen biết nhau. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$N(a, b) \leqslant N(a-1, b) + N(a, b-1) \qquad (1)$$

với a, b là hai số tự nhiên lớn hơn 2.

Muốn vậy ta chứng minh: từ một tập hợp S gồm $N(a-1, b) + N(a, b-1)$ người tùy ý bao giờ cũng chọn được hoặc a người đôi một quen biết nhau, hoặc b người đôi một không quen biết nhau. Ta chọn một người A bất kỳ trong tập hợp S và chia số người còn lại thành hai nhóm:

$$S_A = \{x \in S,\ x \text{ quen biết } A\},$$

$$\overline{S}_A = \{x \in S,\ x \text{ không quen } A\}.$$

Vì $|S_A| + |\overline{S}_A| = N(a-1, b) + N(a, b-1) - 1$, nên: hoặc $|S_A| \geqslant N(a-1, b)$, hoặc $|\overline{S}| \geqslant N(a, b-1)$.

a) Nếu $|S_A| \geqslant N(a-1, b)$ thì trong nhóm S_A hoặc tìm được b người đôi một không quen biết nhau, hoặc tìm được $a-1$ người đôi một quen biết nhau; trong trường hợp thứ hai ta bổ xung A vào nhóm $a-1$ người quen biết nhau trong S_A sẽ được a người quen biết nhau trong S.

b) Nếu $|\overline{S}_A \geqslant N(a, b-1)$ thì trong nhóm $\overline{S}_A$ hoặc tìm được a người đôi một quen biết nhau, hoặc tìm được $b-1$ người đôi một không quen biết nhau; trong trường hợp thứ hai ta bổ sung A vào nhóm $b-1$ người không quen biết nhau trong $\overline{S}_A$ sẽ được b người không quen biết nhau trong S.

Bất đẳng thức (1) được chứng minh xong.

Bây giờ ta chứng minh:

$$N(a, b) \leqslant C_{a+b-2}^{a-1} \qquad (2)$$

Ta chứng minh (2) bằng qui nạp theo tổng $a + b$.

Trước hết ta có nhận xét:

$$N(2,\ b) = b, \quad C_b^1 = b;$$

$$N(a,\ 2) = a, \quad C_a^{a-1} = a.$$

Như vậy có thể viết:

$$N(2,\ b) \leqslant C_b^1$$

$$N(a,\ 2) \leqslant C_a^{a-1}$$

tức là bất đẳng thức (2) đúng với mọi a, b mà một trong hai số đó bằng 2.

Từ nhận xét trên ta có ngay với $a + b = 4$ và $a + b = 5$ thì (2) luôn đúng.

Bây giờ giả sử bất đẳng thức (2) đã đúng với mọi a, b mà $a + b = k - 1$, ta chứng minh (2) cũng đúng với mọi a, b mà $a + b = k$.

Thật vậy, với a và b là hai số tự nhiên mà $a + b = k$ và $a, b \geqslant 3$ thì ta đã có bất đẳng thức (1):

$$N(a,\ b) \leqslant N(a-1, b) + N(a, b-1).$$

Theo giả thiết qui nạp ta có

$$N(a-1, b) \leqslant C_{a+b-3}^{a-2}$$

$$N(a, b-1) \leqslant C_{a+b-3}^{a-1}$$

$$\Rightarrow N(a,\ b) \leqslant C_{a+b-3}^{a-2} + C_{a+b-3}^{a-1}$$

$$= C_{a+b-2}^{a-1}$$

tức là (2) đúng với a, $b \geqslant 3$ và $a + b = k$. Với $a = 2$ hoặc $b = 2$ thì (2) đúng như đã nhận xét ở trên. Vậy (2) đúng với mọi a, b mà $a + b = k$.

Bài toán của ta là trường hợp đặc biệt khi $a = b = n + 1$, khi đó (2) cho ta

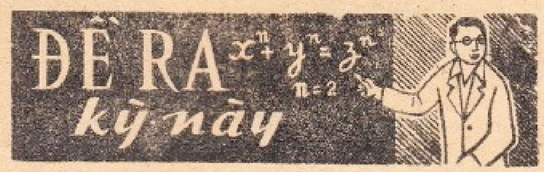
$$N(n+1,\ n+1) \leqslant C_{2n}^{n}.$$

Vì từ $N(n+1, n+1)$ người tùy ý bao giờ cũng chọn ra được $n + 1$ người hoặc đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau, nên với một tập hợp tùy ý số người không ít hơn, $N(n+1, n+1)$ gồm C_{2n}^{n} người, cũng phải chọn ra được ít nhất $n + 1$ người hoặc đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau.

P.Q.G.

DANH SÁCH HỌC SINH GỬI LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN RA TRONG SỐ BÁO 122

Vĩnh Phú: *Lê Chiêu Dương*, *Nguyễn Phúc Sĩ* (10D, Hùng Vương). **Hà Bắc**: *Nguyễn Quốc Thắng* (12T, Ngô Sĩ Liên). **Quảng Ninh**: *Phạm Khương* (11CT Hồng Gai). **Hà Nội**: *Trương Thế Hùng* (7A, Bế Văn Đàn); *Nguyễn Thanh Hà* (8G, Trưng Vương); *Trần Minh Đức*, *Hồ Tiến Đạt* (10A, Chu Văn An); *Trần Mạnh Cường* (10A, Đan Phượng); *Nguyễn Thị Hoa Hồng* (10B, Việt Đức); *Nguyễn Anh Tuấn A* (11H, Thăng Long). **Hà Sơn Bình**: *Phạm Ngọc Cơ* (10A, Mai Châu); *Nguyễn Hoài Anh*, *Đào Anh Bình* (11E, Nguyễn Huệ). **Hải Phòng**: *Nguyễn Thi Sơn* (10CT, Thái Phiên); *Phạm Quang Thủy* (11B, Ngô Quyền). **Thái Bình**: *Đoàn Tuấn Minh* (12CT, Nguyễn Trãi, Vũ Thư). **Thanh Hóa**: *Nguyễn Toàn Quyền* (12T, Hàm Rồng). **Quảng Nam – Đà Nẵng**: *Nguyễn Thanh Dương* (11/1, Phan Châu Trinh); *Quốc Hưng* (12B, Thái Phiên). **Nghĩa Bình**: *Nguyễn Hoành Cường* (10B, Trưng Vương); *Trần Kỳ Phúc* (11A, Quang Trung, Qui Nhơn); *Phạm Văn Khuyến*, *Đặng Vĩnh Hưng* (11I, Quang Trung); *Diễm Thúy* (12C, Quang Trung). **Gia Lai – Kon Tum**: *Đỗ Hữu Tiến* (10A, Pleiku 1). **Phú Khánh**: *Thẩu Trọng Hội* ($11P_4$, Nha Trang). **Đồng Nai**: *Nguyễn Ngọc Thiện* (10B, Tân Phú). **Sông Bé**: *Tạ Văn Tín* (11A, Dĩ An, Thuận An). **Thành phố Hồ Chí Minh**: *Võ Đại Hoài Đức* (9A1, Hà Huy Tập); *Nguyễn Quốc Lân* (10A2, Trưng Vương); *Lương Anh Tuấn* (11P2, Võ Thị Sáu). **Tiền Giang**: *Phạm Tấn Quyền* (11, Trương Định, Gò Công). **Bến Tre**: *Nguyễn Văn Kiểm* (11A Mỏ Cày) **Hậu Giang**: *Nguyễn Thanh Quang* (11P1, Hoàng Diệu, Sóc Trăng). **Đại học Tổng hợp Hà Nội**: *Đặng Trường Sơn* (lớp 11 chuyên toán). **Đại học Sư phạm Hà Nội 1**: *Phạm Thanh Phương* và *Đỗ Quang Đạt* (lớp 10 chuyên toán); *Bùi Hoàng Quân*, *Trần Tuấn Hiệp*, *Trần Thanh Trúc* (lớp 11 chuyên toán). Hai bạn để địa chỉ không đủ: *Lê Nguyên Hòa* (11C, Tư Nghĩa); *Lê Văn Thanh* (12, Núi Thành, An Tân).



Bài 1/125. Cho số nguyên dương m có dạng phân tích tiêu chuẩn là $m = p^{\alpha} q^{\beta}$ (p và q là số nguyên tố, α và β là số nguyên dương). Biết rằng số m^2 có tất cả 15 ước số (kể cả số 1 và chính m^2). Tính xem số m^{1982} có bao nhiêu ước số? Có tồn tại hay không số k để m^k có 1980 ước số?

Bùi Hưng (ĐHSP Hà Nội 2)

Bài 2/125. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 - 2y^2 = 5$$

không có nghiệm (x, y) nguyên.

Phan Đức Chính

Bài 3/125. Chứng minh rằng với mọi số thực a và b, ta có

$$2(1+a^2)(1+b^2) \geqslant (|a+b| + |a-b|)(|1+ab| + |1-ab|).$$

Trong trường hợp nào thì xảy ra dấu đẳng thức?

Phan Đức Chính

Bài 4/125. a) Chứng minh rằng nếu ba số nguyên tố lớn hơn 3 lập thành một cấp số cộng thì công sai chia hết cho 6.

b) Tìm 9 số nguyên tố bé hơn 1982 lập thành một cấp số cộng.

Đào Trường Giang (Vĩnh Phú)

Bài 5/125. Dựng tứ giác $ABCD$, biết bốn điểm A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là các điểm đối xứng của A qua B, của B qua C, của C qua D, của D qua A.

Bùi Hưng

Bài 6/125. Dựng tam giác ABC, cho biết $BC = a$, góc A và chiều dài d của phân giác trong góc A.

Ngô Duy Ninh (sưu tầm)

Bài 7/125. Cho một đường tròn tâm O có đường kính $AC = 2R$. Hai điểm B và D di chuyển trên hai nửa đường tròn đó thỏa mãn điều kiện $AB = BD$. Chứng minh rằng có vị trí của B và D để cho diện tích của tứ giác $ABCD$ lớn hơn $\sqrt{3}\,R^2$.

Phạm Quang Giám

Bài 8/125. Cho tứ diện đều $ABCD$. Từ một điểm M trên mặt BCD ta dựng các đường vuông góc MH, MK, ML với các mặt còn lại của tứ diện (H, K, L nằm trên các mặt của tứ diện). Chứng minh rằng thể tích hình chóp $M.HKL$ nhỏ hơn 1/45 thể tích tứ diện đã cho.

Phạm Quang Giám

Bài 9/125. Mặt phẳng đi qua một cạnh và chia đôi cạnh đối diện của một tứ diện được gọi là mặt trung diện (đi qua cạnh đó) của tứ diện. Mặt phẳng đối xứng với mặt trung diện đối với mặt phân giác trong của nhị diện phát xuất từ cùng một cạnh của một tứ diện được gọi là mặt đối trung (đi qua cạnh đó) của tứ diện.

Chứng minh rằng sáu mặt đối trung của một tứ diện đồng qui tại một điểm.

Tổng quát hóa.

Nguyễn Đăng Phất

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 10/125. Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y} + 2.$$

Trần Nam Dũng và *Phan Trung Đông*

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN ĐỨC THUẦN

TRONG khi học bất đẳng thức ở trường phổ thông, ta gặp bài tập chứng minh bất đẳng thức sau đây:

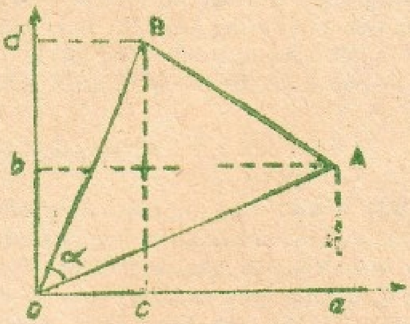
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2 \qquad (1)$$

(trong đó a, b, c và d là những số thực tùy ý).

Đó là bài tập mà nhiều bạn giải được dễ dàng. Đi từ vế thứ nhất, ta có:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$
$$= (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2.$$

Vì bình phương $(bc-ad)^2$ không âm, nên nếu bỏ đi, thì từ đẳng thức trên, ta có bất đẳng thức (1). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $bc-ad=0$, nghĩa là hai cặp số (a, b) và (c, d) là tỉ lệ với nhau. Nếu $c\neq 0$ và $d\neq 0$ thì $a/c=b/d$.



Sau đây là chứng minh hình học của (1). Trên hình vẽ, độ dài của các đoạn thẳng OA, OB và AB được xác định bởi các đẳng thức sau:

$$OA=(a^2+b^2)^{1/2},\ OB=(c^2+d^2)^{1/2}$$

$$AB=[(a-c)^2+(b-d)^2]^{1/2}$$

Ta ký hiệu góc giữa OA và OB là α.

Theo định lý cosin, ta có:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA.OB\cos\alpha.$$

Sau khi thay các giá trị của OA, OB, AB và rút gọn, ta được:

$$\cos\alpha=\frac{ac+bd}{(a^2+b^2)^{1/2}\times(c^2+d^2)^{1/2}}$$

Vì $|\cos\alpha|\leqslant 1$ nên ta có $0\leqslant\cos^2\alpha\leqslant 1$. Bình phương cả hai vế đẳng thức trên, ta được

$$\cos^2\alpha=\frac{(ac+bd)^2}{(a^2+a^2)(c^2+d^2)}\leqslant 1$$

và cuối cùng: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\cos^2\alpha=1$, tức là khi và chỉ khi $\alpha=0$ hoặc $\alpha=\pi$, nói cách khác khi và chỉ khi các điểm O, A và B thẳng hàng. Do đó, cần phải xảy ra sự bằng nhau giữa các độ dốc của các đường thẳng OA và OB, nếu $c\neq 0$ và $d\neq 0$ thì ta có: $a/c=b/d$.

Căn cứ vào sự giải thích hình học trong không gian *hai chiều*, nhiều người gọi (1) là *dạng hai chiều của bất đẳng thức Côsi*. Ta có thể chuyển sang không gian thông thường hay là không gian ba chiều và ta cũng có *dạng ba chiều của bất đẳng thức Côsi*. Giả sử $P(a_1, a_2, a_3)$ và $Q(b_1, b_2, b_3)$ là 2 điểm không trùng với gốc tọa độ $O(o, o, o)$. Khi đó cosin của góc giữa các đường thẳng OP và OQ sẽ được xác định bởi đẳng thức:

$$\cos\alpha=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^{1/2}\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)^{1/2}}.$$

Đẳng thức trên được rút ra do tả vận dụng biểu thức độ dài đường chéo của hình hộp đứng qua các cạnh của nó.

Vì $0\leqslant\cos^2\alpha\leqslant 1$, nên ta dễ dàng đưa đến dạng ba chiều của bất đẳng thức Côsi:

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\geqslant\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba điểm O, P và Q nằm trên đường thẳng nghĩa là $a_1/b_1=a_2/b_2=a_3/b_3$ (với $b_1, b_2, b_3\neq 0$).

Sự tổng quát (1) sang dạng n chiều có quan hệ với phép tính tích phân đã được hai nhà toán học ***Bunhiacốpski*** và ***Svarxơ*** tìm ra một cách độc lập với nhau. Bất đẳng thức tổng quát của (1) được gọi là ***bất đẳng thức Côsi–Bunhiacốpski*** hoặc ***bất đẳng thức Côsi–Svarxơ***. Đó là bất đẳng thức có vai trò quan trọng trong Toán lý thuyết, Toán ứng dụng và trong Vật lý.

Bất đẳng thức Côsi–Svarxơ có dạng:

$$\left(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2\right)\geqslant\left(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\right)^2$$

Chứng minh: Xét tam thức $f(x)=Ax^2+2Bx+C$ trong đó $A=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2$ ký hiệu là

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2;$$

$$B=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n,$$

ký hiệu là $$B=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i;$$

$$C=b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2,$$

ký hiệu là $$C=\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

Như vậy $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)^2\geqslant 0$ với mọi x.

Do đó, ta có $\Delta'=B^2-AC\leqslant 0$ hay $B^2\leqslant AC$ (đpcm).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a_i x + b_i)$ bằng nhau cả, nghĩa là khi $a_i/b_i = k$ ($b_i \neq 0$).

Sau đây, ta giải một vài bài tập vận dụng *bất đẳng thức Côsi–Svarxơ.*

Bài tập 1. Tìm giá trị bé nhất của $S = x^2 + y^2 + z^2$ với $P = ax + by + cz = \text{const}$. ($a, b, c \neq 0$).

Theo bất đẳng thức Côsi–Svarxơ thì:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) \geqslant (ax+by+cz)^2$$

$$S = x^2+y^2+z^2 \geqslant P^2/(a^2+b^2+c^2)$$

Khi dấu bằng xảy ra thì có *min S*, tức là khi $x = ka$, $y = kb$, $z = kc$, có nghĩa là:

$$x = aP/(a^2+b^2+c^2),\ y = bP/(a^2+b^2+c^2) \text{ và}$$

$$z = cP/(a^2+b^2+c^2)$$

Bài tập 2. Giải phương trình

$$\sqrt{3/4 + \sin^2(x/2)} + \sqrt{1/4 + \cos^2(x/2)} = 2$$

Ở đây a_1 là số hạng thứ nhất của vế trái, a_2 là số hạng thứ hai của vế trái, $b_1 = 1$ và $b_2 = 1$. Vậy theo bất đẳng thức Côsi – Svarxơ, ta có:

$$\left[\left(\frac{3}{4} + \sin^2\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \cos^2\frac{x}{2}\right)\right](1+1)$$

$$\geqslant \left(\sqrt{\frac{3}{4} + \sin^2\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos^2\frac{x}{2}}\right.$$

Do đó ta có:

$$2 \geqslant \sqrt{3/4 + \sin^2(x/2)} + \sqrt{1/4 + \cos^2(x/2)}$$

Nếu dấu bằng xảy ra được thì phương trình đã cho mới có nghiệm.

(*Tiện đây, xin chú ý rằng, ta cần thận trọng để xét xem dấu bằng trong các bất đẳng thức suy rộng có thể xảy ra được không*). Ở đây, dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{3/4 + \sin^2(x/2)} = k \cdot 1$ và $\sqrt{1/4 + \cos^2(x/2)} = k \cdot 1$

Như vậy:

$$3/4 + \sin^2(x/2) = 1/4 + \cos^2(x/2)$$

$$\cos x = 1/2$$

$$x = \pm \pi/3 + 2k\pi \text{ (k nguyên).}$$

Bài tập 3. Cho $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$. Tìm $\min \sum_{i=1}^{n} d_i^2 c_i^2$ trong đó c_i, d_i là những số dương.

(*Bài toán trên là một bài toán trong lý thuyết xác suất thống kê, khi cần chỉnh lý kết quả đo một đại lượng n lần*)

Theo bất đẳng thức Côsi–Svarxơ, ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 c_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 1/d_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} d_i c_i \frac{1}{d_i}\right)^2 = 1.$$

Nếu dấu bằng xảy ra được thì $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 c_i^2$ đạt giá trị bé nhất.

$$\min \sum_{i=1}^{n} d_i^2 c_i^2 = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i^2}.$$

Ở đây, dấu bằng xảy ra khi $d_i c_i = \dfrac{k}{d_i}$,

tức là $$c_i = \frac{k}{d_i^2}$$

Ta phải tìm số k sao cho $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.

Vậy $$k \cdot \sum_{i=1}^{n} 1/d_i^2 = 1$$

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/d_i^2}$$

ĐA THỨC BẤT KHẢ QUI

LÊ QUỐC HÁN

Báo «Toán học và tuổi trẻ» số 111 đã giới thiệu với các bạn bài «Sơ lược lý thuyết chia hết đối với các đa thức». Bài này nhằm giới thiệu với các bạn vấn đề «Đa thức bất khả qui», một vấn đề có liên quan sâu sắc với lý thuyết đó.

Định nghĩa: Giả sử $f(x)$ là đa thức với các hệ số hữu tỉ. Nói rằng $f(x)$ là đa thức khả qui, nếu tồn tại hai đa thức $f_1(x)$ và $f_2(x)$ với hệ số hữu tỉ sao cho $f(x) = f_1(x).f_2(x)$ và $\deg f(x) > \deg f_i(x) > 0$ ($i = 1, 2$). (deg f ký hiệu bậc của đa thức f).

Một đa thức với hệ số hữu tỉ không phải là đa thức khả qui được gọi là đa thức bất khả qui.

Thí dụ 1: Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1$, trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số nguyên, là một đa thức bất khả qui.

Chứng minh bằng phản chứng: Giả sử $f(x)$ không phải là đa thức bất khả qui, khi đó có thể giả thiết rằng $f(x) = A \cdot f_1(x).f_2(x)$ với A là số nguyên, $f_i(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên và $\deg f(x) > \deg f_i(x) > 0$, $i = 1, 2$. Vì hệ số của số hạng bậc cao nhất của $f(x)$ là 1 nên ta có thể giả thiết $A = 1$. Rõ ràng $f(a_i) = -1$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ nên hoặc $f_1(a_i) = 1$, $f_2(a_i) = -1$ hoặc

$$f_1(a_i) = -1,\ f_2(a_i) = 1$$

do đó

$$f_1(a_i) + f_2(a_i) = 0 \text{ với } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vì $\deg f_i(x) > 0$

nên $\deg(f_1(x) + f_2(x)) < \deg f(x) = n$

mà $f_1(x) + f_2(x)$ nhận giá trị 0 tại n giá trị $a_1, a_2, \ldots, a_n \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = f_1(x).f_2(x) = -[f_1(x)]^2.$$

Điều này mâu thuẫn vì hệ số của số hạng bậc cao nhất của $f(x)$ bằng 1 là số dương và $\deg f_1(x) > 0$.

Thí dụ 2: Tìm điều kiện ắt có và đủ để đa thức $f(x) = x^4 + px^2 + q$ là khả qui, trong đó p, q là những số hữu tỉ.

Chỉ dẫn: Nhận xét: Nếu $f(x_1) = 0$ thì $f(-x_1) = 0$.

Do đó nếu $f(x)$ khả qui thì nó phải được phân tích được dưới dạng

$$f(x) = (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2).$$

So sánh hệ số hai vế, ta đi đến: Điều kiện ắt có và đủ để $f(x) = x^4 + px^2 + q$ khả qui là các hệ số p, q phải thỏa mãn một trong hai điều kiện:

1) $p^2 - 4q = m^2$;

2) $q = n^2$; $2n - p = k^2$;

trong đó m, n, k là những số hữu tỉ nào đó.

Cho trước một đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ. Điều kiện ắt có và đủ để $f(x)$ khả qui là gì? Câu hỏi đó đến nay vẫn chưa được giải đáp. Tuy nhiên, người ta cũng đã tìm được một điều kiện đủ để $f(x)$ là đa thức khả qui. Cụ thể ta có:

Tiêu chuẩn Aidenstainơ: Giả sử $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ với hệ số nguyên và có một số nguyên tố p sao cho p không phải là ước số của a_0, nhưng p là ước số của các hệ số còn lại và p^2 không phải là ước của a_n. Thế thì $f(x)$ là một đa thức bất khả qui.

Chứng minh định lý này chỉ cần dùng những kiến thức đã nêu ở bài «Sơ lược lý thuyết về chia hết đối với đa thức» và lý thuyết chia hết của các số nguyên, nhưng khá dài. Đề nghị các bạn tự tìm lấy.

Thí dụ 3: Chứng minh đa thức

$$f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1,$$

trong đó p là số nguyên tố, là đa thức bất khả qui

Chứng minh: Đặt $x = y + 1$. Khi đó

$$f_p(x) = g(y) = (y+1)^{p-1} + (y+1)^{p-2} + \ldots + (y+1) + 1$$

$$= \frac{(y+1)^p - 1}{(y+1) - 1} = \frac{1}{y}[(y+1)^p - 1]$$

$$= \frac{1}{y}[y^p + py^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2!}y^{p-2} + \ldots + py]$$

$$= y^{p-1} + py^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2!}y^{p-3} + \ldots + p.$$

Với mọi k sao cho $1 \leqslant k \leqslant p-1$, do p nguyên tố nên $(k, p) = 1$, vậy $k!$ và p nguyên tố cùng nhau, do đó từ $C_k = p(p-1)\ldots(p-k+1)/k!$ nguyên suy ra $\gamma_k = (p-1)\ldots(p-k+1)/k!$ nguyên.

Do đó:

$$f_p(x) = g(y) = y^{p-1} + p\gamma_1 y^{p-2} + p\gamma_2 y^{p-3} + \ldots + p$$

với $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ nguyên.

Áp dụng tiêu chuẩn Aidenstainơ, ta có $g(y)$ bất khả qui. Vậy $f(x)$ bất khả qui.

Bây giờ, các bạn hãy dùng những kiến thức đã nêu ở trên để giải các bài tập sau:

1) Chứng minh rằng đa thức

$$(x - a_1)^2(x - a_2)^2\ldots(x - a_n)^2 + 1$$

với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nguyên là bất khả qui

2) Tìm các giá trị nguyên a, b, c để cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành tích của hai nhị thức với hệ số nguyên.

3) Cho $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ là đa thức với hệ số nguyên và có một số nguyên tố p sao cho: hệ số của số hạng cao nhất không chia hết cho p, còn các hệ số $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ đều chia hết cho p và số hạng tự do không chia hết cho p^2. Chứng minh rằng $f(x)$ có một nhân tử bất khả qui $g(x)$, trong đó $\deg g(x) \geqslant n - k$.

4) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p và mọi số tự nhiên k, đa thức nhận được từ biểu thức $(x^{p^k} - 1)/(x^{p^{k-1}} - 1)$ là bất khả qui.

5) Cho đa thức $f(x)$ bậc n ($n = 2m$ hoặc $n = 2m + 1$) với hệ số nguyên và nhận các giá trị ± 1 tại quá $2m$ giá trị nguyên của x. Chứng minh $f(x)$ bất khả qui.

6) Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên nhận giá trị 1 tại quá ba giá trị nguyên của x, thì $f(x)$ không chứa nhân tử $x + 1$.

• Bạn đọc tìm tòi

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ

$\{u_n\} = \{1 + 1/2 + ... + 1/n\}$

VIỆC tìm hiểu những tính chất của một dãy số là một đề tài hấp dẫn đối với các bạn trẻ yêu toán. Sau đây, tôi xin trình bày một số tính chất của dãy số $\{u_n\} = \{1 + 1/2 + ... + 1/n\}$.

Tính chất 1. u_n $(n \geqslant 2)$ không phải là một số nguyên.

Chứng minh: Nhận xét rằng mọi số nguyên đều có dạng $2^k.u$ (u lẻ, $k \geqslant 0$). Gọi A là tập hợp tất cả các số có dạng 2^l không vượt quá n $(n \geqslant 2)$. Bao giờ cũng có 2^{l_0} là số lớn nhất trong các số thuộc A. Ta sẽ chứng minh mọi số $\leqslant n$ khi qui về dạng $2^p.q$ (q lẻ) mà $2^p.q \neq 2^{l_0}$ thì $p < l_0$.

Thật vậy, giả sử $p \geqslant l_0$.

– Nếu $q = 1$ thì $2^p \geqslant 2^{l_0}$ (mâu thuẫn với 2^{l_0} lớn nhất).

– Nếu $q \geqslant 3$ thì $n \geqslant 2^p.q > 2^{p+1} > 2^{l_0}$. (mâu thuẫn với 2^{l_0} lớn nhất).

Giả sử u_n là số nguyên thì $\dfrac{u_n.2^{l_0} - 1}{2^{l_0}}$ tối giản.

Phân số

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{l_0} - 1} + \frac{1}{2^{l_0} + 1} + ... + \frac{1}{n}$$

có mẫu số là BSCNN của các số $2, 3, ..., 2^{l_0} - 1, 2^{l_0} + 1, ..., n$. Theo chứng minh trên, BSCNN của chúng có dạng $2^k.q$ (q lẻ) và $k < l_0$. Do phân số này bằng phân số tối giản trên, suy ra $2^k.q \vdots 2^{l_0}$ hay $2^k \vdots 2^{l_0}$ suy ra $k \geqslant l_0$, đi đến mâu thuẫn. Vậy u_n $(n \geqslant 2)$ không thể là số nguyên.

Hơn thế nữa, có thể chứng minh được rằng u_n $(n \geqslant 2)$ là một phân số có tử số lẻ và mẫu số chẵn.

Chúng ta khó có thể tính được u_n phải chăng vì biểu thức của nó khá phức tạp? Điều đó được thể hiện ở ít nhất một tính chất sau đây:

Tính chất 2. Có thể coi u_n như là một hàm số của biến số tự nhiên n, ta sẽ chứng minh rằng u_n không phải là hàm số hữu tỉ đối với n.

Để chứng minh tính chất 2, ta dùng hai bổ đề sau:

Bổ đề 1. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \infty$.

Thật vậy, vì $u_1 < u_2 < ... < u_n < ...$, cho nên $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ hoặc là ∞, hoặc là số hữu hạn α nào đó. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$ $(\alpha \neq \infty)$. Ta có

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 + 1/2 + ... + 1/n + ...\\ &= 1 + 1/3 + 1/5 + ... + 1/2k-1 + ...)\\ &\quad + (1/2 + 1/4 + 1/6 + ... + 1/2k + ...)\\ &> 2(1/2 + 1/4 + 1/6 + ... + 1/2k + ...)\\ &= 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n + ... = \alpha\end{aligned}$$

đi đến $\alpha > \alpha$ là điều vô lí! Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

Bổ đề 2. $1 + 1/2 + ... + 1/n < 2\sqrt{n}$.

Dễ thấy bất đẳng thức trên đúng với $n = 1, 2$. Giả sử bất đẳng thức đã đúng với $n = k$, ta chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, từ giả thiết qui nạp, suy ra:

$$1 + 1/2 + ... + 1/k + 1/(k + 1) < 2\sqrt{k} + 1/(k + 1).$$

Do $k + 1 > \sqrt{k + 1}$ nên $1/(k + 1) < 1/\sqrt{k + 1}$. Vậy ta có

$$2\sqrt{k} + 1/(k + 1) < 2\sqrt{k} + 1/\sqrt{k + 1}. \qquad (*)$$

Mặt khác, $4k + 1/(k + 1) > 4k$, tức là

$$(2\sqrt{k + 1} - 1/\sqrt{k + 1})^2 > 4k$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{k + 1} - 1/\sqrt{k + 1} > 2\sqrt{k}$. Vậy ta có

$$2\sqrt{k} + 1/\sqrt{k + 1} < 2\sqrt{k + 1}. \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $2\sqrt{k} + 1/(k + 1) < 2\sqrt{k+1}$. Từ đó ta có

$$1 + 1/2 + ... + 1/k + 1/(k + 1) < 2\sqrt{k + 1} \quad \text{(đpcm)}.$$

Ta chuyển sang chứng minh tính chất 2.

Giả sử trái lại, u_n là hàm số hữu tỉ của n.

$$u_n = \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + ... + b_1 n + b_0}$$

$(a_m \neq 0,\ b_k \neq 0)$.

Vì $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ (theo bổ đề 1), nên suy ra $m > k$;

$$\lim_{n\to\infty} (u_n/n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_k n^{k+1} + b_{k-1} n^k + \ldots + b_1 n^2 + b_0 n}$$

$\lim_{n\to\infty} (u_n/n) < \lim_{n\to\infty} (2\sqrt{n}/n)$ (do bổ đề 2).

$$\lim_{n\to\infty} u_n/n \geqslant 0 \quad (u_n > 0)$$

còn $\lim_{n\to\infty} (2\sqrt{n}/n) = 0$, nên ta có

$$\lim_{n\to\infty} (u_n/n) =$$

$$= \lim \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_k n^{k+1} + b_{k-1} n^k + \ldots + b_1 n^2 + b_0 n} = 0.$$

Suy ra $m < k + 1$.

Kết hợp lại, ta có $k < m < k + 1$, mâu thuẫn!

Vậy u_n không phải là hàm số hữu tỉ của n.

Các bạn thân mến!

Ngay cả đến Ơ-le, nhà toán học Thụy Sĩ vĩ đại, người đã có đến 544 công trình toán học lớn nhỏ, người làm toán đến hơi thở cuối cùng, cũng không lập được biểu thức cho u_n, mà chỉ mới chứng minh được rằng

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - \ln n) = c \ (c \text{ là hằng số})$$

Hằng số đó được gọi là hằng số Ơ-le. Đó là một số vô tỉ: $c = 0{,}577\ldots$ ($\ln n$ là lôgarit cơ số e của n, e là số vô tỉ bằng $2{,}78\ldots$). Điều này chỉ nói lên rằng ở những số n lớn thì

$$u_n \approx \ln n + c$$

Xung quanh dãy số $\{u_n\}$ còn có biết bao bài toán lý thú khác nữa, chẳng hạn:

+ Với p là số nguyên tố, $p \geqslant 3$, thì $u_p = r/s$ và $r - s \vdots p^3$.

+ $1/2 < u_n + u_m - u_{nm} \leqslant 1$

$$+ \frac{u_1^2}{1} + \frac{u_2^2}{2^2} + \frac{u_3^2}{3^2} + \ldots + \frac{u_n^2}{n^2} + \ldots = \frac{17\pi^4}{360}.$$

Việc giải những bài toán này nói chung không đơn giản.

DƯƠNG QUỐC VIỆT
(Cao đẳng sư phạm Tây Bắc)

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN 1981—1982

CÁC bạn sau đây đạt được điểm cao nhất trong số các bạn học sinh dự thi:

1. Bùi Hoàng Quân – 11CT, Đại học Sư phạm Hà Nội;
2. Trần Tuấn Hiệp – 11CT, Đại học Sư phạm Hà nội;
3. Đặng Trường Sơn – 11CT, Đại học Tổng hợp Hà Nội;
4. Đỗ Quang Đại + Phạm Thanh Phương – 10CT, Đại học Sư phạm Hà Nội;
5. Trần Thanh Trúc – 11CT, Đại học Sư phạm Hà Nội;
6. Đoàn Tuấn Minh – 12CT, Nguyễn Trãi, Vũ Thư, Thái Bình;
7. Nguyễn Anh Tuấn A – 11H, Thăng Long, Hà Nội;
8. Huỳnh Văn Mỹ – 11A2, Hoàng Hoa Thám, thành phố Hồ Chí Minh;
9. Nguyễn Thanh Hương – 11/1, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng;
10. Phạm Xuân Hiệp – 110, Ngô Quyền, Biên Hòa, Đồng Nai;
11. Ngô Quang Tiến – 110, Ngô Quyền, Biên Hòa, Đồng Nai;
12. Nguyễn Hoành Cường 10B, Trưng Vương, Quy Nhơn, Nghĩa Bình;
13. Hồ Tiến Đạt – 10A, Chu Văn An, Hà Nội;
14. Nguyễn Quốc Lân – 10A2, Trưng Vương, thành phố Hồ Chí Minh;
15. Đặng Vĩnh Hưng – 11I, Quang Trung, Qui Nhơn, Nghĩa Bình.

Bạn nào có địa chỉ thay đổi xin báo cho Tòa soạn biết để Tòa soạn có thể gửi báo biếu cho bạn.

In tại Xí nghiệp in 75—77 Hàng Bồ Hà Nội—Chỉ số: 12884
Số in 112/82. In xong và gửi lưu chiểu tháng 8-1982
Giá: 1,00đ