HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Số 123
1
1982

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN
Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG
Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội
Dây nói: 52825

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

SỐ NGUYÊN TỐ MEC-XEN-NƠ

PHAN ĐỨC CHÍNH

BÁO THvTT số 1/1981 có bài thông báo với các bạn về số nguyên tố lớn nhất được biết, đó là số $2^{21701} - 1$, do Nikel và Noll tìm ra năm 1979. Nhiều bạn yêu toán có viết thư hỏi tôi về ý nghĩa của kết quả này.

Các bạn đã biết vai trò quan trọng của các số nguyên tố. Tầm quan trọng càng tỏ rõ hơn với sự phát triển của lý thuyết số và sự xâm nhập của lý thuyết số vào các ngành toán học khác. Vì vậy từ xưa đến nay, các nhà toán học, từ thế hệ này sang thế hệ khác, đã bỏ nhiều công sức để nghiên cứu các số nguyên tố.

Cách đây hơn hai nghìn năm, nhà toán học cổ đại Ơ-clít đã chứng minh rằng có vô số số nguyên tố. Các bạn đã biết chứng minh của Ơ-clít, đó là một cách chứng minh kiểu mẫu về sự tồn tại của một đối tượng toán học, tuy không cho phép chỉ ra cụ thể đối tượng ấy.

Vấn đề đầu tiên được đặt ra là tìm cách «tóm gọn» tất cả các số nguyên tố. Ở đây có kết quả nho nhỏ: dùng phương pháp «sàng»! Các bạn đã biết kiểu «sàng Ê-ra-tô-xten»: viết các số tự nhiên từ 2 trở đi thành dãy, số 2 là nguyên tố; ta sàng lượt thứ nhất: gạch đi các bội của 2, số đầu tiên còn lại (số 3) là nguyên tố; ta sàng lượt thứ hai: gạch đi các bội của 3, số đầu tiên còn lại (số 5) là nguyên tố; ta sàng lượt thứ ba: gạch đi các bội của 5, số đầu tiên còn lại (số 7) là nguyên tố, và cứ thế mãi...

Xin giới thiệu với các bạn một kiểu sàng khác, coi như bài tập:

BÀI TOÁN. *Trong dãy tự nhiên, ta bỏ đi:*

— *tất cả các lũy thừa của 2:*

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$$

— *tất cả các số có dạng* $uv - \dfrac{u(u-1)}{2}$, *trong đó u, v là hai số tự nhiên thỏa mãn điều kiện:* $3 \leqslant u \leqslant v$.

Chứng minh rằng sau khi loại bỏ các số đã nêu, trong dãy số tự nhiên còn lại và chỉ còn lại tất cả các số nguyên tố lẻ.

Như các bạn thấy, các kiểu sàng này hơi .. thủ công nghiệp !!! Đúng hơn, chúng không cho phép phát hiện thêm một tính chất nào đó của số nguyên tố có thể đóng góp cho sự phát triển của lý thuyết số cũng như của toán học.

Các nhà toán học thời trước đã từng có ý nghĩ : ký hiệu p_n là số nguyên tố thứ n, tức là :

$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11,\ p_6 = 13, \ldots$ hãy tìm một *công thức đơn giản* biểu diễn p_n qua n. Chưa cần nói rõ thế nào là *công thức* (vì nó còn phụ thuộc vào trình độ phát triển của toán học), nhưng chỉ với tiêu chuẩn *đơn giản*, với tất cả mọi nhân nhượng có thể chấp nhận được, thì ý nghĩ hay yêu cầu nói trên đã thất bại : cho đến nay người ta « chưa » tìm ra được, và hiện nay người ta đã bỏ ý định « điền rõ » đi tìm một công thức đơn giản như vậy !

Đánh hạ thấp yêu cầu : tìm một công thức đơn giản, phụ thuộc vào số tự nhiên n, cho ta những số nguyên tố với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$ Khi đó ta sẽ được một dãy vô hạn, gồm toàn những số nguyên tố. Tuy ở đây ta không được *tất cả* các số nguyên tố, nhưng một công thức đơn giản ấy (nếu có !) chắc chắn sẽ đóng góp nhiều cho lý thuyết số cùng nhiều ngành toán học khác. Tiếc thay điều đó đến nay vẫn chưa thành sự thật !

Cách đây ba trăm năm, nhà toán học Fec-ma đã nghĩ rằng dãy số (sau này gọi là dãy Fec-ma)

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \ (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

gồm toàn những số nguyên tố : Fec-ma đã thử vài số đầu $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$. Nhưng năm 1732, nhà toán học Ơ-le phát hiện ra rằng số $F_5 = 4\,294\,967\,297$ là một hợp số : quả vậy, $F_5 = 641 \cdot 6700417$.

Số nguyên tố Fec-ma được đặc biệt chú ý nhờ một kết quả tuyệt diệu của nhà toán học Gau-xơ, giải quyết một bài toán đặt ra từ thời cổ đại : *để chia được đường tròn bằng thước và compa ra n phần bằng nhau, điều kiện cần và đủ là trong phân tích số n ra thừa số nguyên tố, không có các thừa số nguyên tố khác với 2 và với các số nguyên tố Fec-ma.*

Không có một phương pháp đơn giản để biết được trong các số Fec-ma, số nào là nguyên tố, số nào là hợp số. Dù sao có một kết quả đáng lưu ý :

MỆNH ĐỀ 1. *Nếu số F_n là nguyên tố, thì nó phải là ước của $3^{2^{2^n}-1} + 1$.*

Như vậy mệnh đề 1 cho ta một điều kiện *cần* để số F_n là nguyên tố, tiếc rằng đó không phải là một điều kiện *đủ*. Nói cách khác, mệnh đề 1 cho phép phát hiện một số những số Fec-ma hợp số, nếu thực hiện được phép chia hai số nói trên và phép chia là có dư. Đúng là việc phát hiện các số Fec-ma hợp số có phần « dễ dàng » hơn việc phát hiện các số Fec-ma nguyên tố : cho đến nay, người ta không biết các số Fec-ma nguyên tố nào ngoài 5 số « tầm thường » F_n với $n = 0, 1, 2, 3, 4$, trong lúc đó người ta biết gần 40 số Fec-ma hợp số, chẳng hạn các số F_n với $5 \leqslant n \leqslant 16$ đều là những hợp số. Số F_{17} có 39 457 chữ số (trong dạng thập phân), hiện nay các máy tính điện tử chưa có khả năng làm phép chia số $3^{2^{2^{17}-1}} + 1 = 3^{2^{131\,071}} + 1$ (có hơn $10^{39\,455}$ chữ số) cho số F_{17} để sử dụng được mệnh đề 1, vì vậy cho đến nay người ta chưa biết F_{17} là số nguyên tố hay là hợp số : nếu chẳng hạn may mắn ra, F_{17} là nguyên tố, thì nó sẽ là số nguyên tố lớn hơn rất nhiều so với số $2^{21701} - 1$, số này chỉ có... 6533 chữ số ! Số F_{1945} (có hơn 10^{584} chữ số) là hợp số : để chứng tỏ điều đó, người ta không thể sử dụng mệnh đề 1, mà chứng minh rằng nó chia hết cho $5 \cdot 2^{1947} + 1$ (số này là nguyên tố). Đây cũng là phương pháp chung để chứng tỏ một F_n nào đó là hợp số ; như vậy ta hiểu rằng việc áp dụng mệnh đề 1 rất hạn chế.

Dãy Fec-ma là một dãy con của dãy

$$u_n = 2^n + 1 \ (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \qquad (1)$$

Nếu n chứa một thừa số lẻ lớn hơn 1, chẳng hạn $n = kd$, với d lẻ lớn hơn 1, ta chứng minh dễ dàng rằng $u_n = 2^{kd} + 1$ chia hết cho $2^k + 1$, như vậy nó là một hợp số. Nói cách khác, dãy (1) chứa vô số những hợp số, các số nguyên tố trong dãy (1) chỉ có thể là những số u_n ứng với n không có thừa số lẻ, tức là $n = 2^m$, khi đó $u_n = 2^{2^m} + 1 = F_m$. Tóm lại trong dãy (1) cho đến nay người ta mới chỉ biết vẻn vẹn có 5 số nguyên tố !

Dãy (1) gợi ý dãy

$M_n = 2^n - 1 \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, gọi là *dãy Mec-xen-nơ*. Như vậy

$M_1 = 1$, $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_4 = 15$, $M_5 = 31$, $M_6 = 63, \ldots$

Nếu n là một hợp số, chẳng hạn $n = ab$, với a, b là những số tự nhiên lớn hơn 1 và nhỏ hơn n, thì $M_n = 2^{ab} - 1$ chia hết cho $2^a - 1$, do đó M_n là một hợp số. Lập luận này chứng tỏ rằng dãy Mec-xen-nơ chứa vô số những hợp số, và đồng thời chứng tỏ rằng :

MỆNH ĐỀ 2. *Nếu M_p là số nguyên tố, thì p phải là số nguyên tố.*

Cũng tiếc rằng đây không phải là điều kiện *đủ* để M_p là nguyên tố: chẳng hạn

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23.89.$$

Vậy có tiêu chuẩn nào để biết với p nguyên tố, M_p là nguyên tố hay là hợp số? Ở đây tình hình có chút khả quan hơn so với các số Fec-ma. Trước hết ta có:

MỆNH ĐỀ 3. *Nếu p và $2p+1$ là những số nguyên tố, ngoài ra $2p+1$ có dạng $8k+7$, thì M_p chia hết cho $2p+1$ (và do đó M_p là một hợp số).*

Mệnh đề này cho phép phát hiện ra hàng loạt những số Mec-xen-nơ hợp số: chẳng hạn M_{23} (chia hết cho 47), M_{83} (chia hết cho 167) M_{131} (chia hết cho 263), M_{179} (chia hết cho 359), M_{191} (chia hết cho 383), M_{239} (chia hết cho 479)....

Với mệnh đề 3, người ta hy vọng, nhưng chưa chứng minh nổi, rằng có vô số những M_p hợp số với p nguyên tố, bởi vì chưa chứng minh nổi rằng có vô số số nguyên tố p sao cho $2p+1$ nguyên tố, chưa nói đến yêu cầu $2p+1$ phải có dạng $8k+7$.

Việc xác định các số Mec-xen-nơ hợp số hiển nhiên không thú vị bằng việc xác định các số Mec-xen-nơ nguyên tố. Có một kết quả nổi tiếng, mới tìm ra cách đây khoảng bốn chục năm bởi hai nhà toán học Lucas và Lehmer:

ĐỊNH LÝ LUCAS — LEHMER. *Giả thử p là một số nguyên tố lẻ. Điều kiện cần và đủ để M_p nguyên tố là: M_p là ước của số hạng thứ $p-1$ của dãy v_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, dãy này được xác định bởi các điều kiện:*

$$v_1 = 4, v_{n+1} = v_n^2 - 2 \text{ khi } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Vì không thể biểu diễn trực tiếp và đơn giản v_n qua n, nên người ta áp dụng định lý Lucas—Lehmer như sau: M_p là ước của v_{p-1} khi và chỉ khi M_p là ước của r_{p-1}, trong đó dãy r_n $(n = 1, 2, \ldots)$ được xác định bởi: $r_1 = 4$, r_{n+1} là số dư trong phép chia $r_n^2 - 2$ cho M_p (các bạn dùng khái niệm đồng dư để chứng tỏ điều đó).

Thành thử trong việc áp dụng định lý Lucas—Lehmer, ta chỉ phải bình phương những số nhỏ hơn M_p, làm phép trừ cho 2, rồi chia cho M_p, lấy số dư, và cứ tiếp tục như thế! Đĩ nhiên không thể thực hiện các phép tính này bằng tay khi p đủ lớn: ngay với $M_{13} = 8191$, bạn chẳng nên làm như vậy, tốt nhất bạn hãy tra một bảng số nguyên tố (thường có trong bảng lôgarit với 5 số thập phân), bạn sẽ thấy rằng M_{13} là số nguyên tố! Nhưng dù bạn có trong tay bảng 6 triệu số nguyên tố đầu tiên của Baker—Grunberger (bảng lớn nhất hiện nay không thể in thành sách, chỉ có dưới dạng micrôfim, số nguyên tố thứ 6 triệu là $p_{6000000} =$ 104 395 301), và bạn có thể tính bằng tay trong vài phút số $M_{31} = 2147483647$, thì bạn chẳng biết M_{31} là nguyên tố hay là hợp số, và chắc chắn bạn không có ý định áp dụng bằng tay định lý Lucas—Lehmer! Bậc tiền bối Ơ-le, sống trước Lucas—Lehmer hai thế kỷ, đã dùng lý thuyết chỉ số để chứng minh rằng M_{31} là số nguyên tố nó là số nguyên tố lớn nhất được biết thời đó.

Sự xuất hiện các máy tính điện tử đã giúp cho việc áp dụng trực tiếp định lý Lucas—Lehmer: ngay sau khi phát minh ra máy tính điện tử (máy thế hệ thứ nhất), người ta đã thử định lý trên máy cho số M_{101} (có 31 chữ số), và thấy rằng nó là hợp số. Khi Nikel và Noll công bố số M_{21701}, các nhà toán học Tukerman và Lehmer (vẫn là nhà toán học tìm ra định lý trên: còn có nhà toán học D.N. Lehmer (bố), tác giả bảng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn 10 triệu, xuất bản năm 1909) cũng dùng định lý ấy để kiểm nghiệm trên máy tính điện tử thế hệ thứ ba, và đã phải dùng khoảng 4400 giờ máy!

Hiện nay người ta biết 25 số nguyên tố Mec-xen-nơ, đó là các số M_p ứng với $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213$ (tìm ra năm 1969), 19937 (tìm ra năm 1971 bởi Tukerman) và 21701. Các số từ M_{521} trở đi đều được phát hiện nhờ máy tính điện tử.

Dù sao người ta cũng biết được nhiều số nguyên tố Mec-xen-nơ hơn là số nguyên tố Fec-ma, và hy vọng tuy có phần rất mỏng manh rằng có vô số số nguyên tố Mec-xen-nơ. Có thời người ta cho rằng nếu M_p là số nguyên tố, thì M_{M_p} cũng là số nguyên tố: điều đó đúng cho 4 số nguyên tố Mec-xen-nơ đầu tiên. Xong năm 1953 Wheeler dùng định lý Lucas-Lehmer trên máy tính điện tử đã chứng tỏ rằng số $M_{M_{13}} = 2^{8191} - 1$ (có 2466 chữ số) là hợp số! Năm 1957 người ta đã chứng minh được rằng số $M_{M_{17}}$ chia hết cho 1768 $(2^{17} - 1)$ và số $M_{M_{19}}$ chia hết cho 120 $(2^{19} - 1)$. Hiện giờ người ta hy vọng rằng tất cả các số $q_0, q_1, q_2, \ldots$, trong đó $q_0 = 2$, $q_{n+1} = 2^{q_n} - 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ đều là số nguyên tố! Điều đó đúng cho $q_0 = 2$, $q_1 = 2^2 - 1 = 3$, $q_2 = 2^3 - 1 = 7$, $q_3 = 2^7 - 1 = 127$, $q_4 = 2^{127} - 1 = M_{127}$. Đến số $q_5 = 2^{M_{127}} - 1$ có hơn 10^{37} chữ số, người ta đành chịu, không thể kiểm nghiệm nổi nó là nguyên tố hay là hợp số!

Các bạn có thể hỏi: vì sao khi đi tìm số nguyên tố lớn nhất, người ta chỉ chú ý đến các số Mec-xen-nơ mà không tìm các số dạng khác? Đó là vì ba nguyên nhân:

1) Để chứng tỏ rằng số N là nguyên tố, về mặt nguyên tắc, người ta phải dùng cách sàng Ê-ra-tô-xten, nói cách khác, phải kiểm nghiệm rằng N không có ước nguyên tố $p \leq \sqrt{N}$. Không nói đến sự tốn kém, nhưng việc làm này không thể thực hiện được khi N có hơn hai chục chữ số: cho đến nay, người ta chưa biết được *tất cả* các số nguyên tố có từ mười chữ số trở xuống.

Cuối thế kỷ 18, nhà toán học Leibniz đã chứng minh:

ĐỊNH LÝ LEIBNIZ: *Để số tự nhiên $p > 2$ là nguyên tố, điều kiện cần và đủ là số $(p-2)! - 1$ chia hết cho p*

Định lý Leibniz không phải là một công cụ có hiệu lực để phát hiện những số nguyên tố lớn: quả vậy, người ta đã biết tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn 10^8 (bảng Baker—Grunberger); đối với các số $N > 10^8$, để áp dụng định lý Leibniz, ta phải tính $(N-2)!$, có thể coi rằng $N - 2 = n > 10^8$ và ta có

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n > \left(\frac{10^8}{3}\right)^{10^8} > 10^{7 \cdot 10^8}$$

nói cách khác, $(N-2)!$ có hơn $7 \cdot 10^8$ chữ số, có lẽ còn lâu lắm các máy tính điện tử mới có khả năng làm việc với các số này!

Như vậy chỉ có việc kiểm nghiệm các số Mec-xen-nơ, nhờ định lý Lucas—Lehmer, mới thực hiện được theo khả năng của máy tính điện tử, máy càng «mạnh» thì càng có điều kiện tìm ra số nguyên tố Mec-xen-nơ lớn hơn

2) Số Mec-xen-nơ có dạng khá đơn giản: nó là một lũy thừa của 2 trừ đi 1. Điều này rất thuận tiện cho các máy tính điện tử: chúng làm việc với hệ đếm theo cơ số 2 (Vì mạch điện có hai trạng thái: hoặc đóng, hoặc mở).

3) Trong lý thuyết số, số Mec-xen-nơ có liên quan với các số *hoàn chỉnh*. Một số tự nhiên P được gọi là hoàn chỉnh nếu nó bằng tổng tất cả các ước tự nhiên nhỏ hơn P của số P. Các số hoàn chỉnh đã được quan tâm ngay từ thời Ơ-clit: theo ngôn ngữ hiện đại, Ơ-clit đã chỉ ra rằng nếu M_p là một số Mec-xen-nơ, thì $2^{p-1} M_p$ là một số hoàn chỉnh (chẵn). Thế kỷ 18, Ơ-le đã chứng minh chặt chẽ: tất cả các số hoàn chỉnh chẵn là tất cả các số trên. Thành thử biết được bao nhiêu số nguyên tố Mec-xen-nơ, ta biết được chừng ấy số hoàn chỉnh chẵn. Mặt khác cho đến nay, người ta vẫn chưa biết có hay không có số hoàn chỉnh lẻ. Có điều thú vị là người ta đã chứng minh rằng: nếu có ít nhất một số hoàn chỉnh lẻ, thì ắt phải có vô số số hoàn chỉnh lẻ!

Bây giờ xin nói thêm với các bạn về tính «đơn giản» của dãy số Mec-xen-nơ. Về mặt lý thuyết thuần túy, đương nhiên còn có nhiều dãy số đơn giản hơn. Chẳng hạn dãy

$$n^2 + 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Dãy này chứa vô số những hợp số, chẳng hạn các số hạng ứng với n tận cùng bằng 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 (trừ trường hợp n = 1, 2), hoặc $n = 2m^2$ với $m > 1$, bởi vì khi đó $n^2 + 1 = 4m^4 + 1 = (2m^2+1)^2 - 4m^2 = (2m^2 + 2m + 1) \times (2m^2 - 2m + 1)$. Những dãy ấy cũng chứa nhiều số nguyên tố, chẳng hạn:

$1^2 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 5$, $4^2 + 1 = 17$, $6^2 + 1 = 37$, $10^2 + 1 = 101$, $14^2 + 1 = 197$, $16^2 + 1 = 257$, $20^2 + 1 = 401, \ldots$

Dãy này chứa vô số số nguyên tố chăng? Người ta nghĩ như vậy, nhưng chưa chứng minh nổi! Người ta cũng chưa biết một điều kiện cần và đủ, có hiệu lực, cho biết $n^2 + 1$ là một số nguyên tố, đặc biệt cho phép phát hiện những số nguyên tố lớn dạng $n^2 + 1$.

Còn có một loại dãy số rất đơn giản, mà các bạn đều biết: các cấp số cộng

$$a + nd \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Các dãy số tự nhiên, dãy số chẵn, dãy số lẻ,..., đều là cấp số cộng. Có thể chứng minh dễ dàng rằng bất cứ cấp số cộng nào (với a và d là những số tự nhiên) đều chứa vô số những hợp số. Người ta không biết một điều kiện cần và đủ, có hiệu lực, cho phép xác định một số hạng $a + nd$, đủ của một cấp số cộng cụ thể, là số nguyên tố. Thế nhưng năm 1837, nhà toán học Di-rích-lê đã chứng minh:

ĐỊNH LÝ ĐI-RÍC-LÊ. *Nếu a và d là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, thì cấp số cộng $a + nd$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ chứa vô số số nguyên tố.*

Kết quả này được đánh giá là một thành tựu rực rỡ của lý thuyết số. Người ta càng thấm thía với kết quả ấy hơn, vì bây giờ đã gần hết thế kỷ 20, ngoài các cấp số cộng nói trên, trong các dãy số đơn giản thường gặp, người ta chưa chứng minh nổi có một dãy số nào đó chứa vô số số nguyên tố!

Tuy kết quả phát biểu đơn giản, nhưng để chứng minh, Đi-rích-lê phải vận dụng đến những kiến thức khá cao siêu, ở trình độ trên đại học. Đối với vài cấp số cộng cụ thể, phép chứng minh có thể đơn giản hơn: chẳng hạn các bạn có thể chứng minh dễ dàng các dãy số $4k + 3$

($k = 0, 1, 2,...$) hay $6k + 5$ ($k = 0, 1, 2,...$) chứa vô số số nguyên tố. Vì vậy năm 1948, nhà toán học Selberg chứng minh lại định lý Di-rich-lê bằng phương pháp sơ cấp; cách chứng minh ấy đã mang lại vinh dự lớn cho Selberg và mở đầu một phương hướng nghiên cứu mới trong lý thuyết số: chứng minh (các kết quả mới và cũ) bằng phương pháp sơ cấp. Gọi là « sơ cấp », nhưng với trình độ phát triển toán học hiện nay, các bạn cần hiểu là: dùng các kiến thức toán học ở ba hay bốn năm đầu ở đại học.

Tóm lại, các bạn thấy hiện giờ chỉ đối với các số Mec-xen-nơ, ta mới có một tiêu chuẩn có hiệu lực cho phép xác định số ấy là nguyên tố hay không nguyên tố: định lý Lucas — Lehmer. Vì vậy nếu trong một vài năm tới có ai đó tìm ra số nguyên tố lớn hơn, thì không phải là nhà tiên tri, các bạn có thể tiên đoán đó lại là một số nguyên tố Mec-xen-nơ!

KỲ THI VÔ ĐỊCH VỀ TOÁN CỦA CÁC TRƯỜNG PHỔ THÔNG Ở LIÊN XÔ LẦN THỨ 14

ĐẶNG HẢI NAM

NHÂN dịp kỷ niệm lần thứ 110 ngày sinh V. Lê-nin, từ ngày 16 đến 23 tháng 4 năm 1980, tại thành phố Xaratôp đã tiến hành kỳ thi vô địch về toán cho học sinh các trường phổ thông ở Liên Xô lần thứ 14.

Dự thi có 158 học sinh của các lớp 8, 9, 10. Những học sinh này gồm hai đối tượng: học sinh đạt giải trong các kỳ thi vô địch ở các nước cộng hòa và những học sinh được cấp bằng loại I và II ở kỳ thi vô địch lần thứ 13. Ngoài ra thành phố Xaratôp được cử riêng một đội gồm ba học sinh dự thi.

Người lãnh đạo ban giám khảo kỳ thi là viện sĩ Cônmôgôrôp.

Các thí sinh phải làm bài thi viết trong hai ngày 18 và 20 tháng tư, mỗi ngày làm 4 bài toán trong 5 giờ, điểm tối đa trong mỗi ngày là 30. Điểm thi của thí sinh đạt được trong hai ngày được cộng lại và được cấp bằng theo qui định: Bằng loại I cho thí sinh đạt từ 57 đến 60 điểm, loại II từ 40 đến 56 điểm và loại III từ 30 đến 39 điểm.

Ngày 22 tháng 4, tại gian phòng đại lễ Đơvôxa ở thành phố Xaratôp đã tổ chức long trọng lễ bế mạc kỳ thi vô địch lần thứ 14 và trao giải thưởng cho những học sinh được giải. Hơn nửa số học sinh dự thi đã được cấp bằng, trong đó loại I có 7, loại II có 35 và loại III có 41 học sinh. 40 học sinh được cấp giấy khen. Số còn lại được cấp bằng *học sinh dự thi vô địch liên bang lần thứ 14*. Chỉ có một học sinh đạt điểm tối đa là M. Gaixinxki. Ba học sinh khác là N.Goribecrơ, Đ.Buravô và V. Tritrencô cùng đạt 59 điểm. N. Gorinbecrơ được tặng danh hiệu *người con gái giỏi nhất* và được tặng những phần thưởng riêng. Học sinh A. Ragiơbarôp ba năm liên tiếp được cấp bằng loại I, và tại kỳ thi quốc tế tổ chức tại Luân Đôn, học sinh này cũng được cấp bằng loại I. Đặc biệt đội học sinh của thành phố đăng cai, hai học sinh được cấp bằng loại II và học sinh còn lại được cấp bằng loại III.

Dưới đây là đề thi trong hai ngày.

NGÀY THỨ NHẤT

Lớp 8

1. Viết liên tiếp các số có hai chữ số từ 19 đến 80, ta được số 192021...7980. Xét xem số này có chia hết cho 1980 hay không? (6 điểm)

2. Cạnh AB của hình vuông $ABCD$ được chia làm n đoạn sao cho tổng độ dài các đoạn với chỉ số chẵn bằng tổng độ dài các đoạn với chỉ số lẻ. Qua các điểm chia người ta kẻ các đường thẳng song song với cạnh AD chia hình vuông thành n dải, mỗi dải bị đường chéo hình vuông chia thành hai phần: bên trái và bên phải. Chứng minh rằng tổng diện tích các phần với chỉ số chẵn bằng tổng diện tích các phần với chỉ số lẻ. (6 điểm)

3. Người ta cần phải đưa lên quĩ đạo của tàu vũ trụ trạm « Chào mừng ». Các hàng vận chuyển

đã được đóng gói trong các côngtenơ (thùng đựng). Số các côngtenơ không ít hơn 35, khối lượng của các hàng vận chuyển là 18 tấn. Có 7 con tàu vận chuyển mang tên Tiến bộ, mỗi con tàu có thể đưa lên quĩ đạo 3 tấn hàng. Biết rằng mỗi tàu vận chuyển có thể đồng thời đưa lên quĩ đạo một trong 35 côngtenơ bất kỳ. Chứng minh rằng cùng một lúc các hàng vận chuyển đều được đưa lên quĩ đạo. (9 điểm)

4. Các điểm M và P là trung điểm của các cạnh BC và CD của tứ giác lồi $ABCD$. Biết rằng $AM + AP = a$. Chứng minh rằng diện tích của tứ giác nhỏ hơn $a^2/2$. (9 điểm)

Lớp 9

1. Có hay không các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^3 = z^4 \qquad \text{(6 điểm)}$$

2. Cho điểm E trên đường kính AC của một đường tròn. Hãy kẻ qua E dây cung BD sao cho diện tích tứ giác $ABCD$ là lớn nhất. (8 điểm)

3. Bài số 3 cho lớp 8. (8 điểm)

4. Trên một cái hồ tròn người ta chọn một số địa điểm nào đấy. Giữa những địa điểm này được nối với nhau bởi những chuyến tàu thủy. Biết rằng hai địa điểm A và B được nối với nhau bằng chuyến tàu khi và chỉ khi từ phía bên phải theo bờ hồ hai địa điểm A và B không được nối với nhau bằng những chuyến tàu tiếp theo. Chứng minh rằng từ một địa điểm bất kỳ tới một địa điểm bất kỳ khác đều có thể tới được mà không phải đổi tàu quá hai lần. (8 điểm)

Lớp 10

1. Sáu số khác không và đều khác nhau tạo thành một số có sáu chữ số chia hết cho 37. Chứng minh rằng khi hoán vị các chữ số của nó ta được ít nhất 23 số cũng chia hết cho 37. (6 điểm)

2. Bài số 2 cho lớp 9. (8 điểm)

3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x + 2\sin(x + y + z) = 0 \\ \sin y + 3\sin(x + y + z) = 0 \\ \sin z + 4\sin(x + y + z) = 0. \end{cases} \qquad \text{(8 điểm)}$$

4. Bài số 4 cho lớp 9. (8 điểm)

NGÀY THỨ HAI

Lớp 8

5. Trên mặt phẳng đã cho 1980 véctơ không cộng tuyến với nhau. Biết rằng tổng bất kì 1979 véctơ đã cho luôn cộng tuyến với véctơ còn lại. Chứng minh rằng tổng của 1980 véctơ đã cho bằng véctơ không. (6 điểm)

6. Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của số tự nhiên n.

a) Có hay không số tự nhiên n thỏa mãn $n + S(n) = 1980$?

b) Chứng minh rằng một trong hai số tự nhiên liên tiếp thiết lập dưới dạng $n + S(n)$ cho một số tự nhiên thứ ba n nào đấy. (7 điểm)

7. Trên một tờ giấy có kẻ vô hạn các ô vuông và được tô bằng các màu đỏ hoặc xanh, thỏa mãn: cứ mỗi hình chữ nhật kích thước 2×3 thì có đúng hai ô màu đỏ. Hỏi rằng một hình chữ nhật có kích thước 9×11 có bao nhiêu ô màu đỏ? (7 điểm)

8. Những người lùn ở thành phố Hoa bỗng nhiên bị bệnh cúm. Trong một ngày nào đó có một vài người lùn bị cúm, những người khỏi khi tới thăm bạn ốm sẽ bị bệnh ngay ngày hôm sau. Biết rằng mỗi người lùn bị cúm chừng một ngày và sau khi bị bệnh sẽ có một hoặc một số ngày nào đó được miễn dịch. Mặc dù trong thời gian có dịch cúm, tất cả những người lùn đều đi thăm các bạn ốm của mình. Khi bắt đầu có dịch, tất cả các người lùn đều không được tiêm chủng. Chứng minh rằng

a) Nếu trước dịch cúm một ngày mà những người lùn nào đó tiêm chủng và có miễn dịch trong ngày đầu tiên, thì dịch cúm có thể kéo dài bao lâu tùy ý.

b) Nếu không người lùn nào có miễn dịch ngay trong ngày đầu tiên, thì dịch cúm sớm hoặc muộn phải kết thúc. (10 điểm)

Lớp 9

5. Bài số 7 cho lớp 8. (8 điểm)

6. Kí hiệu $P(n)$ là tích tất cả các chữ số của số tự nhiên n. Có hay không một dãy số $\{n_k\}$ mà được cho bởi công thức $n_{k+1} = n_k + P(n_k)$ và thành phần đầu tiên $n_1 \in N$, có vô hạn không? (8 điểm)

7. Cho tam giác đều ABC. Một đường thẳng song song với AC cắt AB và BC ở M và P. Gọi D là tâm của tam giác đều PMB và E là trung điểm của AP. Hãy xác định các góc của tam giác DEC. (7 điểm)

8. Gọi x, y, z là các kích thước của một hình hộp chữ nhật. Gọi p, S, d lần lượt là chu vi, diện tích xung quanh, đường chéo của hình hộp chữ nhật ấy. Hãy chứng minh các bất đẳng thức

$$x < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right)$$

$$z > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right)$$

(7 điểm)

Lớp 10

5. Gọi M là tập hợp các số nguyên. Số 1 là số nhỏ nhất và số 100 là số lớn nhất của M. Mỗi một số trong M, trừ số 1, đều bằng tổng hai số trong M (hai số có thể như nhau). Trong các tập hợp M như vậy, hãy chỉ ra tập hợp có số phần tử là ít nhất. (6 điểm)

6. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số a mà phương trình

$$[x^{3/2}] + [y^{3/2}] = a$$

có ít nhất 1980 nghiệm tự nhiên x, y. (6 điểm)

7. Trong tứ diện $ABCD$ có $AC \perp BC$ và $DA \perp BD$. Chứng minh rằng côsin của góc hợp bởi hai đường thẳng AC và BD bé hơn CD/AB. (8 điểm)

8. Số $x \in [0,1)$ được viết dưới dạng số thập phân vô hạn. Khi hoán vị 5 chữ số đầu tiên sau dấu phẩy của nó ta được số thập phân vô hạn mới, kí hiệu là x_1. Khi hoán vị các chữ số kể từ số thứ 2 nằm trong 6 chữ số sau dấu phẩy của x_1, ta được số x_2. Nói chung, khi hoán vị các chữ số kể từ số thứ $k+1$ nằm trong $k+5$ chữ số sau dấu phẩy của số x_k, ta được số x_{k+1}.

a) Chứng minh rằng các số x_k nhận được ở trên tạo thành dãy số $\{x_k\}$ luôn có giới hạn. Kí hiệu giới hạn này là y.

b) Hãy chỉ ra thực chất, có thể vận dụng hoặc không vận dụng các bước tìm x_k ở trên, để tìm một số vô tỉ y từ một số hữu tỉ x nào đấy.

c) Hãy tìm một phân số x và nêu các bước hoán vị các chữ số để đưa về một số vô tỉ y.

(Những số trong cách viết thập phân mà có các số 9, trong bài toán này coi như không kể tới). (10 điểm)

Bài 1/120. *Bốn bạn A, B, C, D cùng đưa nhận xét về tính chất của một số nguyên dương cho trước. Mỗi bạn đưa ra ba mệnh đề về các tính chất đó, nhưng trong ba mệnh đề đó có ít nhất một mệnh đề đúng và ít nhất một mệnh đề sai.*

Bạn A nhận xét:

— Số đó chia hết cho 4.

— Số đó chia hết cho 9.

— 11 lần số đó nhỏ hơn 1000.

Bạn B nhận xét:

— Số đó chia hết cho 10.

— Số đó lớn hơn 100.

— 12 lần số đó lớn hơn 1000.

Bạn C nhận xét:

— Đó là một số nguyên tố.

— Số đó chia hết cho 7.

— Số đó nhỏ hơn 20.

Bạn D nhận xét:

— Số đó không chia hết cho 7.

— Số đó nhỏ hơn 12.

— 5 lần số đó nhỏ hơn 70.

Hỏi số đó là số nào?

Lời giải (của *Hồ Tiến Đạt* 8A Chu Văn An, Hà Nội). Gọi số cần tìm là a. Kí hiệu các mệnh đề do A, B, C, D đưa ra theo thứ tự tương ứng là A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3; D_1, D_2, D_3. Ta thấy rằng:

Nếu D_2 đúng ($a < 12$) thì D_3 cũng đúng $\Rightarrow D_1$ sai, tức là $a \vdots 7 \Rightarrow a = 7$. Song khi đó cả ba mệnh đề B đưa ra đều sai. Vậy D_2 sai, tức $a \geq 12$. Cả ba mệnh đề B đưa ra đều sai nếu $a = 12$ hoặc $a = 13$. Vậy D_3 sai. D_2 và D_3 sai nên D_1 đúng, tức a không chia hết cho 7.

Ta đã có C_2 sai. Nếu C_3 đúng thì do D_2 sai nên cả ba mệnh đề B đưa ra đều sai. Vậy C_3 sai và do đó C_1 đúng, tức a là số nguyên tố.

A_1 và A_2 đều sai nên A_3 đúng, suy ra $a < 91$.

Vì A_3 và C_1 đúng nên B_1 và B_2 sai. Vậy B_3 đúng, suy ra $a > 83$.

Kết hợp các kết luận trên ta tìm được $a = 89$.

Nhận xét: Các bạn *Phạm Xuân Hải* (8A Chu Văn An, Hà Nội) *Trần Kỳ Phúc* (11A Quang Trung, Qui Nhơn) và một số bạn khác cũng giải tương tự như cách giải trên.

N.K.M.

Bài 2/120. *Chứng minh rằng*

$$1936^{1982} + 44^{1982} + 1 \vdots 1981.$$

Lời giải. Bằng nhiều cách chứng minh khác nhau, đa số các bạn tham gia giải bài này đã có lời giải đúng. Xin nêu cách giải của bạn *Nguyễn Thanh Dương* (lớp 11/1 trường Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) và một số bạn cùng lớp.

Đặt $A = 1936^{1982} + 44^{1982} + 1$, thế thì

$A = 44^{2\cdot 1982} + 44^{1982} + 1 = 44^{3a+1} + 44^{3b+2} + 1$ (ở đây $a = 1321$, $b = 660$).

Để ý rằng $44^3 \equiv 1 \pmod{1981}$, do $44^3 - 1 = (44-1)\times(44^2+44+1) = 43\cdot 1981$. Vậy có thể viết

$$A = (1981k+1)44 + (1981l+1)44^2 + 1$$
$$= 1981q + 44^2 + 44 + 1$$
$$= 1981q + 1981 = 1981(q+1)$$

(ở đây k và l là hai số nguyên thích hợp và $q = k+l$).

Vậy $a \vdots 1981$.

Nhận xét: Với cách giải cơ bản như trên, dễ dàng giải được bài toán tổng quát:

« Chứng minh rằng $m^{2n} + m^n + 1$ chia hết cho $m^2 + m + 1$, với m và n là các số nguyên dương và n không chia hết cho 3 ».

Các bạn *Trần Tiến Đạt* (8A Chu Văn An, Hà Nội) và *Nguyễn Hoành Cường* (10B Trưng Vương, Qui Nhơn) đã giải bài toán tổng quát, nhưng giải bằng đường lối khác.

P.Q.G.

Bài 3/120. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì*

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geqslant a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2.$$

Khi nào xảy ra đẳng thức?

Lời giải (của *Đỗ Quang Đại* và *Phạm Thanh Phương* — lớp 10 chuyên toán trường ĐHSP 1 Hà Nội). Ta có:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\times$$
$$\times(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=(a+b+c)\times$$
$$\times(1/2)\left[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\right]$$
$$=(1/2)(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $(1/2)(a+b+c)$ lớn hơn mỗi cạnh a, b, c. Vậy ta có

$$(1/2)(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geqslant a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, tức là khi tam giác đã cho là tam giác đều.

Các bạn *Nguyễn Thanh Dương* (lớp 11/1 trường Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) và *Nguyễn Trọng Tuấn* (lớp 12C trường An Khê, Gia Lai — KomTum) cũng có lời giải tốt.

N.K.M.

Bài 4/120. *Xác định các số dương ABC sao cho*

$$f(x) = Ax^5 + Bx^3 + Cx$$

có giá trị nguyên với mọi x nguyên, và f(1), f(2), f(3) có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Do A, B, C dương và $f(x)$ có giá trị nguyên khi x nguyên, nên $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ phải là những số nguyên dương. Ta có

$$f(1) = A+B+C$$
$$f(2) = 32A+8B+2C,$$
$$f(3) = 243A+27B+3C.$$

Có thể coi đây là hệ phương trình đối với các ẩn A, B, C. Từ hai phương trình đầu, suy ra

$$30A+6B = f(2)-2f(1),$$

sau đó tiếp tục giải hệ, ta được

$$A = (1/120)\left[f(3)-4f(2)+5f(1)\right] \qquad (2)$$
$$B = (1/24)\left[-f(3)+8f(2)-13f(1)\right] \qquad (3)$$
$$C = (1/30)\left[f(3)-9f(2)+45f(1)\right]. \qquad (4)$$

Vì $f(1)$ nguyên dương, nên

$$f(1) \geqslant 1 \qquad (*)$$

Từ (1), do A và B dương, $f(2)$ và $f(1)$ nguyên dương, suy ra $f(2)-2f(1) \geqslant 1$, do đó

$$f(2) \geqslant 3 \qquad (**)$$

Từ (2) suy ra

$$f(3) = 120A + 4f(2) - 5f(1)$$
$$= 120A + 4\left[f(2)-2f(1)\right] + 3f(1).$$

Vậy $f(3) > 4\left[f(2)-2f(1)\right] + 3f(1) \geqslant 4+3$, do đó

$$f(3) \geqslant 8 \qquad (***)$$

Thành thử với A, B, C dương và $f(x)$ nguyên khi x nguyên, ta phải có các bất đẳng thức (*), (**), (***) (điều kiện cần).

Nếu lấy $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=8$, thì từ (2), (3), (4), suy ra

$$A = 1/120,\ B = 1/8,\ C = 13/15. \qquad (5)$$

Ta hãy chứng tỏ rằng với các giá trị (5) của A, B, C, thì $f(x)$ nguyên khi x nguyên (điều kiện đủ).

Quả vậy, khi đó ta có

$$f(x) = x^5/120 + x^3/8 + 13x/15$$
$$= (1/120)\left[x(x^2-1)(x^2-4)\right] + (1/6)\left[x(x^2-1)\right] + x \qquad (6)$$

Có thể chứng minh dễ dàng rằng tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6, và tích của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 120. Ta có

$$x(x^2-1) = (x-1)x(x+1)$$

là tích của ba số nguyên liên tiếp khi x nguyên và

$$x(x^2-1)(x^2-4) = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$$

là tích của năm số nguyên liên tiếp khi x nguyên, từ đó suy ra rằng đa thức (6) có giá trị nguyên với mọi x nguyên.

Nhận xét: Đây là một bài toán kết hợp giữa «Số học» và «Đại số». Sai lầm của nhiều bạn là:

1) Chưa thấm rõ điều kiện của bài toán (có những bạn, sau hồi lập luận phức tạp, đi đến kết luận $A = B = C = 0$!!!).

2) Nhiều bạn có ý hay trong việc chứng minh điều kiện cần (điển hình: bạn *Trần Văn Tín* – 11A Thuận An, Thanh Hóa), nhưng thiếu quan tâm đến điều kiện đủ.

3) Bạn *Nguyễn Văn Minh* (11/1 Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) đã đưa ra lời giải hợp lý nhất trong các bài giải gửi đến tòa soạn. Bạn *Trần Tuấn Hiệp* (11CT ĐHSP1 Hà Nội) đã gửi một lời giải rất chặt chẽ, nhưng quá cầu kỳ (sử dụng đến định lý Fecma nhỏ).

Bài 5/120. *a) Giả thử* $|a_i| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Chứng minh rằng*

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) + (1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \leqslant 2^n.$$

b) Giả thử $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và $0 \leqslant y_j \leqslant 1$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Chứng minh rằng

$$(1 + x_1)\ldots(1 + x_n)(1 - y_1)\ldots(1 - y_m) + (1 - x_1)\ldots(1 - x_n)(1 + y_1)\ldots(1 - y_m) \leqslant 2^{\max(n, m)}.$$

Lời giải (của các bạn *Nguyễn Văn Minh, Nguyễn Thanh Dương* – 11/1 Phan Châu Trinh, Đà Nẵng). Trước hết, để ý rằng nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ là $2n$ số không âm, thì bằng cách khai triển biểu thức $(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)\ldots(A_n + B_n)$ ta được

$$(A_1 + B_1)(A_2 + B_2)\ldots(A_n + B_n) \geqslant A_1A_2\ldots A_n + B_1B_2\ldots B_n. \quad (1)$$

a) Vì $|a_i| \leqslant 1$, nên $1 \pm a_i \geqslant 0$, do đó bằng cách lấy $A_i = 1 + a_i$, $B_i = 1 - a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, thì từ (1) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Có thể coi rằng $m \leqslant n$, tức là $n = m + k$ với k nguyên $\geqslant 0$. Đặt

$A_i = (1 + x_i)(1 - y_i) = 1 + x_i - y_i - x_iy_i$,

$B_i = (1 - x_i)(1 + y_i) = 1 - x_i + y_i - x_iy_i$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$

$A_j = 1 + x_j$, $B_j = 1 - x_j$, $(j = m + 1, \ldots, m + k = n)$,

thì từ (1) suy ra

$$(1 + x_1)\ldots(1 + x_n)(1 - y_1)\ldots(1 - y_m) + (1 - x_1)\ldots(1 - x_n)(1 + y_1)\ldots(1 + y_m)$$
$$\leqslant 2^{m+k}(1 - x_1y_1)(1 - x_2y_2)\ldots(1 - x_my_m) \leqslant 2^{m+k} = 2^n = 2^{\max(n,m)}.$$

Nhận xét: Bài toán này chỉ có vẻ phức tạp về hình thức. Có những bạn quá cầu kỳ, phải vận dụng đến bất đẳng thức Cosi, Bunhiakôpxki.

Phan Đức Chính

Bài 6/120. *Cho đa thức hệ số thực* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *và một số* $\alpha > 0$. *Biết rằng với* $|x| \leqslant 1$ *có bất đẳng thức* $|f(x)| \leqslant \alpha$, *tìm giá trị lớn nhất của* $|a|, |b|, |c|, |d|$.

Lời giải. Theo giả thiết ta có

$$f(\pm 1) \leqslant \alpha, \ f(\pm 1/2) \leqslant \alpha \quad (1)$$

Hơn nữa

$A = f(-1) = -a + b - c + d$

$B = f(-1/2) = -a/8 + b/4 - c/2 + d$

$C = f(1/2) = a/8 + b/4 + c/2 + d$

$D = f(1) = a + b + c + d$.

Từ bốn hệ thức trên, rút ra

$a = (-2/3)A + (4/3)B + (-4/3)C + (2/3)D$

$c = (1/6)A + (-8/6)B + (8/6)C + (-1/6)D$.

Kết hợp với (1) ta được

$$|a| \leqslant (2/3)|A| + (4/3)|B| + (4/3)|C| + (2/3)|D| \leqslant 4\alpha \quad (3)$$
$$|c| \leqslant (1/6)|A| + (8/6)|B| + (8/6)|C| + (1/6)|D| \leqslant 3\alpha \quad (4)$$

Xét đa thức $f(x) = 4\alpha x^3 - 3\alpha x$, với $a = 1$, $c = -3$. Ta thấy $f'(x) = 12\alpha x^2 - 3\alpha = 0$ khi $x = \pm 1/2$; $f''(x) = 24\alpha x$, $f''(1/2) = 12\alpha$, $f''(-1/2) = -12\alpha$. Do đó trong khoảng $[-1, 1]$ ta có

$$f_{\max} = f(-1/2) = \alpha, \ f_{\min} = f(1/2) = -\alpha.$$

Như vậy $|f(x)| \leqslant \alpha$ khi $|x| \leqslant 1$. Kết hợp với (3), (4), ta được $|a|_{\max} = 4\alpha$ và $|c|_{\max} = 3\alpha$.

Cũng từ giả thiết, ta có

$$|f(\pm 1)| \leqslant \alpha \ \ |f(1/2)| \leqslant \alpha, \ |f(0)| \leqslant \alpha. \quad (5)$$

Vậy

$E = f(-1) = -a + b - c + d$, $F = f(0) = d$,

$G = f(1/2) = a/8 + b/4 + c/2 + d$, $H = f(1) = a + b + c + d$.

Ta rút ra

$$b = (1/2)E + (1/2)H - F, \ d = F.$$

Kết hợp với (5) ta được

$$|b| \leqslant (1/2)|E| + (1/2)|H| + |F| \leqslant 2\alpha \quad (6)$$
$$|d| = |F| \leqslant \alpha \quad (7)$$

Xét đa thức $f(x) = 2\alpha x^2 - \alpha$, với $b = 2\alpha$, $d = -\alpha$. Ta thấy trong khoảng $[-1, 1]$ $f_{\max} = f(\pm 1) = \alpha$, $f_{\min} = f(0) = -\alpha$. Vậy trong khoảng $|x| \leqslant 1$ thì $|f(x)| \leqslant \alpha$. Kết hợp (6), (7) sẽ được

$$|b|_{\max} = 2\alpha, \ |d|_{\max} = \alpha.$$

Nhận xét: Hầu hết các bạn gửi bài tìm ra đáp số đúng, song lý luận còn thiếu chặt chẽ.

N.K.M.

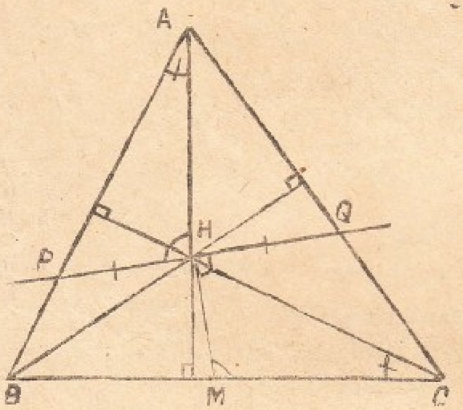
Bài 7/120. *Một đường thẳng đi qua trực tâm H của tam giác ABC, cắt các đường thẳng (AB), (AC) tại P, Q. Chứng minh rằng nếu H là* *trung điểm của đoạn thẳng PQ, thì $PQ \perp MH$, trong đó M là trung điểm cạnh BC.*

Lời giải Các bạn gửi bài dự thi đã giải theo nhiều cách khác nhau. Cách giải sau đây của bạn *Trần Tuấn Hiệp* (11 CT trường ĐHSP1, Hà Nội) là một cách giải gọn và dùng hình vẽ đơn giản.

Ta thay việc chứng minh $PQ \perp MH$ (M là trung điểm của BC) bằng việc chứng minh: nếu đường vuông góc với PQ kẻ từ H cắt BC tại M, thì M là trung điểm của BC.

Tam giác AHP đồng dạng với tam giác CMH (các góc tương ứng là các góc có các cạnh tương ứng vuông góc nên bằng nhau), vậy ta có

$$MC/HM = AH/PH \qquad (1)$$



Tam giác AHQ đồng dạng với tam giác BMH, vậy ta có

$$MB/HM = AH/QH \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), vì $PH = QH$, nên $MC = MB$, tức là M là trung điểm cạnh BC.

Bài 8/120. *Trên các cung BC, CA, AB không chứa các đỉnh A, B, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta lấy tương ứng các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy là*

$$AB_1.BC_1.CA_1 = A_1B.B_1C.C_1A$$

Lời giải (của *Phạm quốc Thắng* — 11CT Thái Phiên, Hải Phòng và *Đoàn Quang Mạnh* — 31 Lê Lai, Hải Phòng).

1) *Điều kiện cần.* Dễ thấy tam giác AIB_1 đồng dạng với tam giác BIA_1, từ đó có

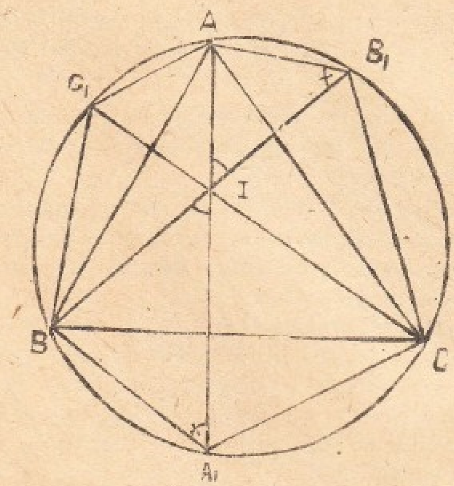
$$AB_1/A_1B = IA/IB. \qquad (1)$$

Tương tự, tam giác BIC_1 đồng dạng với tam giác CIB_1, ta có

$$BC_1/B_1C = IB/IC. \qquad (2)$$

Tam giác CIA_1 đồng dạng với tam giác AIC_1, ta có

$$CA_1/C_1A = IC/IA. \qquad (3)$$



Nhân các đẳng thức (1), (2), (3) vế với vế, ta được

$$AB_1.BC_1.CA_1/A_1B.B_1C.C_1A = 1$$

hay

$$AB_1.BC_1.CA_1 = A_1B.B_1C.C_1A. \qquad (*)$$

2) *Điều kiện đủ.* Giả sử có (*). Gọi I là giao của BB_1 với CC_1, ta chứng minh AA_1 đi qua I. Nếu trái lại thì AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_2 khác A_1. Theo phần 1), ta có

$$AB_1.BC_1.CA_2 = A_2B.B_1C.C_1A. \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra

$$CA_1/CA_2 = A_1B/A_2B$$

Như vậy thì hai tam giác A_1BC và A_2BC đồng dạng với nhau, suy ra $A_2 \equiv A_1$, đi đến mâu thuẫn. Vậy AA_1 đi qua I.

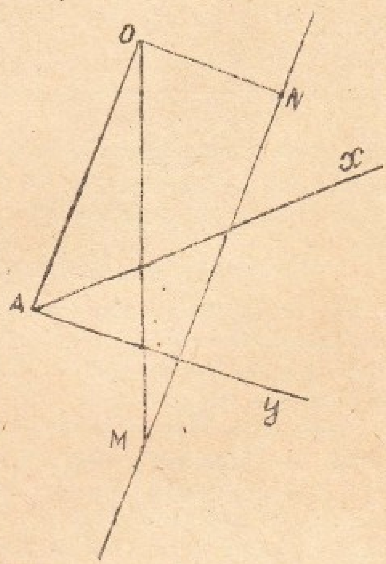
Nhận xét: Nhiều bạn khác cũng giải tương tự như cách giải trên, song phần 2) có chỗ khác.

Bài 9/120. *Trong mặt phẳng π cho một góc xAy quay xung quanh một điểm A cố định. O là một điểm ở ngoài π sao cho OA không vuông góc với π. Các đường thẳng kẻ từ O vuông góc với các mặt phẳng (OAx), (OAy) cắt π tại M, N. Chứng minh rằng MN là một đường thẳng cố định.* (Xem hình ở trang sau)

Lời giải. Rõ ràng mặt phẳng (OMN) vuông góc với OA. Như vậy M và N luôn nằm trên mặt phẳng chứa O vuông góc với OA và mặt phẳng π. Vậy M và N nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng cố định đó. Do đó MN là một đường thẳng cố định.

Nhận xét: Đối với các bạn đã được học hình học không gian thì bài này là một bài rất dễ. Song số bạn tham gia giải bài này cũng không nhiều.

P.Q.G.



Bài 10/120. *Trên một mặt cầu cho n điểm $A_1, A_2 \ldots A_n$ $(n > 1)$. Tìm quỹ tích của điểm M, sao cho*

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{A_iM}/\overline{MA_i'}) = n \qquad (1)$$

trong đó A_i' là giao điểm của MA_i với mặt cầu $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Lời giải. Gọi O là tâm và R là bán kính của mặt cầu. Vì A_i, A_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ thuộc mặt cầu và mọi A_iA_i' đồng qui tại M, nên

$$OM^2 - R^2 = \overline{MA_i}.\overline{MA_i'}$$

Do đó (1) tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = n(R^2 - OM^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})^2 = n(R^2 - OM^2)$$

$$\Leftrightarrow nMO^2 + \sum_{i=1}^{n} OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO}\sum_{i=i}^{n} \overrightarrow{OA_i} = n(R^2 - OM$$

$$\Leftrightarrow nMO^2 + \overrightarrow{MO}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = 0 \text{ (vì } OA_i^2 = R^2).$$

Đặt
$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} = n\overrightarrow{OG} \qquad (2)$$

Khi đó ta có

$$(1) \Leftrightarrow 0 = nMO^2 + \overrightarrow{MO}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}$$

$$= n(MO^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OG})$$

$$= n\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OG}) = n\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow MO \perp OG$$

Vì O cố định, A_i cố định, nên G cũng cố định.

Do các phép biến đổi trên là tương đương, nên có thể kết luận rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn (1) là mặt cầu có đường kính OG.

Nhận xét: — Điểm G thỏa mãn (2) chính là trọng tâm của hệ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tức là điểm thỏa mãn hệ thức

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = 0$$

— Các bạn *Trần Tuấn Hiệp* (11 CT ĐHSP1 Hà Nội), *Đỗ Quang Đại* và *Phạm Thanh Phương* (10 CT ĐHSP 1 Hà Nội) cũng tìm ra quỹ tích, song cách giải quá cồng kềnh.

N.K.M.

DANH SÁCH
CÁC BẠN GỬI LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN RA TRONG SỐ BÁO 120

ĐÀO PHÚC ĐẢM (Hùng Vương, Vĩnh Phú); Hồ Tiến Đạt, Phạm Xuân Hải (Chu Văn An, Hà Nội); Nguyễn Chi Sơn, Phạm Quốc Thắng (Thái Phiên, Hải Phòng); Phạm Khương chuyên toán Hồng Gai, Quảng Ninh); Trần Văn Tín (Dĩ An, Thuận An, Thanh Hóa); Trần Nam Dũng, Nguyễn Văn Minh, Nguyễn Thanh Dương, Trần Hữu Huân, Nguyễn Đức Minh, Nguyễn Văn Mơ (Phan Châu Trinh, Đà Nẵng); Trần Kì Phúc, Đặng Vĩnh Hưng (Quang Trung, Qui Nhơn); Nguyễn Hoành ưởng (Trưng Vương, Quy Nhơn); Tống Châu Nghị (Pleiku), Nguyễn Trọng Tuấn (An Khê, Gia Lai – Kon Tum); Đặng Trung Lai (Nguyễn Trãi, T.p. Hồ Chí Minh); Ngô Đình Long (Lê Hồng Phong, T.p. Hồ Chí Minh); Đặng Trường Sơn (chuyên toán ĐHTH Hà Nội); Nguyễn Quang Dũng, Nguyễn Tiến Ban, Đỗ Quang Đại, Phạm Thanh Phương, Trần Tuấn Hiệp, Trần Thanh Trúc (chuyên toán ĐHSP 1 Hà Nội); Nguyễn Linh Vũ (11P5 Trưng Vương.)

Các bạn sau đây hiện không phải là học sinh phổ thông cũng gửi bài giải đến tòa soạn:

Đoàn Quang Mạnh (Hải Phòng), Nguyễn Viết Cường (Sơn La), Mai Văn Xuyến (Thanh Hóa), Đoàn Thế Vinh (Bình Trị Thiên), Phạm Xuân Sơn (Thành phố Hồ Chí Minh), Trần Hải (Cửu Long).

ĐỀ RA kỳ này

$x^n + y^n = z^n$, $n = 2$

Bài 1/123. Cho tập hợp A gồm 992 số tự nhiên phân biệt, mỗi số chưa vượt quá k. Tìm giá trị lớn nhất của k sao cho trong A có ít nhất một số là bội của số khác cũng thuộc A.

Nguyễn Nam Sơn (Quảng Ninh)

Bài 2/123. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y, z) của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1982 \\ x + y + z = 68 \end{cases}$$

Phan Đức Chính (Hà Nội)

Bài 3/123. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = |x| + y \\ y^2 = |y| + x \end{cases}$$

Phan Đức Chính

Bài 4/123. Tìm tất cả cc cặp số tự nhiên (m, n) để $(p + 1)^{2m} - p^n|$ đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó p là số nguyên tố.

Ngô Duy Ninh (Quy Nhơn)

Bài 5/123. Giải và biện luận theo k bất phương trình

$$x + \sqrt{k + \sqrt{x}} < k$$

Phan Đức Chính

Bài 6/123. Giả thử a, b, c là ba số không âm, liên hệ với nhau bằng biểu thức $a+b+c=1$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị có thể có được của biểu thức sau đây

$$S = \frac{a}{1 + b - a} + \frac{b}{1 + c - b} + \frac{c}{1 + a - c}$$

Tạ Hồng Quảng (Viện Toán học)

Bài 7/123. Hãy tìm các tứ diện có thể tích lớn nhất nằm trọn bên trong một khối lập phương cho trước.

Phạm Hoàng (Hà Nội)

Bài 8/123. Trong không gian cho bốn điểm phân biệt, hỏi bốn điểm đó phải thỏa mãn điều kiện gì để bốn đường tròn, mỗi đường tròn đi qua ba trong bốn điểm đó, bằng nhau?

Nguyễn Đăng Phất (Hà Nội)

Bài 9/123. Cho hình chóp đều $S.ABCDEF$. Qua một điểm O trên đường cao SH của hình chóp, ta dựng một mặt phẳng, cắt SA, SB, SC, SD, SE, SF tương ứng tại A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. Chứng minh các hệ thức

1) $1/SA_1 + 1/SD_1 = 1/SB_1 + 1/SE_1 = 1/SC_1 + 1/SF_1$.

2) $1/SA_1 + 1/SC_1 + 1/SE_1 = 1/SB_1 + 1/SD_1 + 1/SF_1$.

Lê Quốc Hán (ĐHSP Vinh)

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 10/123. Giải phương trình

$$\sqrt{x - 1 + \sqrt[3]{(x^2-1)(x-1)}} + \sqrt{x + 1 + \sqrt[3]{(x^2-1)(x+1)}} = \sqrt{2x^3}$$

Ngô Đức Hoàng
(Lớp 11, trường Thanh Đa, thành phố Hồ Chí Minh)

GIẢI ĐẠI SỐ BẰNG CÔNG CỤ HÌNH HỌC

LÂU nay trong quá trình học tập chúng ta rất hay dùng công cụ đại số để giải hình học, nhưng việc giải đại số bằng công cụ hình học thì còn ít. Học tập ở trường chúng tôi rất thích dùng công cụ hình học để giải đại số, bởi vì nhiều bài toán đại số mà chỉ đơn thuần dùng công cụ đại số để giải thì rất khó, nhưng khi đã chuyển nó sang dạng hình học thì rất đơn giản. Trong bài báo này tôi muốn giới thiệu với các bạn vài bài toán đại số và dùng hình học để giải.

Bài 1. Chứng minh bất đẳng thức

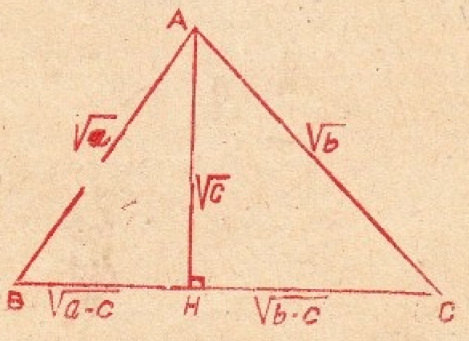
$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}$$

(bài thi vào đại học năm 1980).

Ta dựng tam giác ABC có $AB = \sqrt{a}$, $AC = \sqrt{b}$, đường cao $AH = \sqrt{c}$. Theo định lí Pi-ta-go ta có ngay

$$BH = \sqrt{a - c}, \qquad CH = \sqrt{b - c}.$$

Như vậy vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh chính bằng hai lần tổng diện tích của hai tam giác AHB và AHC, tức là bằng hai lần diện tích tam giác ABC. Mặt khác, hai lần diện tích tam giác ABC không lớn hơn tích $AB.AC = \sqrt{ab}$. Bất đẳng thức được chứng minh.



Bài 2. Tìm giá trị bé nhất của hàm số

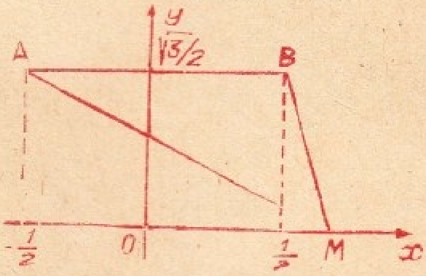
$$y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Ta biến đổi

$$y = \sqrt{(x - 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} + \sqrt{(x + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

Trong hệ trục tọa độ xOy ta lấy các điểm $A(-1/2, \sqrt{3}/2)$, $B(1/2, \sqrt{3}/2)$, $M(x, 0)$, thì ta có

$$y = BM + AM.$$



Bài toán của ta trở thành bài toán hình học: Cho tam giác ABM có các đỉnh A và B cố định, còn đỉnh M chạy trên đường thẳng song song với cạnh AB. Tìm vị trí của M để chu vi tam giác ABM nhỏ nhất. Bài toán này rất đơn giản, chu vi tam giác AMB đạt nhỏ nhất khi tam giác MAB cân $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y_{\min} = 2$.

Bài 3. Cho a, b, c, d là các số thực sao cho

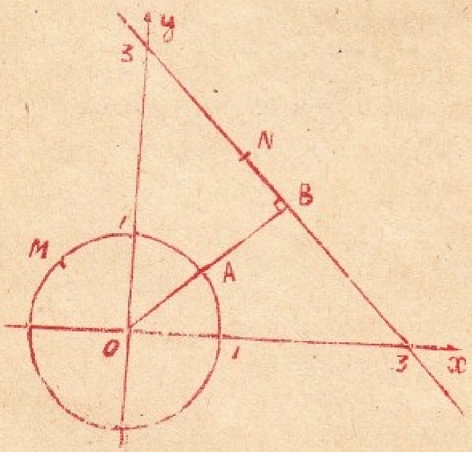
$$a^2 + b^2 = 1, \qquad (1)$$

$$c + d = 3. \qquad (2)$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$ac + bd + cd \leqslant (9 + 6\sqrt{2})/4$$

Đây là bài toán nếu giải bằng đại số thì khó, bởi vì vế trái bất đẳng thức không đối xứng và vế phải là số phức tạp. Bây giờ ta giải bằng hình học.



Quĩ tích những điểm $M(a, b)$ thỏa mãn (1) là đường tròn tâm O bán kính 1.

Quĩ tích những điểm $N(c, d)$ thỏa m[illegible] đường thẳng $y = -x + 3$.

Mặt khác bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(20 - 11 + 6\sqrt{2})/4 \geqslant ac + bd + cd \Leftrightarrow$$

$$10 - 2(ac + bd + cd) \geqslant (11 - 6\sqrt{2})/2. \qquad (3)$$

Thay $a^2 + b^2 = 1$

$9 - 2cd = c^2 + d^2$ vào (3) ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \geqslant (3 - \sqrt{2})^2/2$$

$$\Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 \geqslant (3 - \sqrt{2})^2/2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \geqslant (3 - \sqrt{2})/\sqrt{2}.$$

Vế trái của bất đẳng thức là đoạn MN với M thuộc đường tròn, N thuộc đường thẳng. Vế phải là đoạn AB. Ta luôn có $MN \geqslant AB$, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} \\ y = \sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} \\ z = \sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} \end{cases}$$

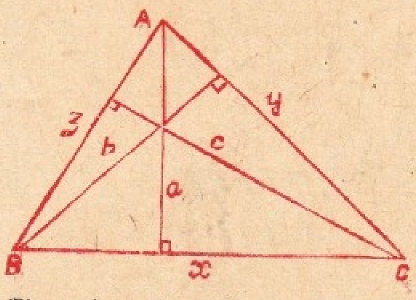
Cho a, b, c lớn hơn không và $1/a + 1/b > 1/c$, $1/b + 1/c > 1/a$, $1/c + 1/a > 1/b$. Dựng tam giác ABC có $AC = y$, $BC = z$, đường cao hạ từ C bằng a. Theo phương trình (1), ta có $AB = x$. Dựng tam giác $A_1B_1C_1$ có $A_1B_1 = x$, $C_1B_1 = z$, đường cao hạ từ B_1 bằng b. Theo phương trình (2), ta có $A_1C_1 = y$. Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ có $A_2B_2 = x$, $C_2A_2 = y$, đường cao hạ từ A_2 bằng c. Theo phương trình (2) thì B_2C_2 bằng z.

Các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ bằng nhau nên chúng có diện tích bằng nhau

$$ax = by = cz = 2S \qquad (*)$$

(S là diện tích mỗi tam giác).

Ba tam giác nói trên được ghép lại thành tam giác ABC có các cạnh x, y, z và các đường cao tương ứng với các cạnh đó là a, b, c. Ta tính các cạnh của tam giác theo a, b, c.



Theo công thức Hêrông, ta có

số M

Đó là $= \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$.

1) Mà $p = (x+y+z)/2 = S(1/a + 1/b + 1/c$ do (*), nên

$$S = S^2\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow S = 1\Big/\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)}$$

Ta tìm được: $x = 2S/a$, $y = 2S/b$, $z = 2S/c$, S được tính bằng công thức trên.

Bài 5. Cho p, q là các số thực sao cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm thực có trị tuyệt đối không vượt quá 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = p^2(p^2 + 2q^2 - 3) + q^2(q^2 - 3)$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$. Theo giả thiết, ta có $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$. Vậy

$$-1 \leqslant (x_1 + x_2)/2 = -p/2 \leqslant 1,$$

và $f(1) \geqslant 0$, $f(-1) \geqslant 0$.

Vì phương trình có hai nghiệm thực, nên $\triangle \geqslant 0$. Hệ điều kiện được viết lại là

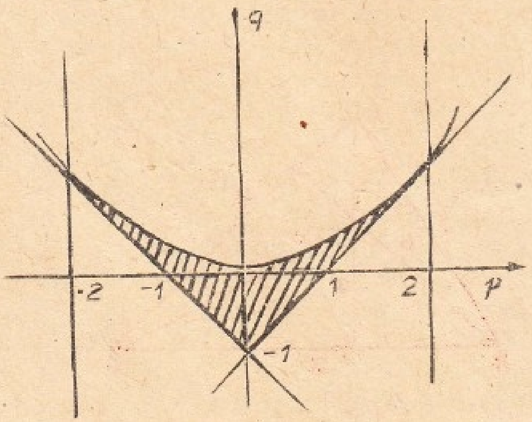
$$\begin{cases} p^2 - 4q \geqslant 0 \\ -2 \leqslant p \leqslant 2 \\ 1 + p + q \geqslant 0 \\ 1 - p + q \geqslant 0 \end{cases}$$

Ta biểu diễn miền nghiệm của hệ trên mặt phẳng pOq. Phần mặt phẳng bị gạch kể cả biên là miền nghiệm của hệ

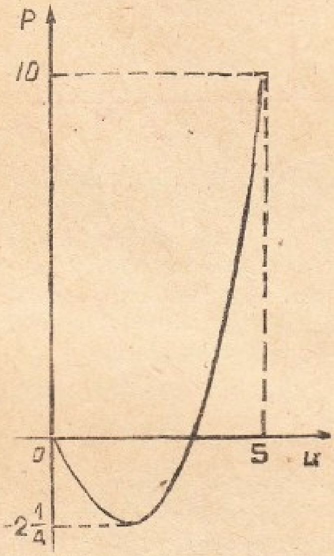
Ta có thể viết

$$P = (p^2 + q^2)^2 - 3(p^2 + q^2).$$

Đặt $u = p^2 + q^2$. Đây là phương trình đường tròn có tâm là O và bán kính biến thiên trên miền nghiệm của hệ trên. Nhìn trên đồ thị ta thấy u_{max} khi đường tròn đi qua hai điểm $(-2, 1)$ và $(2, 1) \Rightarrow \sqrt{u} = \sqrt{5} \Rightarrow u = 5$, và u_{min} khi $u = 0$.



Ta cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = u^2 - 3u$ với $0 \leqslant u \leqslant 5$. Ta vẽ đồ thị của hàm số $P = u^2 - 3u$ trên đoạn $[0, 5]$.



Nhìn vào đồ thị, ta thấy giá trị lớn nhất của P bằng 10 và giá trị nhỏ nhất của P bằng 2,25.

Do khuôn khổ bài báo, tôi chỉ xin trình bày mấy bài toán nhỏ vậy thôi. Mong các bạn trong quá trình học hãy làm quen với phương pháp này, chắc chắn rằng các bạn sẽ thu được nhiều điều thú vị và bổ ích.

Bây giờ xin tặng các bạn hai bài toán

1. Cho a, b, c, d là các số sao cho

$$|a-b| + |a+b| = 2, \quad c + d = 3$$

Chứng minh rằng

$$11 - |a^2 - b^2| - 2(cd + ac + bd \geqslant 1/2.$$

2. Khảo sát số nghiệm của hệ phương trình theo a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Nguyễn Phương Mai
(lớp 11 chuyên toán, ĐHSP Vinh)

THI VÀO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG PHÍA BẮC

Tháng 7-1981 — Đề thi môn Toán

Câu 1. Cho hàm số

$$y = \frac{(m+1)(x^2-3x)+2(2m+1)}{mx-m}$$

trong đó m là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 1$.

Tìm các điểm trên đồ thị đó có tọa độ là những số nguyên.

2) Chứng minh rằng với mọi giá trị khác 0 của m, đồ thị của hàm số đã cho luôn có một đường tiệm cận cố định, còn đường tiệm cận thứ hai của nó luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 2. Gọi a, b, c lần lượt là các cạnh đối diện với các góc A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn :

$$\begin{cases} \dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \\ a = 2b\cos C, \end{cases}$$

thì tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của tổng các bình phương các nghiệm của phương trình bậc hai :

$$x^2 - (3\sin a - \cos a)x - 4 - 4\cos 2a = 0$$

khi tham số a biến thiên.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng qua A và vuông góc với cạnh SC cắt SB ở B', cắt SC ở C', cắt SD ở D'.

1) Chứng minh rằng hình tứ giác $AB'C'D'$ có hai góc đối diện vuông.

2) Chứng minh rằng nếu S di chuyển trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ tại A, thì mặt phẳng $AB'C'D'$ luôn đi qua một đường thẳng cố định và các điểm A, B, B', C, C', D, D' cùng nằm trên một mặt cầu cố định.

3) Giả sử góc giữa cạnh SC và mặt bên SAB bằng x. Tính tỷ số giữa thể tích của hình chóp $S.AB'C'D'$ và thể tích của hình chóp $S.ABCD$ theo x, biết rằng $AB = BC$.

Câu 5. Tìm m để cho biểu thức

$$9x^2 + 20y^2 + 4z^2 - 12xy + 6xz + myz$$

luôn dương với mọi x, y, z không đồng thời bằng 0.

Ghi chú: Toàn bộ đề trên là cho thí sinh khối A. Thí sinh khối B không phải làm phần 2) câu 1, phần 3) câu 4, và câu 5.

THI VÀO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG PHÍA NAM

Tháng 7-1981

Đề thi môn Toán khối A1 (cho các trường ĐHTH HCM, Huế, Đà Lạt, ĐHBK HCM, Đà Nẵng,...)

PHẦN BẮT BUỘC

Câu 1. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2+2mx-m}{x^2+1}.$$

a) Xác định tất cả các giá trị m sao cho đường thẳng $y = 2$ tiếp xúc với đồ thị của hàm số.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^2+4x-2}{x^2+1}.$$

c) Dùng đồ thị trên để biện luận theo tham số k số nghiệm của phương trình

$$(k-1)x^2 - 4x + k + 2 = 0.$$

Câu 2. a) Bằng cách biểu diễn $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ qua $\cos 2x$, chứng minh rằng

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \leqslant$$
$$\leqslant (1/2)\left(1 + ab + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\right).$$

b) Sử dụng kết quả trên, chứng minh rằng

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \leqslant 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh được phép trọn một trong hai đề sau :

Đề thứ nhất

Câu 3a. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ trực chuẩn Ox, Oy, gọi A là điềm có các tọa

Ch.
nếu, ; 0) và xem điểm M di chuyển trên đường lại tố (C) tâm O bán kính 2. Gọi H là hình chiếu Nhg góc của M lên Oy.

a) Tính các tọa độ của giao điểm P của các đường thẳng OM và AH theo góc $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

b) Xác định và vẽ quỹ tích của P khi M chạy trên (C). Cho biết các đặc điểm của quỹ tích này.

Câu 4a. Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi số thực x, và thỏa mãn các điều kiện:

(1) $f(x) \geqslant 1 + x$ với mọi x.

(2) $f(x+y) \geqslant f(x).f(y)$ với mọi x, y.

a) Chứng minh rằng với mọi số thực x và mọi số tự nhiên n, ta có

$$f(x) \geqslant [f(x/2^n)]^{2^n}$$

b) Từ (1) hãy chỉ ra một khoảng mở chứa O để $f(x) > 0$ trên khoảng đó.

Từ các kết quả đã tìm được, hãy suy ra rằng

$f(x) > 0$ với mọi x.

c) Chứng minh rằng với mọi x và mọi h ($|h| < 1$), ta có

$$hf(x) \leqslant f(x+h) - f(x) \leqslant hf(x)/(1-h).$$

d) Chứng tỏ rằng đạo hàm $f'(x)$ luôn luôn tồn tại, từ đó tìm ra biểu thức của hàm $f(x)$.

Đề thứ hai

Câu 3b. a) Giải phương trình lượng giác

$$4\cos x + 2\cos 2x + \cos 4x = -1.$$

b) Chứng minh rằng phương trình

$$4\cos x + 2\cos 2x + \cos 4x = -7$$

không có nghiệm.

Câu 4b. Trong mặt phẳng P, cho hai đường thẳng d_1 d_2 cắt nhau tại điểm A và tạo với nhau một góc α $(0 < \alpha \leqslant 90°)$. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng P tại A, lấy điểm B với $AB = h$; trên đường thẳng d_2 đi qua B và song song với d_2, lấy điểm C với $BC = a$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên d_1.

a) Tính độ dài AD và khoảng cách từ C đến mặt phẳng ABC. Từ đó suy ra thể tích của tứ diện $ABCD$.

b) Xác định tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

c) Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng d_2

Đề thi môn toán khối A2 (cho các trường ĐHSP HCM, Huế, Qui Nhơn, ĐH Kinh tế, Tài chính, ĐH Hải sản Nha Trang...)

PHẦN BẮT BUỘC

Giống phần bắt buộc đề khối A1, nhưng bỏ đi phần c) câu 1.

PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh được phép chọn một trong hai đề:

Đề thứ nhất

Câu 3a. Trên mặt phẳng với hệ trục tọa độ trực chuẩn Ox, Oy, xem các cônic (C_m) có phương trình

$$(m^2 - 4)x^2 - 4y^2 = 4(m^2 - 4)$$

trong đó m là tham số.

a) Tùy theo các trị số của m, chỉ rõ bản chất của (C_m), và cho biết tâm, đỉnh, tiêu điểm và tiệm cận nếu có.

b) Vẽ (C_0) và $(C_{2\sqrt{2}})$ trên cùng một hình.

Câu 4a. Với mỗi số nguyên dương n, đặt

$$I_n = \int_{n-1}^{n} \frac{x^{n-1} + 1}{x^n + 1}\, dx.$$

a) Chứng minh rằng dãy (I_n) $n = 1, 2, \ldots$) bị chặn.

b) Chứng minh rằng

$$I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Đề thứ hai

Câu 3b. Cho phương trình

$$\sin 2x\,(\sin x + \cos x) = m$$

a) Chứng minh rằng nếu $|m| > \sqrt{2}$ thì phương trình không có nghiệm.

b) Giải phương trình khi $|m| = \sqrt{2}$.

Câu 4b. Trong mặt phẳng P cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Giả thử M là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn, khác với A và B; Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AB, đặt $x = AB$. Xem nửa đường thẳng Mu vuông góc với P tại M, giả thiết Mu luôn luôn ở về cùng một phía đối với P khi M thay đổi; trên Mu lấy điểm S với $SM = MH$.

a) Tính độ dài các cạnh của tứ diện $SABM$.

b) Chứng tỏ rằng góc nhị diện cạnh AB tạo nên bởi các mặt phẳng P và SAB có giá trị không đổi khi M thay đổi.

c) Xác định vị trí tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $SABM$. Tính bán kính hình cầu ấy theo R và x. Với giá trị nào của x thì bán kính ấy có giá trị lớn nhất?

In tại xí nghiệp in 75–77 Hàng Bồ Hà Nội. Chỉ số: 12884
Số in 35/82. In xong và gửi lưu chiểu tháng 4-1982

Giá: 1,00đ