N V Hưng https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Số 122

6

1981

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG

Dây nói: 52825

MỞ RỘNG KHÁI NIỆM ĐƯỜNG TRÒN ƠLE VÀ ĐƯỜNG THẲNG ƠLE CHO ĐA GIÁC NỘI TIẾP

Các bạn thân mến!

Khái niệm đường tròn Ơle và đường thẳng Ơle đã được xây dựng đối với tam giác. Dưới góc độ của vectơ, ở bài này tôi xin giới thiệu một cách mở rộng các khái niệm này đối với đa giác nội tiếp. Trước hết ta hãy nhìn lại trường hợp tam giác ở góc độ này.

Đối với tam giác $A_1A_2A_3$, các bạn dễ dàng chứng minh được ngay hai tính chất sau đây:

Tính chất 1: Điều kiện cần và đủ để M là trọng tâm của tam giác $A_1A_2A_3$ là:

$$\overrightarrow{OM} = (1/3)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) \qquad (1)$$

với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$.

Tính chất 2: Điều kiện cần và đủ để H là trực tâm của tam giác $A_1A_2A_3$ là:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}. \qquad (2)$$

với O làm tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_1A_2A_3$.

Ngoài ra nếu gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là các điểm đối xứng của O qua A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 thì ta sẽ có tính chất:

Tính chất 3: Các đường tròn có tâm lần lượt là H_1, H_2, H_3, và bán kính bằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_1A_2A_3$ sẽ cắt nhau tại một điểm chung H chính là trực tâm của tam giác $A_1A_2A_3$.

(Các bạn hãy tự chứng minh ba tính chất trên)

Bây giờ gọi E là điểm giữa của OH, thế thì:

$$\overrightarrow{OE} = (1/2)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) \qquad (3)$$

Các bạn đã biết đường tròn tâm E bán kính bằng nửa bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ đi qua các trung điểm M_1, M_2, M_3 của các cạnh A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2; các trung điểm C_1, C_2, C_3 của các đoạn thẳng HA_1, HA_2, HA_3; các chân đường vuông góc B_1, B_2, B_3 hạ từ các đỉnh A_1, A_2, A_3 xuống các cạnh đối diện. Đường tròn này được gọi là *đường tròn 9 điểm*, hay còn gọi là *đường tròn Ơle* của tam giác $A_1A_2A_3$.

Ngoài ra, do (1), (2), (3) nên 4 điểm O, M, H, E là thẳng hàng và đường thẳng đi qua 4 điểm này gọi là đường thẳng Ơle của tam giác $A_1A_2A_3$.

Bước đầu ta thử mở rộng các khái niệm trên cho một tứ giác nội tiếp.

Giả sử ta có tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$, đường tròn S có tâm O, bán kính R là đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.

Bằng một cách nhìn tương tự các đẳng thức (1), (2), (3), ta định nghĩa:

Định nghĩa 1: Trực tâm H của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong đường tròn S, tâm O, bán kính R là điểm thỏa mãn:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} \qquad (2')$$

Định nghĩa 2: Trọng tâm M của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong đường tròn S, tâm O, bán kính R là điểm thỏa mãn:

$$\overrightarrow{OM} = (1/4)\,(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}). \qquad (1')$$

Định nghĩa này hoàn toàn phù hợp với khái niệm trọng tâm mà ta biết từ trước đến nay (các bạn tự chứng minh).

Định nghĩa 3: Nếu H là trực tâm của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong đường tròn S, tâm O, bán kính R thì đường tròn với tâm E là trung điểm của OH, bán kính $R/2$ được gọi là *đường tròn Ơle* của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$. Như vậy 4 điểm O, M, E, H sẽ nằm trên một đường thẳng, đường thẳng này gọi là *đường thẳng Ơle* của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$.

Bây giờ ta hãy nghiên cứu một vài tính chất của các khái niệm vừa mở rộng đối với tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$.

Tính chất 3': Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$; thế thì các đường tròn tâm là H_1, H_2, H_3, H_4 có cùng bán kính R (bán kính đường tròn ngoại tiếp) sẽ cắt nhau tại một điểm H chính là trực tâm của tứ giác.

Chứng minh: Ta có:

$$HH_4 = |\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OH_4}| = |(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})| = |\overrightarrow{OA_4}| = R.$$

Tương tự ta có: $HH_1 = HH_2 = HH_3 = R$.

Vậy 4 điểm H_1, H_2, H_3, H_4 nằm trên đường tròn tâm H bán kính R, ta có điều phải chứng minh.

Tính chất 4: Bốn đường tròn Ơle của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ cắt nhau tại một điểm E chính là tâm đường tròn Ơle của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$.

Chứng minh: Nếu gọi E_4 là tâm đường tròn Ơle của tam giác $A_1A_2A_3$ thì: $EE_4 = |\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OE_4}|$

$$= |(1/2)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}) - (1/2)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})| = (1/2)\,|\overrightarrow{OA_4}| = R/2.$$

Tương tự nếu gọi E_1, E_2, E_3 là tâm đường tròn Ơle của các tam giác $A_2A_3A_4$; $A_3A_4A_1$; $A_4A_1A_2$ ta có:

$$EE_1 = EE_2 = EE_3 = R/2.$$

Như vậy các điểm E_1, E_2, E_3, E_4 nằm trên đường tròn Ơle của tứ giác $A_1A_2A_3A_4$, hay các đường tròn Ơle của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ cắt nhau tại điểm E.

Cuối cùng, các bạn hãy tự chứng minh tính chất sau đây:

Tính chất 5: Gọi M_1, M_2, M_3, M_4 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ thì 4 đoạn thẳng A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 sẽ cắt nhau tại một điểm M chính là trọng tâm của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$ và: $A_iM/MA_i = 3$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

Không những thế, các bạn còn có thể chứng minh được ba tính chất rất thú vị nữa:

Tính chất 6. Gọi M_{ij} là trung điểm đoạn A_iA_j $(i \neq j)$ thì M là giao điểm chung của các đoạn thẳng $M_{ij}M_{kl}$ với (i, j, k, l) là một hoán vị của $(1, 2, 3, 4)$.

Tính chất 7: Các đoạn thẳng A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4 cắt nhau tại một điểm E là tâm đường tròn Ơle của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$.

Tính chất 8: Sáu đường vuông góc hạ từ trung điểm của một cạnh (hay một đường chéo) tới cạnh đối diện (hay đường chéo còn lại) cũng cắt nhau tại tâm đường tròn Ơle của tứ giác nội tiếp $A_1A_2A_3A_4$.

Như vậy các bạn sẽ hình dung ra cách mở rộng khái niệm đường tròn Ơle và đường thẳng Ơle cho một đa giác nội tiếp bất kỳ. Chúng ta định nghĩa bằng qui nạp: giả sử các khái niệm trên đã định nghĩa cho tất cả các đa giác nội tiếp có số cạnh nhỏ hơn n; thế thì:

Định nghĩa 1': Trực tâm H của n – giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$ nội tiếp trong đường tròn S là giao điểm chung của n đường tròn bằng đường tròn S và có tâm tại các trực tâm của $(n-1)$ – giác tạo bởi $(n-1)$ đỉnh của n – giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Như vậy sẽ có:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$$

với O là tâm của đường tròn ngoại tiếp n – giác $A_1A_2\ldots A_n$.

Định nghĩa 2': Trọng tâm M của n – giác $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp đường tròn S là giao điểm chung của các đoạn thẳng nối mỗi đỉnh của n–giác với trọng tâm của $(n-1)$–giác tạo bởi các đỉnh còn lại. Như vậy ta sẽ có M chia trong các đoạn thẳng này theo tỉ số $(n-1):1$ kể từ đỉnh của n–giác và:

$$\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})/n.$$

Trường hợp $n=2$, trọng tâm M của đoạn thẳng A_1A_2 là trung điểm của đoạn thẳng đó.

Định nghĩa 3': Đường tròn Ơle của n-giác $A_1A_2A_3...A_n$ nội tiếp đường tròn S là đường tròn đi qua tất cả các tâm của các đường tròn Ơle của các $(n-1)$-giác tạo bởi $(n-1)$ đỉnh của n-giác. Như thế tâm E của đường tròn này thỏa mãn:

$$\overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n})/2.$$

Trường hợp $n=2$, đường tròn Ơle của dây cung A_1A_2 của đường tròn S bán kính R là đường tròn bán kính $R/2$ có tâm tại trung điểm của dây cung A_1A_2.

Bốn điểm O, M, H, E nằm trên một đường thẳng gọi là *đường thẳng Ơle* của n-giác $A_1A_2...A_n$.

Việc chứng minh tính tồn tại của các định nghĩa 1', 2', 3' là các bài toán dành cho các bạn tự giải.

Ngoài ra, các bạn có thể thấy thêm các tính chất:

Tính chất 6': Tất cả các đoạn thẳng nối trọng tâm của k-giác tạo bởi k đỉnh của n-giác với trọng tâm của $(n-k)$-giác tạo bởi $(n-k)$ đỉnh còn lại đều đi qua trọng tâm M của n-giác.

Tính chất 7': Các đoạn thẳng nối mỗi đỉnh của n-giác với trực tâm của $(n-1)$-giác tạo bởi $(n-1)$ đỉnh còn lại sẽ cắt nhau tại tâm đường tròn Ơle của n-giác, và bị tâm này chia thành 2 đoạn bằng nhau.

Hơn nữa: Tất cả các đoạn thẳng nối trực tâm của k-giác tạo bởi k đỉnh của n-giác với trực tâm của $(n-k)$-giác tạo bởi $(n-k)$ đỉnh còn lại cũng đều đi qua tâm đường tròn Ơle của n-giác và bị tâm này chia thành 2 đoạn bằng nhau. (Ở đây ta hiểu trực tâm H_{ij} của đoạn A_iA_j là điểm thỏa mãn: $(\overrightarrow{OH_{ij}} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j})$.

Tính chất 8': $n(n-1)/2$ đường vuông góc hạ từ tâm đường tròn Ơle của $(n-2)$-giác tạo bởi $(n-2)$ đỉnh của n-giác tới đường thẳng nối 2 đỉnh còn lại cắt nhau tại một điểm chính là tâm đường tròn Ơle của n-giác.

Cuối cùng tôi xin gợi ra một hướng tổng quát hơn nữa khái niệm đường tròn Ơle và đường thẳng Ơle cho đa giác nội tiếp, các bạn hãy khai phá thêm.

Giả sử cho đa giác nội tiếp $A_1A_2A_3...A_n$, ta định nghĩa *đường tròn Ơle thứ k* của đa giác là đường tròn tâm là điểm $E^{(k)}$ thỏa mãn:

$$\overrightarrow{OE^{(k)}} = (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n})/k$$

và bán kính bằng R/k; trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp n-giác $A_1A_2...A_n$, còn R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp này.

Như vậy tâm của đường tròn Ơle thứ 1 là trực tâm, tâm của đường tròn Ơle thứ n là trọng tâm của n-giác, còn đường tròn Ơle thứ 2 chính là đường tròn Ơle ta đã gọi từ trước.

Các bạn hãy chứng minh các tính chất:

Tính chất 9: Các tâm của các đường tròn Ơle thứ k của $(n-1)$-giác tạo bởi $(n-1)$ đỉnh nào đó của một n-giác nội tiếp sẽ cùng nằm trên đường tròn Ơle thứ k của n-giác này.

Tính chất 10: Các đoạn thẳng nối tâm của đường tròn Ơle thứ i của k-giác tạo bởi k đỉnh nào đó của một n-giác nội tiếp với tâm của đường tròn Ơle thứ j của $(n-k)$-giác tạo bởi $(n-k)$ đỉnh còn lại sẽ đi qua tâm $E^{(i+j)}$ của đường tròn Ơle thứ $(i+j)$ của n-giác nội tiếp đó và bị $E^{(i+j)}$ chia theo tỉ số $j:i$ kể từ tâm đường tròn Ơle của k-giác.

Tính chất 11: Các đường vuông góc hạ từ tâm đường tròn Ơle thứ i của các $(n-2)$-giác tạo bởi $(n-2)$ đỉnh nào đó của một n-giác nội tiếp xuống đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại sẽ cắt nhau tại tâm $E^{(i)}$ của đường tròn Ơle thứ i của n-giác đó.

Các bạn thấy ngay là tất cả các tâm đường tròn Ơle nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này gọi là đường thẳng Ơle.

Cuối cùng chúc các bạn có thêm nhiều phát hiện bổ ích hơn nữa.

LÊ THỐNG NHẤT

(Tham khảo cuốn « Quy nạp trong hình học » của I. M. Ia-Glôm xuất bản năm 1963 tại Mat-xcơ-va).

Bài 1/119. *Hãy tìm tất cả các số chính phương có sáu chữ số mà tận cùng của nó là ba chữ số khác không giống nhau.*

Lời giải (của *Nguyễn Duy Thái Sơn*, 80B Nguyễn Huệ, Huế).

Trước hết ta có vài nhận xét:

1) Số chính phương có tận cùng là 1,9 sẽ có chữ số hàng chục là số chẵn. Thật vậy, số chính phương ấy sẽ có dạng:

$(10a \pm 1)^2 = 100a^2 \pm 20a + 1$,

$(11a \pm 3)^2 = 100a^2 \pm 60a + 9$; $a = 0, 1, 2, \dots$

Từ hai đẳng thức này suy ra đpcm

2) Dễ dàng thấy rằng số chính phương có tận cùng là 5 sẽ có chữ số hàng chục là 2.

3) Số chính phương có tận cùng là 6, sẽ có chữ số hàng chục là số lẻ. Thật vậy, số chính phương ấy có dạng:

$(10a \pm 4)^2 = 100a^2 \pm 80a + 16$; $a = 0, 1, 2, \dots$

Từ đây dễ dàng suy ra đpcm.

Trở lại bài toán: Giả sử số phải tìm, viết dưới dạng thập phân là $A^2 = \overline{mnpxxx}$; $m, n, p, x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ và $mx \neq 0$.

Vì A^2 là số chính phương và do $x \neq 0$ nên x chỉ có thể nhận các giá trị 1, 4, 5, 6, 9. Lại do 3 nhận xét trên nên ta chỉ có $x = 4$. Do vậy số phải tìm có dạng:

$$A^2 = \overline{mnp444}.$$

Suy ra $A = 10a + 2$ hoặc $A = 10a - 2$.

Xét hai trường hợp:

1) $A = 10a + 2$. Khi đó: $A^2 = 100a^2 + 40a + 4$. Suy ra $40a + 4 \equiv 44 \pmod{100} \Rightarrow 40(a-1) \equiv 0 \pmod{100} \Rightarrow 2(a-1) \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow a = 5b + 1$. Vậy: $A = 10a + 2 = 50b + 12$. Suy ra $A^2 = 2500b^2 + 1200b + 144 \equiv 444 \pmod{1000} \Rightarrow 100b(5b+2) \equiv 300 \pmod{1000} \Rightarrow b(5b+2) \equiv 3 \pmod{10}$.

Do đó b phải là số lẻ. Đặt $b = 2k + 1$, khi đó $(2k+1)(10k+7) \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 4k + 7 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 4k \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow k \equiv 4 \pmod{10}$ hoặc $k \equiv 9 \pmod{10}$. Cả hai trường hợp đều dẫn đến $b = 2k + 1 \equiv 9 \pmod{10}$, tức b có dạng $b = 10c - 1$.

Suy ra $A = 50b + 12 = 500c - 38$.

Ta có $10^5 < A^2 = (500c - 38)^2 < 10^6 \Rightarrow 100\sqrt{10} < 500c - 38 < 10^3 \Rightarrow c = 1$ hoặc $c = 2$.

Với $c = 1$, tìm ra $A = 462^2 = 213444$.

Với $c = 2$, tìm ra $A = 962^2 = 925444$.

2) $A = 10a - 2$. Bằng các phép biến đổi tương tự như trên, ta sẽ có

$A = 500c + 38$.

Ta có $10^5 < A^2 = (500c + 38)^2 < 10^6$

$\Rightarrow 100\sqrt{10} < 500c + 38 < 10^3 \Rightarrow c = 1$.

Khi đó $A^2 = 538^2 = 289444$.

Vậy có 3 số thỏa mãn đề ra là: 213444, 289444, và 925444.

Nhận xét: Bạn, *Đặng Hoàng An* (10T Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang, Hà Bắc) cũng có lời giải đúng, tuy nhiên trình bày còn rườm rà.

N. K. M.

Bài 2/119. *Tìm bốn số tự nhiên có tính chất sau: Bình phương của mỗi số trong chúng cộng với ba số còn lại là số chính phương.*

Lời giải (của *Nguyễn Duy Thái Sơn*).

Giả sử bốn số tự nhiên a, b, c, d cần tìm thỏa mãn

$$a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \qquad (*)$$

$A = a^2 + b + c + d$, $B = a + b^2 + c + d$,

$C = a + b + c^2 + d$, $D = a + b + c + d^2$

là các số chính phương.

Từ điều kiện (*) ta có

$$a^2 < A \leqslant a^2 + 3a < (a+2)^2.$$

Vậy $A = a^2 + b + c + d = (a+1)^2$

hay $$a = (b + c + d - 1)/2. \qquad (1)$$

Từ (1) và (*) suy ra $a < 3b/2$, và

$b^2 < B < 3b/2 + b^2 + 2b = b^2 + 7b/2 < (b+2)^2$.

Vậy $B = a + b^2 + c + d = (b+1)^2$.

hay $$b = (a + c + d - 1)/2 \qquad (2)$$

Trừ (1) cho (2) vế với vế ta được

$$a = b \text{ và } a = c + d - 1 \qquad (3)$$

Vấn đề đặt ra là tìm các số tự nhiên a, c, d ($a \geqslant c \geqslant d$) để các số $C = 2a + c^2 + d$, $D = 2a + c + d^2$ là chính phương.

Xét hai trường hợp:

1) $d = 1$. Từ (3) ta có $a = c$ và do đó $C = (a+1)^2$ là chính phương.

Để là số chính phương thì $D = 3a + 1 = (3k \pm 1)^2$. Khi đó $a = b = c = 3k^2 \pm 2$.

2) $d > 1$. Từ (3) ta có $c \leqslant a < 2c$, và $(c+1)^2 = 2c + c^2 + 1 < C < 4c + c^2 + c < (c+3)^2$. Vậy $C = (c+2)^2$, tức là $2a + c^2 + d = (c+2)^2$ hay

$$2a + d = 4c + 4. \qquad (4)$$

Giải hệ (3), (4) ta được

$$a = 5d/2 - 4,$$
$$c = 3d/2 - 3.$$

Từ đây ta thấy $d = 2m$ và

$a = 5m - 4 \geqslant c = 3m - 3 \geqslant d = 2m$. Suy ra $m \geqslant 3$. $D = 2a + c + d^2 = 4m^2 + 13m - 11 \geqslant (2m+2)^2$ (do $m \geqslant 3$), và $4m^2 + 13m - 11 < (2m+4)^2$.

Vậy chỉ có thể:

a) $D = 4m^2 + 13m - 11 = (2m+2)^2 \Leftrightarrow m = 3$. $a = b = 5m - 4 = 11$, $c = 3m - 3 = 6$, $d = 2m = 6$.

b) $D = (2m+3)^2 \Leftrightarrow m = 20$. $a = b = 5m - 4 = 96$, $c = 3m - 3 = 57$, $d = 2m = 40$.

Tóm lại các số tự nhiên tìm được là:

$a = b = c = 3k^2 + 2k$ (k là số tự nhiên), $d = 1$;

$a = b = c = 3k^2 - 2k$ (k là số tự nhiên), $d = 1$;

$a = b = 11$, $c = d = 6$;

$a = b = 96$, $c = 51$, $d = 40$.

Bài 3/119. *Ký hiệu a_n là số nguyên gần $\sqrt[3]{n}$ nhất. Hãy tính tổng*

$$S = 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_{1981}.$$

Lời giải (của *Ngô Duy Ninh* – 57 Trần Phú, Quy Nhơn).

Do $\sqrt[3]{n}$ là một số tự nhiên hoặc một số vô tỷ, nên cách xác định a_n của bài ra là duy nhất.

Ta nhận xét mọi số tự nhiên n thỏa mãn $(k + 1/2)^3 > n > (k - 1/2)^3$ đều có $a_n = k$. Mà giữa số $(k + 1/2)^3$ và $(k - 1/2)^3$ có tất cả là $(k + 1/2)^3 - (k - 1/2)^2$ số tự nhiên.

Ta lại có $(13 + 1/2)^3 > 1981 > \ldots > 1954 > (13 - 1/2)^3 = 12 + 1/2)^3 > 1953$, nên

$$S = \sum_{i=1}^{1981} 1/a_i = \sum_{k=1}^{12} \frac{[(k+1/2)^3] - [(k-1/2)^3]}{k}$$
$$+ (1981 - 1954 + 1)/13$$
$$= 3 + 12/2 + 27/3 + 49/4 + 75/5 + 108/6 + 147/7 + 193/8 + 243/9 + 300/10 + 363/11 + 433/12 + 28/13$$
$$= 3\sum_{m=1}^{12} m + (1/4)(1 + 1/2 + 1/3) + 28/13$$
$$= 236\frac{191}{312}.$$

Nhận xét: Cách giải trên của bạn **Ngô Duy Ninh** gặp phải một sự tính toán khá cồng kềnh. Việc tính toán sẽ trở nên nhẹ nhàng và đơn giản hơn nhiều, nếu để ý rằng.

$$[(k+1/2)^3] - [(k-1/2)^3] = $$
$$= \begin{cases} 3k^2 & \text{nếu } k \equiv i \pmod 4;\ i = 1, 2, 3 \\ 3k^2 + 1 & \text{nếu } k \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

Khi đó ta có ngay

$$S = \sum_{k=1}^{12} (3k^2/k) + 1/4 + 1/8 + 1/12 + 28/13$$
$$= 3\sum_{k=1}^{12} k + 1/4 + 1/8 + 1/12 + 28/13$$
$$= 236\frac{191}{312}.$$

N.K.M.

Bài 4/119. *Chứng minh rằng với mọi cách chia tập hợp* 1, 2, ..., 9 (*gồm 9 số tự nhiên đầu tiên*) *thành ra hai tập hợp con luôn luôn có một tập hợp con chứa ba số lập thành một cấp số cộng*.

Lời giải (của *Ngô Duy Ninh*).

Giả sử ngược lại: tồn tại một cách chia tập đã cho thành hai tập con A và B sao cho trong A cũng như trong B không có 3 số nào lập thành một cấp số cộng.

Xét 3 cấp số cộng (1, 3, 5); (3, 4, 5) và (3, 5, 7). Ta thấy cặp số (3, 5) không thể nằm trong 1 tập hợp, vì nếu ngược lại thì các số 1, 4, 7 lập thành một cấp số cộng và cùng thuộc một tập hợp, mâu thuẫn với giả thiết.

Tương tự, xét các cấp số cộng (3, 5, 7); (5, 6, 7) và (5, 7, 9), (2, 4, 6); (4, 5, 6) và (4, 6, 8) ta có: cặp (5, 7) cũng như cặp (4, 6) không thể nằm trong một tập hợp.

Do cặp (3, 5) cũng như cặp (5, 7) không thể nằm trong một tập hợp nên 3, 7 cùng thuộc một tập hợp và 5 thuộc tập hợp kia.

Không mất tổng quát, giả sử $3, 7 \in A$ và $5 \in B$.

Xét hai trường hợp:

1) $4 \in A$. Vì $3, 4 \in A$ nên $2 \in B$. Vì $4, 7 \in A$ nên $1 \in B$. Vì $2, 5 \in B$ nên $8 \in A$. Vì $7, 8 \in A$ nên $9 \in B$. Nhưng khi đó $1, 5, 9 \in B$ và lập thành một cấp số cộng mâu thuẫn với giả thiết.

2) $4 \in B$, khi đó $6 \in A$. Vì $3, 6 \in A$ nên $9 \in B$. Vì $5, 9 \in B$ nên $1 \in A$. Vì $1, 3 \in A$ nên $2 \in B$; và vì $2, 5 \in B$ nên $8 \in A$. Nhưng khi đó $6, 7, 8 \in A$ và lập thành một cấp số cộng, mâu thuẫn với giả thiết.

Các mâu thuẫn trên chứng tỏ kết luận của bài toán là đúng.

N.K.M.

Bài 5/119. *Trong dãy các số chính phương*

$1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$

hãy lấy ra tất cả các bộ ba số, sao cho mỗi bộ ba số ấy lập thành một cấp số cộng.

Lời giải. Bài toán tương đương với việc tìm tất cả các nghiệm nguyên dương $(x; y; z)$ $(x < y < z)$ của phương trình

$$x^2 + z^2 = 2y^2 \qquad (1)$$

Dĩ nhiên ta chỉ việc tìm các nghiệm nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn thêm điều kiện phụ: x, y, z nguyên tố cùng nhau, tức là

$$(x, y, z) = 1. \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra rằng $x^2 + z^2$ phải là một số chẵn, như vậy x, z phải đồng thời chẵn hay lẻ. Nhưng nếu x, z đồng thời chẵn, thì $x^2 + z^2$ chia hết cho 4, do đó theo (1), y chẵn, khi đó 2 là một ước chung của x, y, z trái với (2). Thành thử với giả thiết (2), ta có: x, z là những số lẻ. Khi đó nếu p là một số nguyên tố, ước của x và z thì p lẻ, và theo (1), p là ước của y^2, vậy p là một ước của y, do đó nó là một ước chung của x, y, z. Thành thử với giả thiết (2), ta suy ra rằng: x, z là những số lẻ, nguyên tố cùng nhau.

Từ kết quả này ta thấy rằng $x + z$ và $x - z$ là những số chẵn, do đó có thể viết (1) dưới dạng

$$[(x + z)/2]^2 + [(z - x)/2]^2 = y^2,$$

hay

$$u^2 + v^2 = y^2 \qquad (3)$$

với $u = (z + x)/2$, $v = (z - x)/2$ là những số nguyên dương. Nếu d là ước chung lớn nhất của u và v, thì 2d là một ước chung của $z + x$ và $z - x$, do đó d là một ước chung của x và z: như đã thấy, ta phải có $d = 1$, tức là u, v nguyên tố cùng nhau.

Như đã biết (xem chẳng hạn bài toán 25 trong cuốn Tuyển tập những bài toán sơ cấp, tập I, đại số), nghiệm tổng quát của phương trình (3), với điều kiện u, v nguyên tố cùng nhau được cho bởi công thức:

$$\text{hoặc } \begin{cases} u = 2pq \\ v = p^2 - q^2 \\ y = p^2 + q^2 \end{cases}, \text{ hoặc } \begin{cases} u = p^2 - q^2 \\ v = 2pq \\ y = p^2 + q^2 \end{cases}$$

trong đó p, q là hai số nguyên dương tùy ý, thỏa mãn điều kiện: p, q nguyên tố cùng nhau và $p > q$.

Nếu chọn $u = 2pq$, $v = p^2 - q^2$, thì đi đến

$$\begin{cases} x = q^2 + 2pq - p^2 \\ y = p^2 + q^2 \\ z = p^2 + 2pq - q^2; \end{cases} \qquad (4)$$

còn nếu chọn $u = p^2 - q^2$, $v = 2pq$, thì đi đến

$$\begin{cases} x = p^2 - 2pq - q^2 \\ y = p^2 + q^2 \\ z = p^2 + 2pq - q^2 \end{cases} \qquad (5)$$

Để ý rằng các biểu thức của x trong (4) và trong (5) chỉ khác nhau bởi dấu, mà ta phải chọn $x > 0$, thành thử ta đi đến kết luận: nghiệm nguyên dương tổng quát của phương trình (1), thỏa mãn điều kiện (2), được cho bởi

$$\begin{cases} x = |(q + q)^2 - 2p^2| \\ y = p^2 + q^2 \\ z = (p + q)^2 - 2q^2, \end{cases}$$

với p, q là hai số dương tùy ý, thỏa mãn điều kiện: $(p, q) = 1$ và $p > q$.

Trong số các bạn gửi bài giải, không bạn nào giải đúng bài này.

N.K.M.

Bài 6/119. *a, b, c, d là bốn số dương khác nhau, với $a + b = c + d$. Giải phương trình*

$$\sqrt{x + a^2} + \sqrt{x + b^2} = \sqrt{x + c^2} + \sqrt{x + d^2}.$$

Lời giải. Có thể coi rằng $a < c < d < b$. Ta hãy viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\sqrt{x+a^2} - a + \sqrt{x+b^2} - b = \sqrt{x+c^2} - c + \sqrt{x+d^2} - d$$

hay

$$\frac{x}{\sqrt{x + a^2} + a} + \frac{x}{\sqrt{x + b^2} + b} = \frac{x}{\sqrt{x + c^2} + c} + \frac{x}{\sqrt{x + d^2} + d} \qquad (1)$$

từ đây trước hết ta suy ra $x = 0$: nghiệm này chấp nhận được vì nó làm cho các căn bậc hai có nghĩa.

Ta hãy tìm các nghiệm $x \neq 0$ (nếu có) của phương trình đã cho. Từ (1) suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{x + a^2} + a} + \frac{1}{\sqrt{x + b^2} + b} = \frac{1}{\sqrt{x + c^2} + c} + \frac{1}{\sqrt{x + d^2} + d} \qquad (2)$$

Đặt

$$A = \sqrt{x + a^2} + a, \quad B = \sqrt{x + b^2} + b,$$
$$C = \sqrt{x + c^2} + c, \quad D = \sqrt{x + d^2} + d.$$

Khi đó (2) có dạng

$$1/A + 1/B = 1/C + 1/D,$$

hay

$$(A + B)/AB = (C + D)/CD$$

Nhưng hiển nhiên từ phương trình đã cho, ta có $\quad A+B=C+D \quad (3)$

do vậy $\quad AB=CD \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra: hoặc $A=C$, hoặc $A=D$. Nhưng do giả thiết $a<c<d$, ta có $A<C<D$ (với giả thiết các căn có nghĩa), và đi đến mâu thuẫn. Thành thử (2) không thể xảy ra, nói cách khác phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Bạn *Ngô Duy Ninh* (Qui Nhơn) giải theo cách sau đây: có thể coi $a<c<d<b \Rightarrow (b-c)(b-d)>0 \Rightarrow b^2-b(c+d)+cd>0 \Rightarrow cd>b(c+d-b)$, tức $cd>ba$.

Bình phương hai vế của (1), chú ý $a^2+b^2-(c^2+d^2)=2(cd-ab)$ đi đến phương trình

$$cd-ab+\sqrt{(x+a^2)(x+b^2)}=\sqrt{(x+c^2)(x+d^2)}$$

Tiếp tục bình phương hai vế và ước lược các số hạng đồng dạng sẽ đi đến

$$ab-x=\sqrt{(x+a^2)(x+b^2)}$$

Phương trình chỉ có nghiệm $x \leqslant ab$; bình phương hai vế và ước lược sẽ đi đến

$$(a+b)^2x=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Bài 7/119 *Cho n số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$(1+x_1/nx_2)(1+x_2/nx_3)\ldots(1+x_{n-1}/nx_n)(1+x_n/nx_1) \geqslant (1+1/n)^n.$$

Lời giải (của nhiều bạn).

Các số x_i và nx_i $(i=1,2,\ldots,n)$ đều là các số dương, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$nx_2+x_1 \geqslant (n+1)\sqrt[n+1]{x_2^n x_1}$$

$$nx_3+x_2 \geqslant (x+1)\sqrt[n+1]{x_3^n x_2}$$

$$nx_n+x_{n-1} \geqslant (n+1)\sqrt[n+1]{x_n^n x_{n-1}}$$

$$nx_1+x_n \geqslant (n+1)\sqrt[n+1]{x_1^n x_n}$$

Nhân tất cả các bất đẳng thức trên, vế với vế, và chia cả hai vế của đẳng thức nhận được cho $n^n x_1x_2\ldots x_n$, ta được

$$\frac{(nx_2+x_1)(nx_3+x_2)\ldots(nx_n+x_{n-1})(nx_1+x_n)}{nx_2 \cdot nx_3 \ldots nx_n \cdot nx_1}$$

$$\geqslant (n+1)^n x_1x_2\ldots x_n/n^n x_1x_2\ldots x_n=(1+1/n)^n$$

$$\Leftrightarrow (1+x_1/nx_2)(1+x_2/nx_3)\ldots$$

$$(1+x_{n-1}/nx_n)(1+x_n/nx_1)$$

$$\geqslant (1+1/n)^n.$$

Bài 8/119. *Cho một đường tròn. Gọi S_m diện tích đa giác đều m cạnh nội tiếp đường tr[òn] đó. Chứng minh rằng ta luôn có*

$$2S_{2n}>S_{n-1}+S_{4n+2}\ (n \geqslant 4).$$

Lời giải. Không mất tổng quát, ta giả sử đường tròn đã cho có bán kính bằng 1. Khi đó diện tích đa giác đều m cạnh nội tiếp là

$$S_m=(m/2)\sin(2\pi/m)$$

(bằng tổng diện tích m tam giác cân có cạnh bên bằng 1 và góc ở đỉnh bằng $2\pi/m$).

Xét hàm số

$$f(x)=(x/2)\sin(2\pi/x), \text{ với } x \geqslant 3.$$

Ta chứng minh

$$2f(2x)>f(x)+f(4x). \quad (1)$$

Ta có:

$$f(x)=(x/2)\sin(2\pi/x)=x\sin(\pi/x)\cos(\pi/x)$$

$$=2x\sin(\pi/2x)\cos(\pi/2x)\cos(\pi/x).$$

$$f(2x)=2x\sin(\pi/2x)\cos(\pi/2x).$$

$$f(4x)=2x\sin(\pi/2x).$$

Bất đẳng thức (1) cần chứng minh trở thành

$$4x\sin(\pi/2x)\cos(\pi/2x)$$

$$>2x\sin(\pi/2x)\cos(\pi/2x)\cos(\pi/x)$$

$$+2x\sin(\pi/2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(\pi/2x)>\cos(\pi/2x)\cos(\pi/x)+1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(\pi/2x)>\cos(\pi/2x)\times$$

$$[1-2\sin^2(\pi/2x)]+1$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi/2x)>1-2\sin^2(\pi/2x)\cos(\pi/2x)$$

$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2(\pi/4x)>1-\sin(\pi/x)\sin(\pi/2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2(\pi/4x)<\sin(\pi/x)\sin(\pi/2x). \quad (1')$$

Vì $\sin(\pi/2x)=2\sin(\pi/4x)\cos(\pi/4x)$ $=\sqrt{2}\sin(\pi/4x)\cdot\sqrt{2}\cos(\pi/4x)>\sqrt{2}\sin(\pi/4x)$ (với $x \geqslant 3$ thì $\sqrt{2}\cos(\pi/4x)>1$), và $\sin(\pi/x)>\sin(\pi/2x)>\sqrt{2}\sin(\pi/4x)$, nên (1') được nghiệm đúng và do đó (1) được chứng minh.

Thay $x=n$ vào (1) ta được, với $n \geqslant 4$:

$$2S_{2n}>S_n+S_{4n}$$

hay

$$S_{2n}-S_n>S_{4n}-S_{2n} \quad (*)$$

Tính đạo hàm bậc hai của $f(x)$ ta được

$$f''(x)=-(2\pi^2/x^3)\sin(2\pi/x)<0.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số lõm, suy ra

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

ay

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)>f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad (2)$$

(Xem bài « một phương pháp chứng minh và sáng tạo bất đẳng thức » — THvTT số 1 năm 1981. Ở đây lấy $q_1=q_2=1/2$, dấu bất đẳng thức ứng với hàm lõm trái chiều với dấu ứng với hàm lồi).

Bây giờ ta chứng minh

$$S_n-S_{n-1}>S_{4n+2}-S_{4n} \quad (^{**})$$

Vì $S_m=f(m)$ nên từ (2) suy ra

$$S_n-S_{n-1}>S_{n+1}-S_n>S_{n+2}-S_{n+1}>\ldots>$$
$$>S_{2n}-S_{2n-1}\Rightarrow S_n-S_{n-1}>(S_{2n}-S_n)/n. \quad (a)$$

Và

$$S_{4n+2}-S_{4n}<S_{4n}-S_{4n-2}<S_{4n-2}-S_{4n-4}$$
$$<\ldots<S_{2n+2}-S_{2n}$$
$$\Rightarrow S_{4n+2}-S_{4n}<(S_{4n}-S_{2n})/n. \quad (b)$$

So sánh (a) và (b), chú ý đến (*), ta được bất đẳng thức (**)

Từ (*) và (**) ta có

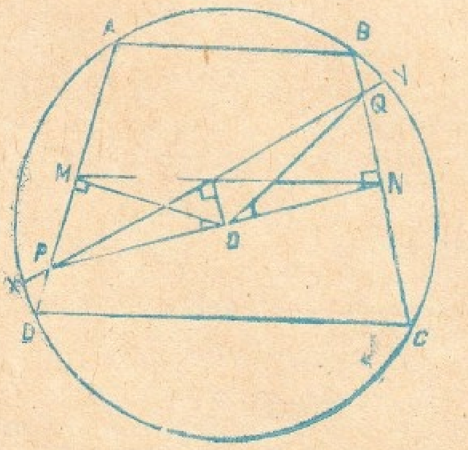
$$2S_{2n}>S_n+S_{4n}>S_{n-1}+S_{4n+2}.$$

Bất đẳng thức nêu trong đầu bài được chứng minh.

Bài 9/119. *Cho hình thang cân $ABCD$ ($AD=BC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O. Một dây XY thay đổi cắt AD tại P, BC tại Q, sao cho $XP=QY$. Tìm quỹ tích điểm giữa của PQ.*

Lời giải. Từ giả thiết $XP=QY$ suy ra O nằm trên trung trực của PQ. Như vậy OPQ là tam giác cân.

Dựng đường trung bình MN của hình thang, giả sử MN cắt XY tại I. Tam giác OMN cũng là tam giác cân.



Hình 1

Hai tam giác vuông OMP và ONQ bằng nhau vì $OM=ON$, $OP=OQ$. Vậy $\widehat{POM}=\widehat{QON}$.

Từ đó: $\widehat{POQ}=\widehat{MON}$.

Hai tam giác cân OMN và OPQ có góc ở đỉnh bằng nhau nên đồng dạng. Vậy

$$\widehat{QPO}=\widehat{NMO}$$

và do đó bốn điểm M, I, P, O nằm trên một đường tròn.

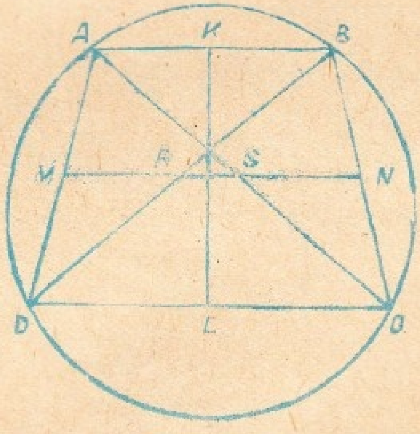
Suy ra $OI\perp PQ$, vậy I là điểm giữa của PQ.

Ta đã chứng minh được điểm giữa I của PQ nằm trên MN. Dễ dàng thấy rằng I chỉ nằm trên đoạn RS trên MN giới hạn bởi hai đường chéo của hình thẳng (h. 2).

Phần đảo: Lấy I' trên RS. Nếu I' là điểm giữa của RS thì dây XY chứa MN, P trùng với M, Q trùng với N, sẽ có $XP=QY$. Nếu I' không phải là điểm giữa của RS, ta dựng OI', dựng $XY\perp OI'$ cắt AD ở P và cắt BC ở Q. Các tứ giác $MPI'O$ và $NQI'O$ nội tiếp được, suy ra

$$\widehat{NMO}=\widehat{QPO},\quad \widehat{PQO}=\widehat{MNO}$$
$$\Rightarrow \widehat{QPO}=\widehat{PQO}\Leftrightarrow \triangle OPQ \text{ cân} \Rightarrow XP=QY.$$

Dễ thấy rằng trong trường hợp đường trung bình MN của hình thang không cắt XY, tức là trường hợp $XY//MN$ thì trung điểm của BQ nằm trên trục đối xứng KL của hình thang.



Hình 2

Tóm lại quỹ tích điểm giữa của PQ là hai đoạn RS và KL ở hình 2.

Bạn *Nguyễn Duy Thái Sơn* (Huế) có lời giải tốt.

Bài 10/119. *Cho một tứ giác T có diện tích S. Ta chia mỗi cạnh của nó thành 3 phần bằng nhau rồi nối các cặp điểm chia tương ứng ở các cạnh đối diện. Làm như vậy, tứ giác T được chia thành 9 ô hình tứ giác, trong đó có một ô* *không kề với cạnh nào của T mà ta gọi là ô trung tâm. Nói rằng diện tích của ô trung tâm bằng S/9 có đúng không?*

Lời giải. Với những ký hiệu như hình 3 ta có $S_{DAE} = (1/3)\, S_{DAB}$, $S_{BCG} = (1/3)\, S_{BCD}$. Từ đó có $S_{DAE} + S_{BCG} = (1/3)(S_{DAB} + S_{BCD}) = S/3 \Rightarrow S_{EBGD} = 2S/3$.

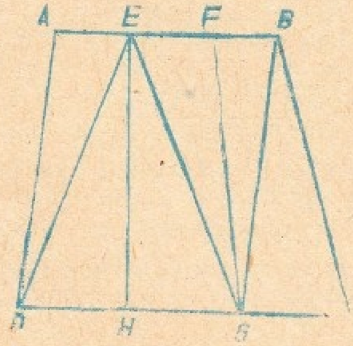
Mặt khác $S_{EDH} = S_{EHG}$, $S_{GEF} = S_{GFB} \Rightarrow S_{EFGH} = S_{EBGD}/2$ hay $S_{EFGH} = S/3$.

Bây giờ ta chứng minh rằng PS và QR cắt EH tại những điểm K, L chia đoạn EH thành 3 phần bằng nhau. Thật vậy (xem hình 3) ta có $PE = DB/3$, $HS = (2/3)\, DB \Rightarrow PE = HS/2 \Rightarrow KE = KH/2 \Rightarrow EK = EH/3$.

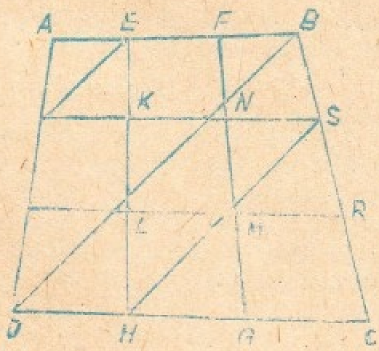
Tương tự $HL = EH/3$. Tức là K, L chia đoạn EH thành 3 phần bằng nhau. Tương tự M, N chia đoạn FG thành 3 phần bằng nhau. Theo phần trên ta có

$$S_{KLMN} = (1/3) S_{EFGH} = S/9.$$

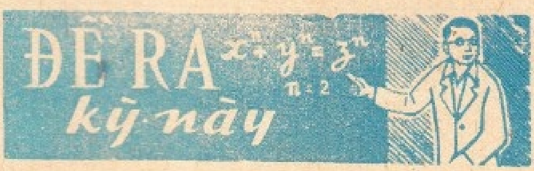
Vậy diện tích ô trung tâm đúng bằng 1/9 diện tích của tứ giác đã cho.



Hình 3



Hình 4



CÁC ĐỀ TOÁN THI GIẢI TOÁN 1981 – 1982

Bài 1/122. Học sinh A rất giỏi toán. Có lần thầy giáo đố A đoán hai số nguyên dương, mà thầy đã viết bỏ trong phong bì dán kín, nhưng chỉ cho A biết tổng bình phương hai số ấy. A trả lời: «Em chịu, không đoán được». Thầy giáo cho biết thêm: «Hai số ấy có tổng lớn hơn 12» Khi đó A nói: «Em đoán ra rồi», và đưa ra kết quả đúng!

Bạn hãy tìm hai số mà thầy giáo đố A, cần giải thích chặt chẽ lập luận của bạn.

Phan Đức Chính

Bài 2/122. Cho 2n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ thỏa mãn các điều kiện:

i) $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_n$;

ii) với mọi $k = 1, 2, \dots, n$, ta có $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 < b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2$.

Chứng minh rằng:

1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n < b_1 + b_2 + \dots + b_n$

2) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j < \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_i b_j$

Phan Đức Chính

Bài 3/122. Tìm tất cả các số nguyên tố có ba chữ số sao cho nếu ta thay đổi vị trí của các chữ số theo thứ tự bất kỳ ta vẫn có các số là số nguyên tố.

Tô Thành Tuấn
(T.p. Hồ Chí Minh)

Bài 4/122. Hãy tìm các bộ ba số nguyên a, b, c sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ bx^2 + cx + a = 26 \\ cx^2 + ax + b = -26 \end{cases}$$

có nghiệm nguyên.

Hoàng Hoa Trại (Nghệ Tĩnh)

Bài 5/122. Lấy chín chữ số 1, 2,..., 9 viết thành bốn số: một số có ba chữ số và ba số còn lại có hai chữ số, sao cho chúng lập thành các cặp số có tính bằng nhau

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{xyz} \times \overline{uv} \qquad (*)$$

Cho biết cách viết ứng với giá trị của tích ở mỗi vế của (*) lớn nhất là

$$98 \times 76 = 532 \times 14 \quad (=7448).$$

Hãy tìm tất cả các cách viết ứng với giá trị của tích mỗi vế của (*) có chữ số hàng đơn vị là 6.

Bài 6/122. Trên đường tròn đường kính AB ta lấy hai điểm M và N phân biệt. Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M và N trên AN và AM. Chứng minh $EF \perp AB$.

Lê Quốc Hán (Nghệ Tĩnh)

Bài 7/122. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Một hình chữ nhật $OABC$ có chu vi không đổi, thay đổi sao cho các cạnh OA, OC của nó luôn luôn nằm trên các tia Ox, Oy. Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ đỉnh B xuống đường chéo AC luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Nguyễn Công Quý
(T. p. Hồ Chí Minh)

Bài 8/122. Một điểm C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB. Kẻ CD vuông góc với AB. Gọi (v_1) là đường tròn tiếp xúc với các đoạn CA, CD và cung AC; (v_2) là đường tròn tiếp xúc với các đoạn CB, CD và cung CB. Các đường tròn (v_1), (v_2) tiếp xúc với AB tại E_1, E_2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CE_1E_2. Chứng minh CI luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Lê Quốc Hán

Bài 9/122. Cho tam giác đều ABC. D là một điểm bất kỳ nằm ngoài mặt phẳng của tam giác ABC.

Chứng minh rằng:

1) Từ ba đoạn thẳng DA, DB, DC có thể dựng được một tam giác (T) nào đó.

2) Hai tam giác (T) và (T') có diện tích bằng nhau, trong đó (T') đóng vai trò của tam giác (T) ứng với điểm D', đối xứng với điểm D qua tâm O của tam giác ABC.

Nguyễn Đăng Phất
(ĐHSP 1, Hà Nội)

Bài 10/122. Chứng minh rằng từ C_{2n}^{n} người tùy ý bao giờ cũng có thể chọn ra được $n+1$ người hoặc đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau.

Vũ Đình Hòa (Hà Nội)

Chú thích: Bài 5/122 do *Phạm Hoàng* (Hà Nội) sưu tầm.

VỀ BÀI BÁO «VỀ CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY»

Trong báo Toán học và tuổi trẻ số 101, bài viết «Về các đường thẳng đồng qui» có nêu ra định lí:

«Nhiều đường thẳng cắt nhau đôi một mà không đồng qui thì phải đồng phẳng và không đồng phẳng thì phải đồng qui».

Tác giả đã dùng phương pháp qui nạp toán học để chứng minh định lí nói trên, ở đây tôi xin nêu một vài nhận xét về chứng minh đó và dựa vào các nhận xét này để nêu cách chứng minh khác.

1. Sau khi chứng minh định lý đúng với trường hợp 3 đường thẳng, tác giả giả sử định lý đúng với k đường thẳng và chứng minh nó cũng đúng với $k+1$ đường thẳng. Nhưng khi xét quan hệ của k đường thẳng bất kỳ trong số $k+1$ đường thẳng đôi một cắt nhau đã cho thì tác giả chỉ xét có hai trường hợp:

a) k đường thẳng đó không đồng qui,

b) k đường thẳng đó không đồng phẳng, mà theo phân loại lôgic thì còn hai trường hợp nữa;

c) k đường thẳng đó vừa không đồng qui vừa không đồng phẳng,

d) k đường thẳng đó vừa đồng qui vừa đồng phẳng.

Mặc dù rằng trường hợp c) bị loại trừ do giả thiết qui nạp và trường hợp d) chứng minh không có gì khó khăn song không thể bỏ qua việc nêu chúng ra được.

2. Chứng minh chưa được gọn do chưa chú ý đến quan hệ giữa hai phần của định lí. Ta thấy ngay hai phần của định lí là hai mệnh đề phản đảo của nhau, do đó chỉ cần chứng minh một phần và phần còn lại sẽ suy được một cách dễ dàng.

3. Việc dùng phương pháp qui nạp toán học ở đây không thực sự cần thiết.

Từ các nhận xét trên, ta có thể trình bày chứng minh định lí như sau:

Xét n đường thẳng bất kỳ đôi một cắt nhau. Giả sử các đường thẳng đó không đồng qui. Lấy bất kỳ hai đường thẳng trong số n đường thẳng đó, giả sử đó là hai đường thẳng a và b. Gọi M là giao của a với b. Dựng mặt phẳng P chứa a, b. Vì n đường thẳng đang xét không đồng qui nên có ít nhất một đường thẳng không đi qua M. Giả sử c là một đường thẳng không đi qua M. Vì c cắt cả a và b nên c nằm trong P. Các đường thẳng còn lại thì hoặc qua M và cắt c (tương tự a, b) hoặc không qua M và cắt a, b (tương tự c) nên đều nằm trong P. Vậy n đường thẳng đồng phẳng.

Bây giờ giả sử n đường thẳng đôi một cắt nhau không đồng phẳng. Thế thì n đường thẳng đó phải đồng qui vì nếu không thì theo chứng minh trên chúng phải đồng phẳng, trái với giả thiết.

ĐẶNG VIỄN (*Hà Nội*)

Tìm hiểu sâu hơn toán học phổ thông

CÔNG THỨC NỘI SUY

PHAN ĐỨC CHÍNH

TRONG phần lý thuyết đa thức học ở phổ thông, có một vấn đề không được đề cập đến, nhưng rất có hiệu lực để giải quyết một loạt bài toán xung quanh đa thức, đó là *công thức nội suy*, hay *công thức La-grăng-giơ*.

Lý do đơn giản của việc không đề cập đến, là công thức ấy vẫn thường được quan niệm là phức tạp. Nhưng xét cho cùng, sự phức tạp chỉ là về mặt hình thức, còn bản chất công thức thật ra cũng đơn giản.

Mục đích bài này trước hết là giới thiệu với các bạn công thức ấy, và sau đó, quan trọng hơn, minh họa cách vận dụng công thức qua phép giải vài bài toán hay và khó.

Để thấy nguồn gốc của công thức nội suy, ta hãy để ý đến hai mệnh đề sau:

MỆNH ĐỀ 1. *Một đa thức bậc n ($n \geqslant 1$) không thể có hơn n nghiệm phân biệt.*

Bạn đọc tự chứng minh mệnh đề này, hoặc xem cách chứng minh trong cuốn Tài liệu đại số chuyên toán lớp 10 (cũ).

MỆNH ĐỀ 2. *Nếu hai đa thức bậc $\leqslant n$, có giá trị trùng nhau tại $n+1$ điểm phân biệt, thì hai đa thức ấy trùng với nhau.*

Chứng minh. Giả thử $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức bậc $\leqslant n$, và $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ là $n+1$ điểm khác nhau tại đó $f(x_i) = g(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Khi đó $h(x) = f(x) - g(x)$ là một đa thức bậc $\leqslant n$, và $h(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Nếu $h(x)$ có bậc $m \geqslant 1$, thì nó có $n+1$ nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \ldots x_{n+1}$, với $n+1 > m$, điều này mâu thuẫn với mệnh đề 1. Vậy $h(x)$ có bậc 0, tức là $h(x)$ là một hằng số, mà $h(x_i) = 0$, do đó $h(x) = 0$, thành thử $f(x) = g(x)$.

Từ mệnh đề 2 ta rút ra kết luận: *một đa thức bậc n được hoàn toàn xác định bởi các giá trị của nó tại $n+1$ điểm phân biệt.*

Tự nhiên nảy ra câu hỏi: biết $n+1$ giá trị $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ của đa thức $f(x)$ bậc n tại $n+1$ điểm phân biệt $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, làm thế nào xác định $f(x)$? Công thức nội suy trả lời cho câu hỏi đó.

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n+1$, ta hãy xem đa thức bậc n

$$g_i(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}$$

Hiển nhiên rằng

$$g_i(x_k) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } k \neq i, \\ 1 \text{ nếu } k = i. \end{cases}$$

Khi đó.

$$F(x) = f(x_1)g_1(x) + f(x_2)g_2(x) + \ldots + f(x_{n+1})g_{n+1}(x)$$

là một đa thức bậc $\leqslant n$, và đồng thời

$$F(x_i) = f(x_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n+1).$$

Theo mệnh đề 2, ta có $F(x) = f(x)$, tức là (*) $f(x) =$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})},$$

hệ thức này là công thức nội suy.

Bây giờ ta hãy nêu vài bài toán minh họa công thức nội suy.

BÀI TOÁN 1. *Cho a, b, c là ba số khác nhau. Hãy tính* $A_k(x)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$, *với* $A_k(x)$ *là biểu thức xác định bởi*

$$A_k(x) = a^k \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^k \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(a-c)} + c^k \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$

GIẢI. Với $k = 0, 1, 2$, thì $A_k(x)$ là một đa thức bậc $\leqslant 2$ của x. Lấy $f(x)=x^k$, thì ta có $f(a)=a^k=A_k(a)$, $f(b)=b^k=A_k(b)$, $f(c)=c^k=A_k(c)$, vậy theo mệnh đề 2, $f(x) = A_k(x)$, nói cách khác

$$A_0(x) = 1,\ A_1(x) = x,\ A_2(x) = x^2.$$

Hơn nữa, trong trường hợp này, ta thấy rằng vế phải của (1) chính là công thức nội suy cho các đa thức $f(x) = x^k$ $(k=0,1,2)$ tại 3 điểm a, b, c.

Với $k = 3$, $A_3(x)$ vẫn là một đa thức bậc $\leqslant 2$ của x, còn $f(x) = x^3$ là một đa thức bậc 3, do đó không thể lập luận như trên. Nhưng nếu lấy

$$g(x)=x^3 - (x-a)(x-b)(x-c)$$

thì $g(x)$ là một đa thức bậc $\leqslant 2$ của x, và ta có $g(a)=a^3=A_3(a)$, $g(b)=b^3=A_3(b)$, $g(c)=c^3=A_3(c)$ vậy theo mệnh đề 2, hoặc theo công thức nội suy cho $g(x)$ tại ba điểm a, b, c, ta được

$$A_3(x) = x^3 - (x-a)(x-b)(x-c)$$
$$= (a+b+c)x^2 - (ab+bc+ca)x + abc.$$

Với $k = 4$, không thể xét

$$g(x) = x^4 - (x-a)(x-b)(x-c)$$

vì đây là một đa thức bậc 4, hoặc không thể xét

$$h(x) = x^4 - x(x-a)(x-b)(x-c)$$

vì nói chung $h(x)$ là một đa thức bậc 3, mặc dù cả hai đa thức này đều thỏa mãn điều kiện

$$g(a) = h(a) = a^4 = A_4(a), \text{ v.v...}$$

Xét kỹ hơn, ta thấy

$$h(x) = (a+b+c)x^3 - \ldots$$

do đó nếu lấy
$k(x) = h(x) - (a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)$, thì $k(x)$ là một đa thức bậc $\leqslant 2$, đồng thời
$k(a) = h(a) = a^4 = A_4(a)$, $k(b) = h(b) = b^4 = A_4(b)$,

$$k(c) = h(c) = c^4 = A_4(c),$$

như vậy có thể kết luận

$$A_4(x) = k(x) + x^4 - (x+a+b+c)\times$$
$$\times (x-a)(x-b)(x-c).$$

BÀI TOÁN 2. *Biết rằng nếu x hữu tỷ thì đa thức*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (2)$$

có giá trị hữu tỷ, chứng minh rằng các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ *của đa thức ấy là những số hữu tỷ.*

GIẢI. Ta hãy lấy $n+1$ số hữu tỷ tùy ý, khác nhau $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Theo giả thiết, các giá trị $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ là những số hữu tỷ, vì vậy trong công thức nội suy (*) biểu diễn $f(x)$, ta chỉ dùng những số hữu tỷ (ngoài biến số x). Khai triển vế phải của (*), rồi so sánh với vế phải của (2), ta suy ra rằng các hệ số a_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ là những số hữu tỷ.

Lập luận trên còn cho ta kết quả tổng quát hơn, đó là:

Nếu một đa thức bậc n có giá trị hữu tỷ tại n + 1 điểm hữu tỷ nào đó (chứ không cần tại mọi điểm hữu tỷ), *thì các hệ số của nó là những số hữu tỷ* (và do đó có giá trị hữu tỷ tại mọi điểm hữu tỷ).

Theo dòng suy nghĩ ấy, ta hãy giải bài toán sau đây:

BÀI TOÁN 3. *Giả thử đa thức*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (3)$$

có giá trị nguyên tại n + 1 giá trị nguyên liên tiếp nào đó của x. Chứng minh rằng f(x) có giá trị nguyên với mọi x nguyên.

GIẢI. Để việc trình bày đỡ nặng nề, ta hãy giải bài toán cho đa thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Giả thử đa thức này có giá trị nguyên tại ba giá trị nguyên liên tiếp của x. Ký hiệu ba giá trị ấy của x bởi $k-1$, k, $k+1$, với k nguyên.

Áp dụng công thức nội suy cho $f(x)$ tại ba giá trị này, ta được

$$f(x) = f(k-1)\frac{(x-k)(x-k-1)}{(k-1-k)(k-1-k-1)} + f(k)\frac{(x-k+1)(x-k-1)}{(k-k+1)(k-k-1)} + f(k+1)\frac{(x-k+1)(x-k)}{(k+1-k+1)(k+1-k)} =$$

$$= f(k-1)\frac{(x-k)(x-k-1)}{2} - f(k)(x-k+1)\times$$
$$\times(x-k-1) + f(k+1)\frac{(x-k)(x-k+1)}{2} =$$

$$= f(k-1)\frac{u(u-1)}{2} - f(k)(u^2-1) + f(k+1)\frac{u(u+1)}{2}$$

với $u = x-k$. Nếu x nguyên thì u nguyên, và $u-1$, u, cũng như u, $u+1$ là những cặp số nguyên liên tiếp do đó $\frac{1}{2}u(u-1)$ và $\frac{1}{2}u(u+1)$ là những số nguyên, mà $f(k-1)$, $f(k)$, $f(k+1)$ là những số nguyên, vậy $f(x)$ nguyên khi x nguyên.

Chú ý. Không nên kết luận sai lầm rằng nếu $f(x)$ nguyên khi x nguyên, thì ở vế phải của (3), các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là những số nguyên.

Để kết thúc, ta hãy xem bài toán sau, phần b) bài toán này đã là đề toán thi trong số 3/1980 báo THTT.

BÀI TOÁN 4. *Cho đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết rằng $|f(x)| \leqslant 1$ khi $|x| \leqslant 1$, hãy chứng minh rằng với mọi $|x| \leqslant 1$:*

a) $|dx^3 + cx^2 + bx + a| \leqslant 4$,

b) $|3ax^2 + 2bx + c| \leqslant 9$.

GIẢI. Ta giải bài toán với giả thiết nhẹ hơn, tức là không cần giả thiết $|f(x)| \leqslant 1$ khi $|x| \leqslant 1$ mà chỉ giả thiết

$$|f(\pm 1)| \leqslant 1, \ |f(\pm 1/2)| \leqslant 1,$$

thì vẫn có các kết luận a) và b).

Đặt

$A = f(-1)$, $B = f(-1/2)$, $C = f(1/2)$, $D = f(1)$,

và sử dụng công thức nội suy, ta được

$$f(x) = -\frac{2}{3}A\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x-1) + \frac{4}{3}B(x^2-1)\times \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{3}C(x^2-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}D\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x+1). \quad (4)$$

Đặt $f^*(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$, thì

$$f^*(x) = x^3 f\left(\frac{1}{x}\right);$$

vì vậy từ (4) và sử dụng hệ thức trên, ta được

$$f^*(x) = -\frac{2}{3}A\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1-x) + \frac{4}{3}B(1-x^2)\times\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{4}{3}C(1-x^2)\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3}D\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1+x).$$

Từ biểu thức này, ta suy ra rằng khi $|x| \leqslant 1$ (nhớ rằng A, B, C, D có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1)

$$|f^*(x)| \leqslant \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1-x) + \frac{4}{3}(1-x^2)\times\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{4}{3}(1-x^2)\left(1 + \frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1+x) = 4 - 3x^2 \leqslant 4.$$

Lời giải phần b) của bài toán đã được đăng trong báo toán học tuổi trẻ số 2/1981.

Bài toán 4 là một trường hợp riêng của bài toán tổng quát:

Cho đa thức

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Biết rằng $|f(x)| \leqslant 1$ khi $|x| \leqslant 1$, hãy chứng minh rằng khi $|x| \leqslant 1$:

a) $|a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0| \leqslant 2^{n-1}$,

b) $|f'(x)| = |na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}| \leqslant n^2$.

Thật ra các kết luận a) và b) của bài toán vẫn đúng với giả thiết nhẹ hơn: đó là

$$\left|f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right| \leqslant 1 \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Phép giải bài toán tổng quát vừa vận dụng đến công thức nội suy tổng quát (*), và vận dụng đến *đa thức Trê-bư-sep* $T_n(x)$ (xác định bởi hệ thức $T_n(\cos x) = \cos nx$).

KHÁI NIỆM TRỌNG TÂM VÀ ỨNG DỤNG TRONG HÌNH HỌC

TẠ VĂN TỰ

Chúng ta đã biết cách chứng minh hệ thức Ơle: $d^2 = R^2 - 2Rr$, trong đó R, r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và $d = OI$ là khoảng cách giữa các tâm O và I của các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp một tam giác bằng khái niệm phương tích của một điểm đối với một đường tròn. Trong bài này sẽ đưa ra một cách chứng minh khác khá ngắn gọn, đồng thời nêu lên một số ứng dụng khác quan trọng bằng cách sử dụng khái niệm trọng tâm của một hệ chất điểm

Cho một hệ m chất điểm $A_1, \ldots, A_m$ với các khối lượng tương ứng là $a_1, \ldots, a_m$. Điểm O được xác định bởi:

$$\overrightarrow{MO} = \frac{a_1\overrightarrow{MA_1} + \ldots + a_m\overrightarrow{MA_m}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m} \quad (1)$$

…ong đó M là một điểm tùy ý được gọi là *trọng tâm* của hệ chất điểm này. Hệ thức (1) có thể viết gọn là:

$$\overrightarrow{MO} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \text{ với } \alpha_i = a_i/(a_1+a_2+\ldots+a_m) \quad (2)$$

Với cách đặt như vậy, ta có $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ (3)

Từ (1) lấy $M \equiv O$ ta có

$$a_1\overrightarrow{OA_1}+\ldots+a_m\overrightarrow{OA_m} = \vec{0}. \quad (4)$$

Ngược lại với M tùy ý, từ (4) ta có

$$a_1(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA_1})+\ldots+a_m(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA_m}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a_1+\ldots+a_m)\overrightarrow{OM} + a_1\overrightarrow{MA_1}+\ldots+a_m\overrightarrow{MA_m} = \vec{0}.$$

Vậy (1) và (4) tương đương với nhau.

Rõ ràng định nghĩa trọng tâm như trên là duy nhất. Thực vậy giả sử còn có trọng tâm $O' \neq O$ nữa. Từ (1), lấy $M \equiv O'$ ta có:

$\overrightarrow{O'O} = \sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{O'A_i} / \sum_{i=1}^{m} a_i$. Vế trái hệ thức này khác $\vec{0}$ còn vế phải bằng $\vec{0}$ do $\sum_{i=1}^{m} a_i\overrightarrow{O'A} = \vec{0}$ vì theo (4) mà O' là trọng tâm. Vậy vô lý.

Tính chất sau đây cho ta cách thực hành xác định trọng tâm của một hệ chất điểm bất kỳ.

Gọi O_1 là trọng tâm của m chất điểm $A_1, \ldots, A_m$ với khối lượng tương ứng $a_1, \ldots, a_m$. Gọi O_2 là trọng tâm của n chất điểm $B_1, \ldots, B_n$ với các khối lượng tương ứng $b_1, \ldots, b_n$. Khi đó trọng tâm O của $m+n$ chất điểm A_i, B_j (với $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) thẳng hàng với O_1, O_2 và chia đoạn O_1O_2 theo tỉ số

$$OO_1 : OO_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j / \sum_{i=1}^{m} a_i \quad (5)$$

Thực vậy, theo (4) ta có:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{j=1}^{n} b_j \overrightarrow{OB_j} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i (\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A_i}) + \sum_{j=1}^{n} b_j (\overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2B_j})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{OO_1} + \sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{O_1A_i}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j \overrightarrow{OO_2} + \sum_{j=1}^{n} b_j \overrightarrow{O_2B_j} = \vec{0}.$$

Với chú ý giả thiết về O_1, O_2, theo (1) ta có

$\sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{O_1A_i} = \vec{0}$, $\sum_{j=1}^{n} b_j \overrightarrow{O_2B_j} = \vec{0}$, nên ta có:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \overrightarrow{OO_1} + \sum_{j=1}^{n} b_j \overrightarrow{OO_2} = \vec{0}$$

Vậy O, O_1, O_2 thẳng hàng và về độ dài hình học ta có $OO_1 : OO_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j / \sum_{i=1}^{m} a_i$ (đpcm).

Từ (2) có

$$(\overrightarrow{MO})^2 = \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\Big)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 MA_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j \overrightarrow{MA_i}\,\overrightarrow{MA_j}$$

Vì $2\overrightarrow{MA_i}\cdot\overrightarrow{MA_j} = MA_i^2 + MA_j^2 - (\overrightarrow{MA_j} - \overrightarrow{MA_i})^2$
$= MA_i^2 + MA_j^2 - A_iA_j^2$ nên

$$MO^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 MA_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA_i^2 +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA_j - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_i\alpha_j A_iA_j^2$$

Do có thể viết

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA = \sum_{1\leqslant j<i\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA_i^2 \text{ nên:}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 MA_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA_i^2$$

$$= \sum_{1\leqslant i=j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA_i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA_i^2 + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA_i^2$$

$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j MA_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\alpha_j MA_i^2$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i MA_i^2 \text{ (theo (3))}.$$

Vậy có:

$$MO^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i MA_i^2 - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \alpha_i\alpha_j A_iA_j^2 \quad (6)$$

Bây giờ ta xét vài ví dụ ứng dụng các kết quả trên.

Ví dụ 1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ với các cạnh a, b, c. Hãy tính độ dài đường phân giác trong AA_1 và tỉ số IA/IA_1.

Giải: Tại các điểm A, B, C ta đặt các khối lượng tương ứng a, b, c. Vì AA_1 là đường phân giác nên

$$A_1B/A_1C = c/b \Rightarrow c.A_1C = b.A_1B$$

$$\Rightarrow b.\overrightarrow{A_1B} + c.\overrightarrow{A_1C} = \vec{0}\ (b.\overrightarrow{A_1B} + c.\overrightarrow{A_1C} = \vec{0}).$$

Vậy theo (4), A_1 là trọng tâm của hệ hai chất điểm B, C. Theo (6) với $m = 2$, $M \equiv A$ và theo định nghĩa α_1, α_2 ta có:

$$AA_1^2 = \frac{b}{b+c}AB^2 + \frac{c}{b+c}AC^2 - \frac{bc}{(b+c)^2}BC^2$$

$$= \frac{bc^2}{b+c} + \frac{cb^2}{b+c} - \frac{bca^2}{(b+c)^2}$$

$$= bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right].$$

Với chú ý A là trọng tâm của hệ 1 chất điểm A, nên theo tính chất (5) ta có trọng tâm của hệ A, B, C nằm trên đường phân giác AA_1. Tương tự trọng tâm của hệ A, B, C cũng nằm trên đường phân giác BB_1. Vậy I chính là trọng tâm của hệ A, B, C. Do đó theo (5) ta có:

$$IA/IA_1 = (b+c)/a.$$

Nhận xét: Nếu tại A, B, C cùng đặt một khối lượng là 1 thì theo cách xác định trọng tâm ở ví dụ 1 ta dễ dàng thấy trọng tâm của hệ 3 chất điểm A, B, C chính là trọng tâm (giao điểm của 3 đường trung tuyến) của $\triangle ABC$.

Ví dụ 2. Gọi H, I, O, G là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của $\triangle ABC$ có các cạnh a, b, c; và bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp R, r. Hãy xác định OI^2, OH^2, OG^2, IH^2, IG^2, HG^2.

Giải: Đặt tại các điểm A, B, C các khối lượng tương ứng a, b, c, theo ví dụ 1 ta có I là trọng tâm của hệ 3 chất điểm A, B, C. Theo (6) ta có:

$$1)\ OI^2 = \frac{a}{a+b+c}OA^2 + \frac{b}{a+b+c}OB^2 + \frac{c}{a+b+c}OC^2 - \frac{ab}{(a+b+c)^2}AB^2 - \frac{ac}{(a+b+c)^2}AC^2 - \frac{bc}{(a+b+c)^2}BC^2$$

Có

$$\frac{ab}{(a+b+c)^2}AB^2 + \frac{ac}{(a+b+c)^2}AC^2 + \frac{bc}{(a+b+c)^2}BC^2 = \frac{abc^2 + acb^2 + bca^2}{(a+b+c)^2} = \frac{abc}{a+b+c} \quad (7).$$

và

$$S_{\Delta ABC} = abc/4R,\ S_{\Delta ABC} = r(a+b+c)/2$$

$$\Rightarrow abc/(a+b+c) = 2Rr \quad (8)$$

Vậy:

$$OI^2 = \frac{a}{a+b+c}R^2 + \frac{b}{a+b+c}R^2 + \frac{c}{a+b+c}R^2 - 2Rr$$

(theo (7) và (8), hay $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (hệ thức Ơle).

2) Lại theo (6) ta có: $GI^2 = \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC - \frac{ab}{(a+b+c)^2} \times AB^2 - \frac{ac}{(a+b+c)^2}AC - \frac{bc}{(a+b+c)^2}BC$

$$= \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC^2 - 2Rr$$

(theo (7) và (8). Gọi A_2 là trung điểm của BC, theo công thức đường trung tuyến ta có

$GA^2 = \frac{4}{9}AA_2^2 = \frac{2}{9}\left(c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}\right)$. Tương tự

$$GB^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)$$

$$GC^2 = \frac{2}{9}\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right) \text{ nên:}$$

$$S_1 = \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC^2 = \frac{1}{9(a+b+c)}[2ab(a+b+c) + 2ac(a+b+c) + 2bc(a+b+c) - 6abc - (a^3+b^3+c^3)].$$

Nhưng dễ thấy

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc \quad (9)$$

nên $S_1 = (ab + ac + bc)/9 - (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)/9 - abc/(a+b+c) = (1/9)(3ab + 3ac + 3bc - a^2 - b^2 - c^2) - 2Rr$ (theo (8)).

Vậy:

$$GI^2 = (1/9)(3ab + 3ac + 3bc - a^2 - b^2 - c^2) - 4Rr \quad (10)$$

3) Theo (6) có:

$$HI^2 = \frac{a}{a+b+c}HA^2 + \frac{b}{a+b+c}HB^2 + \frac{c}{a+b+c}HC^2 - \frac{ab}{(a+b+c)^2}AB^2 - \frac{ac}{(a+b+c)^2}AC^2 - \frac{bc}{(a+b+c)^2}BC^2$$

Ta cần xác định HA^2, HB^2, HC^2. Dựng $\triangle A'B'C'$ có các cạnh song song với các cạnh tương ứng và đi qua các đỉnh của $\triangle ABC$.

Do các tứ giác $ACBC'$, $ABCB'$ là các hình bình hành nên $AC' = AB' = BC$ và $HA \perp B'C'$.

Vì vậy dễ dàng thấy H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle A'B'C'$ với bán kính R'. Có $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC \Rightarrow R'/R = B'C'/BC \Rightarrow R' = 2R$.

Từ đó $HA^2 = R'^2 - C'A^2 = 4R^2 - a^2$.

Tương tự

$$HB^2 = 4R^2 - b^2;\ HC^2 = 4R^2 - c^2.$$

Vậy theo (7) và (8) ta có

$$HI^2 = \frac{a}{a+b+c}(4R^2-a^2) + \frac{b}{a+b+c}(4R^2-b^2) + \frac{c}{a+b+c}(4R^2-c^2) - 2Rr = 4R^2 - 2Rr - \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$$

$= 4R^2 - 2Rr - (a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) - 3abc/(a+b+c)$ (theo (9)).

Vậy theo (8) ta có:

$HI^2 = 4R^2 - 8Rr - (a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ (11)

4) Để xác định OG^2, ta đặt ở A, B, C cùng một khối lượng 1, theo nhận xét trên thì trọng tâm G của $\triangle ABC$ chính là trọng tâm của hệ 3 chất điểm A, B, C. Từ đó theo (6) ta có: $OG^2 = OA^2/3 + OB^2/3 + OC^2/3 - AB^2/9 - AC^2/9 - BC^2/9$. Vậy

$$OG^2 = R^2 - (a^2+b^2+c^2)/9.$$

Theo đường thẳng Ơle, ta có $GH = 2OG$; $OH = 3OG$. Vậy:

$$GH^2 = 4R^2 - 4(a^2+b^2+c^2)/9$$

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) \qquad (12)$$

Hệ quả: Trong tam giác ABC ta có:

1) $9R^2 \geqslant a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc \geqslant 18Rr$ (13)

Chứng minh:

Từ (12) $\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2$. Từ $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$. Lại theo (10)

$$3ba + 3bc + 3ac - a^2 - b^2 - c^2 \geqslant 36Rr.$$

Nhưng do $ab+ac+bc - a^2 - b^2 - c^2 \leqslant 0$ nên: $2ab+2ac+2bc \geqslant 3ba+3bc+3ac - a^2 - b^2 - c^2 \geqslant 36Rr \Rightarrow ab+ac+bc \geqslant 18Rr$. Tóm lại ta có (13)

2) a) $2.IO \geqslant HI$ d) $IO \geqslant OG$

b) $\sqrt{2}.\ IO \geqslant GI$ e) $3.IO \geqslant OH$

c) $2.IO \geqslant GH$ f) $3GH^2 - 2IH^2 + 6IG^2 - 4IO^2 = 0$.

Giải: Theo các công thức tính GH^2, IH^2, IG^2, IO^2 ta có:

$\alpha GH^2 + \beta IH^2 + \gamma IG^2 + \omega IO^2 = (4\alpha + 4\beta + \omega)R^2 - 2Rr(4\beta + 2\gamma + \omega) + (\beta + \gamma/3)(ab+ac+bc) - (a^2+b^2+c^2)(4\alpha/9 + \beta + \gamma/9)$. (14)

a) Cho $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = -1$, $\omega = 4$, từ (14) có: $4IO^2 - IH^2 = a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ac \geqslant 0$ (theo (13)).

b) Cho $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -1$, $\omega = 2$, từ (14) có: $2IO^2 - GI^2 = 2R^2 - (ab+ac+bc)/3 + (a^2+b^2+c^2)/9 = [(18R^2 - 2ab - 2ac - 2bc) + (a^2+b^2+c^2 - ab - ac - bc)]/9 \geqslant 0$ (theo (13)).

c) Cho $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 0$, $\omega = 4$, từ (14) ta có: $4IO^2 - GH^2 = -8Rr + (4/9)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 0$ (theo (13)).

d) và e). Theo đường thẳng Ơle có $GH = 2.GO$, $GH = (2/3)OH$. Vậy từ c) ta có $OI \geqslant OG$ và $3IO \geqslant OH$.

f) Thay $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 6$; $\omega = -4$ vào (14) ta có ngay kết luận.

Các bạn có thể suy diễn tiếp các tính chất lý thú khác từ các kết quả ở trên. Để giải ví dụ 2, các phương pháp khác đều gặp nhiều khó khăn hoặc bị bế tắc. Phương pháp dùng khái niệm trọng tâm có ưu điểm trong nhiều bài toán tính toán và chứng minh. Ưu điểm cơ bản của phương pháp này là việc xác định các khối lượng thích hợp sẽ cho lời giải ngắn gọn và mở rộng phạm vi ứng dụng linh hoạt cho nhiều bài toán.

THÔNG BÁO

Báo Toán học và tuổi trẻ từ số 1 năm 1982 sẽ được bán theo giá mới là 1 đồng một tờ.

In tại Xí nghiệp In 75, 77 Hàng Bồ – Hà Nội. Chỉ số: 12884 *Giá*: **0,20đ**
Số in 147/81. In xong và gửi lưu chiểu tháng 12-1981.