HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Số 121 5 1981

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN
Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG
Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội
Dây nói: 52825

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

HÌNH LỒI VÀ ĐỊNH LÝ HELLY

HOÀNG ĐỨC TẬN

Các bạn thân mến!

Có lẽ trong toán học lý thuyết (đặc biệt là hình học tổ hợp) và trong toán ứng dụng (đặc biệt là toán kinh tế) thì hình lồi là một trong các đối tượng có tầm quan trọng đặc biệt, được nhiều người quan tâm đến, do nó có nhiều ứng dụng đặc sắc. Trong bài viết này tôi muốn giới thiệu với bạn đọc một số tính chất lý thú của hình lồi.

Hình M (trên mặt phẳng hay trong không gian) được gọi là hình lồi, nếu với mọi cặp điểm $A, B \in M$ thì đoạn thẳng AB nằm hoàn toàn trong M (ta viết là $[AB] \in M$). Ta qui ước gọi miền lồi của các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ là hình lồi có diện tích nhỏ nhất chứa các điểm $A_1, \dots, A_n$. Ta có định lý sau đây:

Định lý. Trên mặt phẳng (hay trong không gian) cho k điểm $A_1, \dots, A_k$ (k là số tự nhiên nào đó). Khi đó điểm M là thuộc miền lồi của các điểm $A_1, \dots, A_k$ khi và chỉ khi tồn tại các số thực không âm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sao cho có:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1 \\ \text{và : } \overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}\end{array}\right\} (*)$$

trong đó O là một điểm bất kỳ trên mặt phẳng (hay trong không gian).

Chứng minh: Ta ký hiệu G là miền lồi của các điểm $A_1, \dots, A_k$ và ký hiệu $\widetilde{G}$ là tập tất cả các điểm thỏa mãn các quan hệ $(*)$.

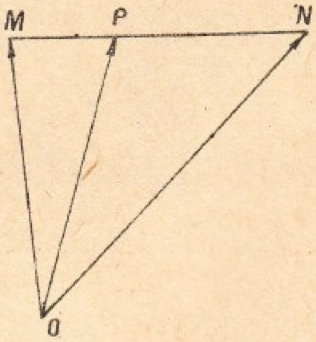
Hiển nhiên ta có $A_1, \dots, A_k \in \widetilde{G}$. Chẳng hạn, từ $1 + 0 + \dots + 0 = 1$; $\overrightarrow{OA_1} = 1 . \overrightarrow{OA_1} + 0 . \overrightarrow{OA_2} + \dots + 0 . \overrightarrow{OA_k}$ ta suy ra $A_1 \in \widetilde{G}$.

Ta chứng minh $\widetilde{G}$ lồi. Thật vậy, giả sử M, N là các điểm bất kỳ của $\widetilde{G}$. Khi đó tồn tại các số thực không âm $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ và $\mu_1, \dots, \mu_k$ thỏa mãn các quan hệ:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, \quad \overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k};$$

$$\mu_1 + \dots + \mu_k = 1, \quad \overrightarrow{ON} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \mu_k \overrightarrow{OA_k}.$$

Nếu mọi điểm P thuộc đoạn MN thì ta sẽ có: $\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP} = \overline{OM} + \nu\,\overline{MN}$ (xem hình 1), ở đây ν là số thực thỏa mãn: $0 \leqslant \nu \leqslant 1$. Do đó:



Hình 1

$$\overline{OP} = \overline{OM} + \nu(\overline{ON} - \overline{OM}) = \nu\,\overline{ON} + (1-\nu)\,\overline{OM}$$
$$= \nu\Big(\sum_1^k \mu_i \overline{OA_i}\Big) + (1-\nu)\Big(\sum_1^k \lambda_j \overline{OA_j}\Big) =$$
$$= \sum_1^k (\nu\mu_i + (1-\nu)\lambda_i)\,\overline{OA_i}.$$

Vậy: $\overline{OP} = \sum_1^k \rho_i\,\overline{OA_i}$, ở đây ρ_i xác định bởi $\rho_i = \nu\mu_i + (1-\nu)\lambda_i$

Vì $\nu \geqslant 0$, $1-\nu \geqslant 0$ và mọi $\lambda_i, \mu_i \geqslant 0$ nên $\rho_i \geqslant 0$. Ngoài ra

$$\sum_1^k \rho_i = \nu\sum_1^k \mu_i + (1-\nu)\sum_1^k \lambda_i = \nu\cdot 1 + (1-\nu)\cdot 1 = 1.$$

Điều đó chứng tỏ rằng điểm P thỏa mãn quan hệ(*), tức là $P \in \tilde{G}$. Nói một cách khác là tập $\tilde{G}$ chứa toàn bộ đoạn thẳng MN. Do đó $\tilde{G}$ là lồi.

Vì $\tilde{G}$ lồi và $A_1, \dots, A_k \in \tilde{G}$. Nên $\tilde{G}$ chứa miền lồi của các điểm $A_1, \dots, A_k$. Hay là ta đã chứng minh được $G \in \tilde{G}$. Để chứng minh định lý (tức là chứng minh $G = \tilde{G}$), thì ta chỉ còn phải chứng minh $\tilde{G} \in G$ là xong. Sau đây ta sẽ chứng minh điều đó bằng qui nạp theo k (số điểm $A_1, \dots, A_k$).

Khi $k = 2$ thì đối với cặp điểm A_1, A_2 của $\tilde{G}$ tức là tập tất cả các điểm M mà $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ và $\overline{OM} = \lambda_1\overline{OA_1} + \lambda_2\overline{OA_2}$ (với $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$) chính là đoạn thẳng A_1A_2 và rõ ràng là nó trùng với miền lồi G của 2 điểm A_1 và A_2.

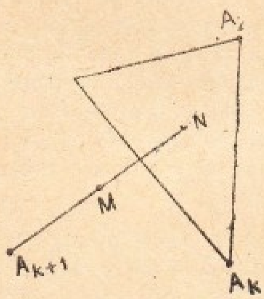
Ta giả thiết rằng đối với k điểm $A_1 \dots A$ thì $G = \tilde{G}$ (thỏa mãn (*)). Bây giờ ta chứng minh rằng điều đó cũng đúng cho $(k+1)$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$.

Giả sử $M \in \tilde{G}$ tức là tồn tại $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geqslant 0$ sao cho $\lambda_1 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1} = 1$ và ta có $\overline{OM} = \lambda_1\overline{OA_1} + \dots + \lambda_k\overline{OA_k} + \lambda_{k+1}\overline{OA_{k+1}}$.

Trong các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ có ít nhất một số khác 0. Giả sử số đó là $\lambda_1 \neq 0$. Khi đó $\lambda_1 + \dots + \lambda_k > 0$. Ta ký hiệu $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k > 0$. Sau đó ta ký hiệu N là điểm sao cho: $\overline{ON} = \sum_1^k (\lambda_i/\lambda)\,\overline{OA_i}$. Vì $\sum_1^k (\lambda_i/\lambda) = 1$, nên theo giả thiết qui nạp ta có N phải thuộc miền lồi của các điểm $A_1, \dots, A_k$ (hình 2), và rõ ràng rằng N cũng phải nằm trong miền lồi của các điểm $A_1, A_2, \dots A_k, A_{k+1}$. Ta cũng có: $\lambda + \lambda_{k+1} = 1$ và có hệ thức:

$$\overline{OM} = \sum_1^{k+1} \lambda_j\,\overline{OA_j} = \lambda\cdot\sum_1^k (\lambda_i/\lambda)\,\overline{OA_i} +$$
$$+ \lambda_{k+1}\,\overline{OA_{k+1}} = \lambda\overline{ON} + \lambda_{k+1}\,\overline{OA_{k+1}}.$$

Từ đó ta suy ra rằng điểm M phải thuộc đoạn thẳng NA_{k+1} (hình 2). Nhưng vì cả 2 điểm N và A_{k+1} đều thuộc miền G lồi, cho nên M cũng phải thuộc G. Điều đó chứng tỏ rằng với mọi điểm M thuộc $\tilde{G}$ thì M cũng phải thuộc G, tức là $\tilde{G} \in G$.



Hình 2

Định lý được chứng minh xong hoàn toàn.

Định lý trên đây cho ta nhiều kết quả đẹp đẽ trong toán học sơ cấp. Chẳng hạn bạn đọc hãy dựa vào định lý trên để tính khoảng cách giữa tâm các mặt cầu nội, ngoại tiếp của một tứ diện cho trước (theo các cạnh của tứ diện).

Vào năm 1921 Helly đã áp dụng định lý trên để chứng minh một kết quả nổi tiếng và có rất nhiều ứng dụng về sau này trong toán học. Đó là định lý mang tên ông.

Định lý Helly. Nếu trong không gian Ơclit R^n cho trước một số hữu hạn các vật thể lồi mà trong đó mỗi bộ $n+1$ vật thể trong các vật thể đã cho có chung nhau 1 điểm, thì khi đó sẽ tồn tại một điểm chung cho tất cả các vật thể lồi đã cho.

(Ở đây khi $n=1$ thì R^1 là đường thẳng: khi $n=2$ thì R^2 là mặt phẳng; còn khi $n=3$ thì R^3 là không gian (3 chiều).

Chứng minh: Sau đây tôi sẽ chứng minh định lý Helly trong trường hợp $n=3$ (không gian 3 chiều thông thường mà chúng ta đang học trong trường phổ thông). Trường hợp $n=2$ mặt phẳng) chỉ cách chứng minh cũng hoàn toàn tương tự không khác gì lắm so với trường hợp $n=3$.

Trước hết ta hãy giả thiết rằng ta có 5 vật thể lồi F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Ta chọn lấy 1 điểm chung cho tất cả các hình đang xét trừ vật thể F_i và ta ký hiệu điểm chung đó là A_i (ở đây i có thể bằng 1, 2, 3, 4, 5). Khi đó ta nhận được 5 điểm A_1, A_2, A_3 A_4, A_5. Xét các véctơ:

$$\vec{e_1} = \overline{A_5A_1},\quad \vec{e_2} = \overline{A_5A_2},\quad \vec{e_3} = \overline{A_5A_3},\quad \vec{e_4} = \overline{A_5A_4}$$

Bởi vì 4 vectơ đó nằm trong không gian Ơclit 3 chiều nên chúng phụ thuộc tuyến tính, tức là tồn tại 4 số thực $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3} + \alpha_4 \vec{e_4} = 0 \qquad (1)$$

(Đây là 1 trong các định lý cơ bản của hình giải tích mà các bạn có thể tự kiểm tra lấy được).

Bây giờ ta chọn trong không gian một điểm O nào đó và ký hiệu

$$r_1 = \overline{OA_1},\ r_2 = \overline{OA_2},\ r_3 = \overline{OA_3},\ r_4 = \overline{OA_4},\ r_5 = \overline{OA_5}.$$

Khi đó rõ ràng là:

$$\vec{e_1} = \overline{A_5A_1} = \overline{OA_1} - \overline{OA_5} = r_1 - r_5.$$

....

$$\vec{e_5} = \overline{A_5A_4} = \overline{OA_4} - \overline{OA_5} = r_4 - r_5$$

Cho nên quan hệ phụ thuộc (1) ta viết trên có thể viết lại dưới dạng sau:

$$\alpha_1(r_1 - r_5) + \alpha_2(r_2 - r_5) + \alpha_3(r_3 - r_5) + + \alpha_4(r_4 + r_5) = 0$$

Hay
$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\ r_5 = 0$$

Nói cách khác ta luôn có quan hệ:

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4 + \alpha_5 r_5 = 0 \qquad (2)$$

ở đây $\alpha_5 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$, ngoài ra trong các hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ có các hệ số khác 0, và tổng của tất cả 5 hệ số đó bằng 0.

Bây giờ ta chuyển trong hệ thức (2) tất cả các phần tử mà có hệ số âm sang vế phải. Giả sử ta xác định được $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0$ còn $\alpha_4, \alpha_5 < 0$, thì ta sẽ nhận được:

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 = (-\alpha_4)\, r_4 + (-\alpha_5)\, r_5 \quad (3)$$

ở đây tất cả các hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, (-\alpha_4), (-\alpha_5)$ đều không âm, và $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\alpha_4 - \alpha_5$. Bởi vì ta có số $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ dương nên cả 2 vế của hệ thức vectơ (3) ta có thể chia cho γ. Lúc đó ta nhận được:

$$\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 + \beta_3 r_3 = \beta_4 r_4 + \beta_5 r_5$$

Hay $\beta_1\overline{OA_1} + \beta_2\overline{OA_2} + \beta_3\overline{OA_3} = \beta_4\overline{OA_4} + \beta_5\overline{OA_5}$ (ở đây $\beta_1 = \alpha_1/\gamma, \beta_2 = \alpha_2/\gamma, \beta_3 = \alpha_3/\gamma, \beta_4 = -\alpha_4/\gamma$, $\beta_5 = -\alpha_5/\gamma$). Rõ ràng là tất cả các hệ số $\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_4, \beta_5 \geqslant 0$ và $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 1$

Giả sử M là điểm sao cho:

$$\overline{OM} = \beta_1\overline{OA_1} + \beta_2\overline{OA_2} + \beta_3\overline{OA_3} = \beta_4\overline{OA_4} + \beta_5\overline{OA_5}.$$

Khi đó do định lý ta đã chứng minh ở trên, thì ta có điểm M phải nằm trong miền lồi của các điểm A_1, A_2, A_3 và ngoài ra nó phải nằm trong miền lồi của các điểm A_4 và A_5 nữa. Nhưng mỗi một trong các vật thể lồi F_4, F_5 lại chứa tất cả các điểm A_1, A_2, A_3 và tất nhiên là cả điểm M nữa. Và mỗi một trong các vật thể lồi F_1, F_2, F_3 chứa tất cả các điểm A_4, A_5 và tất nhiên cả điểm M nữa. Vì vậy tất cả các vật thể F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 có chứa một điểm chung là M.

Tiếp theo ta sẽ kiểm tra bằng qui nạp theo số vật thể đang xét. Giả sử định lý Helly đúng cho m vật thể, ở đây $m \geqslant 5$. Ta chứng minh nó cũng đúng cho $m+1$ vật thể $F_1, F_2, \ldots$; F_{m+1}. Ký hiệu $\Phi_i = F_i \cap F_{m+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Ta nhận được m vật thể lồi $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ mà trong đó mỗi một bộ 4 vật thể là có 1 điểm chung. Theo giả thiết qui nạp thì m vật thể $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ có một điểm chung. Nhưng điều đó có nghĩa là tồn tại 1 điểm chung của các vật thể $F_1, \ldots$, F_m, F_{m+1}. Định lý đã được chứng minh xong.

Các bạn thân mến! Cách chứng minh trên đây rất hay và đẹp. Một điều mà bạn đọc cần lưu ý là định lý Helly có rất nhiều ứng dụng lý thú, có thể trong một vài số báo nữa tôi sẽ giới thiệu một số ứng dụng hay của định lý Helly. Nhân đây chỉ xin nêu một ví dụ là từ định lý trên đây Young đã rút ra một kết quả đặc sắc sau:

Định lý Young. Nếu X là một vật thể lồi trong không gian 3 chiều có đường kính $\leqslant 2$. Khi đó vật thể X sẽ nằm gọn bên trong một hình cầu có bán kính bằng $\sqrt{6}/2$.

Bài 1/117. *Chứng minh rằng*

a) Từ 6 người tùy ý ta có thể chọn ra 3 người hoặc đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau.

b) Từ 18 người tùy ý ta có thể chọn ra 4 người hoặc đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau,

Bài toán đặt ra với điều kiện nếu A quen B thì B cũng quen A.

Lời giải.

a) Xét A_0 từ 6 người. Khi đó từ 5 người còn lại phải tìm được 3 người, ví dụ A_1, A_2, A_3, hoặc quen A_0, hoặc không quen A_0. Giả sử A_1, A_2, A_3 quen A_0 (trường hợp trái lại chứng minh tương tự). Nếu 2 trong số A_1, A_2, A_3 quen biết nhau, ví dụ A_1 quen A_2, thì A_0, A_1, A_2 đôi một quen biết nhau; trong trường hợp ngược lại thì đã có điều phải chứng minh là A_1, A_2, A_3 đôi một không quen biết nhau.

b) Xét A_0 từ 18 người. Trong số 17 người còn lại phải có 9 người hoặc quen A_0, hoặc không quen A_0. Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_9$ quen A_0 (trường hợp có 9 người không quen A_0 chứng minh tương tự).

Nếu trong số 9 người nói trên có một người, ví dụ A_1 quen it nhất 4 người trong số 8 người còn lại, ví dụ A_1 quen A_2, A_3, A_4, A_5, thì hoặc A_2, A_3, A_4, A_5 đôi một không quen nhau, hoặc có hai người quen nhau, chẳng hạn A_2 quen A_3, khi đó A_0, A_1, A_2, A_3 đôi một quen nhau.

Nếu mỗi người trong số 9 người có số người quen trong số 8 người còn lại ít hơn 4 thì phải có ít nhất 1 người có số người quen trong số còn lại ít hơn 3, vì người nào cũng quen 3 thì số cặp quen nhau trong 9 người là 3.9 : 2 không nguyên vô lý. Giả sử A_1 quen ít hơn 3 người trong số $A_2, \ldots, A_9$ tức là có 6 người $B_1 \ldots B_6$ trong số $A_2 \ldots A_9$ không quen A_1. Theo a) có 3 người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau. Nếu chẳng hạn có B_1, B_2, B_3 đôi một quen nhau thì A_0, B_1, B_2, B_3 đôi một quen nhau. Nếu có 3 người đôi một không quen nhau thì 3 người đó cùng với A_1 là 4 người đôi một không quen nhau.

Trong số các bạn gửi bài giải không có bạn nào giải hoàn chỉnh bài này.

N.K.M.

Bài 2/117. *Trên giấy kẻ ô vuông người ta viết tất cả các số tự nhiên từ nhỏ đến lớn, mỗi số trong một ô theo kiểu xoắn ốc như hình 1.*

Hãy xác định các số 1930 và 1981 nằm ở dòng, cột thứ mấy nếu coi số 1 nằm ở dòng 51, cột 51 (đánh số tăng dần từ trái sang phải, từ dưới lên trên).

Lời giải. Ký hiệu ô ở dòng thứ x, cột thứ y là ô (x, y).

						37	
	21	20	19	18	17		
	22	7	6	5	16		
	.	8	1	4	15		
	.	9	2	3	14		
	.	10	11	12	13		

Xét các hình vuông có tâm nằm tại ô chứa số 1 Khi đó đỉnh trên bên phải của các hình vuông này là các ô (N, N) (hiển nhiên $N \geqslant 51$) và số ô trên mỗi cạnh hình vuông đó bằng $2(N-51)+1$. Dễ dàng chứng minh được rằng (bằng qui nạp) các ô (N, N) nói trên chứa các số $(2n)^2+1$, ở đây $n = N - 51$.

Ta có $1937 = (2.22)^2 + 1$. Suy ra 1937 nằm tại ô $(51+22, 51+22)$ tức là ô $(73, 73)$. Hình vuông có ô $(73,73)$ có số ô trên mỗi cạnh bằng $2.22+1=45$.

Do $1937-1930=7<45$ nên hai số 1937 và 1930 nằm trên cùng một cột. Số 1930 nằm ở dòng thứ $73-7=66$.

Do $1981-1937=44<45$ nên số 1981 nằm trên cùng một dòng với số 1937. Số 1981 nằm ở cột thứ $73-44=29$.

Tóm lại, số 1930 nằm ở dòng 66, cột 73 và số 1981 nằm ở dòng 73, cột 29.

Nhận xét: Chỉ có một số ít bạn gửi bài tìm ra được đáp số của bài toán. Bạn *Phan Văn Tùng* (lớp 12 trường Lộc Ninh, Sông Bé) có lời giải hoàn chỉnh hơn cả.

N.K.M.

Bài 3/117. *Tìm tất cả các số nguyên không âm x, y, z sao cho*

$$3^x = 2^y + 1930^z \quad (1)$$

Lời giải (của *Nguyễn Linh Vũ* – Lớp 10P1 trường Trưng Vương, thành phố Hồ Chí Minh).

Điều kiện (1) tương đương với

$$3^x = 2^y + 1930^z$$

Vế phải đẳng thức trên lớn hơn 1, suy ra $x \neq 0$. Ta cũng có $y \neq 0$ vì nếu $y = 0$ thì vế phải bằng $1930^z + 1 \equiv 2 \pmod 3$, trong khi đó vế trái chia hết cho 3.

Vì vế trái của (1) (khi $x, y \neq 0$) là một số lẻ nên suy ra $z = 0$. Vậy phương trình đã cho trở thành

$$3^x = 1 + 2^y \qquad (2)$$

a) Nếu x lẻ thì $3^x \equiv 3 \pmod 4$. Do đó $2^y \equiv 2 \pmod 4$. Suy ra $y = 1$ vì nếu $y > 1$ thì $2^y \vdots 4$. Với $y = 1$, từ (2) suy ra $x = 1$.

b) Nếu $x = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) thì khi đó (2) tương đương với $3^{2k} - 1 = 2^y \Leftrightarrow (3^k - 1)(3^k + 1) = 2^y$. Vì một số chỉ có duy nhất cách phân tích ra thừa số nguyên tố nên để vế trái bằng vế phải thì $3^k - 1 = 2^m$, $3^k + 1 = 2^n$. Vì $3^k - 1$ và $3^k + 1$ là hai số chẵn liên tiếp nên chỉ có thể $m = 1$, $n = 2$, tức là $k = 1$. Khi đó $y = 3$ và từ (2) cho $x = 2$.

Tóm lại phương trình đã cho có hai bộ nghiệm: ($x = 1$, $y = 1$, $z = 0$) và ($x = 2$, $y = 3$, $z = 0$)

Các bạn *Trịnh Xuân Bình* (quân khu 7, Hải Hưng) và *Phạm Xuân Hải* (6A Chu Văn An, Hà Nội) có lời giải tương tự lời giải trên. Một số bạn tìm ra nghiệm của bài toán song khi biện luận còn thiếu chặt chẽ.

N.K.M

Bài 4/117. *Viết tất cả các số có 1980 chữ số bắt đầu từ số 19641964...1964 đến số 19811981...1981 liên tiếp theo hàng ngang với thứ tự tùy ý.*

Chứng minh rằng tất cả các số thu được theo cách viết trên đều có chung một ước số chỉ chứa toàn số 0 và 1.

Lời giải. Gọi A là một số nhận được theo cách viết nói trong đầu bài. Phân số A thành từng đoạn, mỗi đoạn gồm 1980 chữ số. Gọi $S(A)$ là tổng của các đoạn đó. Như vậy:

$$A = A_1 + 10^{1980}A_2 + 10^{1980 \cdot 2}A_3 + \ldots + 10^{1980(n-1)}A_n$$

$$S(A) = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

ở đây $\quad n = \overline{1981\ldots1981} - \overline{1964\ldots1964} + 1.$

Ta có

$$A - S(A) = (10^{1980} - 1)A_1 + (10^{1980 \cdot 2} - 1)A_2 + \ldots$$
$$\ldots + (10^{1980(n-1)} - 1)A_n$$

Vậy $A \equiv S(A) \pmod{10^{1980} - 1}$.

Mà $S(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \sum\limits_{i=\overline{1964\ldots1964}}^{\overline{1981\ldots1981}} i$

$$= \sum_{1}^{\overline{1981\ldots1981}} i - \sum_{1}^{\overline{1964\ldots1964}-1} i$$

$$S(A) = (1/2)\left[\overline{1981\ldots1981}\,(\overline{1981\ldots1981} + 1) - \right.$$
$$\left. - \overline{1964\ldots1964}\,(\overline{1964\ldots1964} - 1)\right]$$

$$\overline{1981\ldots1981} = 1981\,(1 + 10^4 + 10^{4\cdot2} + \ldots + 10^{4\cdot494})$$

$$\overline{1964\ldots1964} = 1964\,(1 + 10^4 + 10^{4\cdot2} + \ldots + 10^{4\cdot494})$$

Vậy $S(A) \vdots (1 + 10^4 + 10^{4\cdot2} + \ldots + 10^{4\cdot494})$.

Vì $10^{1980} - 1 = (10^4 - 1)(1 + 10^4 + \ldots + 10^{4\cdot494})$

nên $\qquad A \vdots (1 + 10^4 + \ldots + 10^{4\cdot494})$

Như vậy các số nhận được theo cách viết nói trong đầu bài có một ước chung là

$$1 + 10^4 + 10^{4\cdot2} + \ldots + 10^{4\cdot494}$$

chỉ chứa toàn số 0 và 1 trong cách viết thập phân.

P.H.

Bài 5/117. *Cho* $1/a + 1/b + 1/c = \alpha \qquad (1)$

$$(1/a + 1/b)(1/a + 1/c)(1/b + 1/c) = \beta \qquad (2)$$

$$abc = \gamma \qquad (3)$$

Tính $a + b + c$ *theo* α, β, γ ($\alpha \neq 0$).

Lời giải. Từ (1) và (2) suy ra

$$(\alpha - 1/c)(\alpha - 1/b)(\alpha - 1/a) = \beta.$$

Sau khi khai triển và rút gọn ta có

$$\alpha^3 - \alpha^2(1/a + 1/b + 1/c) + \alpha(1/ab + 1/bc + 1/ca) - 1/abc = \beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2\alpha + \alpha(a + b + c)/abc - 1/\gamma = \beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha(a + b + c)/\gamma - 1/\gamma = \beta$$

Vậy $\qquad a + b + c = (\beta\gamma + 1)/\alpha$

N.K.M.

Bài 6/117. *Giải phương trình*

$$a\,\frac{7x^6 + 35x^4 + 21x^2 + 1}{x^6 + 21x^4 + 35x^2 + 7} + \frac{7a^6 + 35a^4 + 21a^2 + 1}{a^6 + 21a^4 + 35a^2 + 7}\,x = 0$$

Lời giải. Ta đặt

$$f(x) = \frac{7x^6 + 35x^4 + 21x^2 + 1}{x^6 + 21x^4 + 35x^2 + 7}$$

Khi ấy phương trình đã cho có dạng

$$af(x) + xf(a) = 0 \qquad (1)$$

Nếu $a = 0$ thì $f(a) \neq 0$ nên từ (1) suy ra $x = 0$.

Dễ thấy nếu $a \neq 0$ thì $x \neq 0$. (1) tương đương với

$$f(x)/x + f(a)/a = 0 \quad (2)$$

Ta lại có

$$x - f(x) = \frac{x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1}{x^6 + 21x^4 + 35x^2 + 7}$$

$$= \frac{(x-1)^7}{x^6 + 21x^4 + 35x^2 + 7} \quad (3)$$

$$x + f(x) = \frac{x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1}{x^6 + 21x^4 + 35x^2 + 7}$$

$$= \frac{(x+1)^7}{x^6 + 21x^4 + 35x^2 + 7} \quad (4)$$

Nếu $a = 1$ thì $f(a) = f(1) = 1$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow f(x) + x = 0$.

Vì vậy từ (4) ta suy ra $x = -1$.

Tương tự nếu $a = -1$ thì $x = 1$.

Dễ thấy $a \neq \pm 1$ thì $x \neq \pm 1$. Do đó

$$x \pm f(x) \neq 0.$$

Vì vậy từ (3) và (4) suy ra

$$[x - f(x)]/[x + f(x)] = (x-1)^7/(x+1)^7 \quad (5)$$

Đặt $(x-1)/(x+1) = y$ và $(a-1)/(a+1) = b$.

Từ (5) suy ra

$$x - f(x) = y^7 x + y^7 f(x)$$

$$\Leftrightarrow x\,(1 - y^7) = f\,(x)\,(1 + y^7)$$

$$\Leftrightarrow f(x)/x = (1 - y^7)/(1 + y^7) \text{ (vì } x \neq 0 \text{ và } 1 + y^7 \neq 0).$$

Trong đẳng thức trên thay x bởi a thì được

$$f\,(a)/a = (1 - b^7)/(1 + b^7)$$

Lúc này (2) tương đương với

$$(1 - y^7)/(1 + y^7) + (1 - b^7)/(1 + b^7) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (1 - y^7)(1 + b^7) + (1 - b^7)(1 + y^7) = 0$$

$$\Leftrightarrow yb = 1.$$

Vì vậy ta có $(x-1)(a-1) = (x+1)(a+1)$

$$\Leftrightarrow x = -a.$$

Như vậy trong mọi trường hợp đều có $x = -a$. Vậy nghiệm của phương trình là $x = -a$.

Bài 7/117. *Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (v_1), (v_2) và một điểm A không nằm trên (v_1) cũng như (v_2). Dựng một đường tròn đi qua A và cắt hai đường tròn đã cho, mỗi đường tại một cặp điểm xuyên tâm đối*

Xác định bán kính của đường tròn đó.

Lời giải. Gọi O_1, O_2 tương ứng là tâm hai đường tròn (v_1), (v_2) : r_1, r_2 tương ứng là các bán kính của các đường tròn đó. Ta không xét trường hợp tầm thường là O_1 trùng với O_2.

1. *A không nằm trên đường thẳng O_1O_2.*

Phân tích : Giả sử đã dựng được đường tròn (v) cắt đường tròn (v_1) tại hai điểm xuyên tâm đối B_1, C_1 và cắt (v_2) tại hai điểm xuyên tâm đối B_2, C_2. AO_1 cắt đường tròn đã dựng tại M_1, AO_2 cắt đường tròn đã dựng tại M_2.

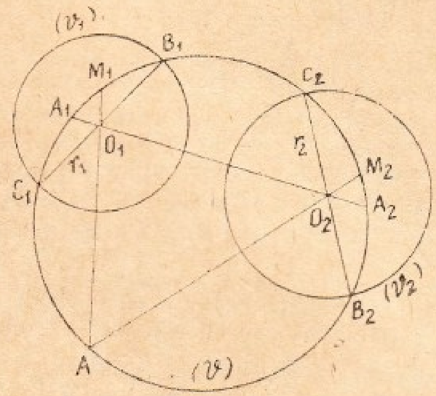
Ta có :

$$AO_1 \cdot O_1M_1 = O_1B_1 \cdot O_1C_1 = r_1^2 \Rightarrow O_1M_1 = r_1^2/AO_1 \quad (1)$$

Tương tự :

$$O_2M_2 = r_2^2/AO_2 \quad (2)$$

Như vậy M_1 và M_2 là hai điểm xác định được.



Hình 1

Cách dựng : Trên AO_1 lấy M_1 và trên AO_2 lấy M_2 thỏa mãn (1) và (2). Đường tròn (v) dựng qua A, M_1, M_2 là đường tròn cần dựng.

Chứng minh : Ta chứng minh (v) cắt (v_1), (v_2) tại các điểm xuyên tâm đối.

Thực vậy, giả sử (v) có 1 giao điểm với (v_1) là (B_1), B_1O_1 cắt (v) tại điểm C_1. Thế thì

$$AO_1 \cdot O_1M_1 = O_1B_1 \cdot O_1C_1 \Rightarrow O_1M_1 = r_1 \cdot O_1C_1/AO_1 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $O_1C_1 = r_1 \Rightarrow C_1$ nằm trên (v_1) tức là C_1 là giao điểm thứ hai của (v) và (v_1). Chứng minh tương tự cho (v_2).

Biện luận : Bao giờ cũng xác định được và duy nhất cặp M_1, M_2 nên bao giờ cũng dựng được duy nhất một đường tròn thỏa mãn điều kiện bài toán.

Xác định bán kính :

$$AM_1 = AO_1 + O_1M_1 = AO_1 + r_1^2/AO_1$$
$$= (AO_1^2 + r_1^2)/AO_1 \quad (4)$$

$$AM_2 = AO_2 + O_2M_2 = AO_2 + r_2^2/AO_2$$
$$= (AO_2^2 + r_2^2)/AO_2 \quad (5)$$

$$M_1M_2^2 = AM_1^2 + AM_2^2 - 2AM_1\,AM_2 \cos \widehat{O_1AO_2}$$

$$\Rightarrow M_1M_2 = \sqrt{AM_1^2 + AM_2^2 - 2AM_1\,AM_2 \cos \widehat{O_1AO_2}}$$

Vậy : $R = M_1M_2/2\sin\widehat{O_1AO_2}$

$$R = \sqrt{AM_1^2 + AM_2^2 - 2AM_1\,AM_2\cos\widehat{O_1AO_2}}/2\sin\widehat{O_1AO_2}$$

trong đó AM_1, AM_2 được tính bằng (4), (5).

2. *A nằm trên đường thẳng qua O_1O_2.*

Nếu (v) là một đường tròn bất kỳ nào đó cắt (v_1), (v_2) tại các điểm xuyên tâm đối và (v) cắt đường O_1O_2 tại A_1 và A_2 (hình 1) thì

$$\left.\begin{aligned} O_1A_1\cdot O_1A_2 &= r_1^2 \\ O_2A_1\cdot O_2A_2 &= r_2^2 \end{aligned}\right\} (*)$$

Như vậy A_1 và A_2 là cố định với mọi (v). (Để xác định A_1, A_2 ta dựng các bán kính O_1D_1, O_2D_2 vuông góc với O_1O_2. Đường tròn có tâm trên O_1O_2, dựng qua D_1, D_2 sẽ cắt O_1O_2 tại A_1 và A_2).

Vậy nếu A nằm trên O_1O_2 thì chỉ có A trùng với A_1 hoặc A trùng với A_2 thì mới dựng được (v) thỏa mãn điều kiện bài toán.

Cách dựng : Xác định A_1, A_2. Dựng đường tròn tùy ý qua A_1, A_2.

Chứng minh : Chứng minh tương tự trường hợp 1.

3. *Kết luận* : Nếu A nằm ngoài đường thẳng O_1O_2 thì bài toán có một nghiệm hình.

— Nếu A trùng với A_1 hoặc A_2 xác định bởi (*) thì bài toán có vô số nghiệm hình.

— Nếu A nằm trên O_1O_2 mà khác A_1, A_2 thì bài toán không có nghiệm.

Nhận xét : Rất ít bạn tham gia giải bài này. Trong số các bài giải của các bạn gửi đến tòa soạn không có bài nào làm đúng phần biện luận ; tất cả đều kết luận trong trường hợp, A, O_1, O_2 thẳng hàng thì bài toán vô nghiệm (trong khi A_1 và A_2 hiển nhiên tồn tại (!)).

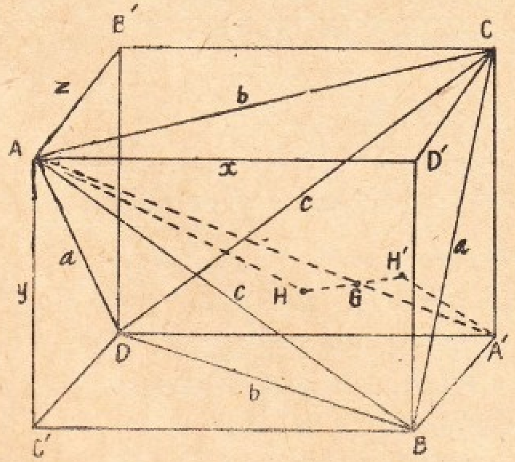
Bài 8/113. *Cho tứ diện gần đều ABCD có $BC = DA = a$, $CA = DB = b$, $AB = DC = c$. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2\,(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)}{2a^4b^4+2b^4c^4+2c^4a^4-a^8-b^8-c^8} \geqslant 9$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABCD là tứ diện đều.

Lời giải. Qua các cạnh đối diện của tứ diện dựng các mặt phẳng song song với nhau, các mặt phẳng đó cắt nhau theo một hình hộp chữ nhật nhận các cạnh tứ diện là đường chéo của các mặt.

Ký hiệu ba kích thước hình hộp là x, y, z (hình 2) ta có các kết quả :



Hình 2

1) Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện và hình hộp thì

$$R^2 = (x^2 + y^2 + z^2)/4$$

Nhưng $x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/2$ nên

$$R^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/8$$

2) Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện, V là thể tích và S là diện tích toàn phần tứ diện, thì ta có.

$$V = (1/3)\,Sr$$

$$\Rightarrow r = 3V/S.$$

Ta có :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \\ z^2 + x^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = b^2 + c^2 - a^2 \\ y^2 = c^2 + a^2 - b^2 \\ z^2 = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases}$$

$$V = xyz/3 =$$

$$= \sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)\ (c^2 + a - b^2)\ (a^2 + b^2 - c^2)}/3$$

Theo công thức Hê-rông :

$$S = 4\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}/2$$

Vậy $r = 3V/S = 1/4\ \times$

$$\times \sqrt{\frac{2\,(b^2+c^2-a^2)\,(c^2+a^2-b^2)\ a^2+b^2-c^2)}{(a+b+c)\ (a+b-c)\,(b+c-a)\ (c+a-b)}}$$

3) Như vậy ta có thể viết :

$$R/r = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \quad (1)$$

Bây giờ ta chứng minh :

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b-c)$$
$$= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2ca^2 - a^4 - b^4 - c^4 \quad (2)$$

Thật vậy :

$$P(a, b, c) = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$$
$$= -a^4 + 2(b^2 + c^2)a^2 - (b^2 - c^2)2$$

Vậy $P\,(a, b, c)$ là tam thức bậc hai đối với a^2 có nghiệm

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bc = (b \pm c)^2 \leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad a = b + c,\ b - c,\ -b - c,\ -b + c.$$

Do đó có thể phân tích được

$P(a, b, c) = (a + b + c)\,(a + b - c)\,(b + c - a) \times$ $\times\,(c - a - b)$, tức là (2) được chứng minh.

Từ (1) và (2) ta có

$$R^2/r^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)}{2a^4b^4+2b^4c^4+2c^4a^4-a^8-b^8-c^8} \quad (3)$$

Do (3), để chứng minh kết luận bài toán th chỉ cần chứng minh

$$R^2/r^2 \geqslant 9 \Leftrightarrow R \geqslant 3r.$$

Xét hai tứ diện $ABCD$ và $A'BCD$ có các đường cao tương ứng là AH và $A'H'$. Đường chéo hình hộp cắt mặt BCD tại G thì dễ chứng minh được $GA = 2GA'$, từ đó suy ra $AH = 2A'H'$.

Nhưng $AH = 4r$ nên.

$$AH + A'H' = 6r.$$

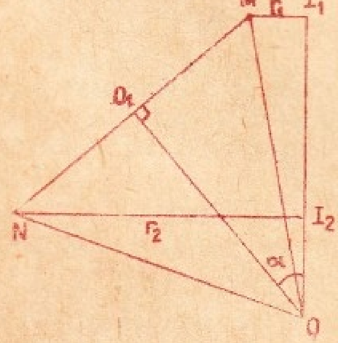
Mặt khác $AA' = 2R$.

Ta có : $AA' \geqslant AH + A'H' \Leftrightarrow R \geqslant 3r$; có dấu đẳng thức khi và chỉ khi H, H' trùng với G, tức là khi tứ diện đã cho là tứ diện đều.

Bài 9/117. *Trên một mặt cầu tâm O, bán kính $R = 2a$ có 3 đường tròn bằng nhau có bán kính $r = a$, đôi một tiếp xúc nhau. Tìm bán kính các đường tròn tiếp xúc với cả ba đường tròn nói trên.*

Lời giải. Gọi O_1, O_2, O_3, là tâm ba đường tròn bán kính a nói trong đầu bài thì dễ chứng minh được $O.\,O_1O_2O_3$ là góc tam diện có 3 mặt bằng 60°.

(Chẳng hạn muốn tính góc O_1OO_2 ta khảo sát trên mặt phẳng (O_1OO_2). Mỗi đường tròn tâm O_1 và O_2 có một đường kính nằm trên mặt phẳng đó ; hai đường kính đó kề nhau và lập với nhau góc 120° $\Rightarrow \widehat{O_1OO2} = 60°$).



Hình 3

Có hai đường tròn tiếp xúc với cả ba đường tròn bán kính a ; giả sử đường tròn nhỏ có tâm I_1, bán kính r_1 và đường tròn lớn có tâm I_2, bán kính r_2.

Giả sử đường tròn tâm O_1 tiếp xúc với đường tròn tâm I_1 tại M và tiếp xúc với đường tròn tâm I_2 tại N (h. 3). Ta có $MN = 2a$, $OM = ON = 2a$

Vậy $\triangle OMN$ là tam giác đều, suy ra

$$\widehat{NOO_1} = \widehat{O_1OM} = 30^0.$$

Đặt $\widehat{O_1OI_1} = \alpha$, ta có

$$r_1 = OM \sin \widehat{MOI_1} = 2a\sin(\alpha - 30°)$$
$$= 2a\,(\sin\alpha\cos 30° - \cos\alpha\sin 30°)$$

Từ góc tam diện $O\,O_1O_2O_3$ dễ dàng tính được

$$\sin\alpha = \sqrt{3}/3,\ \cos\alpha = \sqrt{6}/3.$$

Vậy

$$r_1 = 2a\,(\sqrt{3}/3.\ \sqrt{3}/2 - \sqrt{6}/3.\ 1/2)$$
$$= 2a\,(1/2 - 1/\sqrt{6}) = a\,(1 - 2/\sqrt{6})$$
$$\Rightarrow r_1 = a\,(1 - \sqrt{6}/3).$$

$$r_2 = ON \sin \widehat{NOI_2} = 2a\sin(\alpha + 30°)$$
$$= 2a\,(\sin\alpha\cos 30° + \cos\alpha\sin 30°)$$
$$\Rightarrow r_2 = a\,(1 + \sqrt{6}/3).$$

P.H.

CÁC ĐỀ TOÁN THI GIẢI TOAN 1981 — 1982

Bài 1/121. Hai người cùng viết một số có k chữ số mà chỉ dùng các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Mỗi người lần lượt viết một chữ số từ trái sang phải.

Hỏi người viết chữ số cuối cùng có thể đảm bảo cho số được viết chia hết cho 9 không nếu :

a) $k = 1930$,

b) $k = 1890$,

c) $k = 1945$.

Nguyễn Công Quỳ

Bài 2/121. Nếu viết số 1980 thành tổng các số chính phương thì cần phải có ít nhất bao nhiêu số hạng.

Nguyễn Anh Dũng

Bài 3/121. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì hiệu $(2n)^{2n}-1$ không thể là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ nguyên dương và lớn hơn 1.

Nguyễn Công Quỳ

Bài 4/121. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x^2-yz)/a = (y^2-zx)/b = (z^2-xy)/c \\ x+y+z = a+b+c. \end{cases}$$

$$a,\ b,\ c \neq 0$$

Nguyễn Đăng Phất

Bài 5/121. Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp và H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh :

1) $OA^2/(AB.AC)+OB^2/(BC.BA)+OC^2/(CA.CB) = 1$

2) $(HB.HC)/(AB.AC)+(HC.HA)/(BC.BA)+$
$+(HA.HB)/(CA.CB) = 1$

nếu $A,\ B,\ C \leqslant 90^\circ$. Kết quả thế nào nếu $A > 90^\circ$?

Lê Quốc Hán

Bài 6/121. Cho góc xAy và một điểm M chuyển động trong góc đó sao cho $MH + MK = l$ (l là độ dài cho trước), trong đó M và K là chân các đường vuông góc hạ từ M tương ứng xuống Ax và Ay.

Hãy chứng minh đường tròn $(AHKM)$ đi qua một điểm cố định thứ hai khác A.

Lê Quốc Hán

Bài 7/121. Cho một hình tứ diện đều cạnh bằng a và hai hình cầu nằm trọn bên trong nó.

1) Tính bán kính các hình cầu trong trường hợp tổng bán kính của 2 hình cầu đó đạt giá trị lớn nhất.

2) Chứng minh rằng trong trường hợp tổng bán kính của hai hình cầu đạt giá trị lớn nhất thì tổng thể tích của chúng cũng đạt giá trị lớn nhất.

Phạm Quốc Giám

Bài 8/121. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm trong không gian một điểm M sao cho bốn tứ diện sau đây là tương đương : $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$.

Nguyễn Đăng Phất

Bài 9/121. Cho $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$, $c_1,\dots,c_n$ là $3n$ số cho trước với giả thiết $a_1,\dots,a_n$ khác không. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n) = (a_1x_1+b_1)^2 + (a_2x_2+b_2)^2 + \dots +$$
$$+ (a_nx_n+b_n)^2 + (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)^2.$$

Phan Đức Chính

Bài 10/121. Tìm giá trị lớn nhất P_{max} của tích $P = a_1 a_2 \dots a_n$, trong đó $a_1, a_2,\dots,a_n$ là n số tự nhiên có tổng bằng N, với n, N là hai số tự nhiên cho trước, $N \geqslant n$.

Phan Đức Chính

PHƯƠNG PHÁP QUỸ ĐẠO

PHAN ĐỨC THÀNH

BÀI này giới thiệu một trong những phương pháp có hiệu quả để giải các bài toán tổ hợp, đó là *phương pháp quỹ đạo*. Nội dung của phương pháp quỹ đạo trong các bài toán tổ hợp là chỉ ra cách giải thích hình học cho phép đưa bài toán về việc tính số đường đi (hay số quỹ đạo) có một tính chất xác định nào đó.

Ưu điểm của phương pháp quỹ đạo là tính trực quan trong cách chứng minh.

« Bài toán con ếch » (tức bài toán số 6 trong kỳ thi Toán Quốc tế lần thứ 21) có thể giải bằng phương pháp quỹ đạo (xem Toán học và tuổi trẻ số 2/1980).

Bài này giới thiệu một số bài toán điển hình có thể giải bằng phương pháp quỹ đạo.

Bài toán 1. Chứng minh rằng

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

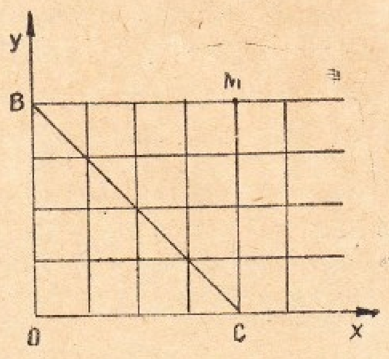
Giải: Ta hãy xét một mạng lưới kẻ ô vuông cỡ $n \times n$. Số đường đi ngắn nhất (theo mạng lưới) từ điểm $O = (o, o)$ đến điểm $M = (n, n)$ bằng C_{2n}^n. Chú ý rằng mỗi đường đi ấy đi qua một và chỉ một điểm $A_k = (k, n-k)$ nằm trên đường chéo BC. Số đường đi từ O đến A_k bằng

$$C_{k+(n-k)}^k = C_n^k.$$

Số đường đi từ A_k đến M bằng $C_{n-k+k}^k = C_n^k$. Do đó số đường đi từ O đến M đi qua A_k bằng $C_n^k \cdot C_n^k = (C_n^k)^2$. Từ đó dễ dàng suy ra hệ thức phải chứng minh.

Hơn nữa ta có hệ thức tổng quát hơn:

$$C_n^0\ C_m^k + C_n^1\ C_m^{k-1} + \dots + C_n^k\ C_m^0 = C_{n+m}^k$$



Bài toán 2. Chứng minh rằng

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \dots + C_{m-1}^{m-1}$$

Giải: Trên mạng lưới kẻ ô vuông ta hãy xét tất cả các đường gấp khúc ngắn nhất nối điểm $O = (o, o)$ với điểm $M = (m, n-m)$. Tổng số các đường gấp khúc ấy là C_n^m. Gọi B_k là lớp các đường gấp khúc cắt đường thẳng $x = 1/2$ tại điểm $(1/2, k)$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$. Rõ ràng B_k có C_{n-k-1}^{m-1} đường gấp khúc. Từ đó suy ra

$$C_n^m = \sum_{k=o}^{n-m} C_{n-k-1}^{m-1}$$

Bài toán 3. Chứng minh rằng

$$C_n^m\ C_k^o + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + \dots$$

$$+\ C_{n-m}^o C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m$$

Giải: Ta hãy xét tất cả các đường đi ngắn nhất từ điểm $O = (o, o)$ đến điểm $M = (n-m+k+1, m)$. Số các đường đó bằng C_{n+k+1}^m

Gọi B_i $(i = 0, 1, \dots, m)$ là lớp những đường gấp khúc cắt đường thẳng $x = k + 1/2$ tại điểm $(k + 1/2, i)$. Ta nhận thấy rằng mỗi đường gấp khúc thuộc lớp B_i gồm 3 phần:

Phần 1: Đường gấp khúc nối (o, o) với (k, i),

Phần 2: Đường nằm ngang nối (k, i) với $(k+1, i)$

Phần 3: Đường gấp khúc nối $(k+1, i)$ với $(n-m+k+1, m)$

Từ đó ta thấy rằng tổng số các đường gấp khúc thuộc lớp B_i là

$$C_{k+i}^i \cdot C_{n-i}^{m-i}$$

Từ đó suy ra hệ thức phải chứng minh.

Bài toán 4. Có $m + n$ người sắp hàng mua vé trong đó có n người mang tiền loại 5 hào, và m người mang tiền loại 1 đồng. Mỗi vé giá 5 hào. Trước lúc bán, người bán vé không có tiền. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp $m + n$ người mua vé để không có người nào phải chờ trả tiền thừa?

Giải: Giả sử các người mua vé đã được sắp hàng theo một cách nào đó. Ta đặt

$$e_i = \begin{cases} 1 \text{ nếu người mua vé thứ } i \text{ có 5 hào} \\ -1 \text{ nếu người mua vé thứ } i \text{ có 1 đồng} \end{cases}$$

Khi ấy $S_k = e_1 + \dots + e_k$

là hiệu số giữa số lượng người có tiền 5 hào và số lượng người có tiền 1 đồng khi có k người sắp hàng.

Trên mạng lưới kẻ ô vuông ta vẽ các điểm $A_k = (k, S_k)$ $(k = 1, 2, \dots, m+n)$ và xét đường gấp khúc nối $O = (o, o)$ với điểm $A_{m+n} = (m+n, n-m)$ đi qua các điểm $A_1, \dots, A_{m+n-1}$. Ta gọi đường gấp khúc như vậy là một *quỹ đạo*, tương ứng với cách sắp hàng của người mua vé. Tổng số các quỹ đạo bằng C^n_{n+m}

a) Chú ý rằng các quỹ đạo tương ứng với cách sắp hàng của người mua vé để không ai phải chờ trả tiền thừa sẽ không cắt đường thẳng $y = -1$.

Thực vậy nếu đối với k nào đấy $S_{k-1} = 0$, $S_k = -1$ thì điều đó có nghĩa là trong $k-1$ người sắp hàng đầu tiên số lượng người có tiền 5 hào và số lượng người có tiền 1 đồng là như nhau, người thứ k có 1 đồng nên phải chờ trả tiền thừa.

b) Ta sẽ chứng minh rằng số quỹ đạo cắt đường thẳng $y = -1$ bằng C^{n+1}_{m+n}. Với mỗi quỹ đạo Q cắt đường thẳng $y - 1$ hay có 1 điểm chung với nó ta thiết lập tương ứng một quỹ đạo Q' theo cách sau: đến giao điểm đầu tiên với đường thẳng $y = -1$ ta cho $Q' = Q$, phần còn lại của Q' là ảnh đối xứng của Q đối với đường thẳng $y = -1$. Toàn bộ quỹ đạo Q' kết thúc ở điểm $A'_{m+n} = (m+n, m-n-2)$ là ảnh của điểm A_{m+n} đối với đường thẳng $y = -1$. Sự tương ứng đã thiết lập là một – một, do đó số quỹ đạo cắt đường thẳng $y = -1$ bằng số đường gấp khúc nối O với A'_{m+n}. Nếu ở đường gấp khúc này có y đoạn hướng xuống dưới và x đoạn hướng lên trên thì

$$\begin{cases} x + y = m + n \\ y - x = n + 2 - m \end{cases}$$

$\Rightarrow y = n + 1$. Vậy số quỹ đạo cắt đường thẳng $y = -1$ bằng C^{n+1}_{m+n}.

c) Từ kết quả ở b) suy ra rằng số quỹ đạo tương ứng với cách sắp hàng của người mua vé để không có người nào phải chờ trả tiền thừa bằng

$$C^n_{m+n} - C^{n+1}_{m+n} = \frac{n+1-m}{n+1} C^m_{m+n}$$

Liên quan chặt chẽ đến bài toán 4 là bài toán về bỏ phiếu mà nhà toán học Béctơrăng đã xét năm 1887.

Bài toán 5 (Bài toán về bỏ phiếu).

Trong một lần bầu cử, ứng cử viên A được a phiếu bầu, ứng cử viên B được b phiếu bầu $(a > b)$. Cử tri bỏ phiếu liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ phiếu để ứng cử viên A luôn luôn dẫn đầu về số phiếu bầu cho mình?

Giải: Ta đặt

$$e_i = \begin{cases} +1 \text{ nếu phiếu thứ } i \text{ bầu cho } A \\ -1 \text{ nếu phiếu thứ } i \text{ bầu cho } B \end{cases}$$

Đặt $S_k = e_1 + \dots + e_k$.

Ta xét quỹ đạo với các điểm O; $(1, S_1)$; ... (k, S_k); ... ; $(a+b, S_{a+b})$.

Ở đây $S_{a+b} = a - b$.

Rõ ràng mỗi cách bỏ phiếu tương ứng với một quỹ đạo xác định. Mỗi quỹ đạo gồm $a+b$ đoạn thẳng trong đó có a đoạn hướng lên trên. Tổng số các quỹ đạo bằng C^a_{a+b}. Ứng cử viên A luôn dẫn đầu nếu quỹ đạo tương ứng đi qua điểm $(1, 1)$ và không cắt trục hoành. Số quỹ đạo như vậy bằng

$$\frac{n+1-m}{n+1} C^m_{m+n}$$

trong đó $n = a - 1$

$m = b$.

Do đó số cách bỏ phiếu phải tìm là

$$\frac{a-1+1-b}{a-1+1} C^{a-1}_{a+b-1} = \frac{a-b}{a+b} C^a_{a+b}$$

Bài toán 6. Cùng câu hỏi như bài toán 4 nhưng với giả thiết là trước khi bán vé ở người bán vé có c tiền loại 5 hào.

Trong trường hợp này bài toán đưa về việc tính số quỹ đạo từ điểm O đến điểm $M = (m+n, n-m)$ không cắt đường thẳng $y = -(c+1)$. Rõ ràng số quỹ đạo cắt đường thẳng đó bằng số quỹ đạo từ điểm $(O, -2(c+1))$ đến điểm $M = (n+m, n-m)$ tức là bằng

$$C^{c+n+1}_{m+n} = C^{m-c-1}_{m+n}$$

Số quỹ đạo cần tìm của bài toán là

$$C^m_{m+n} - C^{m-c-1}_{m+n}$$

2. Bây giờ chúng ta sẽ thiết lập một số tính chất liên quan đến cách tính số quỹ đạo.

Giả sử $x > 0$ và y là các số nguyên.

Ta gọi là *quỹ đạo* từ gốc tọa độ đến điểm (x, y) đường gấp khúc nối các điểm O, $(1, S_1)$..., (k, S_k),..., (x, S_x)

trong đó

$$S_i - S_{i-1} = e_i = \begin{cases} +1 \\ -1, \end{cases}$$

$$S_x = y.$$

Gọi $N(x, y)$ là số tất cả các quỹ đạo nối điểm $(0, 0)$ với điểm (x, y). Ta có

MỆNH ĐỀ 1

$$N(x, y) = \begin{cases} C_x^{\frac{x+y}{2}} & \text{nếu } x \text{ và } y \text{ cùng chẵn hoặc cùng lẻ} \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Thực vậy giả sử quỹ đạo gồm p đoạn hướng lên trên và q đoạn hướng xuống dưới. Khi ấy ta có $x = p + q$

$$y = p - q$$

Suy ra

$$p = (x + y)/2,\ q = (x - y)/2.$$

Vì p, q nguyên nên x và y phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do quỹ đạo hoàn toàn được xác định nếu chỉ ra được những đoạn nào hướng lên trên. Vậy số quỹ đạo từ điểm O đến điểm (x, y) bằng $C_x^{(x+y)/2}$.

Dễ dàng chứng minh được

MỆNH ĐỀ 2.

Giả sử A và B là 2 điểm có tọa độ nguyên nằm trong phần tư thứ nhất, A' là điểm đối xứng của A đối với trục hoành. Khi đó số quỹ đạo từ A đến B cắt hay tiếp xúc với trục hoành bằng số quỹ đạo từ A' đến B.

MỆNH ĐỀ 3. Giả sử $x > 0, y > 0$. Khi đó số quỹ đạo từ O đến (x, y) không có đỉnh trên trục hoành (trừ điểm O) bằng $(y/x).N(x, y)$.

Để chứng minh ta chú ý rằng tất cả các quỹ đạo nối O với $B(x, y)$ và không cắt trục hoành phải đi qua điểm $A = (1, 1)$. Số quỹ đạo đi từ A đến B bằng $N(x-1, y-1)$. Số quỹ đạo đi từ A đến B và cắt trục hoành bằng số quỹ đạo đi từ A' đến B tức là bằng $N(x-1, y+1)$. Do đó số quỹ đạo cần tìm bằng $N(x-1, y-1) - N(x-1, y+1) = (y/x).N(x, y)$.

3. Trong mục này thiết lập một số tính chất của quỹ đạo nối điểm O với điểm $T = (2n, 0)$ trên trục hoành.

Ta đặt

$$B_{2n} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{m}$$

MỆNH ĐỀ 4. Trong C_{2n}^{m} quỹ đạo nối điểm với điểm T có

a) đúng B_{2n-2} quỹ đạo nằm trên trục hoành và không có điểm chung với trục hoành (trừ các điểm O và T).

b) đúng B_{2n} quỹ đạo không có đỉnh nằm dưới trục hoành.

Chứng minh: a) chú ý rằng tất cả các quỹ đạo nối O với T nằm trên trục hoành và không có các điểm chung khác với trục hoành nhất thiết phải đi qua điểm $T_1 = (2n - 1, 1)$. Theo mệnh đề 3 số quỹ đạo nối O với T_1 và không cắt trục hoành bằng

$$\frac{1}{2n-1} N(2n-1, 1) = \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{n}$$

$$= \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} = B_{2n-2}.$$

b) Ta xét quỹ đạo nối O với T và không có đỉnh nằm dưới trục hoành. Trong hệ tọa độ mới $X_1O_1Y_1$ với $O_1 = (-1, -1)$ điểm T có tọa độ $(2n+1, 1)$, điểm O có tọa độ $(1, 1)$. Số quỹ đạo nối O với T và không có đỉnh nằm dưới trục hoành bằng số quỹ đạo nối O_1 với T và nằm trên trục O_1X_1. Số này bằng

$$\frac{1}{2n+1} N(2n+1, 1) = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^{n}$$

$$= \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = B_{2n}.$$

MỆNH ĐỀ 5 Gọi $B_{2k,\,2n}$ là số quỹ đạo nối O với $T = (2n, 0)$ có $2k$ cạnh nằm trên trục hoành, $2n - 2k$ cạnh còn lại nằm dưới trục hoành ($k = 0, 1, \ldots, n$).
Khi ấy

$$B_{2k,\,2n} = B_{2n} \text{ không phụ thuộc vào } k.$$

Chứng minh bằng quy nạp theo n.

Hơn nữa chứng minh được rằng

$$B_{2k,\,2n} = \sum_{i=1}^{n} B_{2i-2}\, B_{2n-2i}$$

Đối với các quỹ đạo không có đỉnh nằm dưới trục hoành đã được xét trong mệnh đề 4 (điểm b) theo mệnh đề 5 ta có

$$B_{2n,\,2n} = B_{2n}.$$

Do tính đối xứng ta có

$$B_{0,\,2n} = B_{2n}$$

Tổng số các quỹ đạo nối O với T bằng $(n+1)\, B_{2n}$, từ đó suy ra ngay rằng

$$B_{2k,\,2n} = B_{2n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Như vậy ta nhận được hệ thức

$$B_{2n} = \sum_{i=1}^{n} B_{2i-2} B_{2n-2i}$$

TOÁN HỌC và ĐỜI SỐNG

VÀI BÀI TOÁN VẬN TRÙ

BÀI này giới thiệu với các bạn vài bài toán ứng dụng trong đời sống.

Bài toán 1. *Với ý thức tiết kiệm vật liệu, anh hay chị hãy tính xem cần chừng bao nhiêu thanh sắt mỗi thanh dài 7,4m để cắt thành 1000 đoạn, mỗi đoạn dài 0,7m, và 2000 đoạn mỗi đoạn dài 0,5m. Anh hay chị có chứng tỏ được rằng cách tính của anh chị là tiết kiệm nhất không?*

(Thi vào đại học Phú Thọ, thành phố Hồ Chí Minh, 1976)

Lời giải. Ta nhận thấy muốn tiết kiệm vật liệu thì cần phải cắt mỗi thanh 7,4m thành a đoạn 0,7m và b đoạn 0,5m mà không có dư.

Tức là cần giải phương trình nguyên: $0{,}7a + 0{,}5b = 7{,}4$ hay: $7a + 5b = 74$ với a, b nguyên không âm (1)

Từ (1) $\rightarrow 74 = 7a + 5b \geqslant 7a \rightarrow 0 \leqslant a \leqslant 10$

và $b = \dfrac{74 - 7a}{5} = 15 - a - \dfrac{1 + 2a}{5} \rightarrow 1 + 2a \,\vdots\, 5$.

mà $1 \leqslant 1 + 2a \leqslant 21$ và $(1 + 2a)$ lẻ nên suy ra:

$1 + 2a = 5$ hoặc $1 + 2a = 15$.

Do đó hoặc $a = 2 \rightarrow b = 12$ hoặc $a = 7 \rightarrow b = 5$.

Vậy ta có hai cách cắt một thanh 7,4m lợi nhất:

1) Cắt thành 2 đoạn 0,7m và 12 đoạn 0,5m.

2) Cắt thành 7 đoạn 0,7m và 5 đoạn 0,5m.

Gọi x thanh được cắt theo kiểu thứ nhất và y thanh cắt theo kiểu thứ hai (ở đây thanh 7,4m); như vậy số đoạn 0,7m được cắt là $2x + 7y$ và số đoạn 0,5m được cắt là $12x + 5y$; mà ta cần phải cắt 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m nên có phương trình.

$$\begin{cases} 2x + 7y = 1000 \\ 12x + 5y = 2000 \end{cases} \quad (2)$$

Nhưng hệ (2) không có nghiệm nguyên nên ta chỉ cần lấy phần nguyên các nghiệm của hệ (2) là đủ.

Như vậy $x = 121$ và $y = 108$.

Vậy ta đã cắt được $2x + 7y = 998$ đoạn 0,7m và $12x + 5y = 1992$ đoạn 0,5m nên chỉ cần cắt thêm 2 đoạn 0,7m và 8 đoạn 0,5m. Ta chỉ cần cắt thêm 1 thanh 7,4m theo kiểu thứ nhất nữa.

Vậy đã dùng tất cả là: $121 + 108 + 1 = 230$ thanh 7,4m.

Ta còn phải chứng tỏ cách cắt trên là tiết kiệm nhất.

Thật vậy, ta thấy tổng số độ dài của 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m là $0{,}7 \cdot 1000 + 0{,}5 \cdot 2000 = 1700$m: vậy phải dùng ít nhất là $1700/7{,}4 + 1$ thanh 74,m hay 230 thanh 7,4m (đpcm).

Tóm lại ta chỉ cần cắt 122 thanh 7,4m theo kiểu thứ nhất và 108 thanh 7,4m theo kiểu thứ hai là xong.

Mời các bạn giải bài toán sau:

Bài toán 2. *Cần cắt ít nhất bao nhiêu thanh sắt dài 3,5m thành 1000 đoạn mỗi đoạn dài 0,4m và 3300 đoạn mỗi đoạn dài 0,6m.*

Bài toán 3. (Lập kế hoạch sản xuất).

Có một xí nghiệp sản xuất ra 2 loại sản phẩm A và B. Những sản phẩm này được chế tạo từ 3 loại nguyên liệu I, II và III. Dự trữ từng loại nguyên liệu và số lượng từng loại nguyên liệu dùng để sản xuất ra một sản phẩm được ghi trong bảng sau. Biết một sản phẩm A lãi 5 đồng, 1 sản phẩm B lãi 7 đồng. Nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để lãi nhiều nhất.

Loại nguyên liệu	Dự trữ	Số lượng đơn vị nguyên liệu chi phí cho một đơn vị sản phẩm	
		A	*B*
I	8	2	1
II	14	3	2
III	25	4	6

Lời giải. Gọi x và y là số sản phẩm loại A và B được sản xuất. Ta cần tìm x, y để $z = 5x + 7y$ đạt giá trị lớn nhất, và x, y không thể tăng tùy ý vì số lượng dự trữ nguyên liệu có hạn.

Nhìn vào bảng ta thấy số lượng nguyên liệu I để sản xuất x sản phẩm A và y sản phẩm B là: $2x + y$, số lượng này không vượt quá số lượng dự trữ, tức là $2x + y \leqslant 8$.

Tương tự dự trữ nguyên liệu II và III cho ta điều kiện:

$$3x + 2y \leqslant 14,\ 4x + 6y \leqslant 25.$$

Ngoài ra, còn có điều kiện tự nhiên nữa là x, y đều nguyên không âm. Vậy cần tìm Max $(Z = 5x + 7y)$ với điều kiện:

$$(1)\begin{cases} 2x + y \leqslant 8 & (1) \\ 3x + 2y \leqslant 14 & (2) \\ 4x + 6y \leqslant 25 & (3) \\ x, y \geqslant 0 \text{ nguyên} \end{cases}$$

Từ (1) và $y \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 4$. Từ (3) và $x \geqslant 0 \Rightarrow y \leqslant 4$.

Từ (1) ta có: $6x + 3y \leqslant 24 \Rightarrow 6x + 4y = 6x + 3y + y \leqslant 24 + y \leqslant 28 \Rightarrow 3x + 2y \leqslant 14$. Tức là từ (1) $\Rightarrow$ (2).

Nhận thấy phương trình $4x + 6y = 25$ không có nghiệm nguyên (vì vế trái là số chẵn còn vế phải là số lẻ). Nên (3) $\Leftrightarrow 4x + 6y \leqslant 24$ hay $2x + 3y \leqslant 12 \Rightarrow 6x + 3y = 2x + 3y + 4x \leqslant 12 + 4x \leqslant 24$ nếu $x < 4$, tức là nếu $x < 4$ thì (3) $\Rightarrow$ (1); còn nếu $x = 4$ thì phải có $y = 0$.

Vậy hệ (1) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leqslant 12 \\ x \leqslant 3, y \leqslant 4. \\ x = 4 \text{ thì } y = 0 \\ x, y \geqslant 0 \text{ nguyên.} \end{cases}$$

Khi $x = 4 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 20$.

$x = 3 \Rightarrow y \leqslant 2 \Rightarrow z \leqslant 15 + 14 = 29$.

$x = 2 \Leftrightarrow y \leqslant 2 \Leftrightarrow z \leqslant 10 + 14 = 24$

$x = 1 \Rightarrow y \leqslant 3 \Rightarrow z \leqslant 5 + 21 = 26$.

$x = 0 \Rightarrow y \leqslant 4 \Leftrightarrow z \leqslant 28$.

Vậy ta suy ra Max $(z = 5x + 7y) = 29$ khi $x = 3$ và $y = 2$.

Do đó phải sản xuất 3 sản phẩm loại A và 2 sản phẩm loại B, khi ấy tiền lãi sẽ nhiều nhất là 29 đồng.

Bài toán 4. *Tại một kho có chứa n loại hàng có trọng lượng mỗi loại là $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cần chuyên chở các loại hàng này đến n địa điểm, biết rằng mỗi địa điểm chỉ nhận một loại hàng và cước phí chuyên chở một đơn vị hàng đến địa điểm thứ i là b_i. Hãy tìm cách chuyên chở như thế nào để tổng các cước phí là nhỏ nhất.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n; \quad a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$$

Ta thấy loại hàng thứ i được chở đến địa điểm thứ j sẽ có cước phí là a_ib_j. Do đó tổng số cước phí chuyên chở n loại hàng đến n địa điểm là Σa_ib_j trong đó tổng Σa_ib_j gồm n số hạng và các chỉ số của a_i đều khác nhau, các chỉ số của b_j đều khác nhau.

Gọi $\{c_i\}$ $i = 1, \ldots, n$ là một hoán vị của dãy $\{a_i\}$ $i = 1, 2, \ldots n$ theo một thứ tự nào đó.

Như vậy vấn đề đặt ra là tìm các $\{c_i\}$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} b_ic_i$ (1) đạt giá trị nhỏ nhất.

Nhận xét rằng, nếu $i > j$ và $c_i \geqslant c_j$ thì (vì $b_i \geqslant b_j$) $(c_i - c_j)(b_i - b_j) \geqslant 0$ hay $c_ib_i + c_ib_j \geqslant c_ib_j + c_jb_i$.

Vì vậy ứng với hoán vị $c_1, c_2, \ldots, c_n$ có $c_i \geqslant c_j$ với $i > j$ ta có hoán vị $c_1', c_2', \ldots, c_n'$ trong đó $c_i' = c_j$, $c_j' = c_i$ $c_k' = c_k$ với $k \neq i$, $k \neq j$ thì:

$$\sum_{i=1}^{n} b_ic_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} b_ic'_i.$$

Điều này chứng tỏ tổng (1) đạt giá trị nhỏ nhất khi $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_n$, tức là $c_i = a_i$ với mọi i bằng $1, 2, \ldots, n$.

Vậy tổng (1) đạt giá trị lớn nhất là $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

Từ đây suy ra thuật toán để lập kế hoạch chuyên chở.

Ta lập bảng có 2 hàng và 2 cột; ghi vào hàng đầu tất cả các giá trị của cước phí theo giá trị tăng dần từ trái sang phải, hàng thứ hai xếp các loại hàng có trọng lượng giảm dần từ trái sang phải, thì tương ứng loại hàng ở cột chứa b_i sẽ được chở đến địa điểm thứ i.

Thí dụ: có 4 loại hàng khối lượng mỗi loại $a_1 = 5$, $a_2 = 20$, $a_3 = 7$, $a_4 = 18$ và cước phí vận chuyển mỗi đơn vị hàng đến địa điểm thứ i là b_i, $b_1 = 25$, $b_2 = 30$, $b_3 = 5$, $b_4 = 9$.

Ta lập bảng:

i	3	4	1	2
b_i	5	9	25	30
a_j	20	18	7	5
j	2	4	3	1

Vậy phải chuyển loại hàng thứ nhất đến địa điểm thứ 2, loại hàng thứ 2 đến địa điểm 3, loại hàng thứ 3 đến địa điểm 1 và loại hàng thứ 4 đến địa điểm thứ 4.

Bạn hãy giải bài toán sau:

Bài toán 5. *Có n kiện hàng cùng loại có khối lượng $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cần bán cho n địa điểm, biết rằng ở mỗi địa điểm chỉ mua 1 kiện hàng và ở địa điểm thứ i người ta chịu mua với giá b_i đồng* *mỗi đơn vị hàng ; vậy phải bán như thế nào để lãi nhiều nhất* ;. (cước phí chuyên chở mỗi đơn vị hàng đến các địa điểm như nhau).

Bài toán 6. *Một máy bay có tải trọng M. Có n loại hàng để xếp lên máy bay đó. Trọng lượng loại hàng i là α_i và giá β_i đồng, cần xếp mỗi loại hàng bao nhiêu đơn vị để trọng lượng tổng cộng không vượt quá M và có tổng giá trị lớn nhất.*

Lời giải. Gọi x_i là trọng lượng loại hàng thứ i được xếp lên máy bay. Theo đề bài ta có :

$$0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i,\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant M.$$

Giá mỗi đơn vị hàng loại i là β_i/α_i đồng, nên tổng giá trị hàng chất lên máy bay sẽ là :

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i/\alpha_i)\, x_i$$

Vậy vấn đề đặt ra là :

$$\text{Tìm Max}\ (z = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i/\alpha_i) x_i) \text{ sao cho}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i & i = 1,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant M \end{cases}$$

Đặt $\gamma_i = \beta_i/\alpha_i$ thì đưa về :

$$\text{Tìm}\quad \text{Max}\ (z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\, x_i)$$

$$\text{với điều kiện} \begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i & i = 1,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant M \end{cases}$$

Nếu $M \geqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ta chỉ cần chất tất cả các loại hàng lên máy bay là xong, nên từ đây để giải bài toán ta chỉ giả thiết $M < \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \dots \geqslant \gamma_n$

Dễ thấy rằng để z đạt Max thì phải có

$$\sum_{i=1}^{n} = M$$

Vì vậy bài toán đưa về :

$$\text{Tìm Max}\ (z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i) \text{ với điều kiện}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i & i=1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} = M \\ \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \dots \geqslant \gamma_n \geqslant 0 \end{cases}$$

Ta chứng minh nghiệm x_i của bài toán sau cùng này thỏa mãn :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \text{Min}\left(M, \sum_{i=1}^{i} \alpha_i\right) \text{ với mọi } j = 1, 2, \dots, n.$$

Ta chứng minh điều kiện bằng qui nạp theo số ẩn số n.

Rõ ràng khi $n=1$ bài toán đúng. Ta giả thiết kết luận của bài toán trên cũng đúng với $(n-1)$ ẩn số.

Xét bài toán trên khi có n ẩn số.

Ta có :

$$z = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i = \gamma_n \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_n} x_1 + \dots + \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} x_{n-1} + x_n \right)$$

$$= \gamma_n \left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_n} - 1 \right) x_i \right]$$

$$= \gamma_n M + \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_i - \gamma_n) x_i$$

Nên bài toán đưa về :

$$\text{Tìm Max}(z - \gamma_n M = \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_i - \gamma_n) x_i)$$

với điều kiện :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i & i = 1,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i = M - x_n \\ \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \dots \geqslant \gamma_n \geqslant 0 \end{cases}$$

Nhận thấy vì biểu thức $z - \gamma_n M$ không chứa ẩn x_n nên để $z - \gamma_n M$ đạt Max thì $M - x_n$ phải đạt Max ;

$$\text{tức là } M - x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \text{Min}\ (M, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i)$$

Đặt $z - \gamma_n M = z'$,

$\gamma_i - \gamma_n = \gamma_i'$ $\quad i = 1, 2, \dots, n-1$, $M - x_n = M'$

thì bài toán tương đương với :

$$\text{Tìm Max}\ (z' = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i' x_i)$$

với điều kiện :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ x_1 + \dots + x_{n-1} = M' \\ \gamma' \geqslant \gamma_2' \geqslant \dots \geqslant \gamma_{n-1}' \geqslant 0 \end{cases}$$

Đây chính là bài toán với $(n-1)$ ẩn số

Vậy theo giả thiết qui nạp thì :

$$\sum_{i=1}^{j} x_i = \text{Min}(M', \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) \text{ với mọi } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Nhưng $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \quad \forall j = 1,\ldots, n-1$

nên

$$\mathrm{Min}\,(\mathrm{Min}(M, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i), \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) = \mathrm{Min}\,(M, \sum_{i=1}^{j} \alpha_i)$$

$\forall j = 1,\ldots, n-1$

Tức là:

$$\mathrm{Min}\,(M', \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) = \mathrm{Min}\,(M, \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) \quad \forall j = 1, \ldots, n-1.$$

Do đó ta có:

$$\sum_{i=1}^{j} x_i = \mathrm{Min}\,(M, \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) \ \forall j = 1,\ldots, n-1$$

Kết hợp với

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M = \mathrm{Min}\,(M, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i)$$

ta được:

$$\sum_{i=1}^{j} x_i = \mathrm{Min}\,(M, \sum_{i=1}^{j} \alpha_i) \ \forall j = 1,\ldots,n \ (\text{đpcm})$$

Từ đây ta suy ra thuật toán để chất hàng như sau:

Lập bảng gồm 2 hàng và n cột.

Hàng đầu ghi giá tiền của mỗi đơn vị của từng loại hàng tức là tỉ số β_i/α_i sao cho nó giảm từ trái sang phải.

Hàng thứ hai ghi trọng lượng của loại hàng tương ứng với giá tiền đó.

Gọi i là cột nhỏ nhất có tính chất: Tổng số các trọng lượng hàng ở cột $1, 2, \ldots i-1$ bé hơn M còn tổng số các trọng lượng hàng ở cột $1, 2, \ldots, i$ không bé hơn M.

Khi ấy tất cả các lượng hàng ở các cột $1, 2, \ldots, i-1$ được chất hết lên máy bay, và chỉ chất thêm loại hàng ở cột i một lượng bằng hiệu số giữa M và tổng các lượng hàng ở các cột $1, 2, \ldots, i-1$.

Còn nếu không có cột i nào thỏa mãn tính chất trên thì ta chất tất cả các loại hàng lên máy bay.

Thí dụ: cho $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 7$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 10$ $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 4$, $\beta_3 = 8$, $\beta_4 = 20$ và $M = 22$.

Lập bảng:

Cột	1	2	3	4
i	3	4	1	2
β_i/α_i	$8/2=4$	$20/10=2$	$7/5$	$4/7$
α_i	2	10	5	7

Ta có: $\alpha_3 < M$, $\alpha_3+\alpha_4 < M$, $\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1 < M$ và $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 > M$.

Vậy chất tất cả các loại hàng thứ 1, 3, 4 có được và thêm $22 - 17 = 5$ trọng lượng hàng loại thứ 2 lên máy bay.

Khi đó tổng số giá trị sẽ lớn nhất là:

$$(8/2).2 + (20/10).10 + (7/5).5 + (4/7).2 = 36\frac{1}{7} \text{ đồng.}$$

NGÔ DUY NINH

In tại Xí nghiệp in 75 – 77 Hàng Bồ Hà Nội Chỉ số: 12884
Số in 124/81 In xong và gửi lưu chiểu tháng 11-1981 Giá: 0,20đ