Trần Việt Hùng

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

Số 120
4
1981

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN
Trụ sở: 70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG
Dây nói: 52825

Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán

TRỞ VỀ QUÁ KHỨ CÓ GÌ LỢI?

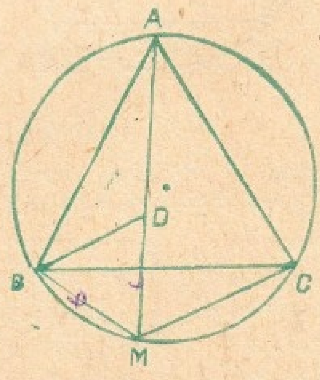
LÊ QUỐC HÁN

BẠN nào đã từng học lớp 7 mà quên được bài toán đơn giản nhưng thú vị sau đây:

Bài toán 1. *Chứng minh rằng, nếu M là một điểm tùy ý trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, thì trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC, có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn thẳng còn lại.*

Để định ý, ta giả sử điểm M nằm trên cung nhỏ BC, và chứng minh $MA = MB + MC$. Muốn vậy, trên MA ta lấy điểm D sao cho $MD = MB$. Khi đó tam giác MBD đều, nên $\triangle ABD = \triangle CBM$. Suy ra $AD = MC$, và do đó có đpcm.

Cách giải trên tuy đơn giản nhưng việc xác định thêm điểm D không phải dễ dàng đối với đa số chúng ta. Thử hỏi còn cách nào đơn giản và tự nhiên hơn không? Với kiến thức lớp 7, câu trả lời là: không.



Hình 1

Nhưng rồi, lên lớp 8, ta được gặp định lý Ptôlêmê «*Trong một tứ giác nội tiếp, tích các đường chéo bằng tổng các tích của các cạnh đối diện*». Ta bỗng dưng nhớ tới bài toán trên

Phải rồi, bài toán ấy có cái gì tương tự: Nếu xem $MBAC$ là tứ giác nội tiếp thì MA là đường chéo và MB, MC là các cạnh. Áp dụng được định lý Ptôlêmê cho bài toán ấy chăng? Thật thế!

Từ $MA.BC = MB.AC + MC.AB$

và $AB = BC = CA \Rightarrow MA = MB + MC.$

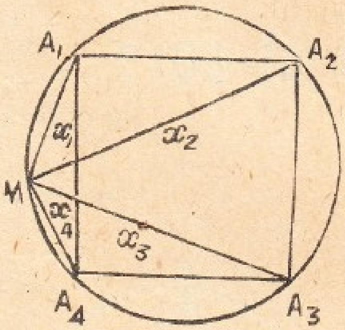
Một lời giải quá ngắn gọn cho bài toán 1, nhưng bạn đã bao giờ nghĩ đến chưa. Vấn đề trở nên thú vị hơn, nếu ta nhớ lại rằng do mệnh đề đảo của định lý Ptôlêmê là đúng, nên mệnh đề đảo của bài toán chúng ta cũng đúng. Xin nhường bạn đọc phát biểu bài toán đó.

Tuy nhiên, không nên vội thỏa mãn với kết quả đã đạt được. Ngẫm nghĩ lại: bài toán của ta phát biểu về một tính chất của tam giác đều! Nếu mở rộng cho đa giác đều, có thu được một hệ thức tương tự không? Liệu định lý Ptôlêmê có còn giúp ích gì trong việc phát hiện và chứng minh những hệ thức tương tự đó?

Thận trọng hơn, ta xét thêm một trường hợp nữa: số cạnh của đa giác đều đó bằng bốn.

Xét tứ giác đều $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn O. Để định lý, hãy lấy điểm M trên cung A_1A_4. Đặt $MA_i = x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ và gọi cạnh hình vuông là a. Ta hy vọng thu được hệ thức

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$



Hình 2

Áp dụng định lý Ptôlêmê cho các tứ giác $MA_1A_2A_3$, $MA_1A_2A_4$, $MA_1A_3A_4$ và $MA_2A_3A_4$, ta có:

$$\begin{cases} x_1.a + x_3.a = x_2.a\sqrt{2} \\ x_1.a\sqrt{2} + x_4.a = x_2.a \\ x_1.a + x_4.a\sqrt{2} = x_3.a \\ x_1.a + x_4.a = x_3.a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = x_2\sqrt{2} & (1) \\ x_2 - x_4 = x_1\sqrt{2} & (2) \\ x_3 - x_1 = x_4\sqrt{2} & (3) \\ x_2 + x_4 = x_3\sqrt{2} & (4) \end{cases}$$

Từ (1) ta thấy: muốn có $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$, thì phải có $x_4 = (\sqrt{2} - 1)x_2$; nhưng điều này lại không luôn đúng với mọi vị trí của điểm M. Do đó, hy vọng của ta không đạt được. Phải chăng điều đó làm chúng ta thất vọng? Hãy nhìn lại bốn hệ thức đã thu được: chúng không thú vị nhưng không phải là vô ích. Nếu bạn có một «con mắt nhạy cảm toán học» bạn sẽ thấy ngay (1) và (3) cho ta:

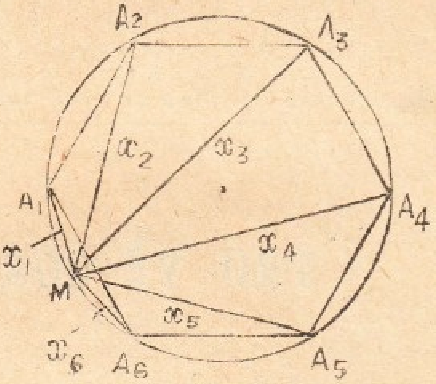
$$(x_1 + x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 = 2x_2^2 + 2x_4^2,$$

hay $$x_1^2 + x_3^2 = x_2^2 + x_4^2$$

Tìm ra rồi! Hệ thức này khá đẹp, và dĩ nhiên có thể chứng minh rằng nó không phụ thuộc vào vị trí điểm M nằm ở cung nào. Do đó, ta đi đến:

Bài toán 2. *Nếu M là một điểm tùy ý nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$, thì ta có $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.*

Sau phút sung sướng đầu tiên, hãy bình tâm lại đánh giá đúng đắn giá trị của bài toán 2. Hệ thức đạt được quả là đẹp thật, song nếu bạn tinh ý, bạn sẽ thấy ngay rằng: có thể thu được nó bằng cách sử dụng định lý Pitago, vì mỗi vế bằng $4R^2$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông. Bài toán 2 trở nên quá dễ!



Hình 3

Nản lòng ư? Không! Mang sẵn tinh thần tiến công cách mạng trong khoa học, chúng ta đâu có nản lòng. Ta nhớ lại: bài toán đã cho (bài toán 1) xét với số cạnh $n = 3$. Thế thì thử xem với số cạnh gấp đôi, hệ thức có «tầm thường» không (với nhiều nghĩa của từ này). Ta hãy giả sử M nằm trên cung A_1A_6 của đường tròn ngoại tiếp lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Áp dụng định lý Ptôlêmê vào các tứ giác nội tiếp $MA_1A_2A_3$, $MA_1A_3A_4$, $MA_1A_3A_5$ và $MA_1A_3A_6$, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2\sqrt{3} \\ x_3 - 2x_1 = x_6\sqrt{3} \\ x_1 + x_5 = x_3 \\ 2x_3 - x_1 = x_4\sqrt{3} \end{cases}$$

từ đó:

$$(x_1+x_3)^2 + (x_3-2x_1)^2 + (2x_3-x_1)^2 = 3(x_2^2+x_4^2+x_6^2)$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_3^2 + (x_1 - x_3)^2 = x_2^2 + x\ \ + x_6^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = x_2^2 + x_4^2 + x_6^2$$

Đây chính là hệ thức mà ta cần tìm, và ta đi đến

Bài toán 3. *Giả sử M là một điểm tùy ý trên vòng tròn ngoại tiếp lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, thì ta có*

$$MA_1^2 + MA_3^2 + MA_5^2 = MA^2 + MA_4^2 + MA_6^2$$

Nếu như ai không biết quá trình suy luận trên để dẫn tới bài toán 3, thì khi phải giải bài toán đó, ắt chẳng có thể xem thường nó (chắc gì đã biết dùng định lý Ptôlêmê để giải cho nhanh ?!)

Đến đây, hẳn bạn cũng như tôi đều nghĩ rằng bài toán 2 và bài toán 3 có thể khái quát hóa thành.

Bài toán 4. *Nếu M là một điểm tùy ý trên đường tròn ngoại tiếp đa giác đều 2m cạnh $A_1A_2 .. A_{2m}$, thì ta có*

$$MA_1^2 + MA_3^2 + ... + MA_{2m-1}^2 = MA_2^2 + MA_4^2 + ... + MA_{2m}^2$$

Bài toán 4 có đúng không, mong rằng các bạn sẽ kiểm tra nó!

Các bạn trẻ yêu toán thân mến! Hẳn bây giờ các bạn đã thấy tầm quan trọng của việc dùng những tri thức mới lĩnh hội được để soi sáng những vấn đề trong quá khứ rồi nhỉ?!

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

ĐƯỜNG ĐỐI CỰC CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI HAI ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI, ĐỐI VỚI ĐƯỜNG TRÒN

PHẠM VĂN HOÀN

TRONG tài liệu hình học lớp 8 phổ thông chuyên toán cũng như trong báo « Toán học và tuổi trẻ » số 30 ra tháng 3 năm 1967 có hai bài toán dẫn đến khái niệm đường đối cực của một điểm đối với hai đường thẳng đồng qui, đối với đường tròn. Ta hãy trở lại các bài toán đó, đi sâu thêm vào một số vấn đề và một số bài toán có liên quan.

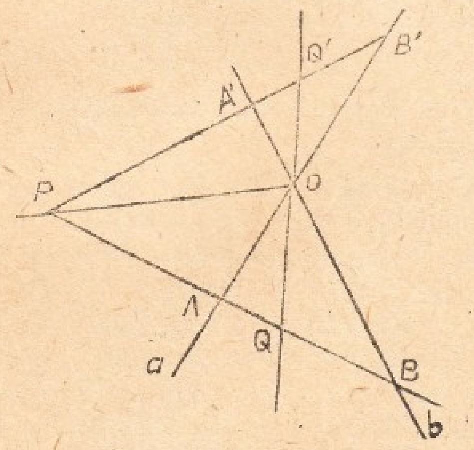
1. Bài toán 1. (Trong tài liệu hình học lớp 8 phổ thông chuyên toán).

Cho một điểm P và hai đường thẳng a, b cắt nhau ở O. Qua P vẽ một cát tuyến cắt a và b ở A và B. Trên cát tuyến đó lên điểm Q sao cho (ABPQ) là hàng điểm điều hòa. Tìm quĩ tích điểm Q khi cát tuyến quay chung quanh P.

Lời giải.

Thuận:

Vẽ một cát tuyến bất kỳ *PAB*. Trên cát tuyến đó lấy điểm Q sao cho (*ABPQ*) là hàng điểm điều hòa. Như vậy (*O.ABPQ*) là chùm điều hòa. Chùm đó có 3 tia *Oa*, *Ob*, *OP* cố định, vậy tia điều hòa thứ tư của chùm đó cũng cố định. Ta thấy *Q* nằm trên một đường thẳng cố định liên hợp với *OP* đối với *Oa* và *Ob*.



Hình 1

Đảo:

Lấy một điểm Q' bất kỳ trên đường đó. PQ' cắt a và b ở A' và B'. Ta thấy ($A'B'PQ'$) là một hàng điểm điều hòa vì A', B', P, Q' là giao điểm của một cát tuyến với các tia của một chùm điều hòa.

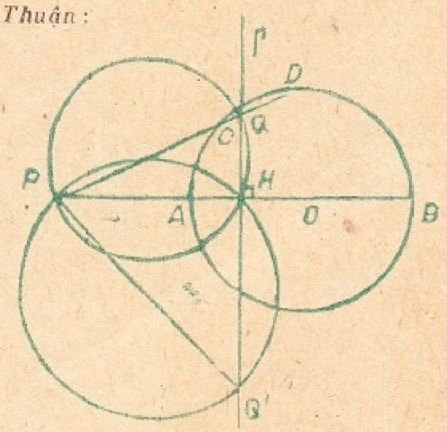
Vậy quĩ tích của *Q* là đường thẳng liên hợp với *OP* đối với *a* và *b*. Đường thẳng đó được gọi là *đường đối cực của điểm P đối với hai đường thẳng Oa, Ob.*

2. Bài toán 2. (Bài 166/66 trong THvTT số 30 tháng 3-1967 sửa lại đôi chút).

Cho một điểm P cố định và một đường tròn (O) cố định tâm O. Tìm quĩ tích những điểm Q sao cho đường tròn đường kính PQ trực giao với đường tròn (O).

Lời giải :

Thuận :



Hình 2

Giả sử Q là một điểm sao cho đường tròn đường kính PQ trực giao với đường tròn (O). Đường thẳng PO cắt đường tròn (PQ) ở H và đường tròn (O) ở A và B. Vì hai đường tròn (PQ) và (O) trực giao nên $(ABPH)$ là một hàng điểm điều hòa, từ đó suy ra :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OH}.\overline{OP}.$$

Vì H nằm trên đường tròn đường kính PQ nên : $\widehat{PHQ} = 90^\circ$.

Ta thấy điểm Q nằm trên một đường thẳng cố định là đường thẳng p vuông góc với đường thẳng PO tại điểm H sao cho $\overline{OH} = \overline{OA}^2/\overline{OP}$.

Đảo :

Lấy một điểm Q' bất kỳ trên đường p. Ta thấy đường tròn đường kính PQ' đi qua H, vì $\widehat{PHQ'} = 90^\circ$. Ta có : $\overline{OA}^2 = \overline{QB}^2 = \overline{OM}.\overline{OP}$. Vì vậy $(ABPH)$ là một hàng điểm điều hòa, từ đó suy ra đường tròn (O) đường kính AB trực giao với đường tròn đường kính PQ'.

Vậy quĩ tích của Q là đường thẳng p vuông góc với PO tại điểm H sao cho $\overline{OP}.\overline{OH} = R^2$, R là bán kính của đường tròn (O). Đường thẳng đó gọi là *đường đối cực của điểm P đối với đường tròn* (O).

Chú ý. Nếu đường thẳng nối P với một điểm Q nào đó của p mà cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D thì $(CDPQ)$ là một hàng điểm điều hòa.

3. Một tính chất lý thú của đường đối cực là : « Nếu đường đối cực của điểm P mà đi qua điểm Q thì đường đối cực của điểm Q đi qua điểm P ».

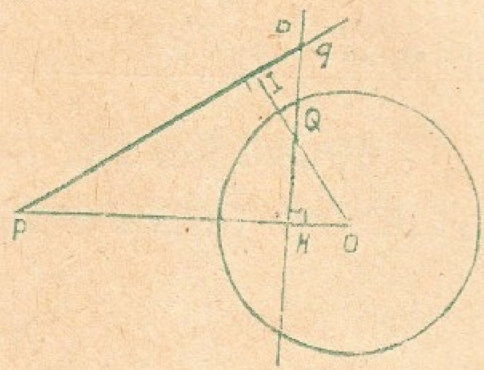
a) Tính chất đó là hiển nhiên trong trường hợp đường đối cực của một điểm đối với hai đường thẳng đồng qui (xem hình 1).

b) Giả sử p, q là đường đối cực của P, Q đối với đường tròn (O) và Q nằm trên p.

Ta có :

$$\overline{OQ}.\ \overline{OI} = R^2,\ \overline{OP}.\ \overline{OH} = R^2.$$

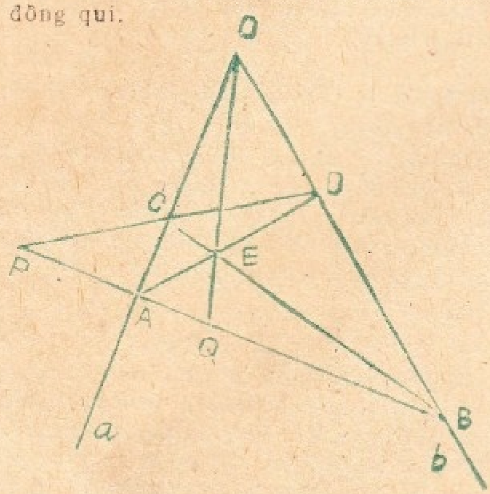
Ta thấy q phải đi qua P, vì giả sử q cắt đường thẳng OH ở P' thì do I, Q, H, P' cùng nằm trên một đường tròn ($\widehat{P'IQ} + \widehat{P'HQ} = 180^\circ$) ta suy ra : $\overline{OQ}.\ \overline{OI} = \overline{OH}.\ \overline{OP'} = R^2$, từ đó P' phải trùng với P.



Hình 3

4. Bài toán sau đây sẽ cho phép suy ra cách vẽ đường đối cực của một điểm chỉ bằng thước kẻ.

a) Ta hãy giải bài toán liên quan đến đường đối cực của một điểm đối với hai đường thẳng đồng qui.



Hình 4

Vẽ hai cát tuyến bất kỳ PAB, PCD. AD và BC cắt nhau ở E. Chứng minh rằng OE là đường đối cực của điểm P đối với a, b.

Lời giải. Giả sử OE cắt PAB ở Q. Ta hãy chứng minh rằng $(ABPQ)$ là hàng điểm điều hòa.

Áp dụng định lý Mê-nê-la-út và định lý Xê-va vào tam giác ABO, ta có lần lượt:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{DO}} \cdot \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}} = 1 \text{ và } \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{DO}} \cdot \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}} = -1.$$

$$\text{từ đó suy ra } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}.$$

Chú ý:

Giả sử phải vẽ đường đối cực của điểm E đối với a, b (hình 4). Trong trường hợp này ta vẽ hai cát tuyến AED, CEB bất kỳ rồi lấy giao điểm P của hai đường thẳng CD và AB. OP sẽ là đường phải tìm.

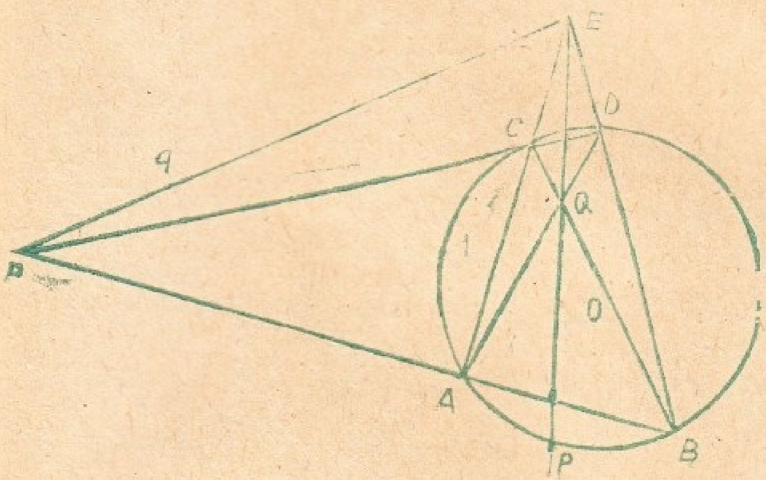
b) Cách vẽ đường đối cực của một điểm (ở trong hay ở ngoài một đường tròn đã cho) đối với đường tròn đó cũng tương tự (xem hình 5).

Vẽ hai cát tuyến PAB, PCD bất kỳ. Các đường thẳng AD, BC cắt nhau ở Q, AC, BD cắt nhau ở E.

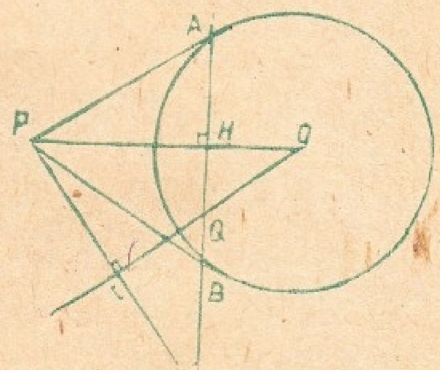
Dễ dàng thấy rằng đường đối cực của P đối với đường tròn (O) là đường thẳng p đi qua E và Q và đường đối cực của Q đối với đường tròn O là đường thẳng q đi qua P và E.

Chú ý:

Nếu P ở ngoài đường tròn (O) và nếu vẽ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn thì dễ dàng thấy rằng đường thẳng AB là đường đối cực của điểm P đối với đường tròn (O).



Hình 5



Hình 6

Nếu Q ở trong đường tròn (O) và nếu vẽ cát tuyến AQB, rồi vẽ các tiếp tuyến ở A, B với đường tròn cắt nhau tại P thì dễ dàng thấy rằng đường thẳng PI vuông góc với đường thẳng OQ là đường đối cực của điểm Q đối với đường tròn (O).

Các bạn có thể vận dụng các điều hiểu biết nêu trên về đường đối cực để giải các bài toán sau đây (các bài toán này các bạn cũng có thể chỉ dùng các kiến thức được học ở lớp 8 chuyên toán để giải).

Bài 1. Trên các cạnh AC và AB của tam giác ABC lấy hai điểm bất kỳ D và E, gọi O là giao điểm của các đường thẳng BD và CE. Trên đường thẳng AO lấy một điểm bất kỳ L. Các đường thẳng LD và LE cắt các đường thẳng CE và BD theo thứ tự ở các điểm H và G. Chứng minh rằng ba đường thẳng DE, HG và BC đồng qui tại một điểm.

Bài 2. Cho một tam giác nội tiếp trong một đường tròn. Chứng minh rằng các giao điểm của tiếp tuyến ở các đỉnh tam giác với cạnh đối là ba điểm cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 3. Cho đường tròn (O) và điểm P ở ngoài đường tròn, tiếp tuyến PA, PB với đường tròn. Từ B ta vẽ BD vuông góc với đường kính AOC. Chứng minh rằng đường thẳng PC đi qua trung điểm K của đoạn thẳng BD.

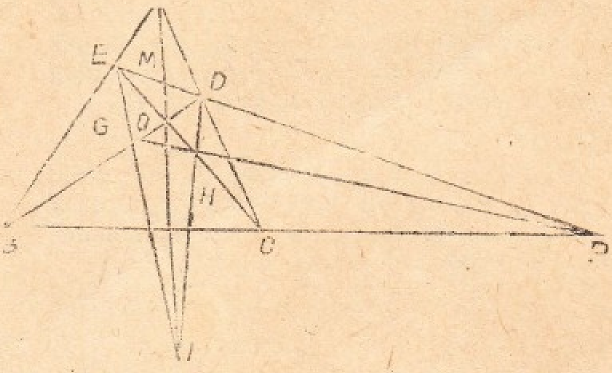
Bài 4. Cho đường tròn tâm O, đường thẳng d và điểm I trên d. Từ điểm M lấy bất kỳ trên d vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn, và từ điểm I vẽ các đường thẳng song song với các tiếp tuyến đó, cắt các tiếp tuyến này ở P và Q. Chứng minh rằng khi M chạy trên d, PQ đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho góc xOy và điểm P trên cạnh Ox, và đường tròn biến thiên tiếp xúc với các cạnh

Ox, Oy của góc đã cho ở A và B. Ta vẽ tiếp tuyến PC với đường tròn biến thiên đó. Chứng minh rằng BC đi qua một điểm cố định.

SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐÃ NÊU

Bài 1. Gọi P là giao điểm của ED và BC rồi chứng minh GH cũng đi qua P.



Hình 7

a) Căn cứ vào cách vẽ đường đối cực của điểm P đối AB và AC, ta có $(EDMP)$ là hàng điểm điều hòa.

Nếu P' là giao điểm của hai đường thẳng ED và GH thì căn cứ vào cách vẽ đường đối cực của điểm P' đối với LE và LD, ta có $(EDMP')$ là hàng điểm điều hòa.

Vì $(EDMP)$ và $(EDMP')$ đều là hàng điểm điều hòa nên P và P' trùng nhau.

b) Cũng có thể chứng minh $(EDMP)$ và $(EDMP')$ là hàng điểm điều hòa bằng cách áp dụng định lý Mê-nê-la-út và định lý Xê-va theo thứ tự vào các tam giác ABC, LDE.

Bài 2.

Gọi M, N, P theo thứ tự là giao điểm của tiếp tuyến ở các đỉnh A, B, C với các cạnh đối BC, CA, AB và D, E, F theo thứ tự là giao điểm của các tiếp tuyến ở A và B, A và C, B và C.

a) Ta hãy chứng minh rằng AF, BE, CD đồng qui tại điểm I. Muốn vậy, ta hãy áp dụng định lý Xê-va vào tam giác DEF. Ta có:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{CF}}{\overline{CE}} = -1$$

(vì $\overline{AE}=\overline{CE}$, $\overline{AD}=\overline{BD}$, $\overline{BF}=\overline{CF}$ do các đoạn thẳng đó là tiếp tuyến phát xuất từ cùng một điểm E, D, F tới đường tròn tâm O).

Ta hãy chứng minh rằng AF, BE, CD theo thứ tự là đường đối cực của M, N, P đối với đường tròn (O). Thật vậy:

BC là đường đối cực của F. BC đi qua M.

AM là đường đối cực của A. AM đi qua M.

Vậy, đường đối cực của M đi qua A và F, tức là đường AF.

Cũng chứng minh tương tự với BE và CD.

Ta thấy rằng AF, BE, CD là các đường đối cực của M, N, P đi qua điểm I, vậy đường đối cực của I đối với đường tròn (O) phải đi qua M, N, P, tức là M, N, P cùng ở trên một đường thẳng.

b) Cũng có thể chứng minh điều này bằng cách áp dụng định lý Mê-nê-la-út vào tam giác DEF. Muốn vậy, trước hết hãy chứng minh:

$$\frac{\overline{ME}}{\overline{MD}} = -\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}},\quad \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}} = -\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}},\quad \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} = -\frac{\overline{CF}}{\overline{CE}}$$

rồi áp dụng hệ thức (1).

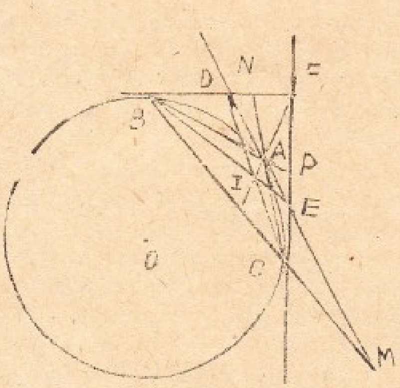
Thật vậy, áp dụng định lý Mê-nê-la-út vào tam giác DEF và đường thẳng BCM ta có:

$$\frac{\overline{ME}}{\overline{MD}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{CF}}{\overline{CE}} = 1 \qquad (2)$$

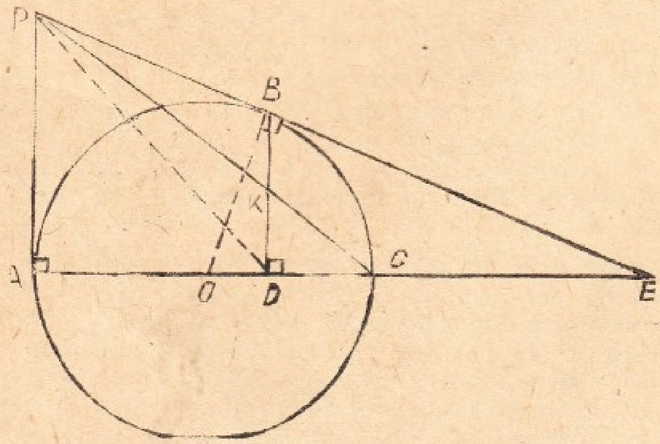
từ đó suy ra: $\frac{\overline{ME}}{\overline{MD}} = -\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$ (so sánh (2) với (1)).

Bài 3.

a) Ta thấy BD là đường đối cực của E đối với đường tròn (O). Do đó, $(EDCA)$ là hàng điểm



Hình 8



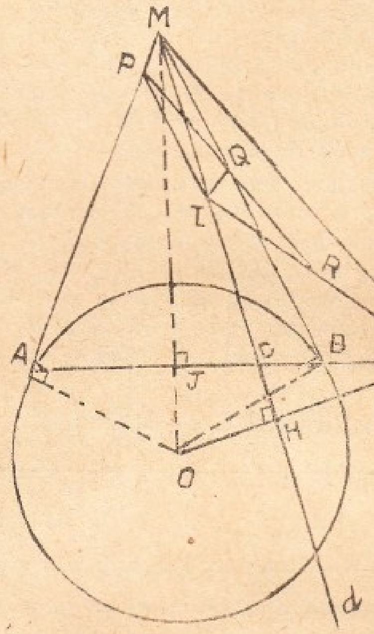
Hình 9

điều hòa và $(P.\ EACA)$ là chùm điều hòa. Ta có $BD//PA$ vậy các tia PC, PD, PE cắt BD thành BK, KD sao cho $KD = KB$.

b) Ta có thể chứng minh $(EDCA)$ là hàng điểm điều hòa bằng cách chứng minh rằng $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OD}\ .\ \overline{OE}$.

Bài 4.

a) Gọi D là điểm thừa nhận d là đường đối cực đối với những đường tròn (O). Như vậy, D là một điểm cố định.



Hình 10

AB là đường đối cực của điểm M. Vì d là đường đối cực của D đi qua M nên đường đối cực AB của M đi qua D. Ta có $(ABCD)$ là hàng điểm điều hòa, vậy $(M.ABCD)$ là chùm điều hòa. Đường chéo PQ của hình bình hành $PMQI$ bị 3 tia MA, MC, MB cắt thành hai đoạn bằng nhau, vậy PQ song song với tia thứ tư MD của chùm điều hòa. PQ đi qua trung điểm của MI và song song với MD, vậy PQ đi qua trung điểm R của ID là một điểm cố định.

b) Ta có thể chứng minh rằng D là một điểm cố định và $(ABCD)$ là hàng điểm điều hòa như sau.

Ta kẻ $OH \perp d$, đường OH cắt đường AB ở D. Vì bốn điểm H, D, M, J nằm trên một đường tròn đường kính MD nên ta có:

$\overline{OH}\ .\ \overline{OD} = \overline{OJ}\ .\ \overline{OM}$. Trong tam giác vuông MAO, ta có

$$\overline{OJ}\ .\ \overline{OM} = \overline{OA}^2 = R^2$$

Vậy $\overline{OH}\ .\ \overline{OD} = R^2$ và D là một điểm cố định.

$OJCH$ là tứ giác nội tiếp, vậy $\overline{DC}\ .\ \overline{DI} = \overline{DH}\ .\ \overline{DO}$

Vì A, M, B, H, O nằm trên đường tròn đường kính MO nên $\overline{DB}\ .\ \overline{DA} = \overline{DH}\ .\ \overline{DO}$. Ta suy ra:

$$\overline{DB}\ .\ \overline{DA} = \overline{DC}\ .\ \overline{DJ}.$$

Vì
$$\overline{DJ} = \frac{\overline{DA} + \overline{DB}}{2} \text{ nên:}$$

$$\overline{DB}\ .\ \overline{DA} = \overline{DC}\ .\ \frac{\overline{DA} + \overline{DB}}{2}$$

$$\text{Vậy: } \frac{2}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DA} + \overline{DB}}{\overline{DB}\ .\ \overline{DA}} = \frac{1}{\overline{DB}} + \frac{1}{\overline{DA}}$$

do đó.

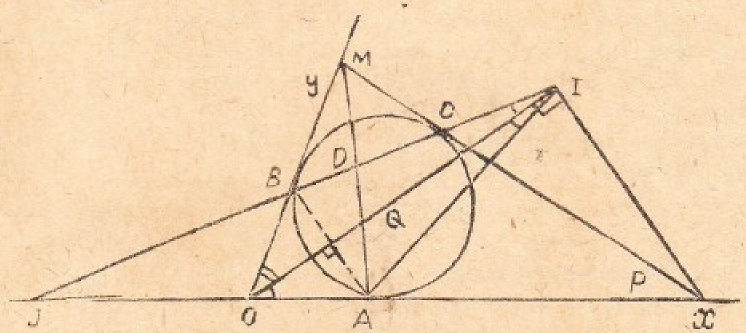
$(ABCD)$ là hàng điểm điều hòa.

Bài 5

a) Gọi I là giao điểm của BC với đường phân giác của góc O. Ta hãy chứng minh I là một điểm cố định.

Giả sử BC cắt Oa ở J. Tương tự như trong bài 2, ta chứng minh rằng MA là đường đối cực của J đối với đường tròn (Q). Ta suy ra $(JDBC)$ là hàng điểm điều hòa, vậy $(M.\ JDBC)$ là chùm điều hòa. Do đó ta có: $(JAOP)$ là hàng điểm điều hòa và $(I.JAOP)$ là chùm điều hòa. Vì OI là phân giác của góc O, ta suy ra IO là phân giác của góc I, vậy trong chùm điều hòa $(I.JAOP)$ hai tia IO và IP vuông góc với nhau, do đó I là điểm cố định.

b) Cũng như trong bài 2, ta có thể áp dụng định lý Mê-nê-la-út vào tam giác MOP và đường thẳng JBC để chứng minh rằng $(JAOP)$ là hàng điểm điều hòa.



Hình 11

THÔNG BÁO

ĐẦU tháng 6-1981, báo Toán học và tuổi trẻ đã tổ chức cuộc họp mặt tại Hà Nội với đông đảo các bạn cộng tác của tờ báo, dưới sự chủ tọa của giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn, chủ nhiệm báo Toán học và tuổi trẻ. Sau khi nghe kiểm điểm tình hình của báo trong thời gian qua, các bạn dự cuộc họp đã góp nhiều ý kiến xây dựng nội dung tờ báo và cùng nhất trí với các hoạt động sau đây:

1) Để báo Toán học và tuổi trẻ phục vụ được nhiều hơn các bạn học sinh yêu toán nhưng không đang theo học các lớp chuyên toán, báo cần có những bài với nội dung phổ cập hơn, đi sâu vào các kiến thức cơ bản trong chương trình toán phổ thông, các kinh nghiệm học tập, suy nghĩ, sáng tạo,... Tòa soạn rất hoan nghênh nhận được của các bạn học sinh, các thầy giáo, những bài viết theo các nội dung ấy, cũng như các đề toán hay, không cần vận dụng đến các kiến thức chuyên toán.

2) Tòa soạn hoan nghênh và ưu tiên đăng các bài viết về các mối liên hệ của toán học với các ngành khoa học khác, cùng các ứng dụng của toán học trong sản xuất và chiến đấu.

3) Khuôn khổ tờ báo có hạn, không thể đăng được các bài quá dài (Tòa soạn đã nhận được nhiều bài hay, nhưng dài hơn 10 trang chữ nhỏ, khổ giấy lớn, và không thể tìm cách phân chia hợp lý để đăng trong 2 hay 3 số báo!). Tốt nhất các bạn nên hạn chế vấn đề, trình bày xúc tích, tiết kiệm giấy cho tờ báo: mỗi bài viết không nên quá bốn trang khổ giấy học sinh, xúc tích hơn càng tốt. Khi bài cần viết dài, các bạn định liệu cách viết để có thể chia làm hai phần nhỏ, đăng trong hai số báo.

4) Hàng năm học, báo toán học tuổi trẻ tổ chức kỳ thi giải toán cho tất cả các bạn học sinh các trường phổ thông trung học. Các đề toán được công bố trong các số 4, 5, 6 của năm, kết quả sẽ công bố trong số 3 năm sau. Mong tất cả các bạn học sinh yêu toán tham dự kỳ thi ấy, vì không cần phải giải được tất cả các đề toán thi.

Báo TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

GIẢI BÀI *kỳ trước*

Bài 1/116. *Có 13 hòn bi, biết rằng trong đó có đúng 1 hòn có trọng lượng khác với 12 hòn khác. Hãy dùng một cân hai đĩa chỉ ra cách cân để sau 3 lần cân phát hiện được hòn bi đặc biệt đó.*

Lời giải. Ta kí hiệu các hòn bi bằng các chữ cái. Đặc trưng hòn bi bình thường là a và kí hiệu hòn bi cần tìm là x. Nếu A là một tập hợp các hòn bi thì ta kí hiệu $m(A)$ là trọng lượng của tập hợp đó. Ta chia 13 hòn bi thành ba tập hợp:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},\ B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\},$$
$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}.$$

Có thể cân như sau:

Lần cân 1. Đặt A, B lên hai đĩa cân để so sánh $m(A)$ và $m(B)$. Các lần cân tiếp theo phụ thuộc vào kết quả lần cân 1:

1. $m(A) = m(B)$. Trong trường hợp này $x \in C$.

Lần cân 2. So sánh $m(c_1, c_2, c_3)$ và $m(a_1, a_2, a_3)$. (Để đơn giản, ta thay, chẳng hạn, $m(\{c_1, c_2, c_3\})$ bằng $m(c_1, c_2, c_3)$).

a) Nếu $m(c_1, c_2, c_3) = m(a_1, a_2, a_3)$ thì
$$x \in \{c_4, c_5\}$$

Lần cân 3. So sánh trọng lượng của c_4 với trọng lượng của a sẽ tìm ra x.

b) $m(c_1, c_2, c_3) > m(a_1, a_2, a_3)$. Trong trường hợp này $x \in \{c_1, c_2, c_3\}$ và $m(x) > m(a)$.

Lần cân 3. So sánh trọng lượng của c_1 và c_2 sẽ tìm được x.

c) $m(c_1, c_2, c_3) < m(a_1, a_2, a_3)$. Trong trường hợp này $x \in \{c_1, c_2, c_3\}$ và $m(x) < m(a)$. Lần cân 3 như trường hợp trên.

2. $m(A) > m(B)$. Trong trường hợp này thì hoặc $x \in A$ hoặc $x \in B$ và $x \in A \Leftrightarrow m(x) > m(a)$
$$x \in B \Leftrightarrow m(x) < m(a).$$

Lần cân 2. So sánh $m(a_1, b_1, c_1)$ và $m(a_2, b_2, b_3)$

a) Nếu $m(a_1, b_1, c_1) = m(a_2, b_2, b_3)$ thì
$$x \in \{a_3, a_4, b_4\}$$

Lần cân 3. So sánh $m(a_3)$ và $m(a_4)$. Nếu $m(a_3) = m(a_4)$ thì $x = b_4$; nếu $m(a_3) \neq m(a_4)$ thì hòn nào nặng hơn chính là x.

b) Nếu $m(a_1, b_1, c_1) > m(a_2, b_2, b_3)$ thì $x \in \{a_1, b_2, b_3\}$.

Lần cân 3. So sánh $m(b_2)$ và $m(b_3)$ nếu bằng nhau thì $x = a_1$, nếu khác nhau thì hòn nào nhẹ hơn chính là x.

c) Nếu $m(a_1, b_1, c_1) < m(a_2, b_2, b_3)$ thì $x \in \{b_1, a_2\}$. Lần cân 3 so sánh một trong hai hòn đó với a sẽ tìm ra x.

3. $m(A) < m(B)$. Lời giải tương tự trường hợp 2.

Bài 2/116. *Chứng minh rằng số* $\underbrace{100\ldots01}_{2^n+1}$ *chỉ có ước số dạng* $2^{n+1}k+1$. *Từ đó suy ra số đó nguyên tố cùng nhau với số* $1.2.3\ldots2^{n+1}$.

Lời giải. Phần 2 của bài toán là hiển nhiên vì mọi ước số nguyên tố của số ta xét đều có dạng $2^{n+1}k+1 > 2^{n+1}$.

Vì $\underbrace{100\ldots01}_{2^n+1} = 10^{2^n} + 1$ nên bài toán của ta là trường hợp riêng của mệnh đề:

« Với A, B là các số tự nhiên và $(A, B) = 1$ thì số $A^{2^n} + B^{2^n}$ chỉ có ước số lẻ dạng $2^{n+1}k+1$ ».

Mệnh đề hiển nhiên đúng nếu ta chứng minh cho các ước số nguyên tố lẻ. Ta dùng qui nạp.

— Với $n = 0$, hiển nhiên mọi ước nguyên tố lẻ của $A + B$ chỉ có dạng $2k + 1 = 2^{n+1}k+1$.

— Giả sử mệnh đề đúng $n = N$, nghĩa là với $(A, B) = 1$ thì ước nguyên tố lẻ của $A^{2^N} + B^{2^N}$ chỉ có dạng $2^{N+1}k + 1$.

Với $(A, B) = 1$ thì $(A^2, B^2) = 1$. Vì $A^{2^{N+1}} + B^{2^{N+1}} = (A^2)^{2^N} + (B^2)^{2^N}$ nên ước số nguyên tố lẻ của nó chỉ có dạng $2^{N+1}k+1$. Chỉ còn phải chứng minh k chẵn.

Giả sử có một ước nguyên tố lẻ p của $A^{2^{N+1}} + B^{2^{N+1}}$ là $p = 2^{N+1}k + 1$ mà k lẻ. Thế thì

$$A^{p-1} + B^{p-1} = A^{2^{N+1}k} + B^{2^{N+1}k} = \left(A^{2^{N+1}}\right)^k + \left(B^{2^{N+1}}\right)^k$$

là bội của $A^{2^{N+1}} + B^{2^{N+1}}$ tức là bội của p.

Chú ý là p nguyên tố cùng nhau với A, B. Theo định lý nhỏ Phéc-ma ta có

$$A^{p-1} - 1 \vdots p,\ B^{p-1} - 1 \vdots p$$
$$\Rightarrow A^{p-1} + B^{p-1} - 2 \vdots p.$$

Vì đã có $A^{p-1} + B^{p-1}$ là bội của p, suy ra $2 \vdots p$, vô lý. Vậy chỉ có thể k chẵn, và mệnh đề đúng với $n = N + 1$.

Nhận xét: Các bạn *Nguyễn Thanh Nhã* (12C7 Lê Quí Đôn, thành phố Hồ Chí Minh), *Nguyễn Duy Thái Sơn* (12C2 Phù Cát, Nghĩa Bình), *Nguyễn Văn Kỳ Châu* (40 Nguyễn Du, Qui Nhơn) có lời giải tốt.

P.H.

Bài 3/116. *Tìm tất cả các số nguyên tố x sao cho tổng*

$$y = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + [\sqrt{x^2-1}]$$

cũng là số nguyên tố.

Lời giải (của *Trần Đạt Duy* — 11C7, Bùi Thị Xuân, thành phố Hồ Chí Minh).

Ta nhận xét thấy rằng

$$[\sqrt{n^2}] = [\sqrt{n^2+1}] = \ldots = [\sqrt{(n+1)^2-1}] = n$$
$$\Rightarrow [\sqrt{n^2}] + [\sqrt{n^2+1}] + \ldots + [\sqrt{(n+1)^2-1}] = (2n+1)n.$$

Do đó $y = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + [\sqrt{x^2-1}] =$

$$\sum_{n=1}^{x-1}(2n+1)n = 2\sum_{n=1}^{x-1}n^2 + \sum_{n=1}^{x-1}n$$
$$= (x-1)x(x+1)/3 + x(x-1)/2 =$$
$$= x(4x^2 - 3x - 1)/6.$$

Hay

$$4x^2 - 3x - 1 = 6y/x \qquad (1)$$
$$\Rightarrow 6y \vdots x \qquad (2)$$

Do x, y là hai số nguyên tố nên ta có (2) khi và chỉ khi hoặc $6 \vdots x$ hoặc $x = y$. Từ $6 \vdots x \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$, khi đó từ (1) $\Rightarrow y = 3$ hoặc $y = 13$. Với $x = y$ từ (1) ta có $y = -1$ và $y = 7/4$, hai giá trị này không thỏa mãn yêu cầu của đầu bài. Vậy nghiệm của bài toán là $x = 2$ và $x = 3$.

Nhận xét: Một số bạn sau khi đã dẫn ra được (1) do không lợi dụng điều kiện x và y là hai số nguyên tố nên bị sa vào lập luận dài dòng.

Bài 4/116. *Gọi S là số nhỏ nhất trong các số x, y/x, z/t, $1/y$, $1/z$, t, trong đó x, y, z, t là các số thực dương. Hãy tìm miền giá trị của S khi các số x, y, z, t thay đổi.*

Lời giải. Do x, y, z, t là các số thực dương nên $S > 0$. Ngoài ra vì $S = \min\{x, y/x, z/t, 1/y, 1/z, t\}$ ta có $S \leqslant x$, $S \leqslant y/x$, $S \leqslant z/t$, $S \leqslant 1/y$, $S \leqslant 1/z$, $S \leqslant t$. Suy ra $S^6 \leqslant 1 \Rightarrow S \leqslant 1$. Vậy ta đã chứng minh được $S \in (0, 1]$.

Bây giờ ta chứng minh với mọi $k \in (0, 1]$ đều tồn tại một bộ số thực dương x, y, z, t sao cho

$$\min\{x, y/x, z/t, 1/y, 1/z, t\} = k.$$

Thực vậy, xét bộ số $x = y = z = t = k$ và để ý rằng

$$k \leqslant 1 \leqslant 1/k$$

ta sẽ có

$$\min\{k, 1, 1, 1/k, 1/k, k\} = k.$$

Vậy khi x, y, z, t thay đổi trên tập các số thực dương S sẽ nhận mọi giá trị trong nửa khoảng $(0, 1]$.

Nhận xét: Nhiều bạn vội vàng kết luận miền giá trị của S là $(0, 1]$ sau khi mới chỉ chứng minh $S \in (0, 1]$ mà chưa chứng minh S nhận mọi giá trị trong khoảng đó.

Bài 5/116. *Chứng minh bất đẳng thức.*

$$\cos^2\frac{2\pi}{2n+1} + \cos^2\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos^2\frac{2n\pi}{2n+1} < \frac{n}{2}$$

với n là số tự nhiên.

Lời giải (của *Nguyễn Duy Thái Sơn* — lớp 12 C_2 cấp 3 Phù Cát 1, Nghĩa Bình).

Đặt $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \cos^2\frac{2\pi k}{2n+1}$

Chú ý rằng $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$, ta có

$2S_1 = n + S_2$, trong đó $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{4\pi k}{2n+1}$

Ta có:

$$2S_2 \sin\frac{2\pi}{2n+1} = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{(2k+1)2\pi}{2n+1} - \sin\frac{(2k-1)2\pi}{2n+1}\right] = \sin\frac{(2n+1)2\pi}{2n+1} - \sin\frac{2\pi}{2n+1} = -\sin\frac{2\pi}{2n+1}$$

$\Rightarrow S_2 = -1/2$. Do đó $2S_1 = n + S_2 = n - 1/2 \Rightarrow S_1 = n/2 - 1/4 < n/2$.

Nhận xét: Hầu hết các bạn gửi lời giải bài này đều có lời giải gần tương tự như trên.

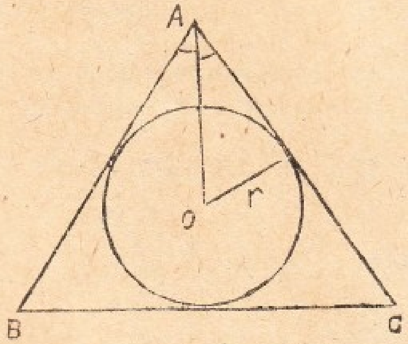
Bài 6/116. *Tính các góc của tam giác ABC, biết rằng*

$$8R^3\, h_a h_b h_c = 27\, OA^2 . OB^2 . OC^2$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, h_a, h_b, h_c là các đường cao và O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Lời giải.

Ký hiệu r, p, s thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp, nửa chu vi và diện tích ΔABC.



Ta có:

$$OA^2 = \frac{r^2}{\sin^2(A/2)} = \frac{S}{p}\,\frac{(p-a)\,\mathrm{tg}\,(A/2)}{\sin^2(A/2)} = \frac{2S}{p}\,\frac{p-a}{2\sin(A/2)\cos(A/2)} = \frac{ah_a}{p}\,\frac{p-a}{\sin A} =$$

$= 2R\; h_a\; (p-a)/p \Rightarrow OA^2/h_a = 2R\,(p-a)/p$

Tương tự:

$OB^2/h_b = 2R\;(p-b)/p$, $OC^2/h_c = 2R\,(p-c)/p \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = OA^2/h_a + OB^2/h_b + OC^2/h_c$

$\geqslant 3\sqrt[3]{OA^2\, OB^2\, OC^2/h_a h_b h_c}$

$\Leftrightarrow 8R^3\; h_a\, h_b\, h_c \geqslant 27\; OA^2\; OB^2\; OC^2$.

Đẳng thức (tức d/k của đầu bài) chỉ xảy ra khi $OA^2/h_a = OB^2/h_b = OC^2/h_c \leftrightarrow (p-a)/p = (p-b)/p = (p-c)/p \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow A = B = C = 60^\circ$.

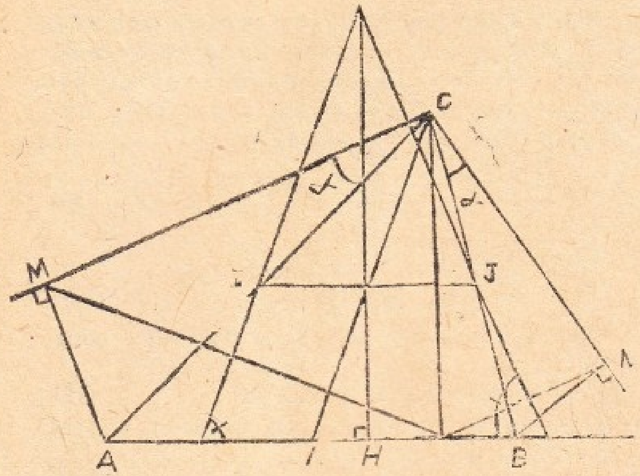
Vậy tam giác ABC thỏa mãn điều kiện bài ra có các góc bằng nhau và bằng 60°.

Nhận xét: Hầu hết các bạn gửi bài đều có lời giải đúng. Lời giải trên ngắn gọn hơn cả.

N.M.

Bài 7/116. *Trong tam giác ABC ta dựng đường cao CH và trung tuyến CL. Từ C dựng hai nửa đường thẳng Cx, Cy lập tương ứng với CA, CB các góc bằng nhau. Giả sử M, N là chân đường vuông góc hạ tương ứng từ A đến Cx, B đến Cy. Chứng minh rằng 4 điểm M, N, H, L nằm trên một đường tròn.*

Lời giải. Ta chỉ cần chứng minh ba đường trung trực của các đoạn HM, HN, HL gặp nhau tại một điểm. Giả sử Cx và Cy lập tương ứng với CA, CB các góc bằng nhau và bằng α. (Ta bổ sung vào đầu bài các góc này phải ngược hướng nhau và khác $\pi/2$; nếu $\alpha = \pi/2$ thì



$M \equiv N \equiv C$, kết luận là hiển nhiên). Các điểm C, M, A, H nằm trên một đường tròn tâm là điểm giữa I của CA; các điểm C, N, B, H nằm trên một đường tròn tâm J là điểm giữa của CB. Từ đó suy ra trung trực của HM đi qua I, trung trực của HN đi qua J và các trung trực này lập với AB cùng một góc $|\pi/2-\alpha|$ (ngược hướng nhau). Như vậy nếu gọi O là giao của hai trung trực này thì OAB và do đó OIJ là tam giác cân. Dễ thấy trung trực của HL đồng thời cũng là trung trực của IJ, vậy trung trực của HL phải đi qua O (đ.p.cm).

Các bạn *Đỗ Quang Đại* (7K Nguyễn Trãi, Hà Đông), *Đặng Trường Sơn* (8CT ĐHTH, Hà Nội), *Đỗ Hữu Tiến* (9A Hoa Lư, Plâycu), *Nguyễn Đâu* (11/3 Phan Châu Trinh Đà Nẵng), *Nguyễn Thanh Nhã* (12 C7 Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh), *Nguyễn Văn Kỳ Châu* (Quy Nhơn) có lời giải tốt bằng các cách giải khác nhau.

P.H.

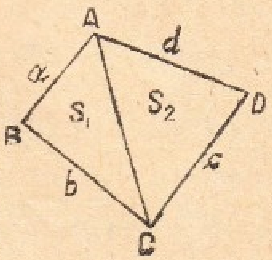
Bài 8/116. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình vuông là:*

$$4S^2 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$$

trong đó S là diện tích; a, b, c, d là các cạnh tứ giác.

Lời giải (của *Nguyễn Văn Kỳ Châu*, 40 Nguyễn Du, Quy Nhơn)

Giả thiết rằng tứ giác $ABCD$ không phải là tứ giác chéo. Khi đó luôn tồn tại ít nhất 1 đường



chéo chia tứ giác ra thành hai tam giác với các diện tích là S_1 và S_2 sao cho $S = S_1 + S_2$. Giả sử đường chéo đó là AC. Khi đó:

$$a^4 + b^4 \geqslant 2a^2b^2 \geqslant 2a^2b^2 \sin^2 B = 8S_1^2.$$

Đẳng thức $a^4 + b^4 = 8S_1^2$ xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = b^2$ và $\sin B = 1 \Leftrightarrow a = b$ và $B = \pi/2$.

Tương tự ta có: $c^4 + d^4 \geqslant 8S_2^2$; dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = d$ và $D = \pi/2$.

Suy ra $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 8(S_1^2 + S_2^2)$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$; $c = d$ và $B = D = \pi/2$.

Mặt khác: $8(S_1^2 + S_2^2) \geqslant 4(S_1 + S_2)^2 = 4S^2$; dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 \Leftrightarrow ab \sin B = cd \sin D$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4S$$

dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d, B = D = \pi/2$, tức tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Bài toán được chứng minh

Bạn *Lê Nguyên Hải* (12C2 Thanh Mỹ Tây, thành phố Hồ Chí Minh) có cách giải tương tự trên tuy trình bày dưới dạng hơi khác.

N.M.

Bài 9/116. *Cho hai đường tròn đựng nhau (O, R) và (I, r). Chứng minh rằng nếu có một tam giác ABC vừa nội tiếp đường tròn này vừa ngoại tiếp đường tròn kia thì cũng có vô số tam giác như vậy. Bất cứ điểm nào của đường tròn lớn cũng là một đỉnh và bất cứ dây cung nào của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ cũng là một cạnh của một tam giác như thế.*

Trong số những tam giác như vậy, tam giác nào có diện tích lớn nhất, tam giác nào có diện tích nhỏ nhất và tìm các giá trị đó theo R và r.

Lời giải.

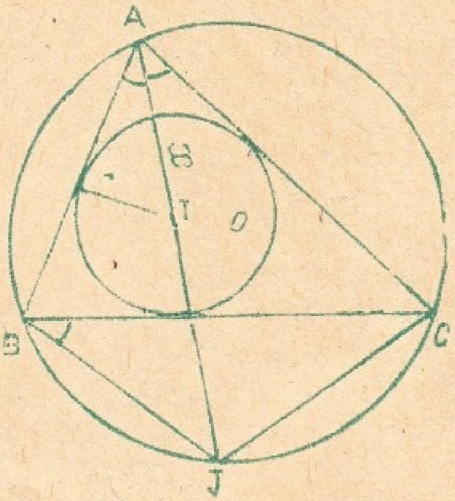
1) Giả sử có một tam giác $A_0B_0C_0$ vừa nội tiếp đường tròn (O, R) vừa ngoại tiếp đường tròn (I, r). Gọi d là khoảng cách tâm của các đường tròn nội và ngoại tiếp, ta có hệ thức Ơ-le sau đây:

$$d^2 = R^2 - 2Rr \qquad (1)$$

Bây giờ ta chứng minh rằng có vô số tam giác như vậy.

a) Lấy một điểm A tùy ý trên đường tròn (O, R); nối AI kéo dài cắt (O, R) tại J. Vẽ đường tròn tâm J, bán kính JI, cắt đường tròn (O, R) tại hai điểm B, C. Ta được tam giác ABC thỏa mãn các điều kiện như tam giác $A_0B_0C_0$.

Thật vậy, vì $\overset{\frown}{JB} = \overset{\frown}{JC}$ nên AJ là phân giác trong của góc BAC. Lại vì $\triangle JBI$ cân ở J nên ta có:



$$\widehat{JBI} = \widehat{JIB} \Leftrightarrow \widehat{CBI} + \widehat{CBJ} = \widehat{IBA} + \widehat{BAJ}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{CBI} = \widehat{IBA}$$
(vì $\widehat{CBJ} = \widehat{CAJ} = \widehat{BAJ}$)

$\Leftrightarrow BI$ là phân giác trong của góc ABC.

Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Giả sử bán kính đường tròn này r', ta có:
$$d^2 = R^2 - 2Rr' \qquad (2)$$

Đối chiếu (1) và (2), ta được: $r' = r$. Điều này chứng tỏ rằng đường tròn (I, r) chính là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có đ.p.c.m.

b) Từ phần a) hiển nhiên suy ra một dây tùy ý của đường tròn (O, R) là cạnh của một tam giác thỏa mãn các điều kiện như tam giác ABC (vì qua 1 điểm chỉ có hai đường thẳng tiếp xúc với một đường tròn).

2) Ta tính diện tích tam giác ABC theo R, r và $IA = x$. Dễ thấy rằng min $IA = R - d \leqslant x \leqslant R + d =$ max IA.

Ta có: $AI.\ IJ = R^2 - OI^2 = R^2 - d^2$ (3)

Đối chiếu (1) và (3), suy ra:

$BJ = IJ = 2Rr/x.$ (4)

$AJ = AI + IJ = x + 2Rr/x$ (5)

Ta tính $\cos(A/2)$ bằng hai cách khác nhau. Một mặt:

$\cos(A/2) = \sqrt{x^2 - r^2}/x$ $(\sin(A/2) = r/x)$ (6)

và do đó: $\sin A = 2r\sqrt{x^2 - r^2}/x^2$ (7)

Mặt khác, trong tam giác ABJ theo định lý hàm số cosin ta có:

$\cos(A/2) = (AB^2 + AJ^2 - BJ^2)/2AB.AJ$ (8)

hay là, thay BJ, AJ bởi các biểu thức (4) và (5), rồi đối chiếu (6) và (8), ta được hệ thức:
$$AB^2 - 2\frac{\sqrt{x^2-r^2}(x^2+2Rr)}{x^2}AB + x^2 + 4Rr = 0 \qquad (9)$$

Nếu xét tam giác ACJ thay cho tam giác ABJ, ta sẽ được các hệ thức tương tự (8) và (9) trong đó chỉ việc thay AB bởi AC. Bởi vậy độ dài của các cạnh AB và AC là hai nghiệm của phương trình bậc hai sau đây:
$$z^2 - 2\frac{\sqrt{x^2-r^2}(x^2+2Rr)}{x^2}z + x^2 + 4Rr = 0 \qquad (10)$$

Và do đó:
$$AB.\ AC = x^2 + 4Rr. \qquad (11)$$

Diện tích S của $\triangle ABC$ được tính theo công thức:
$$S = (1/2)\ AB.\ AC \sin A \qquad (12)$$

Thay giá trị của $\sin A$ và $AB.\ AC$ từ (7) và (11) vào (12), ta được:
$$S = \sqrt{x^2 - r^2}\ \frac{x^2 + 4Rr}{x^2} r. \qquad (13)$$

Ta thay việc tìm cực trị của S bằng việc tìm cực trị của hàm $p(x)$ sau đây:
$$p(x) = (1 + 4Rr/x^2)\sqrt{x^2 - r^2} \qquad (14)$$

Ta có:
$$p'(x) = (1 + 4Rr/x^2).\ x/\sqrt{x^2 - r^2} - 8Rr\sqrt{x^2 - r^2}/x^3$$
$$= (x^4 - 4Rrx^2 + 8Rr^3)/x^3\sqrt{x^2 - r^2} \qquad (15)$$
$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4Rrx^2 + 8Rr^3 = 0 \qquad (16)$$

Phương trình trùng phương (16) luôn luôn có hai nghiệm dương x_m và x_M. Nếu để ý đến hệ thức Ơle (1) thì biểu thức nghiệm của chúng như sau:
$$x_{M,m} = \sqrt{2r(R \mp d)} \qquad (17)$$

Vậy hàm (14) đạt cực trị tại hai giá trị dương (18) của x, nằm trong khoảng xác định ($R - d \leqslant x \leqslant R + d$) của hàm đó. Ta có bảng biến thiên sau đây:

x	$R-d$		$\sqrt{2r(R-d)}$		$\sqrt{2r(R+d)}$		$R+d$
$p'(x)$		+	0	−	0	+	
$p(x)$	p_1	↗	max	↘	min	↗	p_2

Nhìn vào bảng, ta thấy, trong khoảng $R - d \leqslant x \leqslant (R+d$ hàm $p(x)$ đạt cực đại với: $x_M = \sqrt{2r(R-d)}$ và đạt cực tiểu với: $x_m = \sqrt{2r(R+d)}$

Sau khi thay các giá trị (17) của x_M^2 và x_m^2 vào (14), ta tìm được:
$$p(x_M) = p_{max} = \frac{3R - d}{R - d}\sqrt{R^2 - (r + d)^2} \qquad (18)$$

và :

$$p(x_m) = p_{min} = \frac{3R+d}{R+d}\sqrt{R^2-(r-d)^2} \qquad (19)$$

Bây giờ, đặt : min $(x) = x_1 = R-d$, max $(x) = x_2 = R+d$; thế thì từ (14), sau khi tính toán và rút gọn như hệ thức (1), ta tính được :

$$p_1 = p(x_1) = \frac{3R+d}{R-d}\sqrt{(R-d)^2-r^2} \qquad (20)$$

và :

$$p_2 = p(x_2) = \frac{3R-d}{R+d}\sqrt{(R+d)^2-r^2} \qquad (21)$$

Để ý thêm rằng hệ thức Ơ-le (1) tương đương với hệ thức sau đây (mà ta có thể chứng minh một cách dễ dàng):

$$\sqrt{R-r-d}/(R-d) = \sqrt{R-r+d}/(R+d)$$

Từ đó suy ra :

$$p(x_1 = R-d) = p(x_m = \sqrt{2r(R+d)}) = p_1$$

$$p(x_2 = R+d) = p(x_M = \sqrt{2(R-d)}) = p_2$$

Ta đi đến kết luận sau đây : Trong số những tam giác ABC thỏa mãn các điều kiện của bài toán, tam giác có diện tích nhỏ nhất (lớn nhất) là tam giác có một trong các đỉnh của nó cách tâm I của đường tròn nội tiếp một khoảng nhỏ nhất $x_1 = R-d$ (lớn nhất $x_2 = R+d$) hoặc một khoảng bằng $x_m = 2r(R+d)$ ($x_M = 2r(R-d)$).

Tuy nhiên, có thể chứng minh rằng khi một đỉnh của tam giác ABC cách I một khoảng bằng $x_1 = R-d$ (hoặc $x_2 = R+d$) thì hai đỉnh kia cách I một khoảng bằng $x_m = 2r(R+d)$ (hoặc $x_M = 2r(R-d)$) và tam giác đó là cân, nhận đường thẳng OI nối các tâm đường tròn nội ngoại tiếp làm trục đối xứng.

Thật vậy, chẳng hạn tam giác ABC có đỉnh A tại một trong hai đầu mút của đường kính đi qua I của đường tròn (O, R), và $IA = x_1 = x_{min} = R-d$. Tam giác ABC cân ở A, có đáy BC tiếp xúc với đường tròn (I, r) tại điểm H và ta có chiều cao AH bằng $AH = (AI - r) + 2r = x_1 + r =$

$$= R - d + r$$
$$= R - (d - r).$$

Dễ thấy rằng :

$$BH^2 = CH^2 = AH.(2R - AH)$$
$$= (R - d + r)(R + d - r)$$
$$= R^2 - (r-d)^2.$$

Từ đó và nhờ hệ thức (1), suy ra :

$$IB^2 = IC^2 = BH^2 + IH^2 = R^2 - (r-d)^2 + r^2$$
$$= 2r(R+d) = x_m^2.$$

nghĩa là, nếu $IA = x_1$ thì $IB = IC = x_m$

Cũng chứng minh tương tự, nếu $IA = x_2$ thì $IB = IC = x_M$. Do đó, cuối cùng ta đi đến kết luận như sau :

Trong số những tam giác vừa nội tiếp đường tròn (O, R) vừa ngoại tiếp đường tròn (I, r) tam giác có diện tích nhỏ nhất (lớn nhất) là tam giác cân nhận đường thẳng OI làm trục đối xứng. Đỉnh của tam giác cân này cách tâm I của đường tròn nội tiếp một khoảng nhỏ nhất (lớn nhất) bằng $R-d$ (bằng $R+d$). Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của diện tích được tính theo R và r như sau :

$$S_{min} = r p_{min} = \frac{r(3R+d)}{R+d}\sqrt{R^2-(r-d)^2}$$

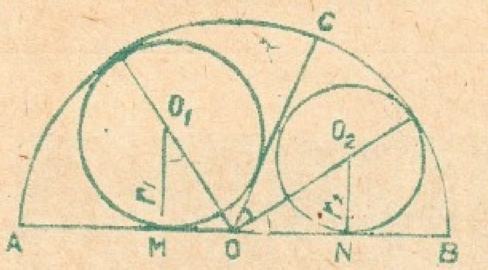
$$S_{max} = r p_{max} = \frac{r(3R-d)}{R-d}\sqrt{R^2-(r+d)^2}$$

(trong đó : $d^2 = R^2 - 2Rr$).

Nhận xét : Không có bạn nào giải bài toán được hoàn toàn chặt chẽ, chính xác cả (do thiếu nhận xét ở phần biện luận). Bạn *Nguyễn Thanh Nhã* (lớp 12 CT trường Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh) có lời giải tương đối tốt, nhưng vẫn thiếu chặt chẽ.

Bài 10/116. *Cho một nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$; C là một điểm trên nửa đường tròn đó. Vẽ hai đường tròn nội tiếp hai hình viên phân AOC và OCB, hai đường tròn này tiếp xúc với AB tại M và N. Hãy chứng minh rằng :*

$$MN \geqslant 2R(\sqrt{2} - 1). \qquad (*)$$



Lời giải. Gọi O là tâm của nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$; O_1, O_2 và r_1, r_2 theo thứ tự là tâm và bán kính hai đường tròn nội tiếp, hai hình viên phân AOC và COB.

Đặt $\overset{\frown}{COB} = 2\alpha$, $0 < 2\alpha \leqslant 90°$)
thì $\widehat{O_2ON} = \widehat{OO_1M} = \alpha$,
ta có :

$$r_1 = (R - r_1)\cos\alpha, \quad r_2 = (R - r_2)\sin\alpha.$$

Từ đó suy ra :

$$r_1 = R\cos\alpha/(1 + \cos\alpha), \quad r_2 = R\sin\alpha/(1 + \sin\alpha) \qquad (1)$$

Mặt khác, lại có :

$$MO = r_1 \operatorname{tg}\alpha \text{ và } NO = r_2 \operatorname{cotg}\alpha. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$MN = MO + ON$$

$$= R\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right) \quad (3)$$

Xét hàm số: $y = f(x) = \sin x/(1+\cos x) + \cos x/(1+\sin x)$

$$(0 < x \leqslant \pi/4)$$

$y' = f'(x) = (\sin x - \cos x)/(1+\cos x)(1+\sin x)$

Với $x = \pi/4$ thì $y' = f'(x) = 0$

Với $0 < x < \pi/4$ thì $y' < 0$. Vậy $y = f(x)$ là một hàm số giảm trên $(0, \pi/4)$.

Do đó, hàm số đạt giá trị cực tiểu tại $x = \pi/4$ và $MN = \min =$

$$= R\left[\frac{\sin(\pi/4)}{1+\cos(\pi/4)} + \frac{\cos(\pi/4)}{1+\sin(\pi/4)}\right]$$

$$= 2R(\sqrt{2}-1).$$

Vậy ta có: $MN \geqslant 2R(\sqrt{2}-1)$. (đ.p.c.m).

Sau đây là vài cách giải khác, không dùng đạo hàm.

— Bạn *Nguyễn văn Kỳ Châu* (Qui Nhơn), sau khi đưa tới biểu thức (3) như trên, tiếp tục biến đổi và rút gọn, đi tới biểu thức sau đây:

$$MN = R\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)$$

$$= \frac{2R}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} \quad (4)$$

Dễ dàng chứng minh rằng:

với mọi α thì $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$. (5)

Từ (5) suy ra: $1 + \sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2} + 1 = 1/(\sqrt{2}-1)$.

Từ đó suy ra (*).

—Bạn *Nguyễn Thanh Nhã* (12 CT Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh) đưa ra cách giải sau: Đặt $OM = x$, $ON = y$, $\widehat{NOO_2} = \alpha$, $\widehat{MOQ1} = \beta$, $\alpha + \beta = \pi/2$.

Trong tam giác OMO_1 vuông ở M, ta có: $OM^2 = OO_1^2 - O_1M^2 = (R - O_1M)^2 - O_1M^2 = R^2 - 2R.OM\ \text{tg}\beta$, hay là: $\text{tg}\beta = (R^2 - x^2)/2Rx$;

tương tự: $\text{tg}\alpha = (R^2 - y^2)/2Ry$

Mặt khác, $\alpha + \beta = \pi/2$, nên ta có:

$(R^2 - x^2)/2Rx = 2Ry/(R^2 - y^2)$

$\Leftrightarrow (R^2 - x^2)(R^2 - y^2) = 4R^2xy$

$\Leftrightarrow R^4 - (x^2 + y^2 + 4xy)R^2 + x^2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (R^2 - xy)^2 - R^2(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow R^2 - xy = R(x+y)$

$\Leftrightarrow R(x+y) + xy - R^2 = 0\ (x, y \leqslant R)$.

Đặt $x + y = t$ thì $xy \leqslant t^2/4$. Do đó:

$0 \leqslant Rt + t^2/4 - R^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant t^2 + 4Rt - 4R^2$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ nghĩa là C là trung điểm của cung AB.

$(t + 2R + 2R\sqrt{2})(t + 2R - 2R\sqrt{2}) \geqslant 0 \Leftrightarrow t + 2R - 2R\sqrt{2} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow t \geqslant 2R(\sqrt{2}-1)$, hay $MN = t \geqslant 2R(\sqrt{2}-1)$ (đ.p.c.m.)

NGUYỄN ĐẶNG PHÁT

CÁC ĐỀ TOÁN THI GIẢI TOÁN 1981 — 1982

Bài 1/120. Bốn bạn A, B, C, D cùng phát biểu về tính chất của một số nguyên dương cho trước. Mỗi bạn đưa ra ba mệnh đề trong đó có ít nhất một mệnh đề đúng và ít nhất một mệnh đề sai.

Bạn A phát biểu:

— Số đó chia hết cho 4.

— Số đó chia hết cho 9.

— 11 lần số đó nhỏ hơn 1000.

Bạn B phát biểu:

— Số đó chia hết cho 10.

— Số đó lớn hơn 100.

— Số 12 lần số đó lớn hơn 1000.

Bạn C phát biểu:

— Đó là một số nguyên tố.

— Số đó chia hết cho 7.

— Số đó nhỏ hơn 20.

Bạn D phát biểu:

— Số đó không chia hết cho 7.

— Số đó nhỏ hơn 12.

— 5 lần số đó nhỏ hơn 70.

Hỏi số đó là số nào?

Nguyễn Quốc Trinh (ĐHSP Hà Nội)

Bài 2/120. Chứng minh rằng

$1936^{1982} + 44^{1982} + 1 \ \vdots\ 1981$.

Phạm Quang Giám

Bài 3/120. Chứng minh rằng nếu a,b,c là ba cạnh của một tam giác thì

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geqslant a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2.$$

Khi nào xảy ra đẳng thức?

Bùi Quang Trường (Hà Nội)

Bài 4/120. Xác định các số dương A,B,C sao cho đa thức $f(x) = Ax^5 + Bx^3 + Cx$ có giá trị nguyên với mọi x nguyên và $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 5/120. a) Giả sử $|a_i| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Chứng minh rằng.

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) + (1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n) \leqslant 2^n.$$

b) Giả thử $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và $0 \leqslant y_j \leqslant 1$ $(j = 1, 2, \ldots m)$. Chứng minh rằng

$$(1 + x_1)\ldots(1 + x_n)(1 - y_1)\ldots(1 - y_m) + (1 - x_1)\ldots(1 - x_n)(1 + y_1)\ldots(1 + y_m) \leqslant 2^{\max(n,m)}.$$

Phan Đức Chính

Bài 6/120. Cho đa thức hệ số thực $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ một số $\alpha > 0$. Biết rằng với $|x| \leqslant 1$ có $|f(x)| \leqslant \alpha$.

Tìm giá trị lớn nhất của $|a|$, $|b|$, $|c|$, $|d|$.

Nguyễn Anh Dũng (Thanh Hóa)

Bài 7/120. Một đường thẳng đi qua trực tâm H của tam giác ABC cắt các đường thẳng (AB) và (AC) ở P và Q. Chứng minh rằng nếu H là trung điểm của đoạn PQ thì $PQ \perp MH$, trong đó M là trung điểm của BC.

Tạ Hồng Quảng (Viện Toán học)

Bài 8/120. Trên các cung BC, CA, AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không chứa các đỉnh A,B,C ta lấy tương ứng các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui là

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A.$$

Bài 9/120. Trong mặt phẳng π cho một góc xAy quay xung quanh điểm A cố định. O là một điểm cố định nằm ngoài mặt phẳng π sao cho OA không vuông góc với π. Các đường thẳng kẻ từ O vuông góc với các mặt phẳng (OAx) và (OAy) cắt π tại M và N. Chứng minh MN là một đường thẳng cố định.

Lê Quốc Hán (ĐHSP Vinh)

Bài 10/120. Trên một mặt cầu cho n điểm A_1, $A_2, \ldots, A_n$ $(n > 1)$. Tìm quĩ tích của điểm M sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{A_iM}/\overline{MA_i'}) = n$$

trong đó A_i' là giao điểm của MA_i với mặt cầu $(i = 1,2,\ldots, n)$.

Ngô Duy Ninh (Qui Nhơn)

VỀ CÁC KỲ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN TOÀN QUỐC NĂM 1981

LÊ HẢI CHÂU

TRONG hai ngày 6 và 7 tháng 3 năm 1981, kỳ thi chọn học sinh giỏi toán lớp cuối phổ thông trung học (lớp 10 ở các tỉnh và thành phố phía bắc, lớp 12 ở các tỉnh và thành phố phía nam) đã được tổ chức cho khoảng 230 học sinh giỏi trong cả nước, trong đó có 12 học sinh gái. Trong mỗi ngày học sinh dự thi làm ba bài toán trong 180 phút.

Dưới đây là đầu đề thi:

Bài 1. Chứng minh rằng một tam giác là vuông khi và chỉ khi tổng của sin ba góc của nó bằng tổng của côsin ba góc đó cộng với 1.

Bài 2. Cho hai đa thức

$$f(p) = p^{12} - p^{11} + 3p^{10} + 11p^3 - p^2 + 23p + 30;$$
$$g(p) = p^3 + 2p + m.$$

Tìm giá trị nguyên của m để tồn tại một đa thức $h(p)$ mà $f(p) = g(p)$. $h(p)$ với mọi giá thực của p.

Bài 3. Cho hai điểm M và N ở ngoài một mặt phẳng R. Xác định vị trí của điểm A trên R sao cho tỉ số AM/AN là cực tiểu.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = -24 \\ x.z = y.t \\ x - y + z + t = 0. \end{cases}$$

Bài 5. Cho n số thực $t_1, t_2, \dots, t_n$ sao cho $0 < p \leqslant t_k \leqslant q$ với $k = 1, 2, \dots, n$. Biết rằng $A = (t_1 + t_2 + \dots + t_n)/n$ và $B = (t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2)/n$, hãy chứng minh:

$$A^2/B \geqslant 4pq/(p+q)^2$$

và tìm điều kiện cần và đủ để có đẳng thức.

Bài 6. Cho hai đường tròn tâm O_1 và O_2 bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài tại A và một điểm M ở trong đường tròn tâm O_2 không nằm trên đường thẳng O_1O_2. Tìm một đường thẳng d đi qua M sao cho đường tròn (ABC) tiếp xúc với đường thẳng O_1O_2. B là một giao điểm nào đó của d với đường tròn tâm O_1 và C là một giao điểm nào đó của d với đường tròn tâm O_2.

Ngày 15 tháng 4 năm 1981, tất cả những học sinh đạt điểm từ trung bình trở lên trong kỳ thi nói trên đều có mặt tại Huế (Bình Trị Thiên) để dự một *kỳ thi đặc biệt*, đồng thời dự hội nghị «dạy toán và học toán giỏi toàn quốc», nhằm tổng kết 5 năm đoàn học sinh nước ta tham gia thi vô địch toán quốc tế. Kỳ thi này gồm 3 bài toán làm trong 210 phút.

Bài 1. a) Không dùng bảng, hãy tính tổng:

$$1/\cos^2 10^\circ + 1/\sin^2 20^\circ + 1/\sin^2 40^\circ - 1/\cos^2 45^\circ.$$

b) Tìm những cặp số tự nhiên (a, b) thỏa mãn phương trình

$$a^b - b^a = a - b.$$

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2t_1 - t_2 = a_1 \\ -t_1 + 2t_2 - t_3 = a_2 \\ -t_2 + 2t_3 - t_4 = a_3 \\ \dots\dots\dots \\ -t_{n-2} + 2t_{n-1} - t_n = a_{n-1} \\ -t_{n-1} + 2t_n = a_n. \end{cases}$$

Bài 3. Cho bốn điểm trong không gian A, B, C, D, đường vuông góc chung MN của hai đoạn AB và CD, và AB vuông góc với CD. Biết rằng $AM = MB = a$, $CN = ND = b$, $MN = m$, hãy tìm trong không gian một điểm S sao cho tổng các khoảng cách từ S đến các điểm A, B, C, D là cực tiểu và tìm giá trị cực tiểu đó theo a, b, m.

KẾT QUẢ KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÀN QUỐC

Giải cá nhân.

Giải nhất: *Nguyễn Tử Long*, trường Đại học Tổng hợp Hà Nội.

Giải nhì: *Hà Thúc Dương*, trường Quốc học Huế.

Giải ba: *Lê Hồng Quang* (trường Chu Văn An Hà Nội); *Nguyễn Minh Tuấn* (trường Quốc học Huế), *Lê Minh Châu* (trường Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh) và *Lê Chung Ẩn* (trường Đại học Tổng hợp Hà Nội).

Giải tư:

Lê Tự Quốc Thắng và *Nguyễn Thanh Nhã* (trường Lê hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh), *Vũ Quốc Tuấn* và *Nguyễn Ngọc Khánh* (trường Chu Văn An Hà Nội), *Lê Minh Tân* (trường Lê Hồng Phong, Hà Nam Ninh), *Trịnh Đông Tinh* (trường Hàm Rồng, Thanh Hóa), *Nguyễn Thanh Thủy* (trường Hồng Quang, Hải Hưng), *Trần Tuấn Hải* và *Nguyễn Mạnh Hùng* (trường Đại học Sư phạm Hà Nội 1), *Nguyễn Thị Minh* và *Lê Nam Cường* (trường Đại học Sư phạm Vinh).

Giải đồng đội.

Giải nhất: Bình Trị Thiên, *Giải nhì*: thành phố Hồ Chí Minh *Giải ba*: Hà Nội và Hà Nam Ninh.

KẾT QUẢ KỲ THI TẠI HUẾ

Loại A: *Nguyễn Minh Tuấn* (trường Quốc học Huế) và *Lê Tự Quốc Thắng* (trường Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh).

Loại B: *Nguyễn Thanh Nhã* (trường Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh) *Lê Nam Cường* (trường Đại học Sư phạm Vinh), *Hà Thúc Dương* (trường Quốc học Huế) và *Trịnh Đông Tinh* (trường Hàm Rồng Thanh Hóa).

In 12000c tại Xí nghiệp In 75, 77 Hàng Bồ – Hà Nội
Số in 82/81. In xong và gửi lưu chiểu tháng 10/1981. Chỉ số 12884 *Giá*: 0,20đ