TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

Số 119
3
1981

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

...nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN
...: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: **HOÀNG CHÚNG**
Dây nói: 52825

...chuyện với các bạn trẻ yêu toán

...CHỨNG MINH GIÁN TIẾP TRONG VIỆC HỌC TOÁN

NGUYỄN ĐỨC THUẦN

...ÁN học là một khoa học suy diễn. Vì vậy,
... trong quá trình học toán, các bạn trẻ yêu
... đã liên tiếp chứng minh. Một chứng minh
... ba bộ phận. Bộ phận thứ nhất là *điều cần*
chứng minh (còn gọi là luận đề). Bộ phận
... hai bao gồm *những điều đúng đã biết, đã*
... (như tiên đề, định lý, v.v...) được vận dụng
... chứng minh (còn gọi là luận cứ). Bộ phận
... ba bao gồm *những phép suy luận lôgich*
... theo đề *chứng minh* (còn gọi là luận chứng)
... ba qui tắc cần tôn trọng trong chứng
... Đó là, không được *đánh tráo điều cần*
...g minh. Không *được dựa vào những điều*
...g *đúng để chứng minh*, tức là không được
...g những ghi nhớ sai về tiên đề, định nghĩa,
... lý v.v... để chứng minh. *Không được suy*
... *sai lôgich*. Suy luận sau đây là suy luận
... lôgich: «Một hình chóp đều thì đáy là đa
... đều. Hình chóp này có đáy là đa giác đều.
... hình chóp này là hình chóp đều» (!). Suy
luận sai lôgich vừa nói trên cũng giống như
suy luận sai lôgich mà các em lớp dưới hay
mắc: «Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Hai góc
này bằng nhau. Vậy hai góc này là hai góc đối
đỉnh» (!). Nếu bạn vi phạm một trong ba qui
tắc chứng minh trên do trình độ bạn còn bị
hạn chế, còn non kém thì người ta nói bạn là
«*ngộ biện*». Nếu bạn vi phạm một trong ba qui
tắc chứng minh trên không phải do «vô tình»
mà do «cố ý» thì người ta nói bạn là «*ngụy
biện*». Theo cách nói thông thường, «ngụy biện»
là che đậy khéo léo một điều sai nào đó để lừa
người khác công nhận là đúng. Trong việc học
Toán, đối với học sinh lớp dưới, những «ngộ
biện» về suy luận sai lôgich thường khá tinh
vi. Chẳng hạn, chứng minh hằng đẳng thức
$\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ (1), một số học sinh
lớp 9 phổ thông đã «ngộ biện» như sau đây:
«Từ (1) suy ra $(1-\sin x)(1+\sin x) = \mathrm{sos}^2 x$. Do

đó $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ (2); (2) đúng, vậy (1) cũng đúng». Việc phân tích sai lầm này cho học sinh mắc «ngộ biện» như trên sáng rõ cũng không phải là dễ dàng.

Ta hãy quay lại đề nói về chứng minh. Các bạn thường gặp chứng minh trực tiếp và chứng minh gián tiếp. Nếu bạn suy luận lôgích, căn cứ vào những điều đúng đã biết để khẳng định một điều nào đó là đúng, thì như vậy là bạn đã chứng minh điều đó. Nếu bạn khẳng định một điều X nào đó là sai, thì như vậy là bạn đã *bác bỏ X*. Do đó, khi nói chứng minh X thì có nghĩa là bạn phải rút ra X là đúng. *Nếu bạn bác bỏ hoặc chứng minh một điều X' nào đó (không tương đương lôgích với X, nhưng có liên quan nào đó với X về mặt nội dung) sau đó mới suy ra X đúng, thì người ta nói rằng bạn đã chứng minh gián tiếp X.*

Các bạn đọc thân mến! Về chứng minh trực tiếp thì các bạn đã quen thuộc. Ta chỉ đề cập ở đây về chứng minh gián tiếp. Trong chứng minh gián tiếp, có *chứng minh loại dần*. Về cách này, người ta đã ví von như sau: «*Tương tự như muốn cổ động cho một ứng cử viên trong thế giới tư bản, người ta tìm cách đả kích từng địch thủ của ứng cử viên đó*».

Ví dụ 1. Chứng minh rằng, trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền.

$$\text{GT}\begin{cases}\widehat{A} = 90^\circ\\ BD = DC\end{cases} \qquad \text{KL}\ \{AD = BD$$

Quan hệ về độ dài giữa hai đoạn thẳng AD và BD có thể xảy ra trong ba trường hợp $AD > BD$, $AD < BD$, $AD = BD$.

Nếu $AD > BD$ thì $AD > DC$ (vì $BD = DC$). Trong một tam giác đối với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn. Do đó, ta có:

$$\widehat{B} > \widehat{BAD} \text{ và } \widehat{C} > \widehat{CAD}. \text{ Suy ra } \widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{BAC}$$

Nhưng $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{BAC}$, nên ta có: $180^\circ - \widehat{BAC} > \widehat{BAC}$, rút ra $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Điều này là không đúng. Vậy, không thể xảy ra $AD > BD$ được.

Đối với trường hợp $AD < BD$, ta cũng lý luận tương tự như vậy và đi tới $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Điều này là không đúng. Vậy, cũng không thể xảy ra $AD < BD$.

Như vậy, chỉ còn lại trường hợp $AD = BD$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình: $3^x + 4^x = 5^x$.

1) Ta thấy $x = 2$ là nghiệm của (1). Thật vậy $3^2 + 4^2 = 5^2$.

2) Còn hai trường hợp nữa $x < 2$, $x >$ …

$$(1) \Leftrightarrow (3/5)^x + (4/5)^x = 1$$

Nếu $x < 2$ thì áp dụng tính chất của … mũ với cơ số nhỏ hơn 1, ta có:

$$(3/5)^x > (3/5)^2 \text{ và } (4/5)^x > (4/5)^2$$

Do đó: $(3/5)^x + (4/5)^x > (3/5)^2 + (4/5)^2$ …

Như vậy, những giá trị $x < 2$ là nghiệm … (1) là không đúng.

Nếu $x > 2$ thì: $(3/5)^x < (3/5)^2$ và $(4/5)^x <$ …

Do đó: $(3/5)^x + (4/5)^x < (3/5)^2 + (4/5)^2 =$ …

Như vậy, những giá trị $x > 2$ là nghiệm … (1) là không đúng.

Kết luận: $x = 2$ là nghiệm duy nhất của …

Chú ý. Chứng minh trong ví dụ 2, có … bạn dễ lẫn, cho là *chứng minh trực tiếp* … đã bác bỏ hai điều X': «$x < 2$ là nghiệm của … và «$x > 2$ là nghiệm của (1)». Vì vậy, … minh trên là chứng minh loại dần. (*)

Các bạn đọc thân mến! Trong chứng … gián tiếp còn có *chứng minh điều gián tiếp … hơn điều phải chứng minh.* Ta hãy làm rõ … niệm «*điều gián tiếp mạnh hơn*». Đối với … điều X và X', nếu biết rằng X suy được … thì ta nói rằng *X' là điều gián tiếp mạnh hơn* … (cũng còn nói *X yếu hơn X'*). Nêu lên điều … tiếp mạnh hơn điều cần phải đề cập tới … trong đời sống hàng ngày, trong Văn học … người ta đã dùng nhiều. Chẳng hạn, … chứng minh rằng Hitle là một tên vô cùng … bạo, giết người không biết ghê tay, người … kể một sự thực: «Lúc sáu tuổi, bẩy tuổi, … cứ trông thấy những con gà bé tí teo … mượt mà là lén thò tay bóp chết». Nguyễn … tác giả truyện Kiều, trong lần đi sứ sang … quốc (tháng 2, năm 1813), muốn vạch mặt … quan lại «Thiên triều» ở Tây Hà ăn … phung phí vô độ trên lưng dân nghèo đau … ông đã viết: «*Thức ngon thừa mứa mang … ngán ăn lũ chó bên nhà xì hơi*». Ý nghĩa … của câu thơ Tố Như cao biết chừng nào … giúp các bạn trẻ sáng tỏ về mặt toán học … cách chứng minh gián tiếp này, ta hãy nêu … một ví dụ.

Ví dụ 3. Chứng minh ba đường cao của … tam giác đồng qui tại một điểm. (X).

Muốn giải bài toán trên ta giải bài toán … đây: «Cho tam giác ABC bất kỳ. Gọi O … của ba đường trung trực và G là trọng … của tam giác đó. Trên đường thẳng OG kéo … về phía G, ta lấy đoạn $OE = 3.OG$. Chứng … rằng E là trực tâm của tam giác ABC …

Kéo dài AG cho gặp BC tại D và kéo … cho gặp BC tại H. Ta chứng minh được …

...giác ODG và tam giác EAG là đồng dạng. Suy ra $AH // OD$, mà $OD \perp BC$ nên $AH \perp BC$. Vậy AH là một đường cao của tam giác đi qua E. Tương tự, ta chứng minh được đường cao còn lại của $\triangle ABC$ cũng đi qua E. Vậy E là trực tâm của $\triangle ABC$.

...biết rằng, đường OG là đường thẳng Ơle (đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm của tam giác). Trong tam giác không đều, tồn tại một và chỉ một đường thẳng Ơle. Trong tam giác đều, tồn tại vô số đường thẳng Ơle. Rõ ràng, chứng minh X' dễ hơn chứng minh X, vì X' chứa nhiều chi tiết hơn. Về lượng thông tin, X' hấp dẫn hơn, vì ngoài khẳng định như X, X' còn khẳng định rằng tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm của tam giác nằm trên một đường thẳng và có đẳng thức $OE = 3OG$ (G trong đoạn OE)

Các bạn yêu toán thân mến! Trong chứng minh gián tiếp còn có *chứng minh gián tiếp mệnh đề X bằng cách chứng minh mệnh đề đảo của nó.*

Nếu giả thiết và kết luận của mệnh đề X mà đó là tồn tại duy nhất (có một không hai) thì khi X đúng, mệnh đề đảo X' của X cũng đúng và ngược lại. (Đó là một định lý, các bạn có thể chứng minh được). Vì vậy, X được chứng minh khi X' được chứng minh, nói khác đi, muốn chứng minh X thì người ta chứng minh X' là đủ. Chẳng hạn, mệnh đề X là: «Trong một tam giác, đường thẳng nối trung điểm của hai cạnh thì song song với cạnh còn lại». Mệnh đề đảo X' của X là: «Trong một tam giác, đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với cạnh khác thì đi qua trung điểm của cạnh còn lại». Ta thấy «đường thẳng nối trung điểm của hai cạnh» là tồn tại duy nhất, «đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với cạnh khác» là tồn tại duy nhất. Cho nên, có thể chứng minh gián tiếp X bằng cách chứng minh X'. *Nói tổng quát hơn, nếu X là: «Một hình có những tính chất nào đó» và chỉ riêng hình đó mới có tính chất ấy thì ta có thể chứng minh gián tiếp X bằng cách chứng minh X'. «Một hình mà có tính chất đó sẽ là hình đã cho». Để chứng minh, ta dựng một hình có những tính chất đó, rồi chứng minh hình đó là hình đã cho.*

Ví dụ 4. Chứng minh rằng, trong một tam giác, đường thẳng nối trung điểm của hai cạnh thì song song với cạnh còn lại.

Trong $\triangle ABC$, từ trung điểm D của AB, ta kẻ $DE // BC$ và $DF // AC$. Ta có $\triangle ADE = \triangle BDF \Rightarrow AE = DF$. Tứ giác $DECF$ là hình bình hành vì có cạnh đối song song với nhau. Do đó $CE = DF$. Vậy $AE = CE$, có nghĩa E là trung điểm của AC. Cho nên, nếu từ D mà ta kẻ đường song song với BC thì theo điều vừa chứng minh, đường song song đó phải đi qua trung điểm E của AC. Như thế $DE // BC$.

Các bạn đọc thân mến! Về chứng minh gián tiếp có nhiều hình thức phong phú. Ta đã nêu ra các hình thức:

1) *Chứng minh loại dần;*

2) *Chứng minh mệnh đề gián tiếp mạnh hơn luận đề;*

3) *Chứng minh mệnh đề đảo của luận đề.*

Cuối cùng, trong chứng minh gián tiếp còn có *phép phản chứng.*

Các bạn đọc đã được làm quen với phép phản chứng rất sớm. Ở cấp 3, khi mới làm quen với Hình học không gian, các bạn thường gặp nhiều cách chứng minh bằng phép phản chứng. Điều đó là rất cần thiết trong tình hình mà luận cứ của các bạn đối với Hình học không gian còn rất ít. Để trình bày cho tiện, ta cần đề cập tới *mệnh đề phủ định của mệnh đề X nào đó*, ký hiệu là $\overline{X}$ (đọc là X ngang hoặc không X, phủ định của X). Chẳng hạn, $a < b$ là *phủ định* của $a \geqslant b$: «Số hữu tỉ» là *phủ định của* «số vô tỉ»: «Hai đường thẳng song song» là *phủ định* của «hai đường thẳng không song song» v.v....

Nếu chứng minh X bằng cách bác bỏ $\overline{X}$, sau đó dựa vào hai mệnh đề phủ định lẫn nhau không thể cùng sai suy ra X đúng thì như vậy người ta gọi là chứng minh X bằng phép phản chứng (gọi tắt là chứng minh phản chứng X)

Ví dụ 6. Chứng minh rằng, hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng AB thì song song.

Giả sử (P) và (Q) có một điểm chung D. Thế thì, từ D có hai mặt phẳng cùng vuông góc với AB. Điều đó không thể xảy ra. Vậy $(P) // (Q)$.

Phép phản chứng tất nhiên không mang tính chất «*vạn năng*», nhưng nó rất thông dụng trong Toán học. «*Chứng minh bằng phép phản chứng là một phương pháp chứng minh tương tự như lối trào phúng, tiểu diễn trong văn chương. Nhà văn trào phúng có một quan điểm nào đó, rồi viết cường điệu lên đến mức gây cười*» (G.Pôlya).

Về chứng minh phản chứng có nhiều điều lý thú. Có nhiều hình thức chứng minh phản chứng. Ngay đối với cùng một bài toán, cũng có thể chứng minh phản chứng bằng hình thức này hay hình thức khác. Các bạn hãy xem sách giáo khoa và tự thống kê lại các hình thức chứng minh phản chứng. Chúng ta sẽ trình bày cặn kẽ trong một dịp khác.

Bây giờ, đề nghị các bạn hãy xét và giải thích rõ các chứng minh một số bài toán sau đây xem có chính xác hay không và thuộc hình thức chứng minh gián tiếp nào?

Bài toán 1. Chứng minh $lg35$ là một số vô tỉ.

Trước hết, vì là lôgarit thập phân (cơ số lớn hơn 1) của số 35 ($35 > 10$) nên nếu gọi x là $lg35$ thì $x > 1$.

1) x không thể là số nguyên lớn hơn 1. Thật vậy, nếu nâng 10 lên lũy thừa với số mũ nguyên lớn hơn 1 thì ta sẽ được đơn vị và các chữ số không, mà số 35 không phải là số gồm đơn vị và các chữ số 0.

2) Giả sử x là một số hữu tỉ không nguyên dương (a/b) (a, b là số tự nhiên) lớn hơn 1. Thế thì, từ $lg35 = a/b$, ta có $10^{a/b} = 35$ hay $\sqrt[b]{10^a} = 35$. Do đó, ta rút ra $10^a = 35^b$. Vế trái của đẳng thức này là một số gồm đơn vị và các chữ số không, còn vế phải là 35^b thì không thể như thế. Cho nên, x không thể là số hữu tỉ.

Vậy x là số vô tỉ.

Bài toán 2. Chứng minh rằng, trong một tam giác vuông, đường trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

Trong tam giác vuông ABC vuông tại A, ta kẻ AD sao cho AD tạo với BA một góc $\widehat{BAD} = \widehat{B}$. Như vậy tam giác DAB cân đỉnh tại D và ta có $AD = BD$ (1). Ngoài ra $\widehat{DAC} = 90^\circ - \widehat{BAD}$. Ta cũng có $\widehat{ACD} = 90^\circ - \widehat{B}$. Do đó $\widehat{DAC} = \widehat{ACD}$ và tam giác DAC cân đỉnh tại D và ta có $AD = DC$ (2). So sánh (1) và (2), ta có: $AD = BD = DC$.

Bài toán 3. Chứng minh rằng, nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

Gọi chân của một đường thẳng trong hai đường thẳng đó trên (P) là B. Ta kẻ qua B đường thẳng $b // a$ ($a \perp (P)$). Bất cứ đường thẳng c nằm trong (P) cũng vuông góc với a. Như vậy c cũng phải vuông góc với b (vì $b // a$). Do đó $b \perp (P)$.

Cho nên, nếu từ B ta kẻ đường thẳng song song với đường thẳng a thì theo điều vừa chứng minh trên, nó phải vuông góc với (P). Nó chính là đường thẳng b vì qua một điểm B chỉ có một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng (P) mà thôi. Vậy $b // a$.

Bài toán 4. Nếu trên một cạnh của góc AMA' có hai điểm A và B, trên cạnh kia có hai điểm A' và B' sao cho $MA.MB = MA'.MB'$ thì bốn điểm đó cùng ở trên một đường tròn.

Giả sử 4 điểm A, B, A', B' như vậy không ở trên một đường tròn. Rõ ràng 4 điểm trên không thẳng hàng. Với ba điểm A, B, A' như đã cho bao giờ cũng chỉ có một đường tròn đi qua. Nếu đường tròn này cắt cạnh MA' ở điểm B'' nữa thì ta có:

$$MA.MB = MA'.MB''$$

So sánh với đẳng thức đã cho, ta có $MB' = MB''$. Vậy $B' \equiv B''$, có nghĩa là A, B, A', B' ở trên cùng một đường tròn, mâu thuẫn với điều giả sử. Vậy điều giả sử không thể xảy ra. Do đó bài toán đã được chứng minh.

*) Cần phân biệt *chứng minh loại dần* và *chứng minh nhận dần*. Nếu phải chứng minh X mà không có thể có một cách chứng minh duy nhất, người ta chia X thật triệt để thành ra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rồi chứng minh lần lượt đối với $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Như vậy là X được chứng minh nhận dần. Cách chứng minh nhận dần, *Aristốt* (thế kỷ IV trước công nguyên) đã dùng lần đầu tiên và người ta gọi là *phép qui nạp Aristốt*. Khi chứng minh định lý về số đo góc nội tiếp, định lý cosin v.v... người ta đã dùng chứng minh nhận dần.

Bài 4/115. *Cho $2n$ số tự nhiên liên tiếp $1, 2, \ldots, 2n$ và dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ là một hoán vị của nó có $a=1$. Chứng minh rằng tồn tại $i \neq j$ sao cho $a_i - i = a_j - j$.*

Lời giải. Bạn *Nguyễn văn Kỳ Châu* (Quảng Nam – Đà Nẵng) đưa ra một số phản ví dụ để chứng tỏ kết luận trong đầu bài là không đúng:

– Với $n=3$: $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=6$, $a_4=5$, $a_5=3$, $a_6=2$.

– Với $n=4$: $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=8$, $a_4=6$, $a_5=4$, $a_6=7$, $a_7=3$, $a_8=2$.

– Với $n=5$: $a_1=1$, $a_2=6$, $a_3=10$, $a_4=7$, $a_5=3$, $a_6=8$, $a_7=4$, $a_8=9$, $a_9=5$, $a_{10}=2$.

…5/115. *Cho hệ phương trình.*

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = x_4 \\ \dots\dots\dots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

…$\neq 0$.

…m điều kiện để hệ này vô nghiệm, có duy …nghiệm, có nhiều hơn một nghiệm.

…i giải. Kỳ hiệu

$$x_2 - x_1 = X_1$$
$$x_3 - x_2 = X_2$$
$$\dots\dots$$
$$x_n - x_{n-1} = X_{n-1}$$
$$x_1 - x_n = X_n$$

…ta có

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0 \qquad (1)$$

…hệ phương trình đã cho tương đương với …sau

$$\begin{cases} ax_1^2 + (b-1)x_1 + c = X_1 \\ ax_2^2 + (b-1)x_2 + c = X_2 \\ \dots\dots\dots \\ ax_{n-1}^2 + (b-1)x_{n-1} + c = X_{n-1} \\ ax_n^2 + (b-1)x_n + c = X_n \end{cases}$$

- Nếu $(b-1)^2 - 4ac < 0$ thì các $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ …n cùng dấu với a, do vậy không thể có đẳng …c (1), trong trường hợp này hệ đã cho vô …hiệm.

- Nếu $(b-1)^2 - 4ac = 0$ thì hệ đã cho có duy …ất nghiệm

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = (1-b)/2a.$$

…n các giá trị khác của x_i sẽ làm cho X_i cùng …u với a, đẳng thức (1) sẽ không có.

- Nếu $(b-1)^2 - 4ac > 0$, hệ đã cho có ít nhất …i nghiệm :

$$x_i = (1 - b + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac})/2a$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$
$$x_i = (1 - b - \sqrt{(b-1)^2 - 4ac})/2a$$
$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Bài 6/115. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_{n-k-1}^{k} = (1/\sqrt{5})\{(1+\sqrt{5}/2)^n - (1-\sqrt{5}/2)^n\}$$

ở đó ký hiệu $[x]$ là phần nguyên của x.

Lời giải của Nguyễn văn Kỳ Châu (Quảng Nam – Đà Nẵng), chứng minh bằng qui nạp.

Dễ thấy với $n = 1$ thì đẳng thức cần chứng minh đúng.

Với $n = 2$ thì vế trái bằng $C_1^0 = 1$, vế phải bằng $(1/\sqrt{5})\{(1+\sqrt{5})/2)^2 - ((1-\sqrt{5})/2)^2\} = (1/\sqrt{5})\,2\sqrt{5}/2 = 1$, đẳng thức là đúng.

Giả sử đẳng thức cần chứng minh đúng với $n = l$ và $n = l+1$, ta chứng minh nó cũng đúng với $n = l+2$.

Để ý rằng

$$(1/\sqrt{5})\{(1+\sqrt{5})/2)^l - ((1-\sqrt{5})/2)^l\} +$$
$$+ (1/\sqrt{5})\{((1+\sqrt{5})/2)^{l+1} - ((1-\sqrt{5})/2)^{l+1}\}$$
$$= (1\sqrt{5})\{((1+\sqrt{5})/2)^l\,((1+2\sqrt{5}+5)/4) - ((1-\sqrt{5})/2)^l$$
$$((1-2\sqrt{2}+5)/4)\}$$
$$= (1/\sqrt{5})\{((1+\sqrt{5})/2)^{l+1} - ((1-\sqrt{5})/2)^{l+1}\}.$$

Vậy để chứng minh đẳng thức đúng với $n = l+2$, ta chỉ việc chứng minh

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{(l+2)-1}{2}\right]} C_{l+2)-k-1}^{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{(l+1)-1}{2}\right]} C_{(l+1)-k-1}^{k} + \sum_{k=0}^{[(l-1)/2]} C_{l-k-1}^{k} \qquad (1)$$

– Với $l = 2m$, đẳng thức (1) trở thành

$$\sum_{k=0}^{m} C_{2m-k+1}^{k} = \sum_{k=0}^{m} C_{2m-k}^{k} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-k-1}^{k}$$

Ta có

$$\sum_{k=0}^{m} C_{2m-k+1}^{k} = 1 + \sum_{k=1}^{m} C_{2m-k+1}^{k}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{m} C_{2m-k}^{k} + \sum_{k=1}^{m} C_{2m-k}^{k-1}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{m} C_{2m-k}^{k} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-k-1}^{k}$$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_{2m-k}^{k} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-k-1}^{k},$$

(1) được nghiệm đúng.

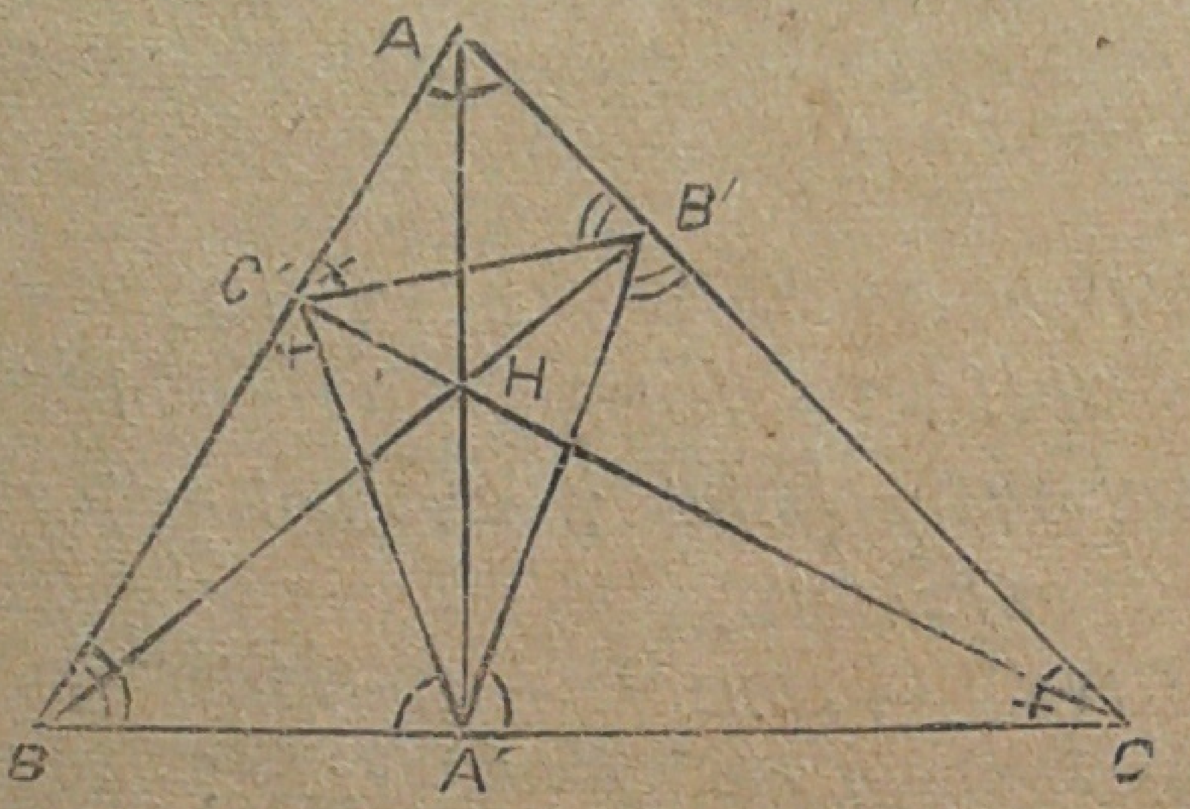
Với $l = 2m+1$, đẳng thức 1 trở thành

$$\sum_{k=0}^{m+1} C^k_{2m-k+2} = \sum_{k=0}^{m} C^k_{2m-k+1} + \sum_{k=0}^{m} C^k_{2m-k}$$

và chứng minh tương tự trường hợp trên.

Bài 7/115. *Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AA', BB' CC' của tam giác gặp nhau ở H. Gọi S_A, S_B, S_C là diện tích các tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$. Chứng minh hệ thức*

$$AH^2 : BH^2 : CH^2 = S_A : S_B : S_C.$$



Kết quả xảy ra thế nào nếu A vuông? A tù?

Lời giải (của nhiều bạn).

Dễ thấy rằng các tam giác $AB'H$ và $BA'H$ đồng dạng với nhau, suy ra

$$AH^2 : BH^2 = AB'^2 : BA'^2 \qquad (1)$$

Tương tự ta có:

$$BH^2 : CH^2 = BC'^2 : CB'^2 \qquad (2)$$

Mặt khác, dễ chứng minh được các tam giác $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ đồng dạng với nhau, suy ra:

$$AB'^2 : BA'^2 = S_A : S_B \qquad (3)$$

$$BC'^2 : CB'^2 = S_B : S_C \qquad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4), ta có

$$AH^2 : BH^2 : CH^2 = S_A : S_B : S_C \qquad \text{(d.p.c.m)}$$

Nếu A vuông, ta có

$$S_A : S_B : S_C = 0 : BA^2 : CA^2$$

hệ thức vẫn đúng:

Nếu A tù: Dùng ký hiệu như trong trường hợp A nhọn, và gọi diện tích tam giác $HC'B'$ là S_H. Giả sử $S_H = \alpha S_A$, $BA = pBH$, $CA = qCH$.

Đối với tam giác HBC có 3 góc nhọn ta đã có

$$S_H : S_B = AH^2 : BA^2$$

$$S_H : S_C = AH^2 : CA^2$$

hay

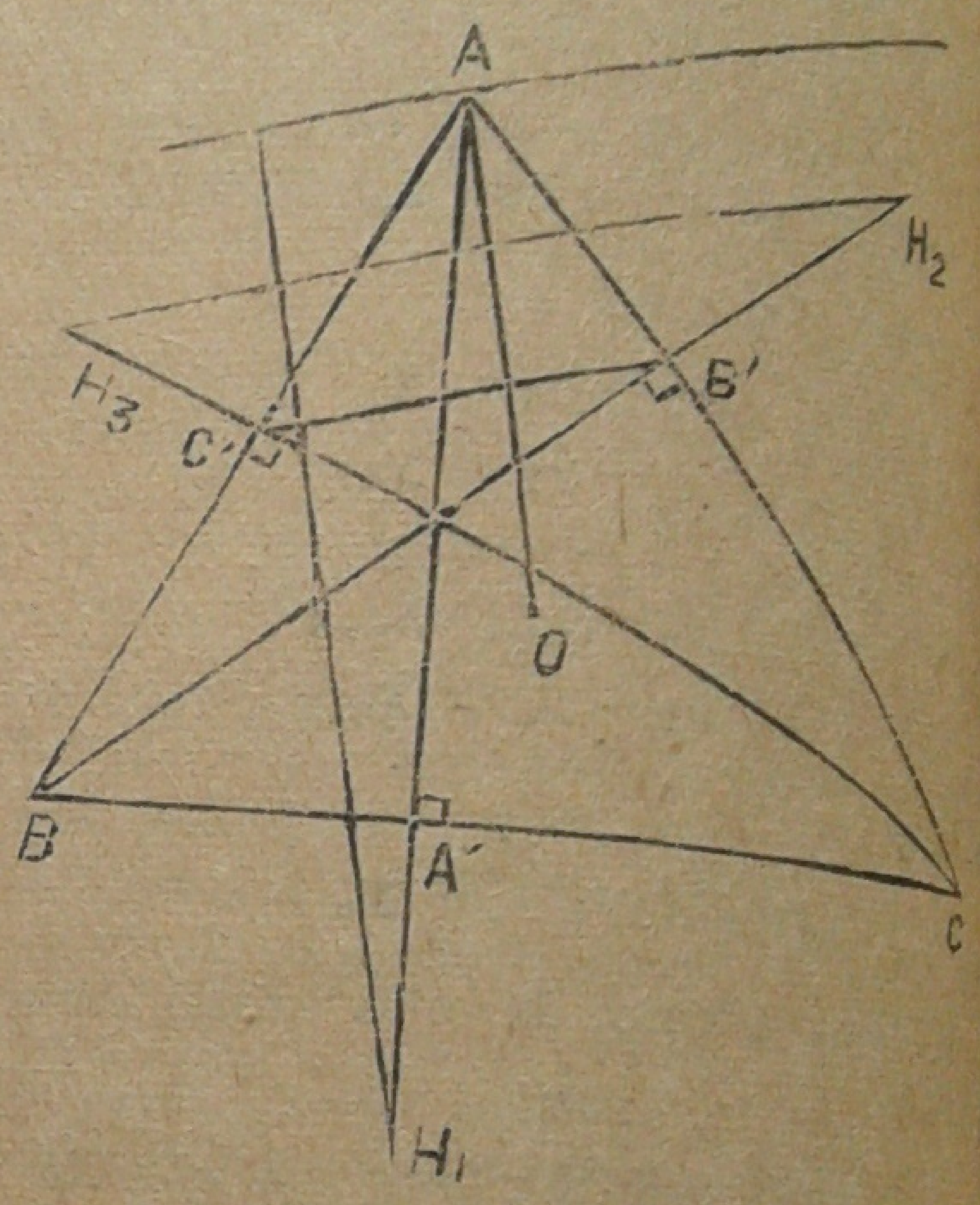
$$\alpha S_A : S_B = AH^2 : (pBH)^2$$

$$\alpha S_A : S_C = AH^2 : (pCH)^2$$

Nếu kết luận vẫn đúng thì $\alpha = 1/p^2$ và $\alpha = \ldots$ tức là $p = q$.

Vậy trong trường hợp A tù thì nói chung kết luận không đúng.

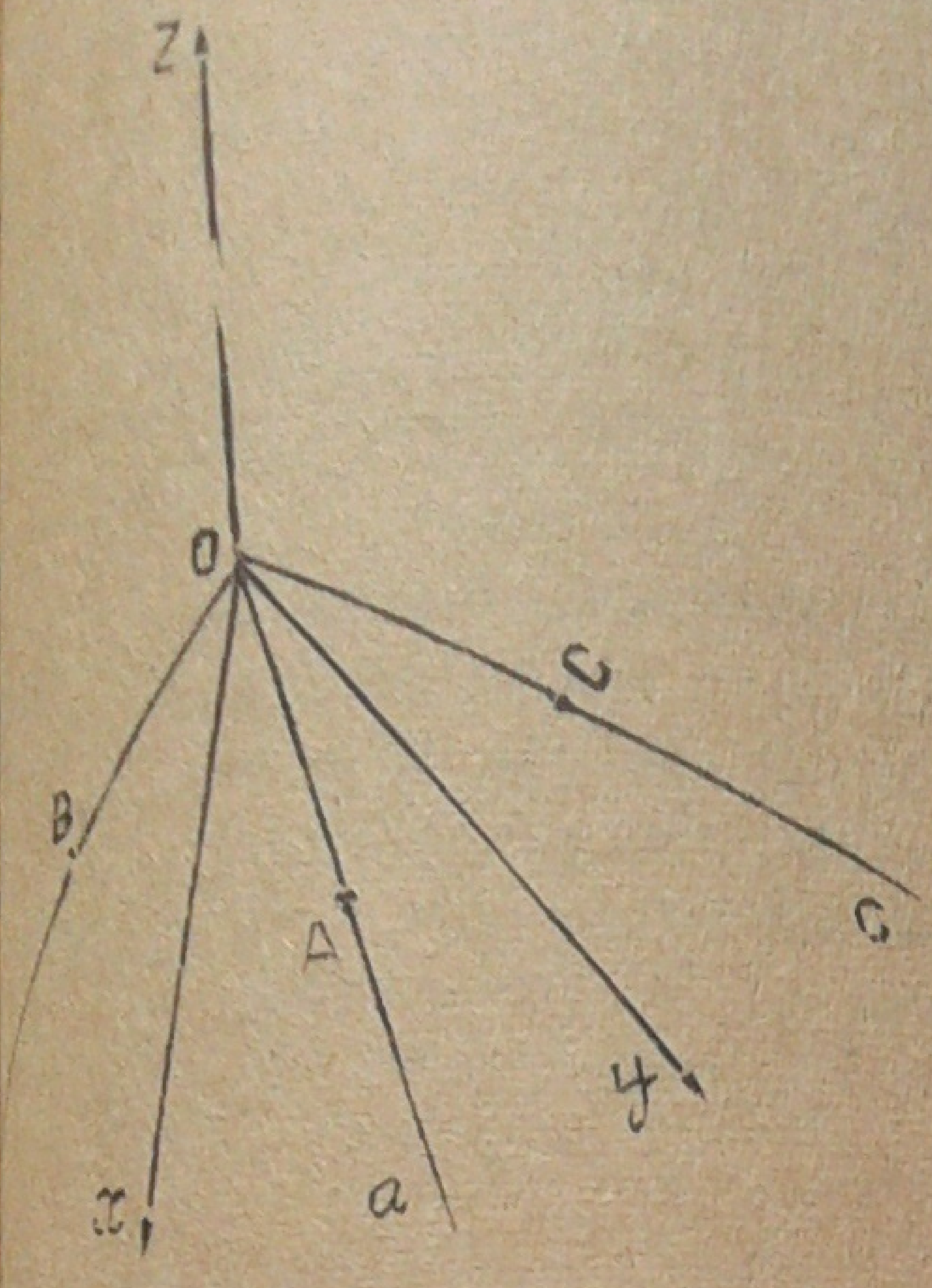
Bài 8/115. *Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O; H là trực tâm của tam giác. Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là các điểm đối xứng của H qua BC, CA và AB. Từ H_1, H_2, H_3 kẻ các đường thẳng theo thứ tự song song với OA, OB, OC. Chứng minh rằng các đường thẳng đó đồng qui.*



Lời giải (của nhiều bạn) Gọi A', B', C' là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C tương ứng. Nối $C'B'$ và dựng tiếp tuyến Ax của đường tròn tâm O. Ta có $\widehat{xAC} = \widehat{C'B'A}$ vì cùng bằng ABC. Vậy $C'B' // Ax$. Đường thẳng kẻ từ H_1 song song với OA vuông góc với Ax nên cũng vuông góc với $C'B'$. Nhưng $C'B' // H_2H_3$ nên đường thẳng nói trên vuông góc với H_2H_3. Bằng chứng minh tương tự, ta đi đến kết luận là các đường thẳng ta xét là các đường cao của tam giác $H_1H_2H_3$ nên đồng qui.

Bài 9/115. *Trong một góc tam diện Oabc các đường phân giác của các góc phẳng aOb và aOc vuông góc với nhau. Hãy tính góc nhị diện tạo bởi mặt phẳng bOc và mặt phẳng chứa các đường phân giác nói trên.*

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz sao cho các trục Ox, Oy là các đường phân giác của các góc phẳng aOb và aOc. Trên các cạnh Oa, Ob, Oc ta lần lượt lấy các đoạn bằng nhau OA, OB, OC. Nếu A có tọa độ (a_1, a_2, a_3) thì tọa độ của B là $(a_1, -a_2, -a_3)$ (vì A và B ...



...nhau qua trục Ox) và tọa độ của C là (..., $-a_3$) và A và C đối xứng nhau qua ... Như vậy ta thấy B và C đối xứng qua trục Oz, suy ra Oz nằm trong mặt ...bOc. Vậy mặt phẳng bOc vuông góc với ... phẳng xOy, tức là nhị diện ta xét là nhị ...vuông.

...10/115. *Trên mặt phẳng có 6 người A, ...X, Y, Z chuyển động thẳng đều với những ...không đổi. Biết rằng*

... gặp C, Y cùng một lúc;

... gặp B, X cùng một lúc;

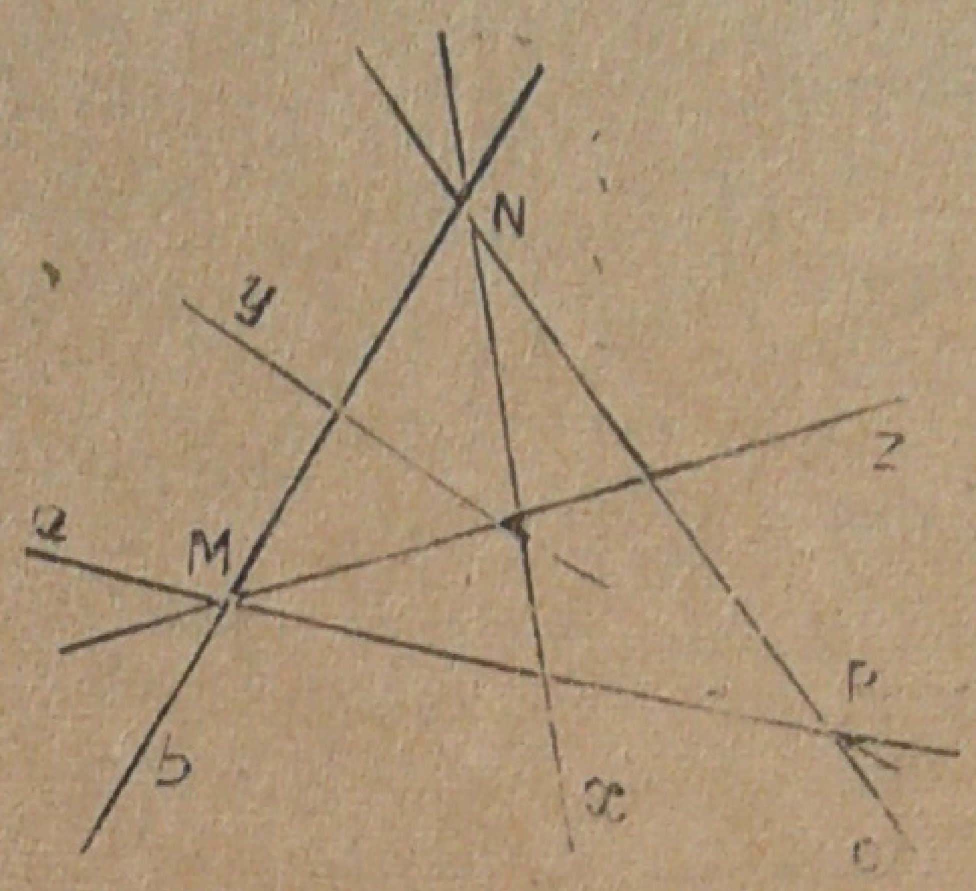
... gặp A, Z cùng một lúc;

— A gặp X đứng giữa đoạn đường A gặp B, C

— B gặp Y đứng giữa đoạn đường B gặp C, A.

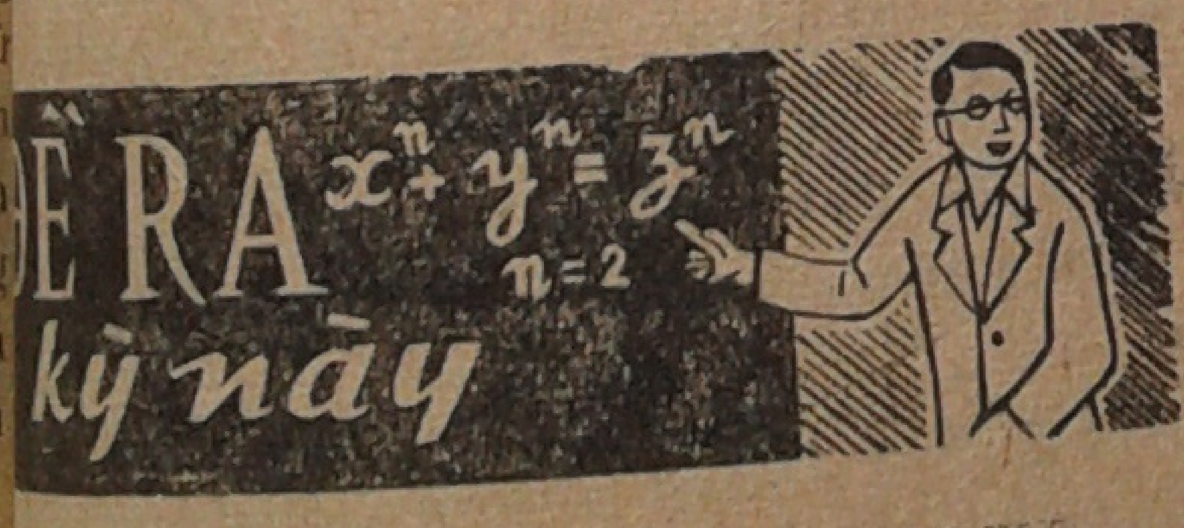
— C gặp Z đứng giữa đoạn đường C gặp A, B.

Chứng minh rằng X, Y, Z gặp nhau cùng một lúc.



Lời giải. Trên mặt phẳng của A, B, C, X, Y, Z ta lập hệ trục tọa độ hai chiều Ox, Oy. Lấy trục thời gian Ot vuông góc với mặt phẳng (xOy). Các đường thẳng a, b, c, x, y, z trong hệ trục ba chiều biểu diễn chuyển động của các người đang xét. Sự cắt nhau của các đường thẳng đó biểu thị sự gặp nhau cùng một lúc của các người tương ứng.

Gọi M, N, P lần lượt là giao của (a, b, z), (b, c, x), (c, a, y); mặt phẳng (MNP) chứa tất cả các đường a, b, c, x, y, z. Từ ba điều kiện cuối ở đầu bài suy ra x, y, z chứa các đường trung tuyến của tam giác MNP, do đó x, y, z cắt nhau tại một điểm. Vậy X, Y, Z gặp nhau cùng một lúc.



...1/119. Hãy tìm tất cả các số chính phương ...chữ số mà tận cùng của nó là ba chữ số ...không giống nhau.

Tạ Hồng Quảng (Viện Toán học)

...2/119. Tìm bốn số tự nhiên có tính chất ...Bình phương mỗi số trong chúng cộng với ...còn lại là số chính phương.

Đào Trường Giang (Vĩnh Phú)

Bài 3/119. Ký hiệu a_n là số nguyên gần $\sqrt[3]{n}$ nhất. Hãy tính tổng.

$$S = 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_{1981}$$

Tạ văn Tự (Hà nội)

Bài 4/119. Chứng minh rằng với mọi cách chia tập hợp 1, 2, 3,...9 (gồm 9 số tự nhiên đầu tiên) thành ra hai tập hợp con luôn luôn có một tập hợp con chứa ba số lập thành một cấp số cộng.

Phan Đức Chính

Bài 5/119. Trong dãy các số chính phương

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots n^2, \ldots$$

hãy lấy ra tất cả các bộ ba số, sao cho mỗi bộ ba số ấy lập thành một cấp số cộng.

Phan Đức Chính

Bài 6/119. Cho a, b, c, d là bốn số dương khác nhau, với $a + b = c + d$. Giải phương trình

$$\sqrt{x + a^2} + \sqrt{x + b^2} = \sqrt{x + c^2} + \sqrt{x + d^2}$$

Phan Đức Chính

Bài 7/119. Cho n số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(1 + \frac{x_1}{nx_2}\right)\left(1 + \frac{x_2}{nx_3}\right)\ldots\left(1 + \frac{x_{n-1}}{nx_n}\right)$$
$$\left(1 + \frac{x_n}{nx_1}\right) \geqslant (1 + 1/n)^n$$

Nguyễn Khánh Nguyên (Hải Phòng)

Bài 8/119. Cho một đường tròn. Gọi S_m là diện tích đa giác đều m cạnh nội tiếp đường tròn đó. Chứng minh rằng ta luôn có

$$2S_{2n} > S_{n-1} + S_{4n+2} \quad (n \geqslant 4)$$

Phạm Quang Giám

Bài 9/119. Cho hình thang cân ABC... Đường tròn ngoại tiếp hình thang có dây... XY thay đổi cắt AD tại P, BC tại Q, ... cho $XP = QY$. Tìm quỹ tích trung điểm của PQ.

Nguyễn Khánh Nguyên

Bài 10/119. Cho một tứ giác có diện tích ... Chia mỗi cạnh của tứ giác thành ba phần bằng nhau rồi nối các cặp điểm chia tương ứng ... các cạnh đối diện để chia tứ giác thành 9 ô, ... duy nhất không kề với cạnh nào của tứ giác được gọi là ô trung tâm. Nói rằng diện tích của ô trung tâm bằng $S/9$ có đúng không?

Nguyễn Công Quỳ
(T. P. Hồ Chí Minh)

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

PHÉP NGHỊCH ĐẢO

PHẠM VĂN HOÀN

Báo «Toán học và tuổi trẻ» số 16 ra tháng 1 năm 1966 có đăng lời giải của đề thi hình học sau đây trong kỳ thi kiểm tra học sinh giỏi toán lớp 8 để vào lớp toán dự bị của trường Đại học Tổng hợp Hà Nội:

Cho một đường thẳng $\triangle$ và một điểm O cố định ở ngoài đường thẳng ấy. Ứng với mỗi điểm M chạy trên $\triangle$ người ta vẽ một điểm N ở trên nửa đường thẳng OM sao cho $\overline{OM}.\overline{ON} = 1$.

1) Chứng minh rằng quỹ tích của điểm N là một vòng tròn (C) đi qua O.

2) Cho A là một điểm cố định trên đường thẳng $\triangle$. Người ta vẽ một vòng tròn bất kỳ đi qua O và A, cắt lại vòng tròn (C) (quỹ tích của N) ở một điểm thứ hai P (khác O) và cắt đường thẳng $\triangle$ ở một điểm thứ hai Q (khác A). Chứng minh rằng PQ đi qua một điểm cố định trên vòng tròn (C).

Các bạn học sinh lớp 8 đã được học về phép vị tự: cho O là một điểm cố định, k là một số không đổi, nếu M và N thẳng hàng với O và $\overline{ON}/\overline{OM} = k$ thì N gọi là điểm biến đổi (hay ảnh) của M trong phép vị tự tâm O, tỉ số k. Các bạn cũng đã biết:

«Qua một phép vị tự:

1) Một đường thẳng đi qua tâm biến thành chính nó.

2) Một đường thẳng không qua tâm biến thành một đường thẳng song song.

3) Một đường tròn biến thành một đường tròn».

Ta hãy xét trường hợp $ON.OM = k$, sử dụng kết quả sẽ đạt được để giải bài toán trên và nêu lên một số bài toán khác.

1. Định nghĩa.

Cho O là một điểm cố định, k là một số không đổi. Nếu M và N thẳng hàng với O và

$$\overline{ON}.\overline{OM} = k$$

...là điểm biến đổi (hay ảnh) của M trong ...ịch đảo tâm O, phương tích k, ký hiệu ...

...ngay rằng nếu N là ảnh của M trong ...ịch đảo $I(O : k)$ thì M cũng là ảnh ...ong phép nghịch đảo đó.

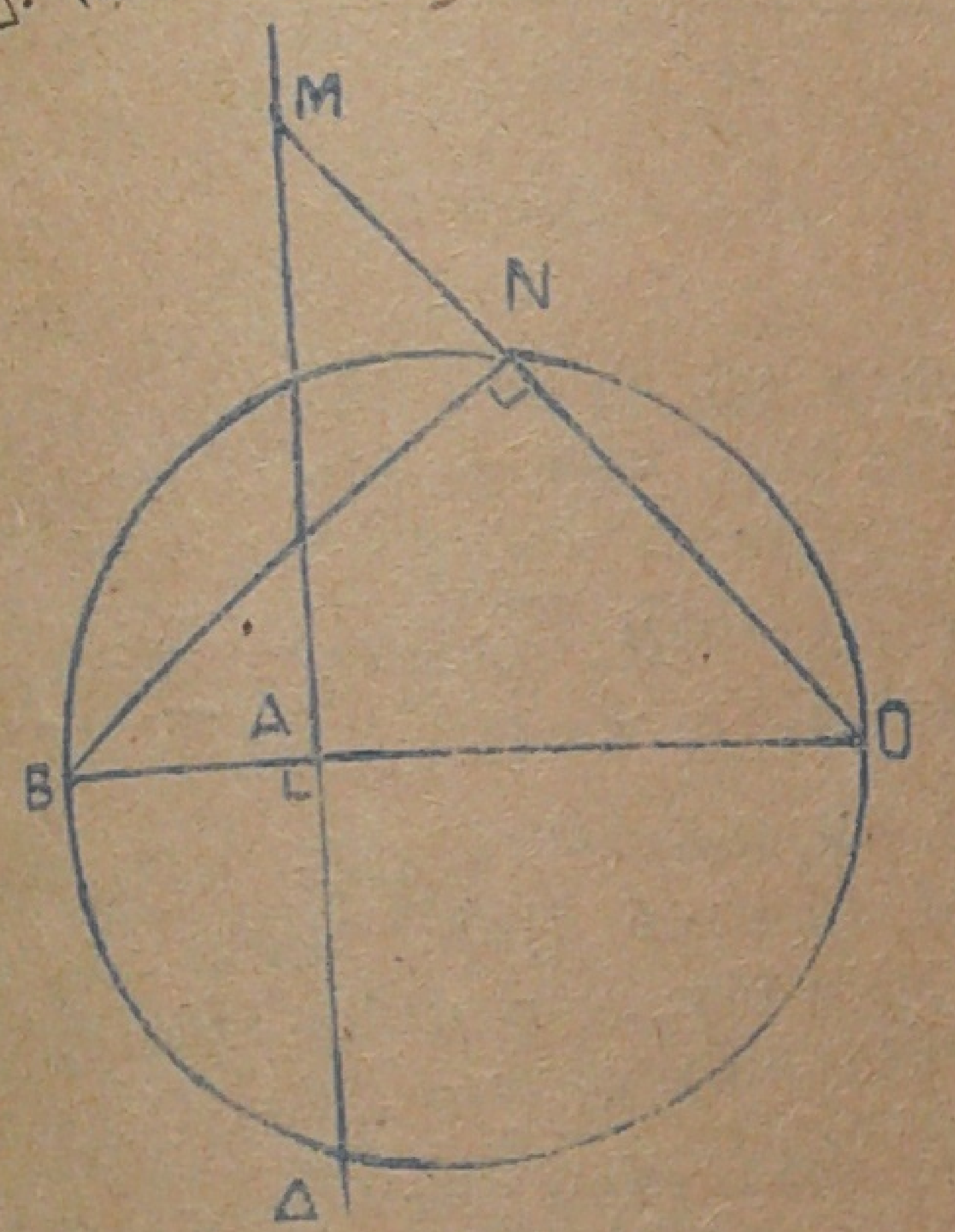
...h của một đường thẳng.

...lý 1. Qua một phép nghịch đảo, một ...thẳng đi qua tâm biến thành chính nó. ...lý này là hiển nhiên.

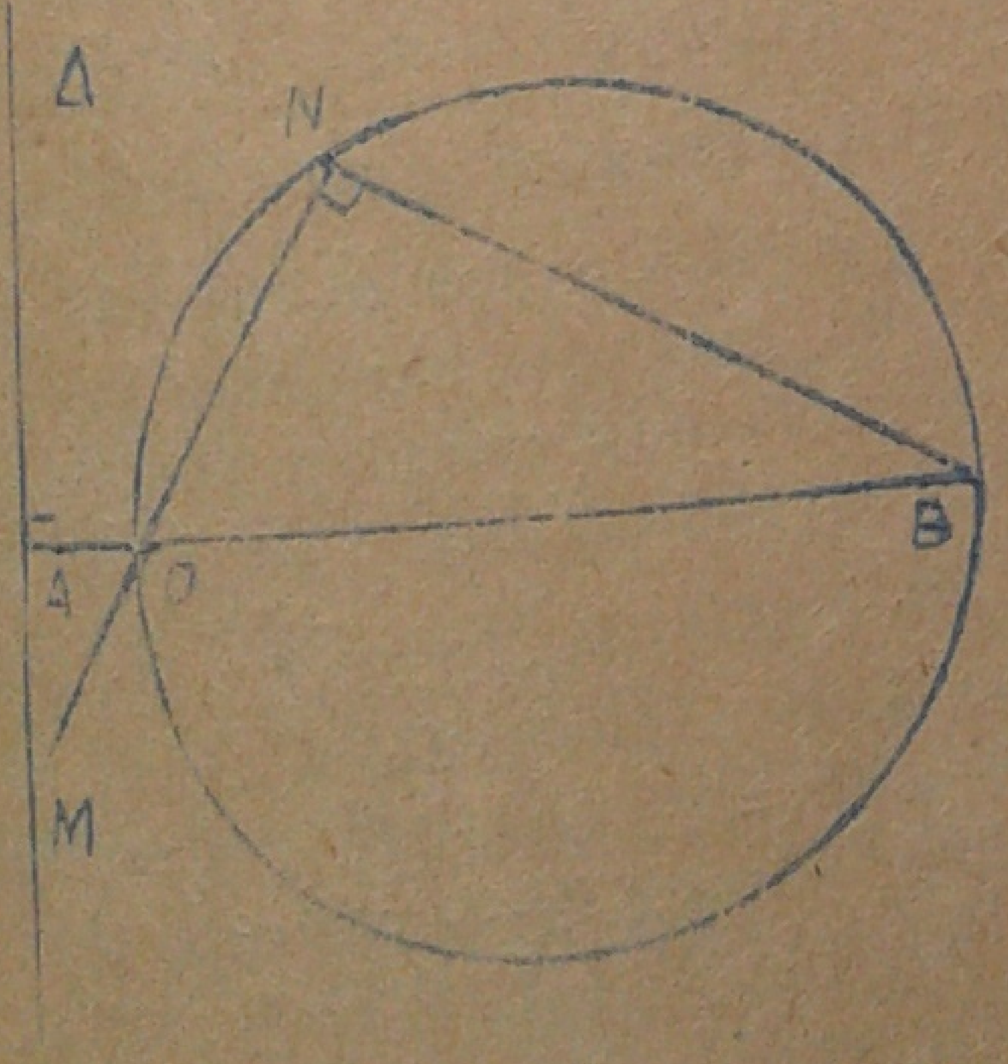
...lý 2. Qua một phép nghịch đảo, một ...thẳng không đi qua tâm biến thành một ...tròn đi qua tâm nghịch đảo.

...g minh.

...âm nghịch đảo O ta hạ OA vuông góc ...ường thẳng $\triangle$ đã cho. Gọi B là ảnh của M ...phép nghịch đảo $I(O\,;\,k)$ và M là một điểm ...của $\triangle$. (hình 1 : $k > 0$; hình 2 : $k < 0$).



Hình 1



Hình 2

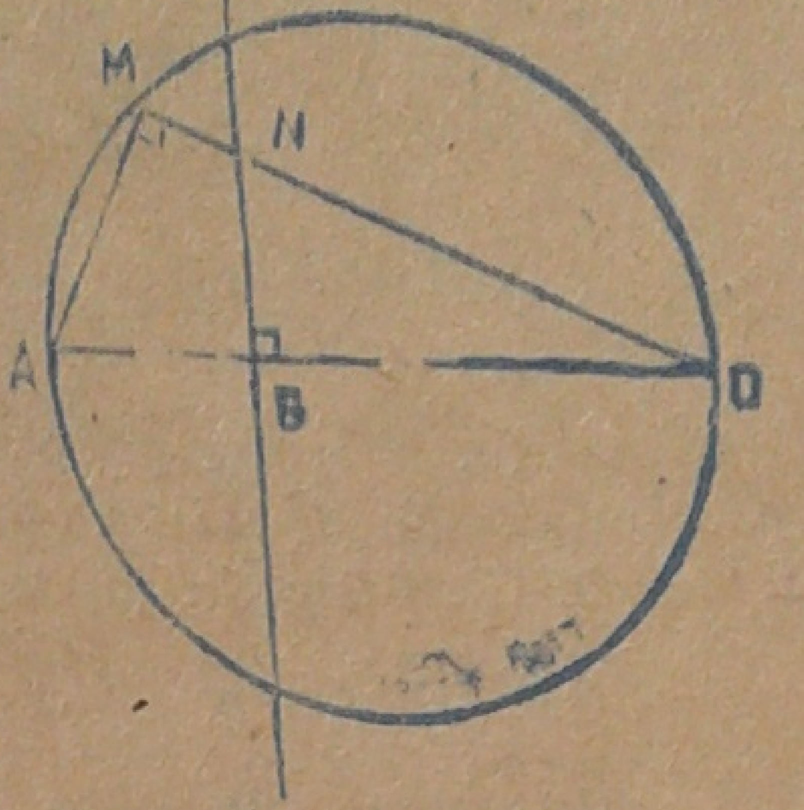
...Muốn cho điểm N của đường thẳng OM là ...của M trong phép nghịch đảo $I(O;\,k)$ điều ...cần và đủ là :

$$\overline{ON}.\overline{OM} = k = \overline{OB}.\overline{OA}$$

tức là bốn điểm N, M, B, A ở trên cùng một đường tròn, tức là $\widehat{ONB} = \widehat{OMA} = 1$ vuông. Vậy quỹ tích của N là đường tròn đường kính OB.

3. Ảnh của một đường tròn.

Định lý 3. Qua một phép nghịch đảo, một đường tròn đi qua tâm biến thành một đường thẳng vuông góc với đường kính xuất phát từ tâm nghịch đảo.



Hình 3

Chứng minh.

Giả sử O là tâm nghịch đảo, A là điểm của đường tròn đã cho đối xứng với O qua tâm của đường tròn, B là ảnh của A trong phép nghịch đảo $I(O\,;\,k)$.

Gọi M là một điểm bất kỳ của đường tròn. Muốn cho điểm N của đường thẳng OM là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O\,;\,k)$ điều kiện cần và đủ là :

$$\overline{ON}.\overline{AM} = k = \overline{OB}.\overline{OA}$$

tức là bốn điểm N, M, A, B ở trên cùng một đường tròn, tức là : $\widehat{OBN} = \widehat{OMA} = 1$ vuông. Vậy quỹ tích của N là đường thẳng đi qua B và vuông góc với đường kính OBA.

Định lý 4. Qua một phép nghịch đảo, một đường tròn không đi qua tâm biến thành một đường tròn.

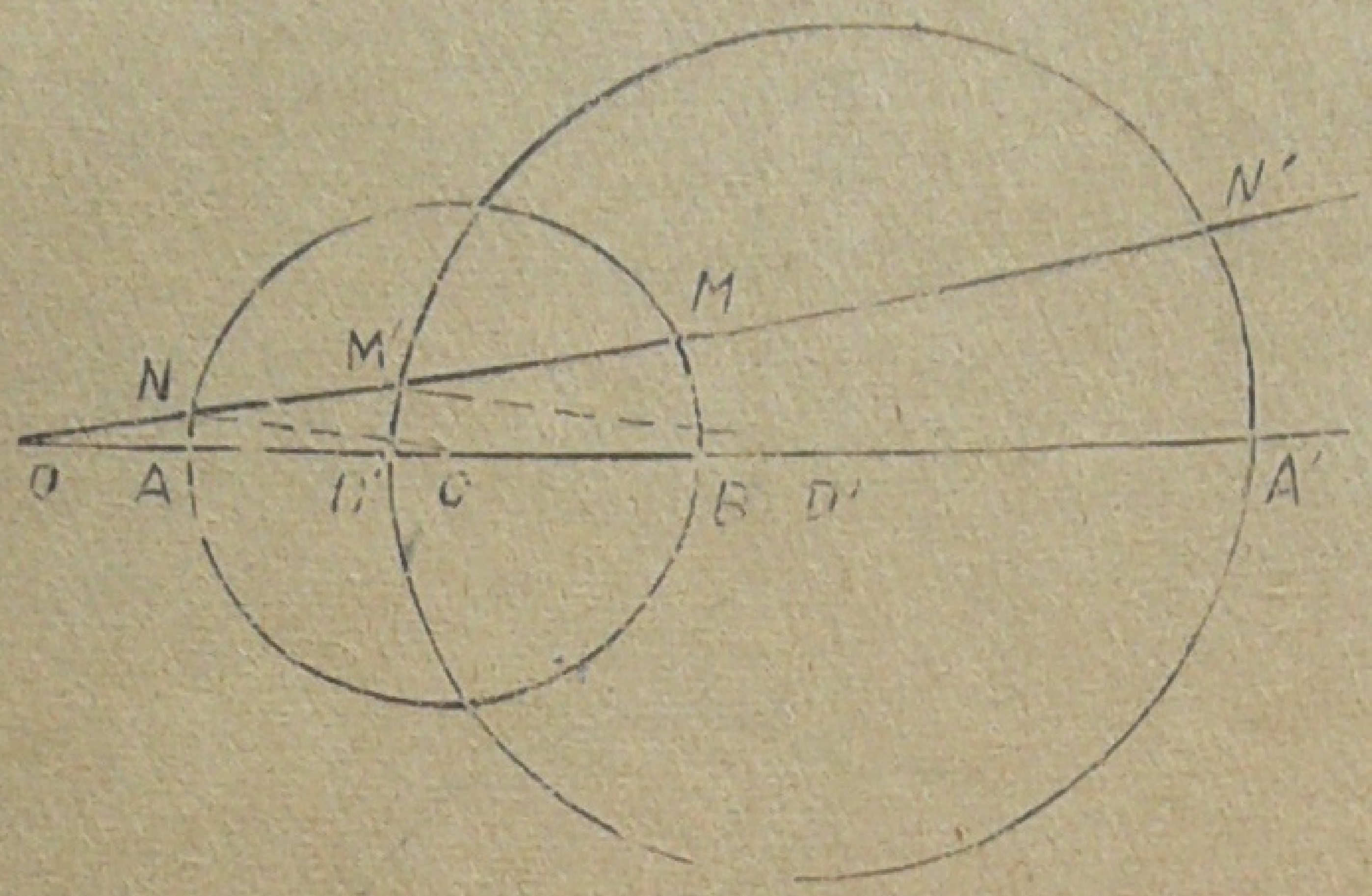
Chứng minh.

Giả sử O là tâm nghịch đảo, M là một điểm bất kỳ của đường tròn (C), $p = \overline{OM}.\overline{ON}$ là phương tích của điểm O đối với đường tròn (C) ; ảnh của đường tròn (C) trong phép nghịch đảo $I(O\,;\,p)$ chính là đường tròn (C).

Nếu M' là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O\,;\,k)$ thì ta có :

$$\overline{OM'}.\overline{OM} = k.$$

Ta suy ra :
$$\overline{OM'}/\overline{ON} = k/p$$



Hình 4

tức là M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, tỉ số k/p. Đảo lại, nếu M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, tỉ số k/p thì ta có:

$$\overline{OM'}/\overline{ON} = k/p,$$

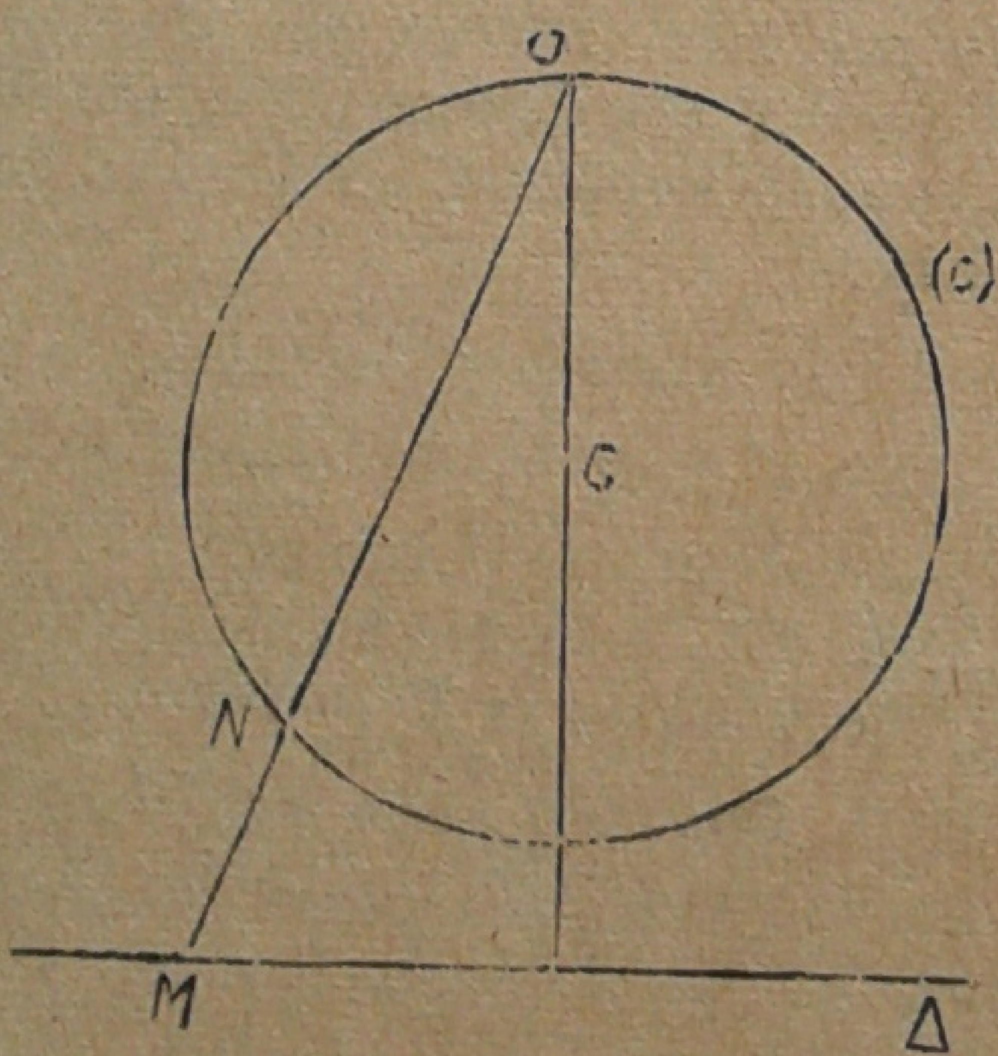
do đó

$$\overline{OM'}.\overline{OM}/\overline{ON}.\overline{OM} = k/p,$$

vậy

$$\overline{OM'}.\overline{OM} = k,$$

tức là M' là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O; k)$. Vậy ảnh của đường tròn (C) trong phép nghịch đảo $I(O; k)$ là ảnh của đường tròn (C) trong phép vị tự tâm O, tỉ số k/p, tức là một đường tròn.



Hình 5

Ta hãy trở lại bài toán nêu từ đầu.

1) Ta có: $\overline{OM}.\overline{ON} = 1$ và O, M, N thẳng hàng. Vậy N là ảnh của M trong phép nghịch đảo $I(O; 1)$. Theo định lý 2 quỹ tích của N là đường tròn (C) đi qua tâm nghịch đảo O.

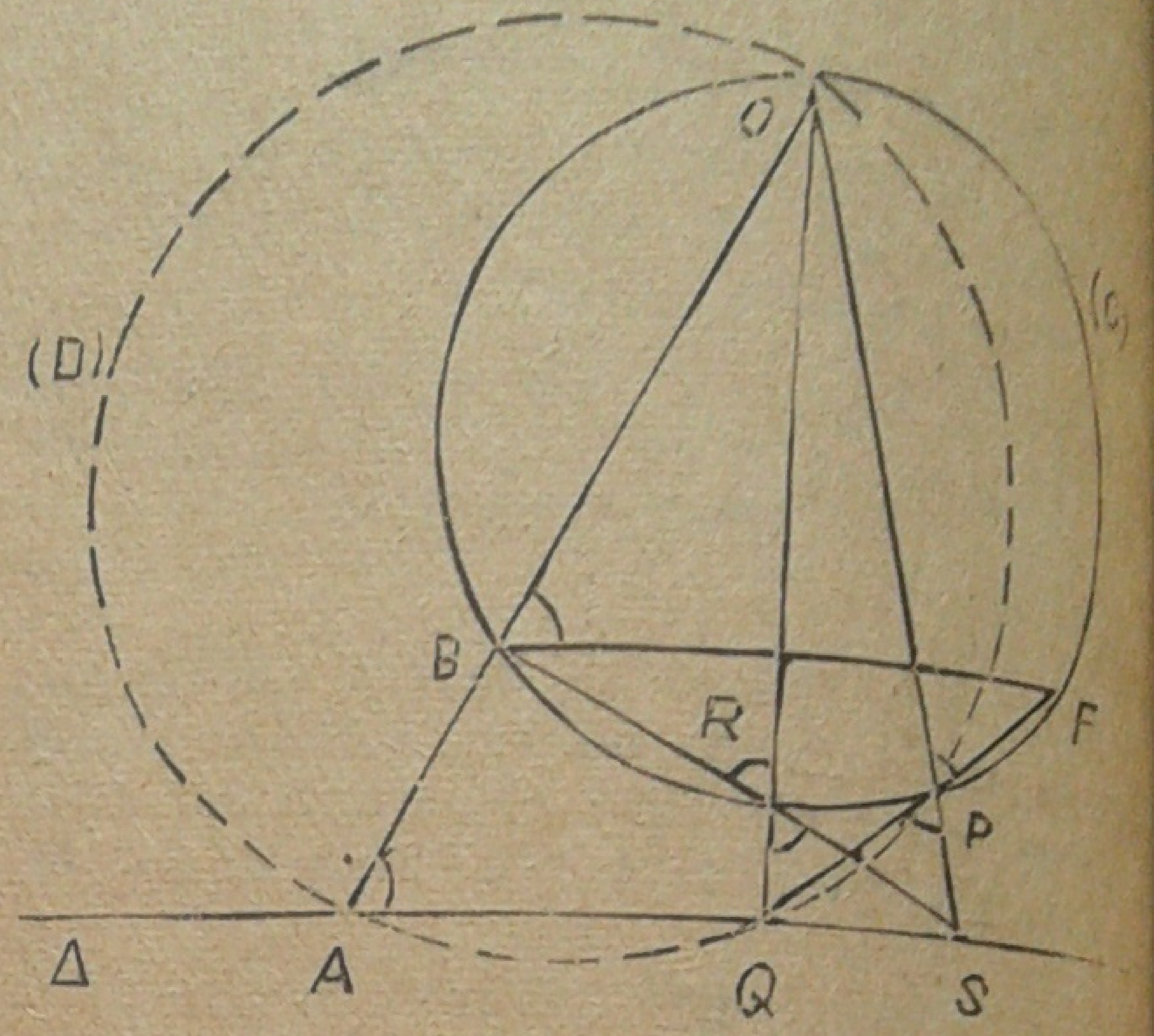
2) Gọi B, R là giao điểm của đường thẳng OA, OQ với đường tròn (C), S là giao điểm của đường thẳng OP với đường thẳng $\triangle$, F là giao điểm của đường thẳng PQ với đường tròn (C) (hình 6).

Ta hãy xét phép nghịch đảo $I(O; 1)$ biến đường thẳng $\triangle$ thành đường tròn (C):

B là ảnh của A,

R là ảnh của Q,

P là ảnh của S.



Hình 6

Trong phép nghịch đảo đó, ảnh của đường tròn (D) đi qua tâm nghịch đảo O là đường thẳng BRS.

Vì $\overline{OB}.\overline{OA} = \overline{OR}.\overline{OQ} = \overline{OP}.\overline{OS} = 1$ nên tứ giác $RQSP$ nội tiếp, từ đó ta suy ra $\widehat{P} = \widehat{R}$ vì vậy $\overset{\frown}{OF} = \overset{\frown}{OB}$. Ta thấy F là một điểm cố định, vì B là một điểm cố định. Muốn xác định điểm F ta chỉ việc lấy giao điểm khác B của đường tròn (C) với đường tròn tâm O bán kính OB.

Ta cũng thấy rằng $BF // \triangle$ vì $\widehat{B} = \widehat{A}$ do:

$\widehat{B} = \widehat{P}$ góc nội tiếp trong đường tròn (C),

$\widehat{P} = \widehat{R}$ trong tứ giác nội tiếp $RQSP$,

$\widehat{R} = \widehat{A}$ trong tứ giác nội tiếp $BAQR$.

Các bạn học sinh lớp 8 có thể vận dụng phép nghịch đảo để giải các bài toán sau đây (các bài toán này các bạn cũng có thể chỉ dùng các kiến thức được học ở lớp 8 để giải).

Bài 1. Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng. Qua A, B và một điểm E biến thiên của đường trung trực $\triangle$ của AB ta dựng một đường tròn. Đường thẳng CE cắt đường tròn đó ở M. Tìm quỹ tích của M khi E chạy trên $\triangle$.

Bài 2. Cho ba điểm cố định A, B, C trên một đường thẳng. Một đường tròn biến thiên tiếp xúc với đường thẳng ABC tại điểm C. Tiếp tuyến thứ hai xuất phát từ A chạm đường tròn ở điểm T. Đường thẳng BT cắt đường tròn đó ở M. Tìm quỹ tích của M.

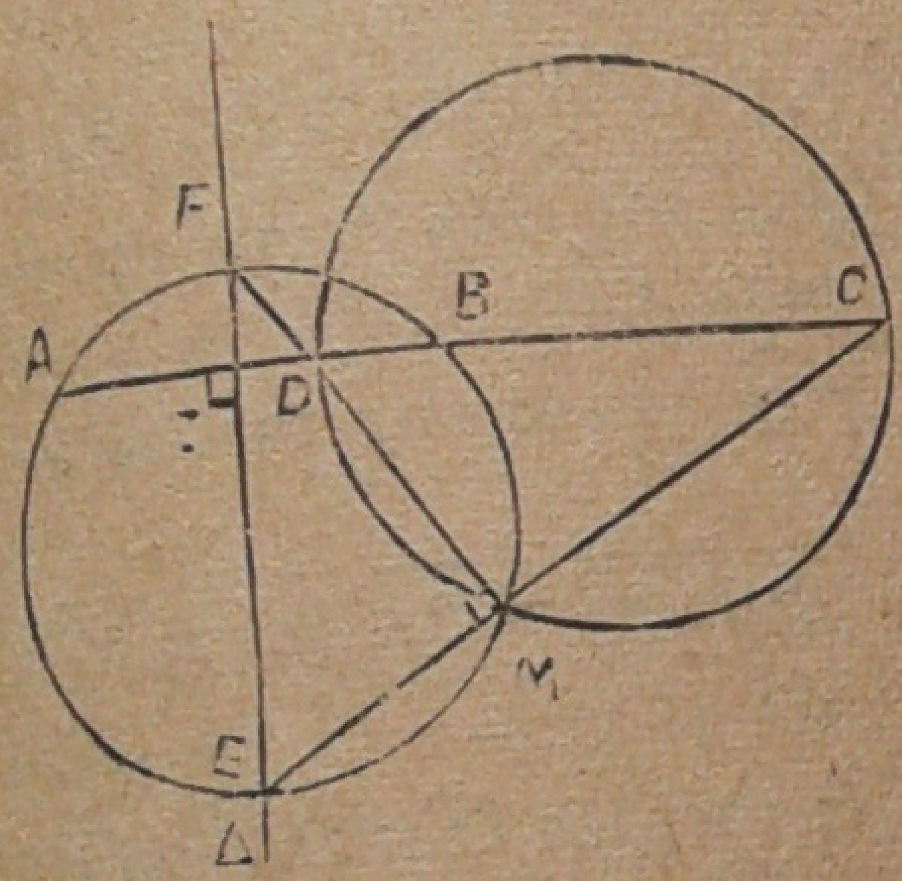
3. Cho một đường tròn (O) cố định, tâm ... đường kính AB biến thiên của đường ... P là một điểm cố định của mặt phẳng. ... B' là giao điểm của các đường thẳng ... với đường tròn (O). Chứng minh rằng: ... đường thẳng $A'B'$ đi qua một điểm cố định ... đường tròn $(PA'B')$ cũng đi qua một điểm ... thứ hai.

SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐÃ NÊU

Bài 1.

Ta thấy điều kiện cần và đủ để 4 điểm ... M, E cùng nằm trên một đường tròn là:

$$\overline{CM}.\overline{CE} = \overline{CA}.\overline{CB}$$



Hình 7

... quỹ tích của M là ảnh của $\triangle$ trong phép ... nghịch đảo $I(C, k)$ với $k = \overline{CA}.\overline{CB}$. Đó là đường tròn đường kính CD, sao cho $CD.CI = k$ (hình 7). ... Có thể chứng minh trực tiếp như sau. Nối ... đường này cắt AB ở D.

Ta có: $\widehat{FME} = 1$ vuông, tức là $\widehat{DMC} = 1$ vuông

$\overline{CD}.\overline{CI} = \overline{CM}.\overline{CE}$ (vì tứ giác $IDME$ nội tiếp).

$\overline{CB}.\overline{CA} = \overline{CM}.\overline{CE}$ (vì tứ giác $ABME$ nội tiếp).

Ta suy ra: $\overline{CD}.\overline{CI} = \overline{CB}.\overline{CA}$, vậy D là một điểm cố định (có thể chứng minh rằng D là liên hiệp điều hòa của C đối với A, B).

Như vậy, M nằm trên đường tròn đường kính ... xác định bởi $\overline{CD}.\overline{CI} = \overline{CB}.\overline{CA}$.

Đảo lại, trên đường tròn đó, lấy một điểm ... bất kỳ. Nối CM, đường này cắt $\triangle$ ở E.

Ta có:

$\overline{CD}.\overline{CI} = \overline{CM}.\overline{CE}$ (vì tứ giác $IDME$ nội tiếp)

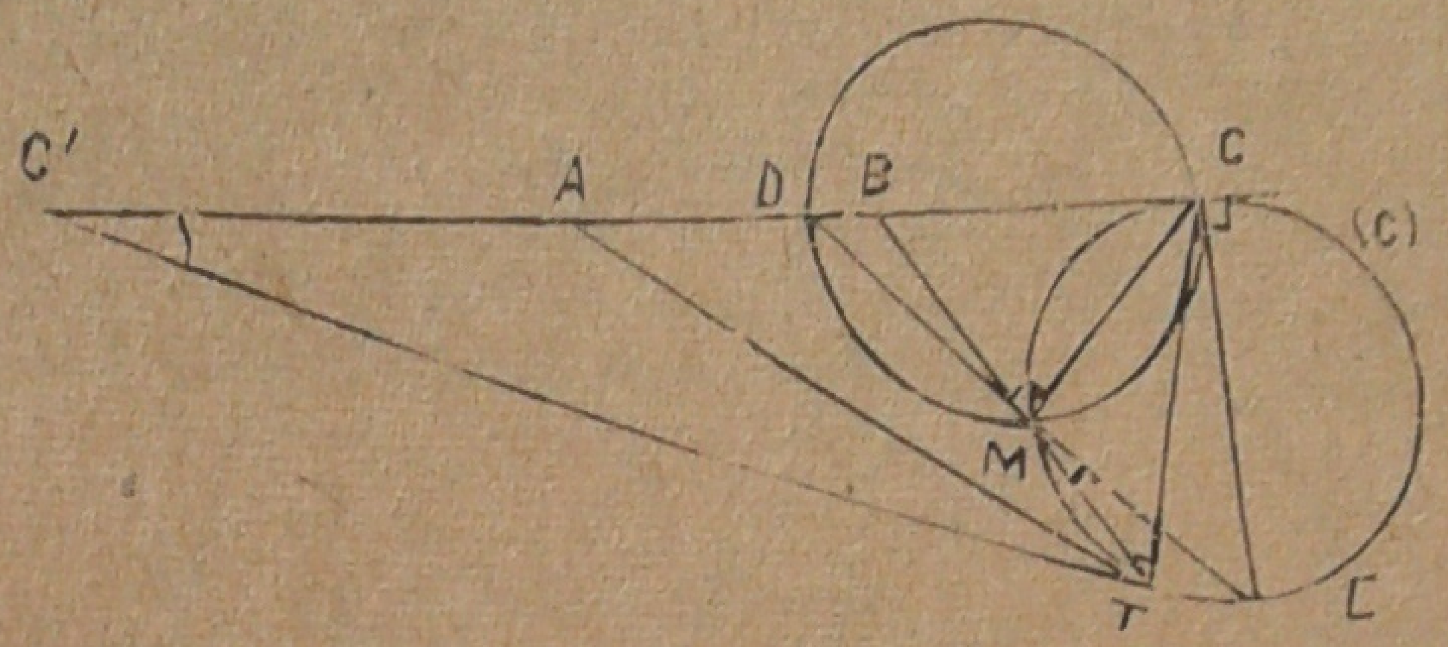
Vậy: $\overline{CB}.\overline{CA} = \overline{CM}.\overline{CE}$, điều này chứng tỏ A, B, ... E cùng nằm trên một đường tròn.

Ta suy ra quỹ tích của M là đường tròn đường kính CD, sao cho $\overline{CD}.\overline{CI} = \overline{CB}.\overline{CA}$ (C, D là vị trí giới hạn của M khi E xa ra ∞ hay dần tới I trên $\triangle$).

Bài 2.

a) Ta thấy điều kiện cần và đủ để AT tiếp xúc với đường tròn (C) là:

$$\overline{BM}.\overline{BT} = \overline{BC}^2, \quad \overline{AT} = \overline{AC}$$



Hình 8

Ta thấy quỹ tích của T là đường tròn (A) tâm A, bán kính AC và quỹ tích của M là ảnh của đường tròn (A) trong phép nghịch đảo $I(B.\overline{BC}^2)$. Đó là đường tròn đường kính CD. D là một điểm trên đường thẳng ABC được xác định bởi: $\overline{BD}.\overline{BC'} = \overline{BC}^2$. ($C'$ là điểm đối xứng của C đối với điểm A).

b) Có thể chứng minh trực tiếp như sau. Nối ME, đường này cắt AB ở D.

Ta có:

$\widehat{CME} = 1$ vuông, tức là $CMD = 1$ vuông.

$\widehat{C'} = \widehat{C}$ (góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc: $CE \perp C'C$; $C'T \perp CE$ vì tam giác $C'TC$ có trung tuyến AT bằng nửa cạnh $C'C$ là tam giác vuông).

$\widehat{C} = \widehat{M}$ (góc nội tiếp trong đường tròn (C) cùng chắn một cung TE).

Ta suy ra: $\widehat{C'} = \widehat{M}$, tức là tứ giác $C'TMD$ nội tiếp.

$$\overline{BD}.\overline{BC'} = \overline{BM}.\overline{BT}$$

Vậy:

$$\overline{BM}.\overline{BT} = \overline{BC}^2$$

Mặt khác,

Do đó: $\overline{BD}.\overline{BC'} = \overline{BC}^2$, vậy D là một điểm cố định. Như vậy, M nằm trên đường tròn đường kính CD mà D được xác định bởi

$$\overline{BD}.\overline{BC'} = \overline{BC}^2.$$

Đảo lại, trên đường tròn đó lấy một điểm M bất kỳ, nối BM, rồi trên BM lấy điểm T sao cho:

$$\overline{BM}.\overline{BT} = \overline{BC}^2.$$

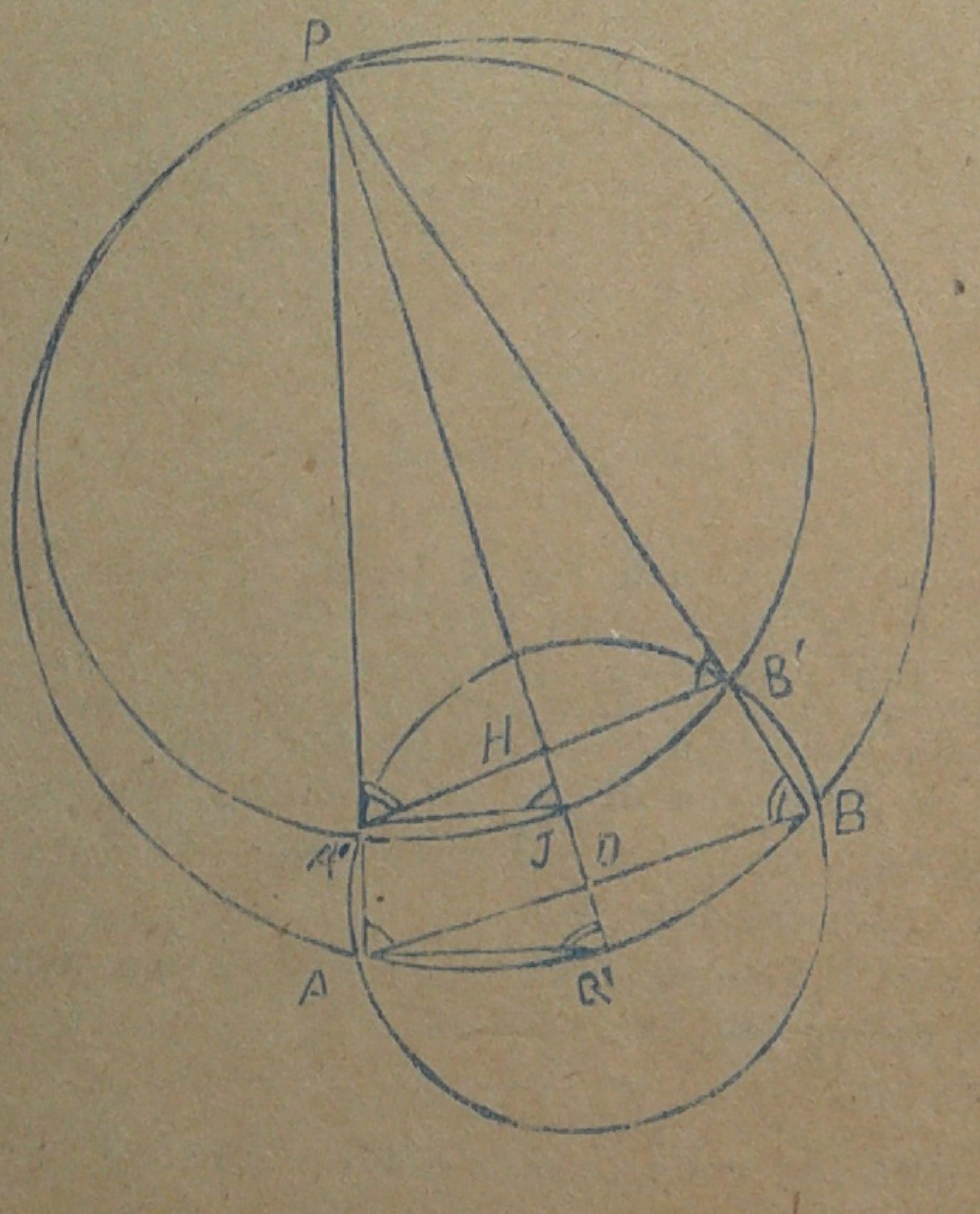
Đi ngược lại phần chứng minh thuận, dễ dàng chứng minh được rằng C, M, T nằm trên đường tròn (C) tiếp xúc với ABC ở C và AT tiếp xúc với (C).

Ta suy ra quỹ tích của M là đường tròn đường kính CD xác định như trên (C, D là vị trí giới hạn của M).

Bài 3.

a) Ta xét đường tròn đi qua P và A, B, và gọi Q là giao điểm của PO với đường tròn.

Ta có : $\overline{OP}.\overline{OQ} = \overline{OA}.\overline{OB}$



Hình 9

tức là : $\overline{OP}.\overline{OQ} = -R^2$ (R là bán kính của đườ… tròn O đã cho) :

Như vậy đường tròn PAB đi qua một đi… cố định thứ hai là Q (Q nằm trên OP và đư… xác định bởi $\overline{OP}.\overline{OQ} = -R^2$).

Ta xét phép nghịch đảo $I(P\,;\,k)$, k là phươ… tích của điểm P đối với đường tròn (O) :

$$\overline{PA}.\overline{PA'} = \overline{PB}.\overline{PB'} = k$$

Trong phép nghịch đảo này, ảnh của đườ… tròn (PAB) là đường thẳng $A'B'$ và ảnh củ… đường tròn $(PA'B')$ là đường thẳng AB. Vậy t… suy ra :

– $A'B'$ đi qua điểm cố định H là ảnh của … trong phép nghịch đảo $I(P\,;\,k)$.

– Đường tròn $(PA'B')$ đi qua điểm cố địn… J là ảnh của O trong phép nghịch đảo $I(P\,;\,k$…

b) Có thể chứng minh trực tiếp như sau.

Ta có :

$\widehat{A'} = \widehat{B}$ (vì tứ giác $A'B'BA$ nội tiếp),

$\widehat{B} = \widehat{Q}$ (góc nội tiếp trong đường tròn PAB cùng chắn cung PA).

Vậy, $\widehat{A'} = \widehat{Q}$, từ đó suy ra tứ giác $A'HQA$ nội tiếp và :

$$\overline{PH}.\overline{PQ} = \overline{PA'}.\overline{PA} = k.$$

Ta cũng có :

$\widehat{B'} = \widehat{A}$ (vì tứ giác $A'B'BA$ nội tiếp),

$\widehat{B'} = \widehat{J}$ (góc nội tiếp trong đường tròn $PA'B'$ cùng chắn cung PA').

Vậy : $\widehat{J} = \widehat{A}$, từ đó suy ra tứ giác $A'JOA$ nội tiếp và :

$$\overline{PJ}.\overline{PO} = \overline{PA'}.\overline{PA} = k.$$

ĐỊNH LÝ HELLY

BÙI VĂN THANH

1. Trong số các đề thi vô địch toán toàn Ba lan năm 1959 – 1960 có bài toán sau đây :

Bài toán 1. Cho n đoạn thẳng trong mặt phẳng. Giả sử rằng trong số này bất kỳ ba đoạn nào cũng cắt nhau tại một điểm chung. Chứng minh rằng cả n đoạn đã cho cũng cắt nhau tại một điểm chung.

Để giải bài toán này ta hãy bắt đầu từ nhận xét đơn giản sau đây :

Mệnh đề 1. Trên một đường thẳng cố định lấy n đoạn thẳng $I_1, I_2, \ldots I_n$ sao cho bất kỳ hai đoạn cũng có một điểm chung. Khi đó tất cả các đoạn thẳng đã cho cũng có ít nhất một điểm chung.

...inh mệnh đề 1 khá đơn giản. Ta hãy ...g thẳng cho trước như là trục số. ...u mút của các đoạn I_i được biểu diễn ...số (a_i, b_i), $i=1, \ldots, n$, $a_i \leqslant b_i$, $i=1,\ldots, n$. ...hai đoạn I_i và I_j đều có một điểm ...n $a_i \leqslant b_j$ với mọi $i, j=1,\ldots, n$. Ký hiệu ...ớn nhất trong các số $a_1, a_2,\ldots, a_n$ và b ...hỏ nhất trong các số $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ...a_i, $b=\min b_i$) thì $a \leqslant b$. (Có thể $a<b$). ...a nằm giữa a và b là điểm chung của ...I_i, $i=1,\ldots, n$. (nếu $a = b$ thì điểm đó ...chung) vì $a_i \leqslant a \leqslant b_i$, $a_i \leqslant b \leqslant b_i$, $i=1, 2, \ldots, n$.

...lại bài toán 1, ta giả thiết rằng trong số ...thẳng đã cho có hai đoạn không nằm ...ột đường thẳng. Khi đó chúng cắt nhau ...điểm A duy nhất. Theo giả thiết thì ...đoạn thẳng thứ ba nào cũng đều cắt ...trên tại A. Vậy A là điểm chung duy ...a n đoạn thẳng đã cho. Ngoài ra nếu ...có hai đoạn cắt nhau tại một điểm duy ...thì tất cả n đoạn đã cho sẽ nằm trên một ...thẳng. Do mệnh đề 1 ta lại thấy rằng ...cũng cắt nhau tại một điểm chung (có ...hông duy nhất).

...ử dụng mệnh đề 1 ta cũng giải quyết ...bài toán sau.

...toán 2. Cho n đoạn thẳng $I_1, I_2,\ldots, I_n$ ...song trên mặt phẳng. Giả thiết rằng qua ...đoạn thẳng bất kỳ trong số này đều có ít ...một đường thẳng cắt vuông góc hai đoạn ...chứng tỏ rằng có ít nhất một đường thẳng ...vuông góc mọi đoạn $I_1, I_2,\ldots, I_n$.

...chứng minh ta hãy kẻ một đường thẳng l ...song với các đoạn thẳng đã cho. Gọi I_i' là ...chiếu vuông góc của I_i trên l Từ giả thiết ...suy ra bất kỳ hai đoạn I_i' và I_j' nào cũng ...có điểm chung. Vì vậy theo mệnh đề 1 các ...$I_1', I_2',\ldots, I_n'$ có ít nhất một điểm chung. ...này chứng tỏ có một đường thẳng cắt ...góc tất cả các đoạn $I_1,\ldots, I_n$.

...ài toán 2'. Cho n đoạn thẳng $I_1, I_2,\ldots, I_n$ ...song trong mặt phẳng. Giả sử qua hai ...I_i và I_j nào cũng có ít nhất một đường ...cắt cả hai theo một góc α. Chứng minh ...tồn tại một đường thẳng cắt mọi đoạn ...$I_1,\ldots, I_n$ theo góc α.

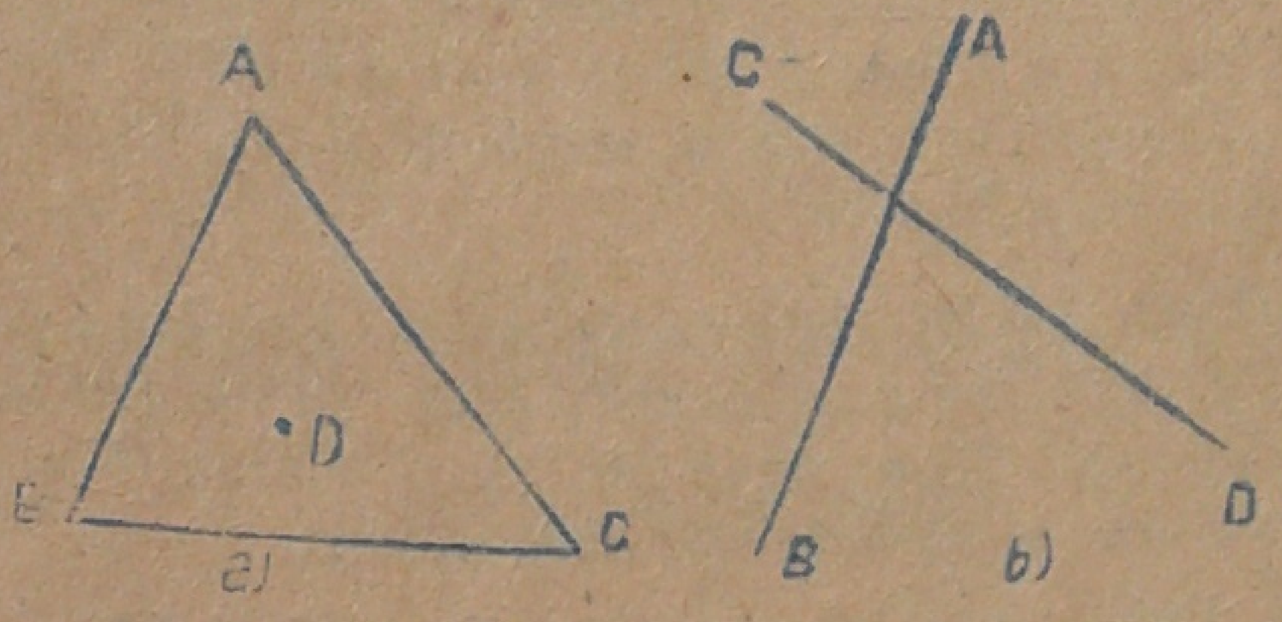
...phép chứng minh hoàn toàn tương tự như ... Chỉ khác ở đây các đoạn I_i' là hình chiếu ...I_i trên l theo hướng hợp với l một góc α.

... Ta hãy mở rộng mệnh đề 1 một chút. Trên ...phẳng, tương ứng với đoạn thẳng trên ...ường thẳng có thể là đoạn thẳng, hình vuông, ...hình tròn. Mệnh đề 2 sau đây là một dạng tương ...của mệnh đề 1.

Mệnh đề 2. Trên mặt phẳng cho n hình tròn Giả thiết trong số này bất kỳ ba hình tròn nào cũng có ít nhất một điểm chung. Khi đó tất cả n hình tròn đã cho có ít nhất một điểm chung.

Một điểm cần lưu ý là trong mệnh đề 2 ta xét hình tròn chứ không phải đường tròn! Mặt khác nếu ta chỉ giả thiết mọi cặp *hai* hình tròn có điểm chung thôi thì mệnh đề không đúng. Các bạn dễ lấy được phản thí dụ.

Trước khi chứng minh mệnh đề 2, ta có nhận xét sau. Cho bốn điểm A, B, C, D trong mặt phẳng. Khi đó chỉ có hai trường hợp xảy ra: hoặc một trong bốn điểm nằm bên trong tam giác do ba điểm kia tạo thành, hoặc có thể chia bốn điểm đã cho thành hai cặp điểm sao cho hai đoạn thẳng nối mỗi cặp cắt nhau (Hình 1). Các bạn hãy tự kiểm chứng điều này.



Bây giờ ta chứng minh Mệnh đề 2 bằng qui nạp. Cụ thể ta sẽ chứng tỏ trong số n hình tròn đã cho, bất kỳ k hình nào cũng đều có điểm chung $(3 \leqslant k \leqslant n)$.

Với $k=3$ điều này có theo giả thiết. Giả sử mệnh đề đã đúng với $k=m-1$. Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng cho $k=m$. Trong số n hình tròn đã cho ta lấy m hình tròn $S_1, S_2,\ldots, S_m$. Từ m hình tròn này ta hãy chọn bốn bộ hình tròn sau: $S_2, S_3,\ldots, S_m$, $S_1, S_3, S_4,\ldots, S_m$, $S_1, S_2, S_4, S_5,\ldots, S_m$ $S_1, S_2, S_3, S_5,\ldots, S_m$.

(Bộ thứ i gồm tất cả các đường tròn S_j, $j=1$, m trừ $j=i$. Mỗi bộ gồm $m-1$ hình tròn). Theo giả thiết qui nạp mỗi bộ này có ít nhất một điểm chung. Ta hãy ký hiệu các điểm chung là A_1, A_2, A_3, A_4. (A_i là điểm chung của S_j, $j=\overline{1,m}$, $j \neq i$, $i=1, 2, 3, 4$). Nếu bốn điểm này khác nhau thì có thể xảy ra hai trường hợp như ở hình 1a và 1b. Ta xét trường hợp 1a: A_1 nằm trong tam giác $A_2 A_3 A_4$. Vì A_2, A_3, A_4 nằm trong S_1 nên cả tam giác $A_2 A_3 A_4$ nằm trong đường tròn S_1. Suy ra A_1 nằm trong S_1. Mặt khác A_1 là điểm chung của $S_2, S_3,\ldots, S_m$. Vậy A_1 là điểm chung của n hình tròn $S_1, S_2,\ldots, S_n$.

Trong trường hợp 1b bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 có thể tách làm hai cặp, chẳng hạn A_1, A_2 và A_3, A_4, trong đó các đoạn thẳng $A_1 A_2$ và $A_3 A_4$ cắt nhau tại điểm I. Theo cách chọn A_1, A_2 nằm trong các hình tròn $S_3, S_4,\ldots, S_m$ nên cả đoạn A_1A_2 nằm trong S_3, S_4,..., S_m. Vậy điểm I là điểm chung của các hình tròn S_3, S_4,..., S_m. Tương tự điểm I là điểm chung của S_1, S_2. Vậy I là điểm chung của m hình tròn S_1, S_2,..., S_m.

Trường hợp trong số bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 có các điểm trùng nhau ta cũng lập luận tương tự. Vậy điều khẳng định đúng cho $k=m$ (d.p.c.m)

Nếu bạn nào chú ý một chút thì thấy rằng phép chứng minh trên sử dụng rất ít tính chất của hình tròn. Điều duy nhất cần ở đây là nếu có hai điểm A và B thuộc hình tròn S nào đó thì cả đoạn AB cũng thuộc hình tròn S. (Do đó nếu có ba điểm A, B, C thuộc S thì cả tam giác ABC cũng thuộc S). Rất nhiều hình có tính chất này, chẳng hạn hình vuông, tam giác, hình bình hành, đa giác đều hay đoạn thẳng, đường thẳng, nửa mặt phẳng đều có tính chất trên. Ta hãy gọi hình S là một hình *lồi* nếu với hai điểm A,B thuộc S thì cả đoạn AB cũng thuộc S. Theo nhận xét trên, mệnh đề 2 có thể phát biểu cho *n hình lồi*:

Định lý H. *Trên mặt phẳng cho n hình lồi tùy ý. Nếu trong số này ba hình bất kỳ đều có ít nhất một điểm chung thì tất cả n hình lồi cho trước đều có ít nhất một điểm chung.*

4. Bây giờ ta hãy áp dụng định lý H để giải các bài toán sau:

Bài toán 3. Cho n đoạn thẳng I_1, I_2, ... ,I_n song song trên mặt phẳng. Giả sử với bất kỳ ba đoạn nào cũng có ít nhất một đường thẳng cắt chúng. Chứng minh rằng khi đó có ít nhất một đường thẳng cắt tất cả n đoạn đã cho.

Hãy chú ý rằng nếu chỉ đòi hỏi có đường thẳng cắt *hai* đoạn, bất kỳ thì bài toán không đúng nữa. Các bạn hãy cho phản ví dụ!

Để chứng minh ta hãy chọn một hệ tọa độ vuông góc sao cho các đoạn I_1, I_2,..., I_n song song với trục tung. Nếu các đoạn thẳng đã cho cùng nằm trên một đường thẳng thì bài toán là hiển nhiên; do đó ta hãy giả sử chúng nằm trên những đường thẳng song song khác nhau. Mỗi đoạn thẳng cắt các đoạn I_i không song song với trục tung, do đó được xác định bằng hai tham số: hệ số góc a và tọa độ điểm cắt trục tung b. Với mỗi đoạn I_i ta xét tất cả các đường thẳng cắt I_i, mỗi đường thẳng ứng với một cặp (a, b). Nếu biểu diễn các điểm (a, b) trên một hệ tọa độ vuông góc khác ta sẽ được một dải U_i là phần mặt phẳng nằm giữa hai đường thẳng song song. Dải này là một hình lồi. Ứng với mỗi đoạn I_i có một hình lồi U_i, $i=1$, ..., n. Từ giả thiết suy ra ba hình U_i, U_j, U_k bất kỳ đều có điểm chung. Theo định lý H toàn bộ n hình U_i, $i=1$, 2,..., n có ít nhất một điểm chung (a, b) nào đấy. Các số a và b chính là hệ số góc và tọa độ điểm cắt trục tung của đường thẳng cắt mọi đoạn I_i, $i=1$, 2,..., n.

Bài toán 4. Cho n hình tròn trong mặt phẳng. Giả sử trong số đó với ba hình bất kỳ có ít nhất một hình tròn bán kính r cắt tất cả ba hình. Chứng minh rằng có ít nhất một hình tròn bán kính r cắt tất cả n hình tròn đã cho.

Để giải bài toán 4 ta ký hiệu S_i là hình tròn tâm A_i bán kính r_i, $i=1$, 2,..., n. Tâm của những hình tròn bán kính r và cắt hình tròn S_i tạo thành một hình tròn O_i có tâm là A_i và bán kính r_i+r, $i=1$, 2,..., n. Từ giả thiết với ba hình S_i, S_j, S_k có một hình tròn bán kính r cắt cả ba hình đó, suy ra các hình tròn O_i, O_j, O_k có ít nhất một điểm chung. Theo định lý H, n hình tròn O_1, O_2,..., O_n có ít nhất một điểm chung. Điểm chung này là tâm của hình tròn bán kính r cắt S_1, S_2,..., S_n.

Nếu thay giả thiết có hình tròn bán kính r cắt 3 hình tròn tùy ý bằng giả thiết có hình tròn bán kính r nằm trong (hoặc chứa) ba hình tròn tùy ý thì bài toán vẫn đúng tức là có ít nhất một hình tròn bán kính r nằm trong (hoặc chứa) cả n hình tròn cho trước. Các bạn hãy tự giải với các giả thiết mới này.

Bài toán 5. Trong mặt phẳng cho n điểm A_1, A_2,..., A_n trong đó khoảng cách giữa các điểm nhỏ hơn hoặc bằng 2: Chứng minh rằng khi đó các điểm A_1, A_2,..., A_n nằm trong một hình tròn bán kính $2/\sqrt{3}$.

Trường hợp $n=1$, 2 là hiển nhiên. Ta chứng minh cho $n=3$. Giả sử khoảng cách giữa ba điểm A_1, A_2, A_3 nhỏ hơn hoặc bằng 2. Ta chọn hai điểm có khoảng cách xa nhất, giả sử đó là A_1, A_2. Lấy A_1 và A_2 làm tâm vẽ các đường tròn bán kính bằng độ dài A_1A_2. Hai đường tròn này cắt nhau tại B và B'. Giả sử A_3 nằm ở phía trên A_1A_2. Khi đó theo giả thiết A_3 nằm trong hình giới hạn bởi A_1A_2 và hai cung A_1B và A_2B. Nhưng hình đó lại nằm trong hình tròn ngoại tiếp tam giác A_1A_2B có bán kính bằng $d/\sqrt{3}$ (d là độ dài A_1A_2). Nhưng $d\leqslant 2$ nên A_1, A_2, A_3 nằm trong hình tròn có bán kính $\leqslant 2/\sqrt{3}$.

Bây giờ ta xét n điểm A_1, A_2,..., A_n thỏa mãn giả thiết bài toán. Ta vẽ hình tròn S_i tâm A_i bán kính $2/\sqrt{3}$, $i=1$, 2,..., n. Theo trường hợp $n=3$ vừa chứng minh ba điểm bất kỳ A_i, A_j, A_k nằm trong hình tròn O_{ijk} bán kính $2/\sqrt{3}$. Vì vậy ba hình tròn tùy ý S_i, S_j, S_k có ít nhất một điểm chung (chẳng hạn đó là tâm hình tròn O_{ijk}). Theo định lý H các hình tròn S_1, S_2,..., S_n có ít nhất một điểm chung. Điểm đó chính là tâm hình tròn bán kính $2/\sqrt{3}$ chứa mọi điểm đã cho A_1, A_2,..., A_n.

...ời cùng ta hãy giải một bài toán thi vô ... Hung-ga-ri.

...ài toán 6. Cho bốn nửa mặt phẳng và giả ...ằng chúng phủ hết cả mặt phẳng. Hãy chứng ...h rằng có thể chọn trong số đó ba nửa mặt ...ng sao cho chúng vẫn phủ hết mặt phẳng.

...a hãy ký hiệu bốn nửa mặt phẳng đã cho P_1, P_2, P_3, P_4 đồng thời ký hiệu P_i' là nửa ...t phẳng bù của P_i kể cả đường thẳng biên ...1, 2, 3, 4. Theo giả thiết thì mỗi điểm A trên ...t phẳng nằm trong một số các mặt phẳng P_i, ...1, 2, 3, 4. Vì vậy P_1', P_2', P_3', P_4' không có ...ểm chung. Theo định lý H thì tồn tại ba trong các nửa mặt phẳng P_1', P_2', P_3', P_4' sao cho chúng cũng không có điểm chung. Giả sử đó là P_1', P_3', và P_3. Vậy P_1, P_2 và P_3 là ba nửa mặt phẳng vẫn còn phủ cả mặt phẳng.

5. Các bạn thân mến! Chúng ta vừa xét một số bài toán thoạt đầu thấy khó, song giải được dễ dàng nhờ định lý H. Áp dụng định lý đó các bạn có thể giải được nhiều bài toán thú vị khác. Để kết thúc xin có nhận xét thêm là định lý H là trường hợp đặc biệt của định lý Helly do nhà Toán học Áo E. Helly chứng minh năm 1913. Điều thú vị là *giả thiết chỉ đòi hỏi các hình lồi* nên ta có thể tự phát biểu các bài toán cho những hình lồi trong không gian. Nào, xin mời các bạn thử làm việc đó!

...oán học và đời sống

...Ề MỘT MÔ HÌNH TOÁN HỌC CỦA QUÁ TRÌNH TỰ ĐÀO TẠO

TRẦN ĐỨC CHÍNH

I – MỞ ĐẦU

Về phương pháp thiết lập một mô hình toán học dự báo hiệu quả quá trình tự đào tạo đã được nhiều tác giả đề cập tới [1, 2, 3]. Trong bài này, chúng tôi xin mở rộng và phát triển kết quả của [1].

Trong [1] phương trình tự học biểu diễn động thái của quá trình mà người học sinh có được thói quen tiếp thu toàn bộ những tác động nhất định của môi trường ngoài. Phương trình này có dạng

$$u_{n+1} = a + mu_n \tag{1}$$

trong đó a và m là các hằng số $\geqslant 0$, ($m = 1 - a - b$).

Tác giả thông qua trạng thái cân bằng kiến thức $\hat{u}$ mà đi đến phương trình mới:

$$\overline{u}_{n+1} = (1 - a - b)\overline{u}_n \tag{2}$$

Phương trình này có nghiệm:

$$\overline{u}_{n+1} = (1 - a - b)^{n+1}\overline{u}_0. \tag{3}$$

trong đó $\overline{u}_0$ là khả năng tiếp thu lúc ban đầu

Tiếp đó, tác giả đã xét các trường hợp cơ bản sau:

1. Nếu $0 < 1 - a - b < 1$ tức là nếu $0 < a + b < 1$) thì $\overline{u}_{n+1} \to 0$ hay $u_{n+1} \to a/(a + b)$.
2. Nếu $a \neq 0$, $b = 0$ thì $u_{n+1} \to 1$.
3. Nếu $a = 0$, $b \neq 0$ thì $u_{n+1} \to 0$.
4. Nếu $a = b \neq 0$ thì $u_{n+1} \to 1/2$.

Ở đây chúng tôi xin mở rộng các kết quả trên bằng cách xét bổ sung một số trường hợp quan trọng khác và tổng quát hóa kết quả của [1].

II – MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP QUAN TRỌNG KHÁC

Ta nhận xét là phương trình (1) là tuyến tính. Có 2 trường hợp nữa cần xét mà tác giả của [1] chưa đề cập tới: Đó là các trường hợp:

$$a + b = 0 \text{ và } a + b = 1.$$

Trường hợp $a + b = 0$ tức $m = 1$ và $u_{n+1} = a + u_n$. Điều này không thể xảy ra vì khi $a + b = 0$ ta có ngay $a = b = 0$ (do $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$) và trạng thái cân bằng $\hat{u}$ là không xác định (vì $\hat{u} = a/(a + b)$).

Trường hợp $a + b = 1$ tức $m = 0$ và $u_{n+1} = a$. Dễ thấy rằng khi $a + b = 1$ ta có trạng thái cân bằng kiến thức $\hat{u}$, bởi vì lúc đó $u_{n+1} \to \hat{u} = a/(a + b) = a/1 = a$, nghĩa là khả năng tiếp thu kiến thức của người học sinh lúc đó ở trạng thái không đổi (trong suốt cả quá trình học tập). Ta nhận xét thêm rằng khi $m = 0$ (tức $a + b = 1$) thì đường thẳng $u_{n+1} = a + m.u_n = a + 0.u_n = a$

có vị trí nằm ngang tức là song song với trục hoành và cách trục hoành một khoảng bằng a.

Ta nhận thấy hàm tuyến tính đạt cực trị ở hai đầu, nếu nó bị giới nội trong một khoảng xác định cho trước. Ở đây, khoảng xác định của hàm u_{n+1} là $[0,1]$ còn của biến u_n cũng là $[0,1]$.

Vậy khi $m = 0$ (tức là sự tiếp thu ở trạng thái cân bằng):

– Nếu $a = 0$ thì $b = 1$ và $u_{n+1} = 0$ (min).

– Nếu $a = 1$ thì $b = 0$ và $u_{n+1} = 1$ (max)

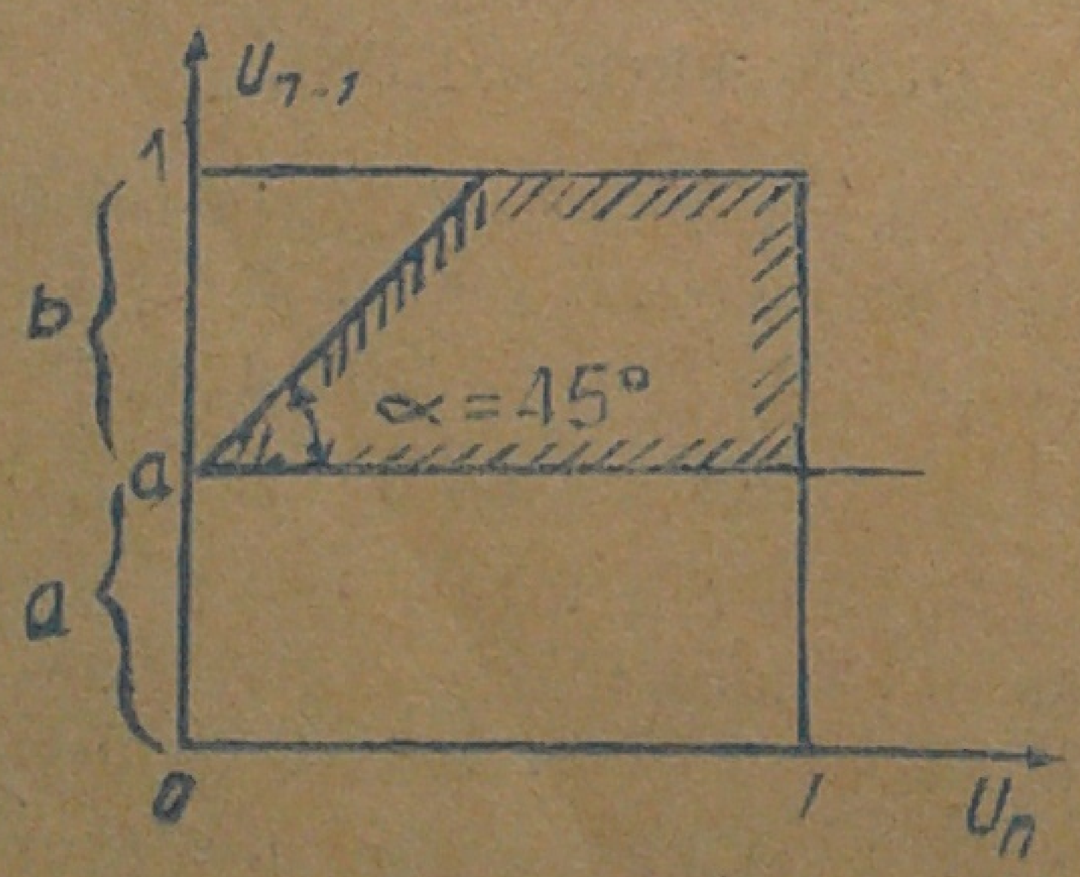
– Nếu $a = b$ thì do $a + b = 1$ nên $a = b = 1/2$ và $u_{n+1} = a = 1/2$. Nghĩa là, ta lại trở về các kết quả của [1].

Ta hãy chứng minh rằng điều kiện $m \geqslant 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ là điều kiện cần thiết để suy ra $0 \leqslant a + b \leqslant 1$ (xem [1]). Thực vậy, từ điều kiện $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ ta có $a + b \geqslant 0$ hay $a + b \geqslant 1 - 1$ hay $1 \geqslant 1 - (a + b)$ tức $1 \geqslant m$ hay $m \leqslant 1$. Mặt khác, vì $m \geqslant 0$ (theo [1] hay $1 - (a + b) \geqslant 0$ hay $a + b \leqslant 1$. Vậy điều kiện $0 \leqslant m \leqslant 1$ tương đương với $0 \leqslant a + b \leqslant 1$. Như vậy điều kiện $0 \leqslant a + b \leqslant 1$ của [1] có thể thay thế bằng điều kiện $0 \leqslant m \leqslant 1$ đầy đủ và chính xác hơn

Vì hệ số góc m của đường thẳng $u_{n+1} = a + m.u_n$ nằm trong khoảng $[0,1]$ nên suy ra góc nghiêng của đường thẳng với trục hoành phải thỏa mãn điều kiện:

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 45^\circ$$

Nghĩa là, xét trên quan điểm qui hoạch tuyến tính thì miền xác định của lời giải phương trình tự học là miền bị giới hạn trong phần vạch vạch (xem hình vẽ): Hai cạnh trên và dưới



tương ứng với hai trường hợp $a = 1$, $b = 0$ và $a = 0$, $b = 1$; Cạnh nghiêng của tứ giác ứng với trường hợp $m = 1$ ($\mathrm{tg}\alpha = 1$) tức $a + b = 0$; còn cạnh bên đứng ứng với trường hợp $u_{n+1} = u_n = 1$, nghĩa là lúc đó u_{n+1} không phụ thuộc vào m tức là vào a và b.

Từ các nhận xét trên, ta có kết luận là đường thẳng $u_{n+1} = a + m.u_n$ luôn đi qua điểm (0, a) và quay xung quanh điểm này trong phạm vi góc α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 45^\circ$) tạo thành trạng thái động («động thái») biểu diễn quá trình động người học sinh có được thói quen tiếp thu toàn bộ những tác động của môi trường ngoài. Đó là phương trình duy nhất biểu diễn được quá trình tự đào tạo hay là mô hình dự báo đúng nhất hiệu quả của quá trình tự đào tạo.

Chúng ta hãy chứng minh rằng: giữa u_{n+1} và u_n không thể có quan hệ hàm mũ.

Thực vậy: giả sử rằng $u_{n+1} = a + m u_n^n$ (n số tự nhiên). Vì cơ số $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ nên khi n tăng ta sẽ có: $m.u_n^n \to 0$, hay nói cách khác khi n tăng, ta nhận thấy: với $a \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ thì u_{n+1} cứ giảm dần về a, nghĩa là sự tiếp thu kiến thức cứ giảm dần, hay nói cách khác, người học sinh luôn luôn chịu các tác động tiêu cực. Điều đó là không thực tế.

Cuối cùng chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng quá trình tự học của người học sinh là quá trình tự điều khiển và có thể điều khiển được [2]. Bằng cách cho hệ số góc m biến thiên ($0 \leqslant m \leqslant 1$) tức là cho đường thẳng $u_{n+1} = a + m.u_n$ quay quanh điểm $(0, a)$ trong phạm vi góc $0 \leqslant \alpha \leqslant 45^\circ$, ta có thể điều khiển cường độ các tác động tích cực và tiêu cực a và b (vì thông qua chúng mà điều khiển m, nghĩa là điều khiển đường thẳng quay) để đạt được mục đích là hiệu quả quá trình tự đào tạo là tối đa, nghĩa là $u_{n+1} \to 1$. Một trong các biện pháp đó là cho $m = 0$, và $b = 0$. Có thể dùng biện pháp cho $r = (a/b) \to 9$ hoặc 10 thì hiệu quả đào tạo sẽ tiến tới $\hat{u} = a/(a + b) = r/(r + 1) \to 1$ hay $u_{n+1} \to 1$. Nghĩa là ta có kết quả của [1].

CHÚ THÍCH

[1]. *Phan Đức Thành* — Phương trình tự học. Báo Toán học và tuổi trẻ số 105 tháng 6/1978.

[2] *Ngô Văn Thảo, Nguyễn Đức Trung* — Điều khiển việc tự học của học sinh tại chức. Tập san Đại học và Trung học chuyên nghiệp, số 1 năm 1978.

[3] *Trần Đức Chính* — Ứng dụng phương trình tự học để dự báo hiệu quả tự đào tạo của học sinh tại chức. Báo cáo tại hội nghị công đoàn thành phố Hà Nội, năm 1980.

In 12000c tại Xí nghiệp In 75, 77 Hàng Bồ – Hà Nội.
Số in 82/81. In xong và gửi lưu chiểu tháng 7/1981

Chỉ số 12884

Giá: 0,20đ