

Đinh
H

TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TOÁN HỌC

VÀ

trẻ

Số 118

2

1981

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Thư ký tòa soạn: **HOÀNG CHÚNG**

Điện thoại: 52825

Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Chuyện với các bạn trẻ yêu toán

CÂU CHUYỆN SÁNG TÁC MỘT BÀI TOÁN

PHAN ĐỨC CHÍNH

TRONG mục «Đề ra kỳ này» báo Toán học tuổi trẻ đăng các đề toán do các bạn yêu toán từ xa gần gửi đến, phần lớn là những sáng tác. Tuy vậy có nhiều bạn học sinh yêu toán mới chỉ nghĩ việc giải toán, ít nghĩ đến sáng tác những đề toán mới. Các bạn ấy hỏi: làm thế nào để tìm ra những đề mới, những đề hay?

Đầu tiên vì mục đích trả lời cho câu hỏi ấy và những câu hỏi tương tự mà cách đây mấy chục năm nhà toán học Polya đã viết các cuốn sách tiếng (đã có dịch ra tiếng Việt): «Giải một toán như thế nào?» «Suy luận và suy nghĩ», «Sáng tạo toán học»...

Thực tế việc sáng tác được một đề toán mới, có thể coi là một sáng tạo toán học nhỏ nhỏ, từ những bước đi ban đầu nhỏ nhỏ, dần dần thì ta có thể tiến đến những bước đi không sáng tác được một đề toán mới thường là sự gợi ý của một vấn đề, của một bài toán

khi thay đổi hoàn cảnh, thay đổi các điều kiện của nó. Điều quyết định là ở chỗ: suy nghĩ sâu sắc để hiểu sâu sắc khía cạnh đang quan tâm của vấn đề. Cần công nhận rằng mười lần, trăm lần suy nghĩ, lật đi lật lại các khía cạnh của một vấn đề, may ra mới có một lần thành công. Nhưng làm thế nào có thể đi đến thành công nếu không chịu bỏ ra sức lao động cần thiết?

Lâu lâu tôi cũng có tìm ra được một đề toán mới. Tôi xin kể với các bạn về một lần tìm ra được như vậy. Lần ấy tình cờ tôi gặp bài toán sau:

Bài toán 1. Ba số dương a, b, c có tích $abc \geq 1$.

Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq a^4 + b^4 + c^4. \quad (1)$$

Đề toán đơn giản và hấp dẫn người ta giải. Bị lôi cuốn bởi cái «mồi» ấy, tôi cũng lao vào

giải. Tôi nghĩ rằng ở đây có lẽ dùng được bất đẳng thức Côsi-Bunhiakôpxki:

$$(a^3 + b^3 + c^3)^2 = (a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c)^2 \leq (a^4 + b^4 + c^4)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Như vậy ta sẽ có (1) nếu chúng ta được rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^3 + b^3 + c^3, \quad (2)$$

Để chứng minh (2), tôi lại lập luận như trên

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^{3/2} \cdot a^{1/2} + b^{3/2} \cdot b^{1/2} + c^{3/2} \cdot c^{1/2})^2 \leq (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c),$$

như vậy ta sẽ có (2) nếu chúng ta được rằng

$$a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2. \quad (3)$$

Nhưng

$$(a + b + c)^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

như vậy ta sẽ có (3) nếu ta có

$$3 \leq a + b + c. \quad (4)$$

Bất đẳng thức (4) đúng do bất đẳng thức Côsi

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \geq 3.$$

Suy nghĩ về quá trình giải ở trên, tôi thấy tác giả bài toán 1 có "ân ý": chỉ đưa ra bất đẳng thức (1) chứ không đưa ra loạt bất đẳng thức

$$a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq a^3 + b^3 + c^3 \leq a^4 + b^4 + c^4$$

Đồng thời tôi thấy rằng có thể đây loạt bất đẳng thức trên xa hơn: đó là với mọi số tự nhiên m

$$a^m + b^m + c^m \leq a^{m+1} + b^{m+1} + c^{m+1};$$

hơn nữa kết quả đúng không những cho 3 số dương, mà còn đúng cho n số dương. Theo dòng suy nghĩ ấy, tôi đi đến bài toán:

Bài toán 2. n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tích $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m \leq a_1^{m+1} + a_2^{m+1} + \dots + a_n^{m+1} \quad (5)$$

với mọi số tự nhiên m .

Giải. Ta có theo bất đẳng thức Côsi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq n,$$

do đó theo bất đẳng thức Côsi-Bunhiakôpxki

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

vậy

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

nói cách khác bất đẳng thức (5) đúng khi $m=1$.

Giả thiết bất đẳng thức (5) đã đúng khi $m=1$. Khi đó.

$$\begin{aligned} (a_1^{m+1} + \dots + a_n^{m+1})^2 &= \\ &= (a_1^{m/2} \cdot a_1^{(m+2)/2} + \dots + a_n^{m/2} \cdot a_n^{(m+2)/2})^2 \\ &\leq (a_1^m + \dots + a_n^m)(a_1^{m+2} + \dots + a_n^{m+2}) \\ &\leq (a_1^{m+1} + \dots + a_n^{m+1})(a_1^{m+2} + \dots + a_n^{m+2}), \end{aligned}$$

từ đây suy ra

$$a_1^{m+1} + \dots + a_n^{m+1} \leq a_1^{m+2} + \dots + a_n^{m+2},$$

như vậy bất đẳng thức (5) đúng cho $m+1$ theo nguyên lý quy nạp, nó đúng cho mọi m tự nhiên.

Đến đây, thoát đầu tôi cảm thấy thành công trong việc mở rộng bài toán 1. Nhưng suy nghĩ sâu hơn, tôi giật mình: lẽ nào tác giả bài toán 1 đã biết đặt bài toán, lại không biết mở rộng bài toán của mình? Ý cơ bản của hai bài toán 1 và 2 là một, và quan trọng hơn, phương pháp chứng minh hai bài toán ấy cũng là một. Lại, bài toán 2 chỉ là một mở rộng "tâm thần" của bài toán 1. Chắc chắn rằng tác giả bài toán 1 không muốn làm "ngợp" người đọc, nên dừng lại ở chỗ nêu lên bài toán 1, để người đọc phải tự suy nghĩ thêm để đi đến bài toán 2 đó là ý đồ của tác giả. Tôi đã mắc vào ý đồ này.

Ít lâu sau, suy nghĩ lại về bài toán 2, tôi ý rằng để đi đến kết luận (5) cho mọi số tự nhiên m , không cần giả thiết các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tích $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$, chỉ cần giả thiết nhẹ hơn: các số ấy có tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$. Nhưng dùng đến tổng của n số, thì chưa cần đến giả thiết n số ấy dương. Và tôi đi đến bài toán:

Bài toán 3. n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$. Có phải chăng

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m \leq a_1^{m+1} + a_2^{m+1} + \dots + a_n^{m+1}$$

với mọi số tự nhiên m ?

biến trở nên gay go, vì ở đây có thể có số
không thể tách các căn bậc hai để sử
dụng bất đẳng thức Côsi-Bunhiakôpxki. Vì vậy
phải tìm một cách giải khác của bài
không dựa vào bất đẳng thức Côsi-Bu-
nhiakôpxki. may ra cách giải ấy có thể áp dụng
cho bài toán 3. Nhìn bất đẳng thức (6)
dưới dạng

$$a_1^m(a_1-1) + a_2^m(a_2-1) + \dots + a_n^m(a_n-1),$$

đến bất đẳng thức Trêbursep.

bất đẳng thức Trêbursep ít được quen
với các bất đẳng thức khác, nên xin nêu
cùng với một cách chứng minh đơn
giản không thấy trong các sách.

BẤT ĐẲNG THỨC TRÊBURSEP. Giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ và $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Thế thì

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

minh. Đặt

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

đó có một chỉ số i sao cho

$$a_1 \leq \dots \leq a_i \leq a \leq a_{i+1} \leq \dots \leq a_n.$$

lấy một số b tùy ý miễn là

$$b_1 \leq \dots \leq b_i \leq b \leq b_{i+1} \leq \dots \leq b_n.$$

đó với mọi $k=1, 2, \dots, n$, $a_k - a$ và $b_k - b$

đều dấu, vậy.

$$(a_k - a)(b_k - b) = a_k b_k - ba_k - ab_k + ab$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k - b \sum_{k=1}^n a_k - a \sum_{k=1}^n b_k + nab =$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k b_k - a \sum_{k=1}^n b_k,$$

$$a_k b_k \geq a \sum_{k=1}^n b_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k.$$

đây là một cách giải khác, đơn giản hơn,
cho bài toán 2, dựa vào bất đẳng thức Trêbursep.

(6) có thể coi rằng

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n,$$

do đó

$$0 \leq a_1^m \leq a_2^m \leq \dots \leq a_n^m$$

và

$$a_1 - 1 \leq a_2 - 1 \leq \dots \leq a_n - 1.$$

Theo bất đẳng thức Trêbursep ta có

$$a_1^m(a_1-1) + a_2^m(a_2-1) + \dots + a_n^m(a_n-1) \geq$$

$$\geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^m \cdot \sum_{k=1}^n (a_k-1) \geq 0 \quad (7)$$

$$\text{bởi vì } \sum_{k=1}^n (a_k-1) = \sum_{k=1}^n a_k - n \geq 0. \quad (5)$$

Như vậy bất đẳng thức 5 được chứng minh.

Cách giải này có thích hợp chăng cho bài
toán 3? Với giả thiết của bài toán ấy, ta vẫn
có thể coi rằng

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

và được

$$a_1-1 \leq a_2-1 \leq \dots \leq a_n-1.$$

Nhưng ta chỉ có (do có thể có những $a_k < 0$)

$$a_1^m \leq a_2^m \leq \dots \leq a_n^m$$

khi m lẻ. Hơn nữa để đi đến (7), cần giả thiết
thêm.

$$\sum_{k=1}^n a_k^m \geq 0.$$

Như vậy với các giả thiết ấy, ta có (7), tức
là có (6). Nhưng nếu

$$\sum_{k=1}^n a_k^m < 0,$$

thì do $m+1$ chẵn, nên $a_k^{m+1} \geq 0$, và (6) là hiển
nhiên.

Tóm lại, trả lời cho câu hỏi trong bài toán 3,
ta có thể nêu:

Bài toán 4. n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tổng
 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$. Khi đó với mọi số tự nhiên
lẻ m

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m \leq a_1^{m+1} + a_2^{m+1} + \dots + a_n^{m+1},$$

Có thể nêu lên một dạng « oái oăm » của bài toán 4:

n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ có tổng $\geq n$. Chứng minh rằng:

$$a_1^{1981} + a_2^{1981} + \dots + a_n^{1981} \leq a_1^{1982} + a_2^{1982} + \dots + a_n^{1982}.$$

Đề ý rằng kết luận của bài toán 4 không còn đúng khi m chẵn. Chẳng hạn với $m=2$, và bộ 3 số $(-4, 4, 3)$, từ đó dễ dàng chỉ ra những ví dụ với bộ n số, $n \geq 3$. Đã có thể dừng lại được chưa? Kiểm tra lại lập luận cùng các tình huống đã xét, tôi thấy còn có sơ hở: trường hợp $n=2$. Suy nghĩ thêm cho trường hợp ấy, tôi đi đến:

Bài toán 5. Hai số thực a, b có tổng $a + b \geq 2$. Thế thì

$$a^m + b^m \leq a^{m+1} + b^{m+1} \quad (8)$$

với mọi số tự nhiên m .

Giải. Có thể coi rằng $a \geq b$. Vì $a + b > 0$, nên $a > -b$, như vậy $a \geq |b|$, do đó với mọi số tự nhiên m

$$a^m \geq |b|^m = |b^m|,$$

tức là $a^m \geq b^m$ và $a^m \geq -b^m$ hay $a^m + b^m \geq 0$.

Ta cũng có $a - 1 \geq b - 1$, nên theo bất đẳng thức Trébusep

$$a^m(a-1) + b^m(b-1) \geq (1/2)(a^m + b^m)[(a-1) + (b-1)]$$

từ đó suy ra (8).

Tôi đã kể với các bạn các suy nghĩ xung quanh bài toán 3 cùng với các kết quả mà tôi đã đi đến. Xin thú thật một điều: khi kết thúc câu chuyện này: đề mua đã bắt đầu câu chuyện bằng bài toán 1 giờ các bạn đã đoán ra tác giả!

Sự thật nào đã đưa tôi đến bài toán 1 là bất đẳng thức quen biết

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

đúng cho mọi số thực a, b, c . Nhìn vào bất đẳng thức này, một lần tôi có ý nghĩ: nếu $a+b+c \geq 0$ thì sẽ được

$$a+b+c \leq a^2 + b^2 + c^2$$

dạng đặc biệt này gợi ý dạng tổng quát

$$a^m + b^m + c^m \leq a^{m+1} + b^{m+1} + c^{m+1}$$

và như thế bài toán 3 được hình thành.

Chúc các bạn yêu toán thành công trong sáng tác ra những đề toán mới!

TỪ CÁC ĐẲNG THỨC ĐI ĐẾN CÁC BẤT ĐẲNG THỨC

LÊ QUỐC HÂN

TRONG bài nhận xét lời giải của các học sinh thi giỏi toán miền Bắc lớp mười năm 1968 - 1969 (báo TH và TT, tháng 10 năm 1969), thầy Hoàng Tụy có nhắc nhở các bạn trẻ yêu toán rằng: các nhà toán học thường làm việc với bất đẳng thức nhiều hơn làm việc với các đẳng thức. Từ đó chúng tôi nảy ra ý nghĩ: Nếu từ một đẳng thức đã biết mà tìm ra được những bất đẳng thức tương ứng chắc chắn là một việc làm hữu ích. Công việc này thường không phải luôn luôn trôi chảy, nhưng có nhiều hứng thú và những kết quả bất ngờ.

Chẳng hạn chúng ta xuất phát từ hệ thức quen thuộc sau: Nếu $ABCD$ là tứ giác nội tiếp thì $AB \cdot CD + DA \cdot BC = AC \cdot BD$ (hệ thức Ptolômê). Liệu tồn tại bất đẳng thức tương ứng: hoặc $AB \cdot CD + DA \cdot BC \geq AC \cdot BD$ hoặc

$AB \cdot CD + DA \cdot BC \leq AC \cdot BD$ không? Nếu tại thì bất đẳng thức nào là đúng? Để trả lời hai câu hỏi đó, ta trở lại giả thiết đề bài: Ptolômê tồn tại: tứ giác $ABCD$ phải là tứ giác nội tiếp. Như vậy, nếu tồn tại bất đẳng thức tương ứng, thì trước hết $ABCD$ phải là tứ giác nội tiếp. Giả sử câu hỏi nhất được giải đáp, hơn nữa một trong hai bất đẳng thức đó thực hiện được, ta sẽ trả lời câu hỏi thứ hai. Muốn vậy, ta xét trường hợp riêng: $AB = BC = CD = DA = a$; $BAD = \alpha$; $BCD = \beta$. Khi đó $AC = 2a \cos(\alpha/2)$; $BD = 2a \cos(\beta/2)$. Khi đó $AC \cdot BD = 4a^2 \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2)$. Mặt khác $AB \cdot CD + DA \cdot BC = 2a^2$. Chỉ còn xét khả năng xảy ra của hai bất đẳng thức

$$AB \cdot CD + DA \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

minh tính đúng đắn của bất đẳng thức (4) không? Nếu được, thì bạn đã tự mình vượt mình rồi đó (!) Xin chân thành chúc mừng bạn.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD} \quad (1) \quad \text{và} \quad \widehat{BAC} =$$

$$\triangle AED \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow$$

$$BC = AC \cdot ED \quad (2). \text{ Nhưng từ } (1) \Rightarrow$$

$$BC = AC \cdot BE \quad (3). \text{ Cộng từng vế } (2) \text{ và } (3)$$

$$BC \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + ED) \geq$$

với mọi tứ giác ABCD tùy ý, ta đều có $BC \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$. Bất đẳng thức được gọi là bất đẳng thức Ptolômê.

Bạn đã biết một số kiến thức sơ đẳng về cấp, hẳn bạn sẽ vô cùng thú vị khi bất đẳng thức Ptolômê cũng đúng trong gian n chiều (Bài toán chúng ta với $n=2$). Nói riêng ra, với $n=3$, với mọi tứ diện ABCD tùy ý, ta đều có $BC \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$, mà phép minh nó không phải là quá dễ dàng (!)

Trong trường hợp tổng quát, ta thấy rằng công cụ tọa độ, ta có thể chuyển bất đẳng thức Ptolômê về dạng đại số. Để tiện, xin nhắc bạn rằng: mỗi điểm A trong gian n chiều có thể đặt tương ứng với bộ ba $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ gọi là tọa độ của A. Nếu $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ thì khoảng cách AB sẽ là

$$AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Như vậy, bất đẳng thức có thể viết dưới dạng sau:

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (c_i - d_i)^2 \right]^{1/2} +$$

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i - d_i)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i - c_i)^2 \right]^{1/2} \geq$$

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i - c_i)^2 \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (b_i - d_i)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

chân thực của bất đẳng thức (4) đã được minh bằng công cụ của hình học. Liệu bạn có thể chỉ dùng các kiến thức

Thế là từ hệ thức Ptolômê, ta đã thu được bất đẳng thức Ptolômê và cho nó một dạng đại số đẹp mắt. Trong trường hợp riêng, khi $AB = BC = CA$, ta còn thu được kết quả thú vị sau đây:

« Nếu M là một điểm tùy ý trong mặt phẳng của tam giác đều ABC thì $MA + MB \geq MC$ » mà có một lần báo Toán học và tuổi trẻ đã trình bày với lời giải không đến nỗi đơn giản lắm.

Thí dụ của chúng ta không phải là quá đặc biệt. Thực ra, bạn hoặc tôi đã biết bao lần (mặc dù không đề ý) từ nhiều hệ thức trong tam giác đều đi tới các bất đẳng thức trong tam giác tùy ý, từ các hằng đẳng thức đáng nhớ đi đến các bất đẳng thức đại số hay lượng giác... Nếu bạn không tin, thì hãy bắt tay vào việc giải các bài tập sau đây. Sau khi giải quyết xong, hẳn bạn sẽ hiểu sâu sắc hơn dụng ý của người viết bài báo này.

1. Bất đẳng thức nào có thể thu được từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$ của tam giác vuông ABC?

2. Xuất phát từ một trong các hệ thức sau đây của tam giác đều (cạnh $a = b = c$; đường cao $h_a = h_b = h_c = h, \dots$), suy ra các bất đẳng thức tương ứng trong tam giác bất kỳ):

a) $3a^2 = 9R^2$

b) $3h = 9r$

c) $R = 2r$.

3. Từ hằng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, tìm điều kiện ắt có và đủ để trung bình cộng của ba số không bé hơn trung bình nhân của chúng (Định lý Cô-si chỉ cho điều kiện đủ là các số đó không âm).

4. Bất đẳng thức nào ứng với đồng nhất thức Lagrăng - Cô-si nổi tiếng:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 - \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n (a_i b_i - a_k b_k)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 ?$$

5. Hãy tìm những cặp hệ thức và bất đẳng thức tương ứng có thể có.



Bài 4/114. Cho n là một số tự nhiên lớn hơn 1, và giả sử có tất cả k phân số tối giản dạng a/b với $1 \leq a \leq b \leq n$. Chứng minh rằng nếu

$$1/n = a_1/b_1 < a_2/b_2 < \dots < a_k/b_k = 1, \quad (D_n)$$

thì ta có

$$(1) \quad a_{i+1}b_i - a_i b_{i+1} = 1 \text{ với } 1 \leq i < k,$$

$$(2) \quad \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{b_{i-1} + b_{i+1}} = \frac{a_i}{b_i} \text{ với } 2 \leq i \leq k-1,$$

$$(3) \quad \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \dots + \frac{1}{b_{k-1} b_k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Lời giải.

(1) Ta chứng minh bằng quy nạp theo n .

Khi $n=2$, bài toán là hiển nhiên, vì khi đó dãy (D_2) là $1/2 < 1/1$

Giả thiết bài toán đã đúng cho n ($n \geq 2$); ta chứng minh bài toán cho $n+1$. Đề ý rằng khi đó dãy (D_{n+1}) (ứng với $n+1$) được suy ra từ dãy (D_n) bằng cách bổ sung thêm tất cả các phân số tối giản dạng $r/(n+1)$, với $1 \leq r < n+1$.

Phân số đầu tiên của dãy (D_{n+1}) là $1/(n+1)$, phân số cuối cùng của dãy (D_{n+1}) là $1/1$, phân số này đã có mặt trong dãy (D_n) . Phân số thứ hai của dãy (D_{n+1}) là $1/n$ (phân số đầu tiên của dãy (D_n)). Quả vậy, trong trường hợp trái lại, phân số thứ hai của dãy (D_{n+1}) phải có dạng $r/(n+1)$, với $r \geq 2$ do đó $r/(n+1) < 1/n$, vậy $rn < n+1$, điều này vô lý vì $n \geq 2$.

Bây giờ ta hãy xét một phân số tối giản dạng $r/(n+1)$ với $2 \leq r < n+1$. Như đã thấy, nó phải lọt vào giữa hai phân số $a_i/b_i, a_{i+1}/b_{i+1}$ của dãy (D_n) . Như vậy

$$a_i/b_i < r/(n+1) < a_{i+1}/b_{i+1}. \quad (1)$$

Ta có theo giả thiết quy nạp:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_i b_{i+1}} &= \frac{a_{i+1}b_i - a_i b_{i+1}}{b_i b_{i+1}} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} - \frac{a_i}{b_i} \\ &= \left(\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} - \frac{r}{n+1} \right) + \left(\frac{r}{n+1} - \frac{a_i}{b_i} \right) \\ &= \frac{a_{i+1}(n+1) - r b_{i+1}}{(n+1) b_{i+1}} + \frac{r b_i - a_i(n+1)}{(n+1) b_i} \\ &= A/(n+1) b_{i+1} + B/(n+1) b_i, \end{aligned} \quad (2)$$

với $A = a_{i+1}(n+1) - r b_{i+1}$, $B = r b_i - a_i(n+1)$ là những số nguyên. Do (1), ta thấy rằng $A > 1$, hoặc $B > 1$, thì từ (2) suy ra

$$n+1 = A b_i + B b_{i+1} > b_i + b_{i+1}$$

hay

$$b_i + b_{i+1} \leq n.$$

Đề ý rằng do $a_i/b_i < a_{i+1}/b_{i+1}$, ta có

$$\frac{a_i}{b_i} < \frac{a_i + a_{i+1}}{b_i + b_{i+1}} < \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}},$$

như vậy do (3) ta có phân số tối giản $a/b = (a_i + a_{i+1})/(b_i + b_{i+1})$ và $1 \leq a < b \leq n$, tức là phân số này phải có mặt trong dãy (D_n) , điều này vô lý vì trong dãy (D_n) , a_{i+1}/b_{i+1} là hai phân số đứng liền nhau.

Thành thử ta phải có $A = B = 1$, hay

$$\begin{aligned} a_{i+1}(n+1) - r b_{i+1} &= 1 \\ - a_i(n+1) + r b_i &= 1, \end{aligned}$$

từ đây suy ra (nhớ rằng $a_{i+1}b_i - a_i b_{i+1} = 1$)

$$r = a_i + a_{i+1}, \quad n+1 = b_i + b_{i+1},$$

tức là

$$r/(n+1) = (a_i + a_{i+1})/(b_i + b_{i+1})$$

Như vậy nếu một phân số tối giản dạng $r/(n+1)$ với $2 \leq r < n+1$, được xếp vào giữa hai phân số $a_i/b_i, a_{i+1}/b_{i+1}$ của dãy (D_n) , thì nó là số duy nhất được xếp vào giữa hai phân số đó. Từ các hệ thức (4) và (5), và do giả thiết quy nạp, ta thấy rằng dãy (D_{n+1}) thỏa mãn điều kiện (1) của bài toán.

(2) Từ $a_{i+1}b_i - a_i b_{i+1} = a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i = 1$ suy ra ngay $a_i/b_i = (a_{i-1} + a_{i+1})/(b_{i-1} + b_{i+1})$.

(3) Do

$$1/b_i b_{i+1} = a_{i+1}/b_{i+1} - a_i/b_i$$

nên

$$1/b_1 b_2 + 1/b_2 b_3 + \dots + 1/b_{k-1} b_k = 1 - \frac{1}{n}.$$

Nhận xét - Dãy (D_n) nêu trong bài được gọi là dãy Fa-rây ứng với số tự nhiên n . Nó liên quan đến lý thuyết xấp xỉ các số bằng những số hữu tỷ, và lý thuyết các phân số. Gọi $\varphi(k)$ là số các số tự nhiên nguyên tố với các số tự nhiên k (hàm Ole của Euler). Có thể thấy ngay do lập luận trên rằng số các phân số trong dãy (D_n) bằng $1 + \varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(n)$.

Bài 5/114. Tìm các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số

$$f(x, y) = \frac{a \sin^4 x + b \cos^4 y}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{a \cos^4 x + b \sin^4 y}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$$

trong đó a, b, c, d là những hằng số dương.

(của nhiều bạn). Đặt $f(x, y) = af_1(x, y) +$

$$\frac{\sin^4 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$$

$$\frac{\cos^4 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\sin^4 y}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$$

trị lớn nhất - Ta có
 $\sin^4 x / c \sin^2 x + \cos^4 x / c \cos^2 x =$
 $(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1/c,$

thực đạt được khi và chỉ khi:
 $\cos^2 y = \cos^2 x = 0,$
 $\sin^2 y = \sin^2 x = 0.$

đầu đẳng thức cũng
 ra trong điều kiện trên.
 giá trị lớn nhất của $f(x, y)$ bằng

trị nhỏ nhất - Vì $c + d = c(\sin^2 x + \cos^2 x) +$
 $(\cos^2 y + \sin^2 y)$ nên theo bất đẳng thức
 Cô-p-xki, ta có:

$$f(x, y) = (c \sin^2 x + d \cos^2 y + c \cos^2 x + d \sin^2 y) \times$$

$$\left(\frac{\sin^4 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y} \right) \geq$$

$$\frac{\sin^2 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\cos^2 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y} =$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y + c \cos^2 x + d \sin^2 y} = \frac{1}{c + d}.$$

$$\frac{\sin^2 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} = \frac{\cos^2 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y} =$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{c + d}.$$

$$\frac{\sin^2 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} = \frac{\cos^2 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y} = \frac{1}{c + d}.$$

$$\frac{\sin^2 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} = \frac{\cos^2 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y} = \frac{1}{c + d}.$$

$$\frac{\sin^2 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} = \frac{\cos^2 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y} = \frac{1}{c + d}.$$

Hãy tính $f(1930, 1980)$.

Lời giải (của nhiều bạn).

Ta có theo 1) và 2)

$$f(x, -x) = -f(-x, x) = -f(x, -x),$$

từ đó suy ra $f(x, -x) = 0$ với mọi x .

Từ kết quả này và từ 3), ta được:

$$f(x, y) = f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$$

$$= \frac{x+y}{2} + f\left(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\right) = \frac{x+y}{2}.$$

Thành thử

$$f(1930, 1980) = 1955.$$

Nhận xét. Có nhiều bạn đi đến kết quả trên,
 nhưng không gọt rửa lời giải, nên đã lập luận
 quá dài, có những chi tiết thừa.

Bài 7/114. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,
 thỏa mãn điều kiện:

$$|f(x)| \leq 1 \text{ khi } |x| \leq 1.$$

Chứng minh rằng khi $|x| \leq 1$, ta có

$$|3a^2 + 2bx + c| \leq 9,$$

và không thể thay số 9 bởi một số nhỏ hơn.

Lời giải. Ta chứng minh kết luận của bài
 toán với giả thiết nhẹ hơn, tức là chỉ giả thiết
 rằng:

$$|f(\pm 1)| \leq 1, \quad |f(\pm 1/2)| \leq 1.$$

Đặt

$$A = f(-1) = -a + b - c + d$$

$$B = f(-1/2) = -a/8 + b/4 - c/2 + d$$

$$C = f(1/2) = a/8 + b/4 + c/2 + d$$

$$D = f(1) = a + b + c + d.$$

Coi đây là một hệ 4 phương trình bậc nhất
 của 4 ẩn a, b, c, d , ta giải ra thì được

$$a = -2A/3 + 4B/3 - 4C/3 + 2D/3$$

$$b = 2A/3 - 2B/3 - 2C/3 + 2D/3$$

$$c = A/6 - 4B/3 + 4C/3 - D/6$$

$$d = -A/6 + 2B/3 + 2C/3 - D/6,$$

do đó

$$3ax^2 + 2bx + c = (-2A + 4B - 4C + 2D)x^2 +$$

$$+ (4A/3 - 4B/3 - 4C/3 + 4D/3)x +$$

$$+ (A/6 - 4B/3 + 4C/3 - D/6) =$$

$$= (-A/6)(12x^2 - 8x - 1) + (4B/3)(3x^2 - x - 1)$$

$$- (4C/3)(3x^2 + x - 1) + (D/6)(12x^2 + 8x - 1).$$

Theo giả thiết A, B, C, D có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hay bằng 1, vậy

$$|3ax + 2bx + c| \leq (1/6)|12x^2 - 8x - 1| + \\ + (4/3)|3x^2 - x - 1| + (4/3)|3x^2 + x - 1| + \\ + (1/6)|12x^2 + 8x - 1|.$$

Có thể chứng minh dễ dàng rằng

$$|a+b| + |a-b| = 2\max(|a|, |b|).$$

Sử dụng kết quả này, ta thấy rằng khi $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} & |12x^2 - 8x - 1| + |12x^2 + 8x - 1| = \\ & = 2\max(|12x^2 - 1|, |8x|) \leq 2.11 = 22, \end{aligned}$$

$$|3x^2 - x - 1| + |3x^2 + x - 1| = \\ = 2\max(|3x - 1|, |x|) \leq 2.2 = 4.$$

do đó khi $|x| \leq 1$

$$|3ax^2 + 2bx + c| \leq 22/6 + 16/3 = 9.$$

Đa thức $f(x) = 4x^3 - 3x$ (đa thức Trêbussep bậc 3) thỏa mãn các điều kiện của bài toán và ta có trong trường hợp này

$$3ax^2 + 2bx + c = 12x^2 - 3;$$

trên đoạn $[-1, 1]$ biểu thức này có trị tuyệt đối lớn nhất bằng 9 (khi $x = \pm 1$), vì vậy không thể thay số 9 bởi một số nhỏ hơn.

Nhận xét — Bài toán trên là một trường hợp riêng (khi $n = 3$) của định lý A.A. Mackôp sau đây:

“Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc n và $|f(x)| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$, thì $|f'(x)| \leq n^2$ khi $|x| \leq 1$; hơn nữa với các giả thiết ấy, $\max |f'(x)| = n^2$ trên đoạn $[-1, 1]$ chỉ khi $f(x) = \pm T_n(x)$, với $T_n(x)$ là đa thức Trêbursep bậc n ”. (Đa thức Trêbursep bậc n được xác định bởi hệ thức $T_n(\cos u) = \cos nu$ với mọi số thực u).

Phép chứng minh định lý Mackôp tổng quát khá phức tạp và vượt ngoài chương trình phổ thông. Rất hoan nghênh các bạn: *Đặng Hùng Tuấn* (ĐHTH Hà Nội), *Vũ Đức Vinh* (12C Lê Quý Đôn, Thành phố Hồ Chí Minh), *Nguyễn Duy Thái Sơn* (cấp 3 Phù Cát, Nghĩa Bình), *Hà Thúc Dương*, *Phạm Văn Thạch*, *Lý Anh Tú* (Quốc học, Huế) đã có lời giải đúng, tuy cách trình bày không được thật sáng sủa.

Phan Đức Chính

Bài 8/114. Trong mặt phẳng cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D trên các đường thẳng $(BC), (CA), (AB)$ chứa các cạnh của tam giác ABC . Tam giác $A'B'C'$ gọi là tam giác chiếu của điểm D trên tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng bốn tam giác có ba đỉnh đã cho trên các tam giác khác nhau của ba đỉnh còn lại là bốn tam giác khác nhau.

b) Bốn điểm phẳng A, B, C, D thỏa mãn điều kiện gì để bốn tam giác chiếu của chúng đó trên các tam giác xác định bởi ba cạnh lại bằng nhau?

Lời giải.

a) Cách 1. (Tính độ dài các cạnh chiếu của điểm D trên tam giác ABC .)

Tam giác $A'B'C'$ nội tiếp đường tròn kính AD , do đó theo định lý hàm số cos (hình 1)

...D, CDA, DAB và ABC; $k_A = \frac{1}{2R_A}$, v.v...
 b) Từ câu a) (cách giải thứ nhất) suy ra ngay rằng:

$$T_A = T_B = T_C = T_D \Leftrightarrow k_A = k_B = k_C = k_D \Leftrightarrow R_A = R_B = R_C = R_D.$$

Nghĩa là: Các tam giác chiếu của mỗi điểm A, B, C, D trên các tam giác xác định bởi ba điểm còn lại sẽ bằng nhau (toàn đẳng) khi và chỉ khi các đường tròn đi qua ba trong 4 điểm phẳng đã cho bằng nhau: $(BCD) = (CDA) = (DAB) = (ABC)$ (trong đó (ABC) là ký hiệu đường tròn đi qua ba điểm A, B, C).

Đề cho gọn, ta ký hiệu v_A, v_B, v_C, v_D theo thứ tự là các đường tròn $(BCD), (CDA), (DAB)$ và (ABC) . Có 2 trường hợp xảy ra:

1) Nếu $v_A \neq v_B \neq v_C \neq v_D$ nghĩa là bốn điểm phẳng A, B, C, D không cùng nằm trên một đường tròn, từ $v_A = v_D$ ta suy ra (BCD) đối xứng với (ABC) qua đường thẳng (BC) . Nói khác đi, điểm D_A đối xứng của D qua (BC) nằm trên đường tròn (ABC) .

$$\text{Từ đó suy ra: } (DB, DC) = - (AB, AC)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } (DC, DA) = - (BC, BA).$$

$$(DA, DB) = - (CA, CB).$$

Vậy D trùng với trực tâm của tam giác ABC. Từ đó suy ra bốn điểm phẳng A, B, C, D có tính chất sau đây: mỗi điểm là trực tâm của tam giác xác định bởi ba điểm còn lại. Bộ bốn điểm phẳng có tính chất này gọi là một tứ điểm trực tâm. Ngoài ra, lưu ý thêm rằng, trong trường hợp này (bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một đường tròn), các tam giác chiếu không những bằng nhau mà còn trùng nhau.

2) Nếu bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn: $D \in v_D(A, B, C)$, thế thì ba điểm A', B', C' thẳng hàng (định lý về đường thẳng Simson); nói khác đi là: các tam giác chiếu của mỗi điểm đó suy biến thành đoạn thẳng. Hơn nữa, theo lý luận trên, bốn đoạn thẳng (bốn tam giác suy biến) này bằng nhau.

Nhận xét: Về câu b), hầu hết các bạn đều biện luận thiếu chặt chẽ, bỏ sót trường hợp bốn điểm phẳng A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Chỉ có bạn Hà Thúc Dương có lời giải tốt hơn cả (biện luận đầy đủ các trường hợp).

Bài 9/114. Cho mặt cầu tâm O bán kính R và một điểm P cố định nằm trong mặt cầu ($OP = d < R$). Ba dây cung thay đổi AA', BB', CC' của mặt cầu luôn luôn đi qua điểm P và vuông góc đôi một tại P, tạo nên một khối tám mặt (K) nội tiếp mặt cầu đã cho, nhận các đầu nút AA', BB', CC' của ba dây cung đó làm các đỉnh. Hỏi trong số những khối tám mặt (K) nội tiếp mặt cầu đã

trên đây là của Phạm Văn Thạch Hà Thúc Dương (lớp 12CT trường (học) và nhiều bạn khác.

Tính độ lớn các góc A', B', C' của tam của điểm D trên tam giác ABC

$$\widehat{A'D} = \widehat{A_1}, \widehat{DA'C'} = \widehat{A_2}; \widehat{B'CD} = \widehat{C_1},$$

là các tứ giác nội tiếp, nên

$$\widehat{A_2} = \widehat{B_2}, \text{ suy ra: } \widehat{B'A'C'} = \widehat{C_1} + \widehat{B_2}.$$

hình vẽ, ta có:

$$\widehat{B_2} = (\widehat{C} - \widehat{C_2}) + (\widehat{B} - \widehat{B_1})$$

$$= (\widehat{B} + \widehat{C}) - (\widehat{B_1} + \widehat{C_2}).$$

khác, trong tam giác DBC, ta có:

$$\widehat{C_2} = 180^\circ - \widehat{BDC}.$$

$$\text{ta được: } \widehat{B'A'C'} = \widehat{B} + \widehat{C} - (180 - \widehat{BDC}),$$

$$\widehat{BDC} + (\widehat{B} + \widehat{C} - 180^\circ) = \widehat{BDC} - \widehat{BAC}$$

$$\text{ta, ta được: } \widehat{B'} = \widehat{CDA} - \widehat{CBA};$$

$$\widehat{ADB} - \widehat{ACB}.$$

đến hướng của các tam giác ABC,

và ký hiệu a, b, c, a', b', c' là các đường

là (BC), (CA), (AB), (DA), (DB), (DC) và đưa

định hướng của hai đường thẳng trong

thẳng thì ta có thể viết độ lớn (đại số)

góc của tam giác chiếu T_D của điểm D

tam giác ABC như sau:

$$\widehat{A'} = (\widehat{b', c'}) + (\widehat{b, c}); \widehat{B'} = (\widehat{c', a'}) + (\widehat{c, a})$$

$$= (\widehat{a', b'}) + (\widehat{a, b})$$

$$(1) \text{ do } (\widehat{b, c}) = -(\widehat{c, b}) = (\widehat{AC, AB}) \text{ v.v...}$$

$$\text{suy ra: } T_A \propto T_B \propto T_C \propto T_D \text{ với độ lớn}$$

được xác định bằng các hệ thức trên

góc định hướng giữa các đường thẳng

điểm một trong bốn điểm phẳng A, B, C, D

(2) bạn Cam Minh Trí (lớp 11 C8, trường Lê

Phong, thành phố Hồ Chí Minh), Nguyễn

(3) Thái Sơn (lớp 11C Phú Cát, Nghĩa Bình)

Hoàng An (lớp 9 CT, trường Ngô Sĩ Liên,

Đặng Hùng Tuấn (lớp 9CT Đại học (tổng

Hà Nội) và một số bạn khác đã giải theo

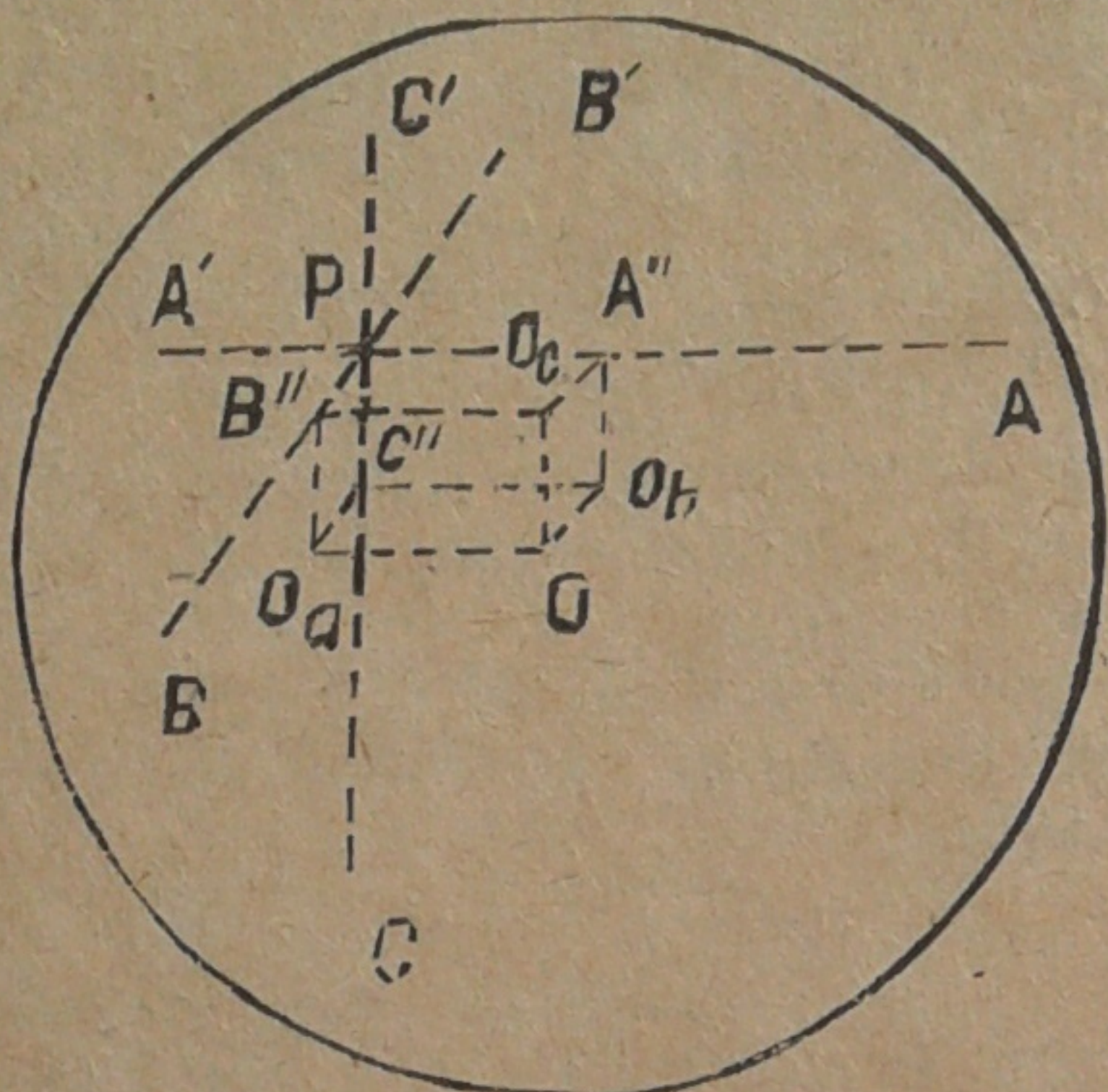
pháp này, chỉ đòi hỏi kiến thức hình

cấp hai (tứ giác nội tiếp).

cho tạo thành bằng cách nêu trên, khối nào có thể tích lớn nhất, khối nào có thể tích nhỏ nhất? Tính các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó của thể tích khối tám mặt (K) nội tiếp mặt cầu đã cho theo R và $d = OP$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau đây:

$$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = \text{const}$$



Thật vậy, gọi A'', B'', C'' lần lượt là trung điểm của các dây cung AA', BB' và CC' ; O_a, O_b, O_c lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của O trên các mặt phẳng (BB', CC') , (CC', AA') và (AA', BB') . Thế thì $O, P; O_a, A''; O_b, B''; O_c, C''$ là 4 cặp đỉnh đối diện của một hình hộp chữ nhật (h.2).

Đặt $OO_a = d_a, OO_b = d_b, OO_c = d_c$, ta được:
 $d^2 = d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$.
 $AA'^2 = 4(R^2 - d_b^2 - d_c^2) = 4(R^2 - d^2 + d_a^2)$. Tương tự, ta được: $BB'^2 = 4(R^2 - d^2 + d_b^2)$;
 $CC'^2 = 4(R^2 - d^2 + d_c^2)$.

Từ đó suy ra:

$$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = 4(3R^2 - 2d^2) = k \text{ (không đổi)}.$$

Bổ đề đã được chứng minh xong.

Bây giờ ta tính thể tích khối tám mặt K $(ABC A' B' C')$ nội tiếp mặt cầu đã cho. (K) có thể xem là hình tạo bởi hai hình chóp tứ giác $C(ABA'B')$, và $C'(ABA'B')$ có chung đáy $ABA'B'$ và úp đáy vào nhau. Do đó:

$$V = V(K) = \frac{1}{3} S_{ABA'B'} \times CC' \\ = \frac{1}{6} AA' \cdot BB' \cdot CC'.$$

$$a) V = \max \Leftrightarrow 36V^2 = \max \Leftrightarrow AA'^2 \cdot BB'^2 \cdot CC'^2 = \max.$$

Mặt khác, theo bổ đề trên thì $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = k = \text{const}$. Bởi vậy, theo bất đẳng thức Côsi-Bunhiacôpski, ta có:

$$\sqrt[3]{AA'^2 \cdot BB'^2 \cdot CC'^2} \leq \frac{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}{3} = \frac{k}{3} = \text{const} \\ = 4(3R^2 - 2d^2)/3 = \text{const}.$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $AA'^2 = BB'^2 = CC'^2$, tức là khi $AA' = BB' = CC'$.

Vậy ta được:

$$V = \max \Leftrightarrow AA' = BB' = CC'$$

$$\text{Đồng thời: } 36V_{\max}^2 = AA'^2 \cdot BB'^2 \cdot CC'^2$$

$$= (AA'^2)^3 = \left[4\left(R^2 - \frac{2}{3}d^2\right) \right]^3$$

$$= 64 \left(R^2 - \frac{2}{3}d^2\right)^3$$

$$\Rightarrow V_{\max}^2 = \frac{64}{36} \left(R^2 - \frac{2}{3}d^2\right)^3$$

$$\Rightarrow V_{\max} = (4/3) \sqrt{\left(R^2 - \frac{2}{3}d^2\right)^3}$$

(K) có $V = \max$ khi và chỉ khi các dây cung AA', BB', CC' bằng nhau và chứa các cạnh của một hình lập phương nhận OP làm một đường chéo, nghĩa là khi các dây cung AA', BB', CC' đi qua P tạo với đường thẳng (PO) một góc φ :

$$\varphi = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$b) V(K) = \min \Leftrightarrow 36V^2 = \min \Leftrightarrow AA'^2 \cdot BB'^2 \cdot CC'^2 = \min.$$

Cách 1.

$$V = \min \Leftrightarrow 36V^2 = AA'^2 \cdot BB'^2 \cdot CC'^2 \\ = 4^3 (R^2 - d^2 + d_a^2) (R^2 - d^2 + d_b^2) (R^2 - d^2 + d_c^2) \\ = \min.$$

Khai triển ra, ta được:

$$(R^2 - d^2 + d_a^2) (R^2 - d^2 + d_b^2) (R^2 - d^2 + d_c^2) \\ = (R^2 - d^2)^3 + (R^2 - d^2)^2 (d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) \\ + (R^2 - d^2) (d_a^2 d_b^2 + d_b^2 d_c^2 + d_c^2 d_a^2) + d_a^2 d_b^2 d_c^2 \\ \geq (R^2 - d^2)^3 + (R^2 - d^2)^2 d^2 = R^2 (R^2 - d^2).$$

$$\text{Từ đó suy ra: } V \geq (4/3) R(R^2 - d^2).$$

$$V = \min$$

$$= (4/3) R(R^2 - d^2) \Leftrightarrow (d_a d_b)^2 + (d_b d_c)^2 + (d_c d_a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow d_a d_b = d_b d_c = d_c d_a = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{hai trong ba giá trị } d_a, d_b, d_c \text{ phải bằng } 0$$

và giá trị còn lại phải bằng d.

Nghĩa là một trong ba dây cung AA', BB', CC' là đường kính của mặt cầu, hai dây kia nằm trong mặt phẳng vuông góc với OP tại P. Đồng thời là hai đường kính vuông góc tại P của hai mặt phẳng của mặt cầu vuông góc với OP tại P.

Đặt $AA^2 = \alpha, BB^2 = \beta, CC^2 = \gamma,$
 $\gamma) = m = 4(R^2 - d^2) \leq \alpha, \beta, \gamma \leq M =$
 (α, β, γ) đồng thời $\alpha + \beta + \gamma = M +$
 $\Rightarrow 36V^2 = \min \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = \min.$

$\beta = m + \beta', \gamma = m + \gamma'$ (trong đó
 $\gamma' = M - m = 4d^2$)

$(\alpha' + \beta' + \gamma') (m + \beta') (m + \gamma')$
 $+ m^2 (\alpha' + \beta' + \gamma') + m(\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha') +$

$+ m^2 (\alpha' + \beta' + \gamma') : \min (\alpha\beta\gamma = 4^3$
 $- d^2)^3 + (R^2 - d^2)^2 d^2] = 4^3 R^2 (R^2 - d^2)^3$
 $\alpha' = \gamma' = 0 \Leftrightarrow 2$ trong 3 giá trị α', β', γ'

cũng đi tới kết luận như đã nêu ở trên

xét - Về bài này, các bạn Cam Minh
 và Thúc Dương, Phan Điền Long (trưởng
 Hồng Gâm thành phố Hồ Chí Minh), Lưu
 Minh (trưởng Lê Hồng Phong, thành phố
 Minh) có lời giải gọn hơn cả.

Nguyễn Đăng Phát

10/114. Gọi V là thể tích, S là diện tích
 phần của một tứ diện tùy ý trong không
 Chứng minh rằng

$$S^3 \geq 216 \sqrt{3} V^2.$$

dạng thức chỉ xảy ra đối với tứ diện

bạn xem lời giải bài toán này trong bài
 « Một lượng hình học » (phần hình không
 đã đăng trong báo THVTT số 5+6/1980.

xét - Có lẽ đây là một trong những
 khó nhất trong kỳ thi này. Nhiều bạn
 thực chất đây là một bài toán đại số,
 do sự lẫn lộn giữa trực quan hình học
 luận chặt chẽ, nên không bạn nào đã
 giải gửi đến thật hoàn chỉnh.

Bài 1/115. Chứng minh rằng số

$$3^{2^{1930}} + 2^{9^{1945}} - 19^{5^{1890}}$$

chia hết cho 7. Tìm chữ số cuối cùng của số
 thương.

Lời giải. Ta có

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7} \text{ nên } 3^{2^{1930}} = 3^{6n+4} \equiv 4 \pmod{7},$$

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7} \text{ nên } 2^{9^{1945}} \equiv 1 \pmod{7},$$

$$5^{1890} = (6-1)^{1890} = 3m+1$$

$$\text{nên } -19^{5^{1890}} \equiv 2^5 = 2^{3m+1} \equiv 2 \pmod{7},$$

Vậy

$$A = 3^{2^{1930}} + 2^{9^{1945}} - 19^{5^{1890}} \equiv 4 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

tức là $A \vdots 7$.

Ta tìm chữ số cuối cùng của A .

$$\text{Vi } 3^2 \equiv -1 \pmod{5} \text{ nên } 3^{2^{1930}} \equiv 1 \pmod{5},$$

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5} \text{ nên } 2^{9^{1945}} = 2^{4k+1} \equiv 2 \pmod{5},$$

$$19^{5^{1890}} = (20-1)^{5^{1890}} \equiv -1 \pmod{5}.$$

Vậy $A \equiv 1 + 2 + 1 \equiv 4 \pmod{5}$. Vì A là số chẵn
 nên A có chữ số cuối cùng là 4

Từ đó suy ra chữ số tận cùng của số thương
 là 2.

Bài 2/115. Giả sử a, b, c là ba số nguyên
 sao cho các tam thức $ax^2 + bx + c$ và $ax^2 + bx - c$,
 phân tích được thành tích của hai nhị thức với
 hệ số nguyên.

Chứng minh rằng abc chia hết cho 30.

Lời giải của Nguyễn Văn Kỳ Châu (Quảng
 nam - Đà Nẵng).

Các tam thức nói trong đầu bài phân tích
 được thành tích hai nhị thức với hệ số nguyên
 nên chúng có nghiệm hữu tỷ, vậy các biệt số
 của chúng là các số chính phương:

$$b^2 - 4ac = m^2,$$

$$b^2 + 4ac = n^2.$$

a) Nếu $b \equiv 2 \pmod{4}$ thì $abc \equiv 2 \pmod{4}$. Nếu $b = 2k + 1$ thì

$$b^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod{8}.$$

Vậy $4ac \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow ac \equiv 2 \pmod{4}$, tức $abc \equiv 2 \pmod{4}$.

b) Nếu $b \equiv 3 \pmod{4}$ thì $abc \equiv 3 \pmod{4}$. Nếu b không chia hết cho 3 thì $b^2 \equiv (3l \pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

- Nếu $ac \equiv 1 \pmod{3}$ thì $m^2 \equiv 2 \pmod{3}$.

- Nếu $ac \equiv 2 \pmod{3}$ thì $m^2 \equiv 2 \pmod{3}$.

Các điều kiện trên không thể có vì bình phương của một số nguyên chỉ có thể $\equiv 0, 1 \pmod{3}$.

Vậy $ac \equiv 3 \pmod{4}$, tức $abc \equiv 3 \pmod{4}$.

c) Nếu $b \equiv 5 \pmod{5}$ thì $abc \equiv 5 \pmod{5}$. Nếu b không chia hết cho 5 thì $b^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

Giả sử ac không chia hết cho 5, ta có $4ac \equiv \pm 1 \pmod{5}$ hoặc $4ac \equiv \pm 2 \pmod{5}$. Khi đó một trong hai biệt số nói ở trên có dạng $5p \pm 2$ không là số chính phương. Vậy $ac \equiv 5 \pmod{5}$, tức $abc \equiv 5 \pmod{5}$.

Tóm lại, tính abc chia hết cho các số nguyên tố 2, 3, 5 nên $abc \equiv 30$.

Bài 3/115. Giả sử a, b, c là ba số nguyên đôi một nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Xác định xem trong dãy $\{u_k\}$ với số hạng tổng quát

$$u_k = (a^{2^k} + b^{2^k} + c^{2^k}) / [(ab)^{2^k} + (bc)^{2^k} + (ca)^{2^k}]$$

có bao nhiêu phân số tối giản.

Lời giải của Quang Đại và Trường Sơn (lớp 8 chuyên toán, trường Đại học Tổng hợp, Hà Nội).

Trong dãy $\{u_k\}$, vai trò của a, b, c như nhau, nên có thể giả sử

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Từ đẳng thức đó và từ giả thiết a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau, suy ra trong ba số a, b, c phải có một số chẵn và hai số lẻ. Trong phân số u_k , ta đặt tử số bằng A_k và B_k .

$$1) u_1 = (a^2 + b^2 + c^2) / [(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2] = 2c^2 / [(ab)^2 + c^4].$$

Mẫu số B_1 là lẻ, $C^4 \equiv C^2, (ab)^2$ nguyên nhân với c^2 , vậy u_1 là phân số tối giản.

2) Với $k \geq 2$, đặt $D = (a^4 + b^4 + c^4) / 2$, ta minh $A_k \equiv D$ và $B_k \equiv D$.

Ta có

$$\begin{aligned} A_2 &= a^4 + b^4 + c^4 = 2D \equiv D \\ B_2 &= (ab)^4 + (bc)^4 + (ca)^4 \\ &= a^4 b^4 + c^4 (a^4 + b^4 + c^4) - c^8 \\ &= 2Dc^4 + (a^2 b^2 - c^4)(a^2 b^2 + c^4) \end{aligned}$$

Nhưng

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2 = c^4 - 2a^2 b^2$$

tức là

$$a^2 b^2 - c^4 = [c^4 - (a^4 + b^4)] / 2 - c^4 = -D$$

Vậy $B_2 \equiv D$.

Giả thử A_k và B_k đều chia hết cho D , ta minh A_{k+1} và B_{k+1} cũng chia hết cho D .

Ta có

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= a^{2^{k+1}} + b^{2^{k+1}} + c^{2^{k+1}} \\ &= (a^{2^k} + b^{2^k} + c^{2^k}) \end{aligned}$$

$$- [2(ab)^{2^k} + 2(bc)^{2^k} + 2(ca)^{2^k}]$$

tức là

$$A_{k+1} = A_k^2 - 2B_k$$

$$B_{k+1} = (ab)^{2^{k+1}} + (ba)^{2^{k+1}} + (ca)^{2^{k+1}}$$

$$= [(ab)^{2^k} + (bc)^{2^k} + (ca)^{2^k}]^2$$

$$- [2(ab^2 c)^{2^k} + 2(bc^2 a)^{2^k} + 2(ca^2 b)^{2^k}]$$

tức là

$$B_{k+1} = B_k^2 - 2(abc)^{2^k} A_k$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Như vậy với $k \geq 2$ thì $A_k \equiv D$ và $B_k \equiv D$. D là số nguyên vì $(a^4 + b^4 + c^4)$ là số chẵn. Vậy với $k \geq 2$ thì u_k không tối giản.

Tóm lại trong dãy $\{u_k\}$ chỉ có u_1 là phân số tối giản.

THI TOÁN TOÀN LIÊN XÔ LẦN THỨ 12

LÊ VIỆT NGÀ

c) Hãy tìm thể tích của đa diện lồi nhỏ nhất chứa K_n ($n = 2, 3, \dots$)

Bài 5. Cho hai đồng diêm. Lúc đầu một đồng có m que, còn đồng kia có n que, $m > n$. Có hai người chơi lần lượt rút các que ở các đồng. Đến lượt mình mỗi người được phép rút một số que tùy ý trong một đồng sao cho số que này là ước của số que đang ở đồng kia. Người nào rút được que diêm cuối cùng ở một trong các đồng thì thắng.

a) Chứng minh rằng nếu $m > 2n$ thì người rút lượt đầu tiên có thể đảm bảo phần thắng về mình.

b) Với giá trị nào của α thì điều khẳng định sau đây là đúng: "Nếu $m > \alpha n$ thì người rút lượt đầu tiên có thể bảo đảm phần thắng về mình?"

Bài 6. Chứng minh rằng tồn tại một dãy số vô hạn và bị chặn $\{x_n\}$ sao cho với bất kỳ hai số tự nhiên m và k khác nhau ta có:

$$|x_m - x_k| \geq 1/|m - k|.$$

Bài 7. Giả sử $f(x) = x^3 - x + 1$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $m > 1$, các số:

$$m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \dots$$

đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bài 8. Chứng minh rằng tồn tại một số A sao cho đồ thị của hàm số $y = A \sin x$ có thể nội tiếp được ít nhất 1978 hình vuông, từng đôi một có diện tích khác nhau. (Một hình vuông gọi là nội tiếp đồ thị nếu tất cả các đỉnh của nó nằm trên đồ thị).

Bài 9. Có ba máy tự động đề in những cặp số tự nhiên lên những tấm phiếu. Các máy làm việc như sau: Máy thứ nhất đọc phiếu (a, b) thì in ra phiếu $(a+1, b+1)$; máy thứ hai đọc phiếu (a, b) thì in ra phiếu $(a/2, b/2)$, (nó chỉ làm việc với a và b chẵn); máy thứ ba đọc hai phiếu (a, b) và (b, c) thì in ra phiếu (a, c) . Ngoài ra các máy đều trả lại phiếu đã đọc.

Giả sử ban đầu có 1 phiếu với cặp số $(5, 19)$. Có thể sử dụng các máy làm việc theo thứ tự nào đó để nhận được phiếu:

a) $(1, 50)$

b) $(1, 100)$

được không?

c) Giả sử ban đầu có 1 phiếu (a, b) mà chúng ta có thể nhận được phiếu $(1, n)$. Với giá trị nào của n thì có thể làm được?

Bài 10. Cho n -giác (đa giác n cạnh) diện tích S nội tiếp trong hình tròn bán kính R . Trên mỗi cạnh của n -giác người ta lấy một điểm. Chứng minh rằng chu vi của n -giác với các đỉnh là các điểm vừa lấy không nhỏ hơn $2S/R$.

Bài 11. Một quân xe đứng ở góc bàn cờ $n \times n$ ô. Mỗi người trong hai người chơi lần lượt chuyển con xe sang ô kề với ô con xe đang đứng (ô kề là ô có một cạnh chung với ô con xe đang đứng). Hết con xe đi khỏi ô nào thì không được trở lại ô đó. Ai không đi được khi đến lượt mình thì thua.

a. Chứng minh rằng nếu n chẵn thì người đi đầu có thể thắng còn nếu n lẻ thì người đi thứ hai có thể thắng.

b. Ai sẽ có thể thắng nếu con xe lúc đầu không đứng ở góc bàn cờ mà đứng ở ô kề với ô góc bàn cờ?

Bài 12. Trên mặt phẳng cho một số những đoạn thẳng không giao nhau và không có hai đoạn thẳng nào nằm trên cùng một đường thẳng. Chúng ta muốn vẽ thêm một số đoạn thẳng nữa nối các đầu mút của các đoạn thẳng đã cho sao cho tất cả các đoạn thẳng cùng nhau tạo thành một đường gấp khúc không tự cắt. Điều đó luôn luôn thực hiện được hay không?

Bài 13. Các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ nằm trong đoạn $[a; b]$ với $0 < a < b$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) (1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n) \leq (a + b)^2 n^2 / 4ab.$$

Bài 14. Cho một số nguyên tố $p > 3$. Xét trên mặt phẳng tọa độ tập hợp M gồm các điểm có tọa độ nguyên (x, y) sao cho $0 \leq x < p; 0 \leq y < p$. Chứng minh rằng có thể lấy được p điểm khác nhau của M sao cho không có bốn điểm nào trong chúng là các đỉnh của một hình bình hành và không có 3 điểm nào trong chúng nằm trên một đường thẳng.

Bài 15. Chứng minh rằng với một tứ diện bất kỳ đều tồn tại hai mặt phẳng sao cho tỉ số diện tích của hình chiếu tứ diện lên các mặt phẳng này không nhỏ hơn $\sqrt{2}$.

Bài 16. Xét n số $a_1, a_2, \dots, a_n$. Đặt

$$b_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) / k \text{ với } k = 1, 2, \dots, n;$$

$$C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2;$$

$$D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2.$$

Chứng minh bất đẳng thức $C \leq D \leq 2C$.

Bài 17. Xét chuỗi số $x_n = (1 + \sqrt{2})^n$.
Mỗi số hạng của chuỗi được đưa về dạng

$$x_n = q_n + r_n \sqrt{2} + s_n \sqrt{3} + t_n \sqrt{6}$$

trong đó q_n, r_n, s_n, t_n là những số nguyên tìm các giới hạn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n/q_n); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n/q_n); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n/q_n)$$

Trong các bài trên, học sinh lớp 8 làm các bài 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, lớp 9 phải làm các bài 1, 2, 5, 6, 9, 10, học sinh lớp 10 phải làm các bài 4, 6, 14, 15, 16, 17.

Dưới đây chúng tôi gợi ý cách giải một số bài, mong các bạn hãy giải quyết.

Bài 1. Trong dãy số $\{a_n\}$ mỗi số k xuất hiện đúng $2k$ lần, bởi vì điều kiện tương đương với:

$$k - 1/2 < \sqrt{n} < k + 1/2$$

$$\text{hay: } k^2 - k < n \leq k^2 + k.$$

Từ đó các bạn sẽ tính được tổng bằng 88.

Bài 2. Có thể tịnh tiến tam giác BCD về t BA để có tam giác AED . Sau đó nối các điểm A, C, E và D nằm trên một đường tròn và suy ra điều cần chứng minh.

Bài 3. Nếu $1978^m - 1$ chia hết cho 1000^m thì số $1978^m - 1000^m = 2^m (989^m - 500^m)$ chia hết cho d . Vì d lẻ nên suy ra $989^m - 500^m$ chia hết cho d , điều này không thể xảy ra.

Bài 4. a) Xét đoạn $P_n Q_n$ nằm trên đường thẳng AB , có độ dài 3^n với tâm trùng điểm A . Xét đoạn AB , có thể thấy rằng tất cả các điểm K_n là các điểm của $P_n Q_n$ sao cho khoảng cách từ các điểm này đến A (không kể P_n và Q_n) là các số nguyên. Giá trị nhỏ nhất của n tìm phải thỏa mãn điều kiện: khoảng cách không nhỏ hơn 1000. Từ đó suy ra $n = 7$.

b) Diện tích cần tìm bằng $(3^{2n+1} - 1)/2$.

c) Đa diện có 12 đỉnh, 14 mặt, bao gồm hình chữ nhật, 8 mặt tam giác đều.

d) thể tích bằng 63.

e) Thể tích bằng $(5 \cdot 3^{3n} - 3^{n+1})/2$.

Bài 5. b) $\alpha \geq (1 + \sqrt{5})/2$.

Bài 6: Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\} = \{n\sqrt{2}\}$ kí hiệu phần lẻ của số $n\sqrt{2}$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

(Xem tiếp trang 16)

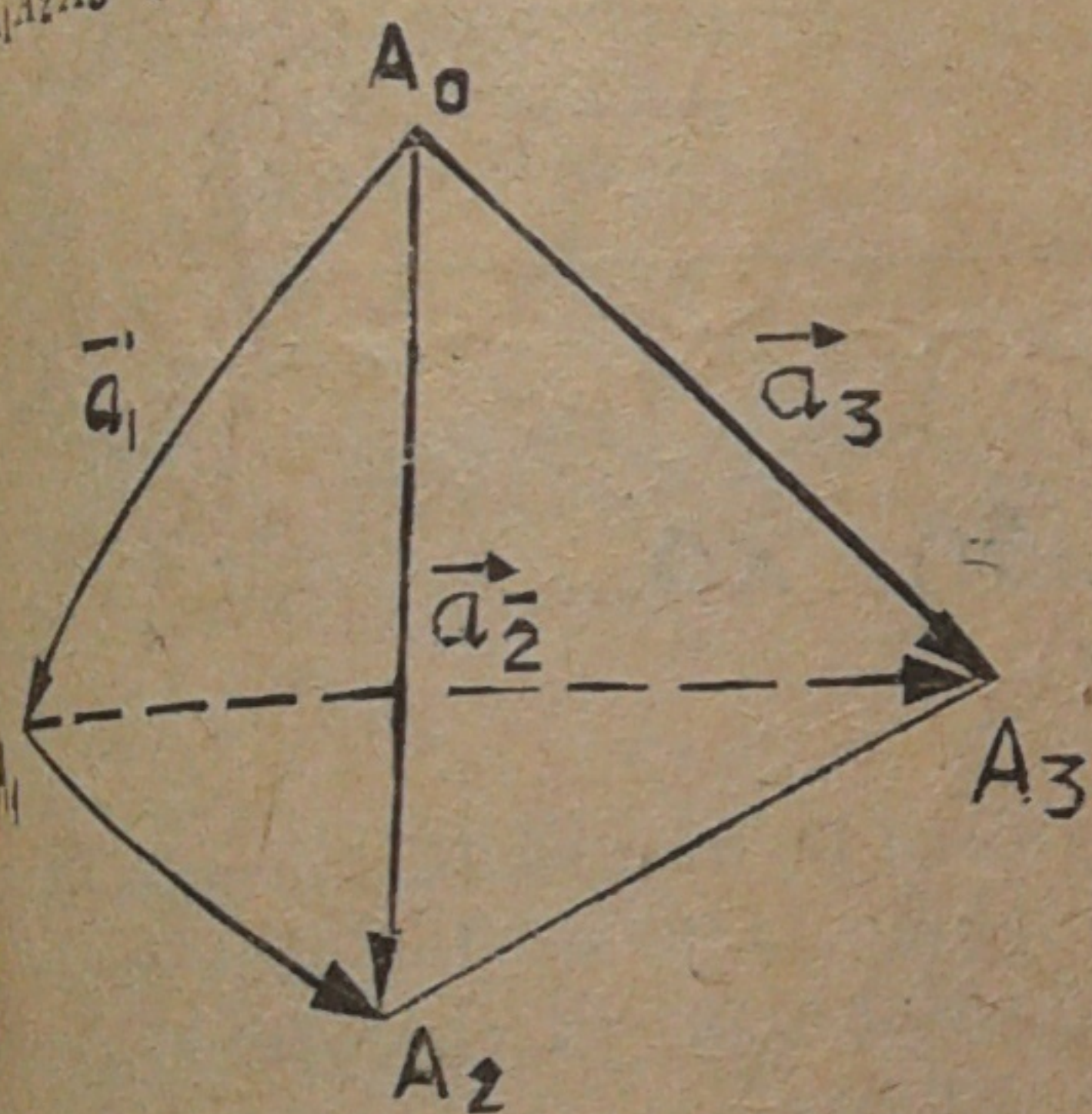
MỞ RỘNG CÔNG THỨC CÔSIN

VŨ HOÀNG THÁI

Trong toán học và tuổi trẻ số 90 (tháng 10) đã đăng bài "Công thức cosin", đó là bài đã chứng minh công thức cosin bằng hình học và có dùng công thức cosin của góc tam diện (hay công thức của tam giác cầu).

Bài này tôi chứng minh lại công thức cosin bằng đại số vectơ dùng đến công thức cosin của góc

trong không gian ta có một hình tứ diện $A_0A_1A_2A_3$ (hình 1), nếu ta đặt các vectơ



Hình 1

thì các vectơ $\vec{A_0A_1} = \vec{a_1}$, $\vec{A_0A_2} = \vec{a_2}$, $\vec{A_0A_3} = \vec{a_3}$, thì các vectơ $\vec{A_1A_2}$ lần lượt sẽ là $\vec{a_2} - \vec{a_1}$, $\vec{a_3} - \vec{a_1}$.

Gọi s_0, s_1, s_2, s_3 lần lượt là các vectơ (các vectơ mà môđun của chúng tương ứng các diện tích của các tam giác của tứ diện hướng của chúng được xác định bởi vectơ trong các công thức (1) sau đây) của tam giác lần lượt đối diện với các đỉnh A_0, A_1, A_2, A_3 .

$$\begin{aligned} \vec{s_0} &= (1/2) [\vec{a_2} - \vec{a_1}, \vec{a_3} - \vec{a_1}] \\ &= (1/2) ([\vec{a_2} \vec{a_3}] - [\vec{a_2} \vec{a_1}] - [\vec{a_1} \vec{a_3}]) \\ &= (1/2) ([\vec{a_2} \vec{a_3}] + [\vec{a_1} \vec{a_2}] + [\vec{a_3} \vec{a_1}]) \end{aligned} \quad (2)$$

Thay các công thức (1) vào công thức (2) ta có:

$$\vec{s_0} = \vec{s_1} + \vec{s_2} + \vec{s_3} \quad (3)$$

Bình phương hai vế công thức (3) ta có:

$$s_0^2 = \sum_{i=1}^3 s_i^2 + 2 \sum_{j < k} s_j s_k \cos(s_j, s_k) \quad (4)$$

$$j = 1, 2; k = 2, 3; j < k.$$

Từ các công thức (1) ta thấy rằng các vectơ $\vec{s_1}, \vec{s_2}, \vec{s_3}$ tạo thành một góc tam diện bù với góc tam diện tạo thành bởi các vectơ $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$. Vì vậy nếu ký hiệu (s_j, s_k) ($j = 1, 2; k = 2, 3; j < k$) là các góc phẳng của các nhị diện tạo thành bởi các tam giác có các diện tích s_1, s_2, s_3 thì các góc tạo thành bởi các cặp vectơ $(\vec{s_j}, \vec{s_k})$ ($j = 1, 2; k = 2, 3; j < k$) sẽ bù với các góc phẳng của các góc nhị diện (s_j, s_k) ($j = 1, 2; k = 2, 3; j < k$), tức là:

$$(\vec{s_j}, \vec{s_k}) + (s_j, s_k) = \pi \quad (5)$$

$$j = 1, 2; k = 2, 3; j < k$$

Từ các công thức (4) và (5) ta có:

$$s_0^2 = \sum_{i=1}^3 s_i^2 - 2 \sum_{j < k} s_j s_k \cos(s_j, s_k) \quad (6)$$

hoặc:

$$\begin{aligned} s_0^2 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2[s_1 s_2 \cos(s_1, s_2) + \\ &+ s_1 s_3 \cos(s_1, s_3) + s_2 s_3 \cos(s_2, s_3)] \end{aligned} \quad (6')$$

Ta gọi đó là công thức cosin cho hình tứ diện.

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= (1/2) [\vec{a_2} \vec{a_3}] \\ s_2 &= (1/2) [\vec{a_3} \vec{a_1}] \\ s_3 &= (1/2) [\vec{a_1} \vec{a_2}] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

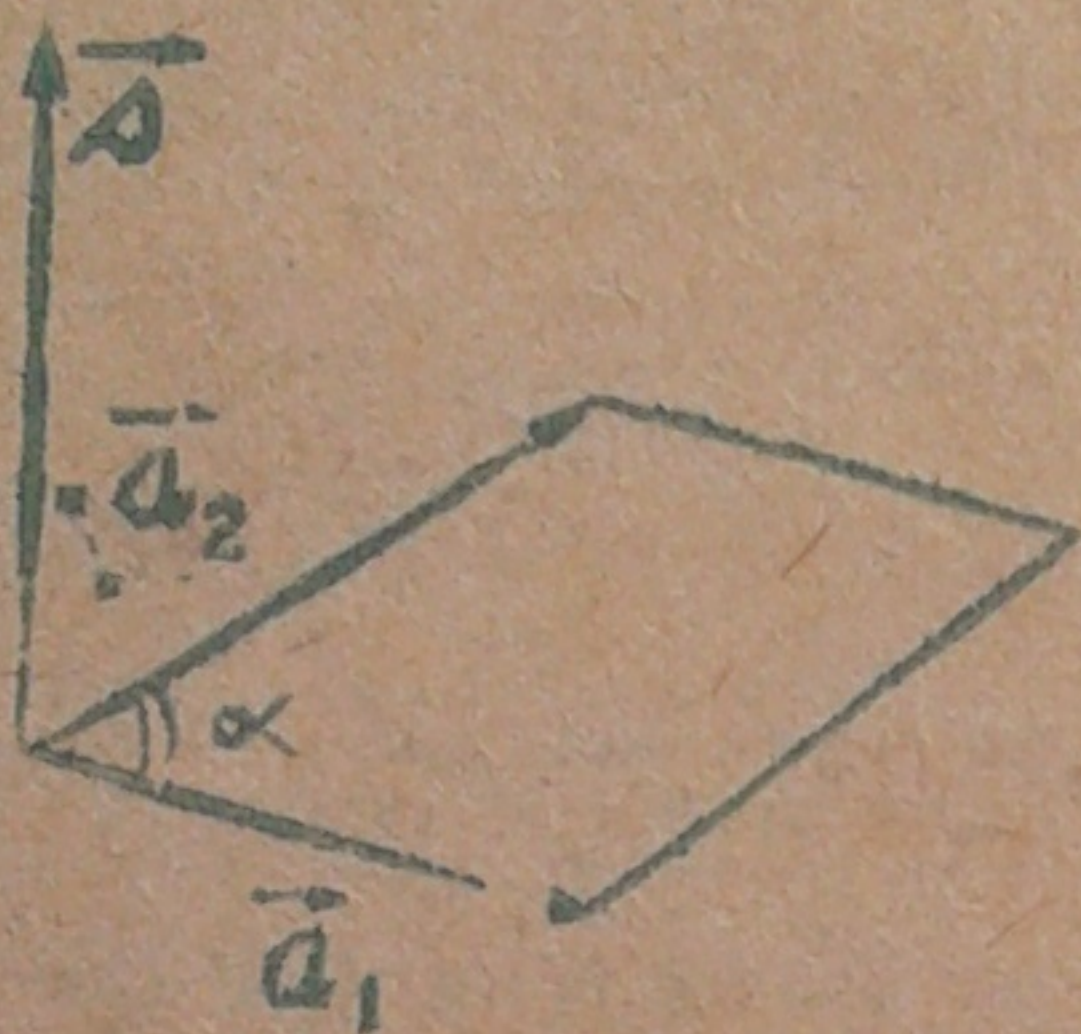
Nếu tứ diện $A_0A_1A_2A_3$ là một tứ diện vuông, và A_0 là đỉnh góc vuông của tứ diện đó thì công thức (6') khi đó có dạng sau:

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

Ta gọi đó là công thức Pitago cho hình tứ diện vuông.

Chú thích:

Ký hiệu $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ là tích vector (tích có hướng) của hai vector $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$.



Tích vector của hai vector $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ là một vector $\vec{s}$ (chú ý thứ tự của $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$).

$$\vec{s} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$$

mà môđun của vector $\vec{s}$ (ký hiệu $|\vec{s}|$) bằng diện tích của hình bình hành mà hai cạnh là hai vector $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$; còn hướng của $\vec{s}$ vuông góc với mặt phẳng xác định bởi $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ và chiều của $\vec{s}$ được xác định theo chiều của cái vặn nút chai khi xoay từ vector $\vec{a}_1$ (hình 2). Nếu thay đổi thứ tự giữa $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ thì chiều của vector $\vec{s}$ sẽ đổi ngược lại, tức là:

$$[\vec{a}_2, \vec{a}_1] = -[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = -\vec{s}.$$

Như vậy nếu gọi α là góc giữa hai vector $\vec{a}_1$ và $\vec{a}_2$ thì ta có:

$$|\vec{s}| = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \sin \alpha$$

hay

$$s = a_1 a_2 \sin(\alpha_1, \alpha_2).$$

Tích vector của một vector với một vector

$$\vec{s} = [a(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)] = [a\vec{a}_1] + [a\vec{a}_2].$$

Tích vector của hai vector tổng:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= [(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)(\vec{b}_1 - \vec{b}_2)] \\ &= [\vec{a}_1\vec{b}_1] - [\vec{a}_1\vec{b}_2] - [\vec{a}_2\vec{b}_1] + [\vec{a}_2\vec{b}_2] \end{aligned}$$

Kỳ thi toán toàn Liên xô...

(Tiếp theo trang 14)

Bài 7. Đặt $p_n = \underbrace{f(f(\dots f(m) \dots))}_n$. Đề ý rằng

$$\begin{aligned} p_{n+1} - 1 &= f(p_n) - 1 = p_n^3 - p_n \\ &= (p_n - 1) p_n (p_n + 1). \end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh với $l > k$ thì $p_l - 1$ chia hết cho $p_{k+1} - 1$ và p_k . Từ đó suy ra p_l, p_k nguyên tố cùng nhau.

Bài 8. Đề ý đến giao điểm M của đồ thị hàm số $y = A \sin x$ với ảnh của đồ thị này qua phép quay tâm O góc quay 90° . Quay điểm M quanh O với lần lượt các góc quay $90^\circ, 180^\circ$, và 270° ta có các điểm K, L và N nằm trên đồ thị hàm số $y = A \sin x$ mà hình vuông $KLNM$ nội tiếp đồ thị này. Cho A đủ lớn (chẳng hạn $A > 1000\pi$) thì có thể chọn nhiều hơn 1978 điểm M mà khoảng cách từ đó đến O là khác nhau.

Bài 9. a) Có thể được.

b) Không được. Chú ý rằng trong tất cả các phiếu thi hiệu hai số phải chia hết cho 7, nhưng $100 - 1$ không chia hết cho 7.

c) Gọi d là ước số lẻ lớn nhất của $b - 1$ đó từ phiếu (a, b) có thể nhận được phiếu khi và chỉ khi $n - 1$ chia hết cho d .

Bài 11. Hãy tìm cách chia bản cờ thành hình domino.

Bài 12. Không phải luôn luôn làm được.

Bài 14. Có thể chọn các điểm $A_k = (k, r(k))$ với $k = 0, 1, \dots, p - 1$ và $r(k)$ là số dư trong chia k^2 cho p .

Bài 15. Qua hai cạnh đối diện các cạnh của hai mặt phẳng P và P' song song với nhau xét mặt phẳng Q vuông góc với mặt phẳng P và P' .

Bài 16. Các bạn có thể chứng minh được hay không.

Bài 17. Kết quả cần tìm là:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n/q_n) = 1/\sqrt{2}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} ((S_n/q_n)) = 1/\sqrt{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n/q_n) = 1/\sqrt{6}.$$