TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và tuổi trẻ

1

1981

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

...nhiệm: NGUYỄN CẢNH TOÀN

...sở: 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHÚNG

Dây nói: 52825

THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN TOÀN QUỐC NĂM 1980

LÊ HẢI CHÂU

...thi chọn học sinh giỏi toán toàn quốc cho ...lớp cuối cấp 3 phổ thông đã được tổ chức ...vào hai ngày 5 và 6 tháng 3 năm 1980. ...tỉnh, thành phố từ Bắc đến Nam và ba ...đại học có khối phổ thông chuyên toán ...thành lập các đội tuyển của đơn vị mình để ...gia kỳ thi.

...đây là đầu bài thi gồm 6 bài toán cùng ...nhận định về ưu, khuyết của học sinh qua ...bài.

...i 1. *Cho các góc* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ *với* ... 180° $(i = 1, 2, \ldots n)$ *sao cho giá trị của*

...$(1 + \cos\alpha_i)$ *là một số nguyên lẻ. Chứng minh*

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \geqslant 1.$$

...có một vài học sinh dự thi làm được bài ...Phần lớn đã chứng minh bằng qui nạp nên không đúng. Một số lại dùng phương pháp phản chứng nhưng không thành công. Nhiều học sinh tỏ ra chưa nắm vững các công thức biến đổi lượng giác, hoặc kiến thức còn yếu, chẳng hạn cho rằng vì tổng đã cho $\sum_{i=1}^{n}(1 + \cos\alpha_i)$ là số lẻ nên n phải lẻ và các số $1 + \cos\alpha_i$ phải lẻ.

Bài 2. *Gọi T là tổng các số dương* $m_1, m_2, \ldots, m_k$. *Chứng minh rằng*
$$(m_1 + 1/m_1)^2 + \ldots + (m_k + 1/m_k)^2 \geqslant k(k/T + T/k)^2.$$

Phần lớn học sinh dự thi làm được bài này nhờ sử dụng khá thành thạo hai bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki và Cô-si.

Bài 3. *Cho P là một điểm nằm trong tam giác* $A_1A_2A_3$. *Đường thẳng* PA_i *cắt cạnh đối diện tại điểm* B_i. *Gọi* C_i *là trung điểm của* A_iB_i, *và* D_i *là trung điểm của* PB_i. *Hãy so sánh diện tích của hai tam giác* $C_1C_2C_3$ *và* $D_1D_2D_3$.

Rất ít học sinh dự thi làm được trọn vẹn bài này. Nhiều học sinh thường loay hoay với hình vẽ và không tìm ra đường lối chứng minh.

Bài 4. *Chứng minh rằng với mọi hình tứ diện ta đều tìm được trong không gian hai mặt phẳng sao cho tỉ số diện tích của các hình chiếu vuông góc của hình tứ diện lên hai mặt phẳng đó không nhỏ hơn $\sqrt{2}$.*

Số làm được đầy đủ bài này không nhiều. Trí tưởng tượng không gian của phần lớn học sinh còn kém. Do bài ra chỉ rõ là tỉ số diện tích các hình chiếu không nhỏ hơn $\sqrt{2}$ nên nhiều học sinh đã cố gò lập luận và tính toán cho tới kết quả này, trong khi hai mặt phẳng được chọn đều không đúng.

Bài 5. *Phương trình $z^3 - 2z^2 - 2z + m = 0$ có thể có ba nghiệm số hữu tỉ phân biệt không, tại sao?*

Bài này tuy dễ nhưng lại có nhiều học sinh làm sai. Khá đông đã cho rằng phương trình này có ba nghiệm số hữu tỉ phân biệt, nếu m là số hữu tỉ, hoặc nếu m là số nguyên. Có bạn đã lý luận kỳ lạ như sau: chỉ cần cho $m = -z$ là có ngay phương trình $z^3 - 2z^2 - 3z = 0$ và phương trình này rõ ràng có 3 nghiệm số là $z_1 = 0$, $z_2 = -1$ và $z_3 = 3$.

Một số học sinh đã khảo sát và vẽ đồ thị hai hàm số $y_1 = z^3 - 2z^2 - 2z$ và $y_2 = -m$ và kết luận sai là phương trình có 3 nghiệm hữu tỉ phân biệt nếu $-0{,}4 < m < 4{,}3$, hoặc nếu $m > 0$...

Một số khác khẳng định đúng là phương trình đã cho không thể có 3 nghiệm hữu tỉ phân biệt, nhưng khi chứng minh thì hoặc lập luận thiếu chính xác, sai lầm, hoặc công nhận độc đoán, hoặc làm mò.

Bài 6. *Cho số nguyên $n > 1$ và số thực $p > 0$. Tìm giá trị cực đại của $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$, khi các x_i chạy khắp mọi giá trị thực không âm sao cho $\sum_{i=1}^{n} x_i = p$.*

Một số học sinh đã có cách chứng minh khá gọn và tìm được giá trị cực đại là $p^2/4$. Tuy nhiên nhiều học sinh đã lập luận sai lầm, chẳng hạn cho là x_i đóng vai trò như nhau nên có thể giả thiết $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, hoặc khẳng định giá trị cực đại của tổng phải tìm đạt được khi x_1 hoặc $x_n = 0$ do vai trò như nhau của x_1 và x_n rồi tìm cách chứng minh bằng qui nạp mà không ra.

Kỳ thi năm nay không có giải nhất và giải nhì mà chỉ có hai giải ba. Như vậy kết quả không như mong muốn. Thiếu sót chủ yếu ... sinh là nắm một số kiến thức chưa vững ... luận thường sơ hở, thiếu chặt chẽ, thiếu ... xác (có nhiều điều ngộ nhận), trí tưởng ... không gian còn yếu.

Xin trình bày lời giải một số bài để ... tham khảo.

Lời giải bài số 1.

Theo giả thiết $\sum_{i=1}^{n} (1 + \cos\alpha_i)$ là một số nguyên lẻ, nên ta có thể viết tổng đó như sau:

$$\sum_{i=1}^{n} (1 + \cos\alpha_i) = 2 \sum_{i=1}^{n} \cos^2(\alpha_i/2) = 2a + 1$$ (a nguyên không âm).

Gọi tổng $\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i = S$, ta phải chứng minh ... $S \geqslant 1$.

Ta viết tổng S như sau:

$$S = \sum_{i=1}^{n} 2\sin(\alpha_i/2)\cos(\alpha_i/2) \geqslant$$

$$2\sum_{i=1}^{k} \sin^2(\alpha_i/2) + 2\sum_{i=k+1}^{n} \cos^2(\alpha_i/2).$$

Để cho gọn ta đặt

$$2\sum_{i=1}^{k} \sin^2(\alpha_i/2) = M \text{ và } 2\sum_{i=k+1}^{n} \cos^2(\alpha_i/2) = N,$$

với $M \geqslant 0$, $N \geqslant 0$. Như thế $S \geqslant M + N$. Ta ... hai trường hợp sau đây:

1) Nếu $N \geqslant 1$ thì ta suy ra ngay $S \geqslant 1$.

2) Nếu $N < 1$, ta biến đổi như sau:

$$M = 2\sum_{i=1}^{k} \sin^2(\alpha_i/2) = 2\sum_{i=1}^{k} \left[1 - \cos^2(\alpha_i/2)\right]$$

$$= 2k - 2\sum_{i=1}^{k} \cos^2(\alpha_i/2) \geqslant 0$$

Suy ra

$$2k \geqslant 2\sum_{i=1}^{k} \cos^2(\alpha_i/2) = 2a + 1 - N.$$

Từ đó $2k > 2a$ hay $k > a$.

Vì a và k nguyên nên $k \geqslant a + 1$ hay $2k \geqslant 2a + 2$.

Vậy $S \geqslant 2k - (2a + 1 - N) + N \geqslant 1 + 2N$.

Do $N > 1$ nên $S > 1$.

Lời giải bài số 3.

Gọi (XYZ) là *diện tích có dấu* của tam giác XYZ, tức là $(XYZ) = -(XZY)$.

...giác đồng dạng $D_1D_2D_3$ và $B_1B_2B_3$ (... vẽ hình), ta có ngay hệ thức

$$(D_1D_2D_3) = (B_1B_2B_3) \qquad (1)$$

...nhận xét: nếu M là trung điểm của ... thì với hai điểm R, S tùy ý ta có

$$2(RSM) = (RSP) + (RSQ)$$

Hình 1

...điều nhận xét này, ta có:

$$...= 4(C_1C_2B_3) + 4(C_1C_2A_3)$$

$$= 2(C_1B_2B_3) + 2(C_1A_2B_3) + 2(C_1B_2A_3) + 2(C_1A_2A_3)$$

$$= (B_1B_2B_3) + (A_1B_2B_3) + (B_1A_2B_3) + (A_1A_2B_3) + (B_1B_2A_3) + (A_1B_2A_3) + (B_1A_2A_3) + (A_1A_2A_3)$$

...có:

$$(A_1A_2B_3) = (A_1B_2A_3) = (B_1A_2A_3) = 0$$

$$(A_1A_2A_3) + (A_1B_2B_3) + (B_1A_2B_3) + (B_1B_2A_3)$$

$$... (B_1B_2B_3).$$

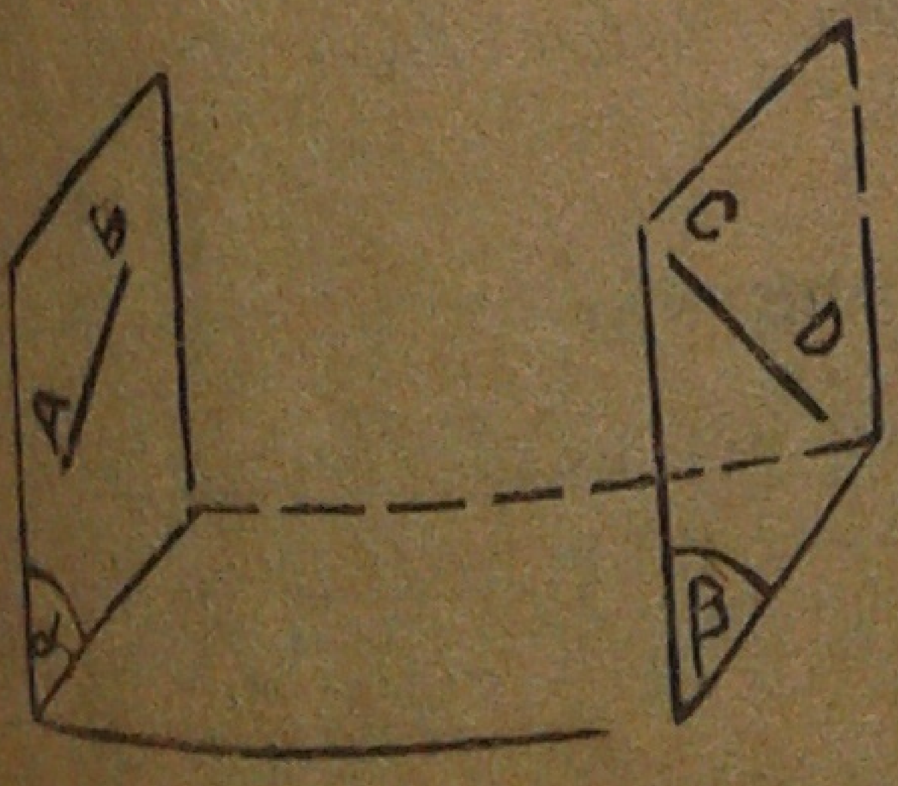
$$8(C_1C_2C_3) = 2(B_1B_2B_3) \qquad (2)$$

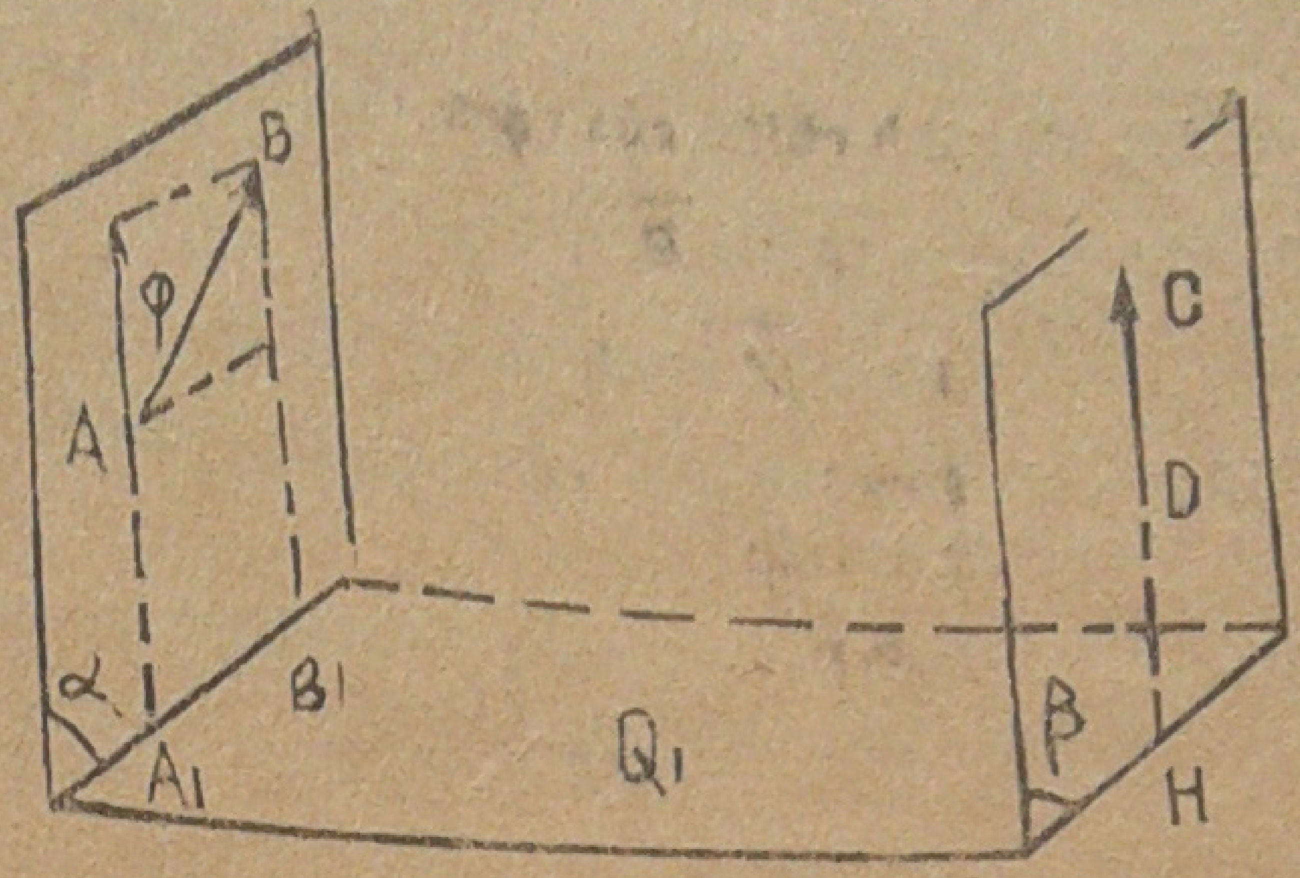
...và (2) ta có:

$$(C_1C_2C_3) = (D_1D_2D_3).$$

...giải bài số 4 *của học sinh Nguyễn Thành* ...ba).

...tứ diện đã cho là $ABCD$. Qua AB và CD ...mặt phẳng song song (theo định lý qua ...thẳng chéo nhau luôn vẽ được hai ...duy nhất song song với nhau). Gọi ...qua AB là α, mặt phẳng qua CD là ...chứng minh rằng trong tất cả mặt phẳng ...vuông góc với α và β sẽ có hai mặt phẳng ...diện tích các hình chiếu vuông góc ...tứ diện $ABCD$ lên hai mặt phẳng đó ...nhỏ hơn $\sqrt{2}$.





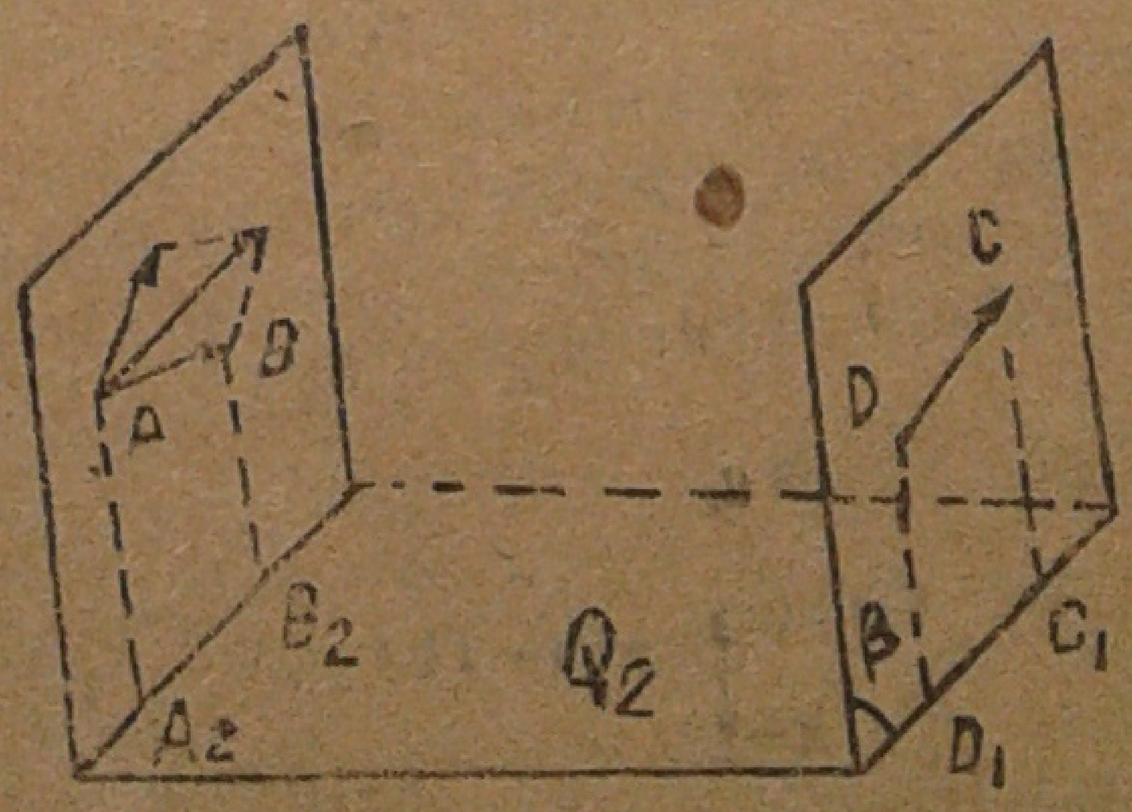
Không mất tính tổng quát ta giả sử $AB \leqslant CD$ và ta có thể giả thiết góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ là góc không tù φ (vì nếu góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ tù thì ta sẽ lấy góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không tù)

Gọi Q_1 là mặt phẳng vuông góc với hai mặt phẳng α, β sao cho Q_1 vuông góc với CD. Hình chiếu vuông góc của AB xuống Q_1 là A_1B_1, hình chiếu vuông góc của CD xuống Q_1 là H. Thế thì hình chiếu vuông góc của tứ diện $ABCD$ là A_1B_1H. Ta có $A_1B_1 = AB\sin\varphi$, vì $A_1B_1 = AB\cos(\pi/2 - \varphi)$.

Gọi h là khoảng cách giữa hai mặt phẳng α và β. Thế thì khoảng cách từ H xuống A_1B_1 chính là h. Vậy diện tích tam giác A_1B_1H bằng:

$$S(A_1B_1H) = ABh\sin\varphi/2.$$

Gọi Q_2 là mặt phẳng vuông góc với hai mặt phẳng α và β sao cho Q_2 song song với vectơ tổng của hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$. Gọi A_2B_2, D_1C_1 là hình chiếu vuông góc của AB và DC xuống Q_2. Ta thấy $\overrightarrow{A_2B_2}$ và $\overrightarrow{D_1C_1}$ cộng tuyến với nhau và cùng chiều (vì nếu chẳng hạn $\overrightarrow{A_2B_2}$ ngược chiều với vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ suy ra góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ tù, góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ tù, vô lý).



Ta biết hình chiếu của vectơ tổng bằng tổng hình chiếu các vectơ, tức hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ bằng tổng hình chiếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$

và $\overrightarrow{DC}$. Mà hình chiếu của vectơ $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$ xuống Q_2 chính bằng $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$, vậy

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}| = A_2B_2 + D_1C_1$$

Hình chiếu vuông góc của tứ diện $ABCD$ là hình thang $A_2B_2C_1D_1$

và $$S(A_2B_2C_1D_1) = ((A_2B_2 + C_1D_1)/2)h$$
$$= (|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|/2)h.$$

Ta chứng minh rằng

$$S(A_2B_2C_1D_1) > \sqrt{2}\, S(A_1B_1H)$$

Thật vậy

$$S^2(A_2B_2C_1D_1) = (h^2/4)\,(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{DC}|\cos\varphi)$$
$$\geqslant (h^2/4)\,(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{DC}^2).$$

Vì $AB \leqslant CD$ hay $\overrightarrow{AB}^2 \leqslant \overrightarrow{DC}^2$, nên

$$S^2(A_2B_2C_1D_1) \geqslant (h^2/4)2AB^2 \geqslant 2.h^2AB^2\sin^2\varphi/4$$
$$= 2S^2(A_1B_1H).$$

Từ đó ta có $S(A_2B_2C_1D_1) \geqslant \sqrt{2}\, SA_1B_1H)$

Vậy $$S(A_2B_2C_1D_1)/S(A_1B_1H) \geqslant \sqrt{2}$$

Vậy hai mặt phẳng Q_1 và Q_2 là hai mặt phẳng tìm được thỏa mãn đầu bài.

Lời giải bài số 5.

Giả sử các nghiệm số của phương trình bậc ba $z^3 - 2z^2 - 2z + m = 0$ là u/t, v/t, w/t, trong đó u, v, w, t là những số nguyên và không phải tất cả là chẵn.

Như thế, theo định lý Vi-et mở rộng ta có

$$u + v + w = 2t, \quad uv + vw + wu = -2t$$

nên tổng $u^2 + v^2 + w^2 = 4t(t+1)$ chia hết cho 8. Điều này chứng tỏ rằng u, v, w phải chẵn.

Nhưng $t/2 = -u/2.v/2 - v/2.w/2 - w/2.u/2$ cũng là số nguyên. Ta gặp phải điều mâu thuẫn! Vậy phương trình $z^3 - 2z^2 - 2z + m = 0$ không thể có ba nghiệm số hữu tỉ phân biệt.

Lời giải bài số 6.

Cho $x_k = \max(x_1, \ldots, x_n)$. Thế thì:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=k}^{n-1} x_i x_{i+1} \leqslant$$

$$\leqslant x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \sum_{i=k}^{n-1} x_{i+1} = x_k(p - x_k) \leqslant p^2/4.$$

Vậy giá trị cực đại của $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$ là p^2/[illegible] được khi $x_k = p/2$, $x_{k+1} = p/2$, với $1 \leqslant k \leqslant$ [illegible]

$$x_i = 0 \text{ với } i \neq k \text{ và } i \neq k+1.$$

Sau đây là kết quả của kỳ thi.

1. Các đội của ba trường đại học.

Không có giải nhất và giải nhì.

Giải ba: *Nguyễn Thành Lân* – Trường [illegible] học Sư phạm Vinh.

Giải tư: *Dương Tấn Thành* – Trường đại [illegible] Tổng hợp Hà Nội.

2. Các đội của các tỉnh và thành [illegible]

Giải cá nhân:

Không có giải nhất và giải nhì.

Giải ba: *Nguyễn Văn Hiếu* – Trường [illegible] học Huế.

Giải tư:

1) *Lê Mạnh Hải* – Trường Chu Văn An, Hà [illegible]

2) *Hà Thúc Dương* – Trường Quốc học [illegible]

3) *Nguyễn Minh Tuấn* – Trường Quốc học [illegible]

4) *Lê Thái Bắc* – Trường Nguyễn Trãi, [illegible] Bình.

Giải khuyến khích:

1) *Nguyễn Chương Chí* – Trường Nguyễn [illegible] Thái Bình.

2) *Nguyễn Hồng Cơ* – Trường Chu Văn [illegible] Hà Nội.

3) *Đỗ Văn Dương* – Trường Nguyễn [illegible] Thái Bình.

4) *Nguyễn Văn Tân* – Trường Hàm [illegible] Thanh Hóa.

Giải đồng đội:

Không có giải nhất. *Giải nhì*: Bình Trị Thiên [illegible] *Giải ba*: Thái Bình. *Giải khuyến khích*: Hà N[illegible] Thanh Hóa, Thành phố Hồ Chí Minh và [illegible] Hưng.

MỘT PHƯƠNG PHÁP ĐỀ CHỨNG MINH VÀ SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN NGỌC KHUÊ

...thân mến!

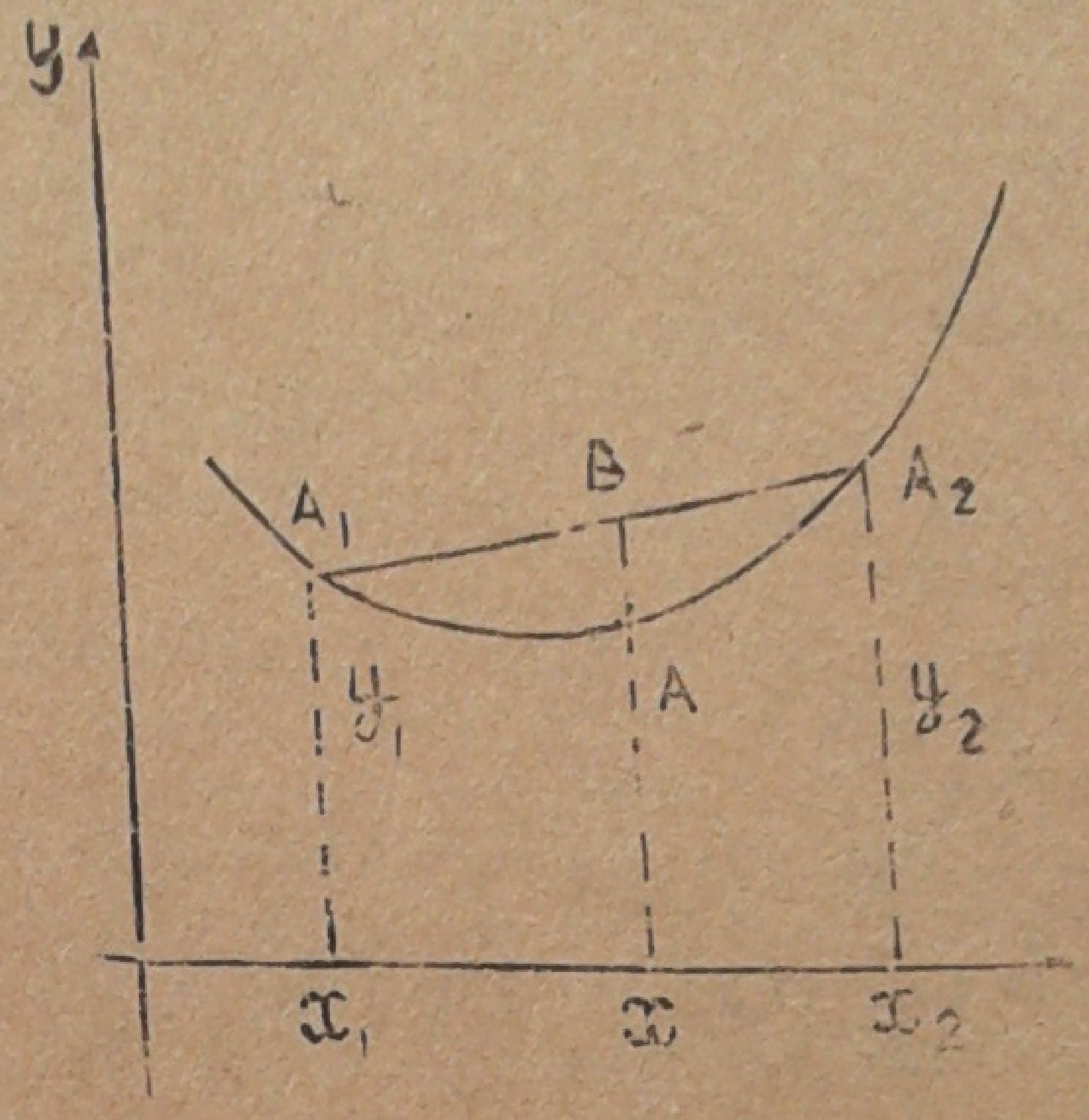
...triển đi lên của toán học là một quá ...quát. Những hiểu biết lẻ tẻ dần dần ...nhất lại trong những lý thuyết tổng ...lần đạt được một sự khái quát hóa ...không những chúng ta có một công cụ ...để chứng minh những hiểu biết cũ ...cách nhìn thống nhất mà còn là một ...để sáng tạo cái mới. Lâu nay, các bạn ...trong báo Toán học và tuổi trẻ hay ...kỳ thi giỏi toán những bài chứng minh ...đẳng thức; mỗi lần phải chứng minh ...lại phải đau đầu nghĩ ra một cách riêng. ...bạn cũng băn khoăn không biết người ...tìm ra bất đẳng thức đó họ tìm ra ...nào. Trong bài này tôi cố gắng cung ...các bạn một phương pháp để chứng ...sáng tạo bất đẳng thức. Bạn sẽ gặp lại ...một số bất đẳng thức đã từng gặp trong ...học và tuổi trẻ nhưng lần này được ...minh bằng một phương pháp chung. Và ...thử dùng phương pháp này để tự tìm ...bất đẳng thức mới. Phương pháp tôi ...bày là phương pháp dùng tính chất ...của hàm số; nó rất đơn giản vì phát ...một hàm số là lồi hay lõm là một việc ...giản, chỉ việc dựa vào dấu của đạo hàm ...thể là trong khoảng nào mà $y'' > 0$ ...số lồi trong khoảng đó, $y'' \leqslant 0$ thì hàm ...và ngược lại).

I – ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ LỒI

...số $y = f(x)$ xác định và liên tục trong ...gọi là lồi trong khoảng đó nếu đối ...$x_1, x_2 \in X$ và với mọi số dương $q_1, q_2 > 0$ ...$= 1$) ta có:

$$...x_1 + q_2x_2) \leqslant q_1f(x_1) + q_2f(x_2) \qquad (1)$$

...mặt hình học điều đó có nghĩa là mọi ...bất cứ cung A_1A_2 nào của đồ thị đều ...dưới cát tuyến A_1A_2 hoặc cùng lắm là nằm ...trên cát tuyến A_1A_2.



Thực vậy, biểu thức $x = q_1x_1 + q_2x_2$ (2) (với $x_1 < x_2$) với sự lựa chọn q_1, q_2 như trên sẽ thỏa mãn $x_1 < x < x_2$ (tức là nằm trong khoảng x_1 đến x_2):

vì $x = q_1x_1 + q_2x_2 > q_1x_1 + q_2x_1 = (q_1 + q_2)x_1 = x_1$,

$x = q_1x_1 + q_2x_2 < q_1x_2 + q_2x_2 = (q_1 + q_2)x_2 = x_2$

Ngược lại bất cứ điểm x nào trong $[x_1, x_2]$ đều biểu diễn được ở dạng (2) với

$q_1 = (x_2 - x)/(x_2 - x_1)$, $q_2 = (x - x_1)/(x_2 - x_1)$.

Phương trình cát tuyến A_1A_2 là

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

do đó $y(B) = y(q_1x_1 + q_2x_2) = q_1y_1 + q_2y_2$

$= q_1f(x_1) + q_2f(x_2) =$ vế phải ở (1).

Về mặt hình học $f(A) < y(B)$ chính là (1).

3) Có thể chứng minh bằng quy nạp rằng bất đẳng thức (1) là trường hợp $n = 2$ của bất đẳng thức sau đây:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) \qquad (3)$$

(với mọi $q_i > 0$ và $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$)

Bất đẳng thức (3) gọi là bất đẳng thức Jensen ; có thể dùng nó để định nghĩa cho hàm số lồi. (3) được mở rộng cho các số $q_i > 0$ bất kỳ không nhất thiết có tổng bằng đơn vị, cụ thể là :

$$f(\Sigma q_i x_i / \Sigma q_i) \leqslant \Sigma q_i f(x_i)/\Sigma q_i \qquad (4)$$

II – CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số $a_i, b_i > 0$, ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k b_i^{1-k} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1-k} \quad \text{với } k \geqslant 1 \text{ và}$$

$k < 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k b_i^{1-k} < \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^k \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1-k} \quad \text{với } 0 < k < 1$$

(mở rộng bất đẳng thức thứ hai của bạn Lê Quốc Hán đăng trong báo THvTT số 95, tháng 2 năm 1977).

Rõ ràng khi $k = 1$ thì ta có đẳng thức. Xét hàm số $y = x^k$ với $x > 0$: rõ ràng $y'' = k(k-1) \times x^{k-2} \Rightarrow y'' > 0$ với $k > 1$ và $k < 0$ còn $y'' < 0$ với $0 < k < 1$ nên hàm số $y = x^k$ là hàm số lồi trong khoảng $(0, \infty)$ với $k > 1$ và $k < 0$ và hàm số $z = -x^k$ là hàm số lồi trong khoảng $(0, \infty)$ với $0 < k < 1$. Áp dụng (3) với $q_i = b_i / \sum_j b_j$, $x_i = a_i/b_i$ cho hàm số y và z ta có :

1) $$\sum_i \frac{a_i^k}{b_i^{k-1}} / \sum_i b_i \geqslant \left(\sum_i a_i / \sum_i b_i\right)^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_i a_i^k b_i^{1-k} \geqslant \left(\sum_i a_i\right)^k \left(\sum_i b_i\right)^{1-k}$$

với $k > 1$ và $k < 0$.

2) $$\sum_i \left(-a_i^k b_i^{-k}\right) \left[b_i \left(\sum_j b_j\right)^{-1}\right] \geqslant -\left[\sum_i \left(a_i / \sum_j b_j\right)\right]^k,$$

đổi dấu hai vế và để ý đơn giản cả hai vế cho $B = \sum_i b_i$ ta có :

$$\sum_i a_i^k b_i^{1-k} < \left(\sum_i a_i\right)^k \left(\sum_i b_i\right)^{1-k} \quad \text{với } 0 < k < 1.$$

Ví dụ 2. (Bài thi đại số học sinh giỏi lớp 10 toàn miền Bắc năm học 1964 – 1965, đăng trong báo THvTT số 14, tháng 11 năm 1965).

1) Cho n số không âm x_i có tổng bằng a không đổi. Chứng minh rằng tổng $\sum_{i=1}^{n} x_i^m$ bé nhất khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ $(m \geqslant 1)$.

2) Người ta muốn chứa $1m^3$ bột hóa chất vào 8 thùng gỗ hình lập phương mà mỗi mặt là một tấm gỗ có bề dày không đáng kể. Giá tiền tấm như thế tỷ lệ với bình phương diện tích của nó. Hỏi phải chọn các cạnh $x_1, x_2, \ldots$ tám thùng gỗ ấy là bao nhiêu để tốn ít tiền nhất?

Bài giải : 1) Hàm $y = x^m$ $(m \geqslant 1)$ là hàm lồi vì $y'' \geqslant 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có (với $p_1 = p_2 = \ldots = 1$)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^m \geqslant n(\Sigma x_i/n)^m = a^m / n^{m-1}$$

và chỉ có dấu bằng khi $m = 1$ hoặc $m > 1$ và $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a/n$.

2) Theo đầu bài $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_8^3 = 1$.

Mỗi thùng thứ i cần 6 tấm gỗ diện tích x_i^2, giá tiền mỗi tấm tỉ lệ với bình phương diện tích cho nên giá tiền ít nhất nếu $\sum_{i=1}^{8} x_i^4$ bé nhất.

Đặt $y_i = x_i^3 \geqslant 0$, vấn đề là tìm cực tiểu

$$T = \sum_{i=1}^{8} y_i^{4/3} \text{ với } y_i \geqslant 0 \text{ và } y_1 + y_2 + \ldots + y_8 = 1$$

Theo phần trên ta có $y_1 = y_2 = \ldots = y_8 = 1/8$ tức là $x_1 = x_2 = \ldots = x_8 = 1/2$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $x_i > 0$, $n \geqslant 2$ và $x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha = x^\alpha$ thì :

1) $$\sum_i x_i^k < x^k \leqslant n^{\frac{k-\alpha}{\alpha}} \sum_i x_i^k$$

với $k > \alpha > 0$ và $k < \alpha < 0$.

2) $$\sum_i x_i^k / n^{\frac{\alpha-k}{\alpha}} \leqslant x^k < \sum_i x_i^k$$

với $0 < k < \alpha$ và $\alpha < k < 0$.

(Hoàn chỉnh, mở rộng bất đẳng thức trong «Bạn đọc tìm tòi» trong số báo 32 tháng 5-1967)

Bài giải : Xét hàm $f(y) = y^r$ hàm này lồi với $r > 1$ và lõm với $0 < r < 1$. Đặt $k = \alpha r$ ta có $k > \alpha > 0$ và $k < \alpha < 0$ nếu $r > 1$ và $0 < k < \alpha$, $\alpha < k < 0$ nếu $0 < r < 1$. Đặt $y_i = x_i^\alpha$, $y = x^\alpha$ ta có theo đầu bài $\sum_i y_i = y$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen (4) ta có :

$$\left(\sum_i y_i / n\right)^r \leqslant \sum_i y_i^r / n \text{ với } r > 1$$

và $\left(\sum_i y_i/n\right)^r \geqslant \sum_i y_i^r / n$ với $0 < r < 1$

$\leq n^{r-1} \sum_i y_i^r$ với $r > 1$; $y^r \geq n^{r-1} \sum_i y_i^r$ với

<1 hay là

$$x^k \leq n^{\frac{k-\alpha}{\alpha}} \sum_i x_i^k \text{ với } r > 1$$

$$x^k \geq \sum_i x_i^k / n^{\frac{\alpha-k}{\alpha}} \text{ với } 0 < r < 1.$$

hợp với kết quả trước của bài báo ta có phải chứng minh.

dụ 4. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy lder.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_i a_i^p)^{1/p} (\sum_i b_i^q)^{1/q}$$

$a_i, b_i > 0$; $p, q > 1$ và $1/p + 1/q = 1$.

Bài giải: Hàm $y = x^k$ với $x > 0, k > 1$ là hàm lồi nên áp dụng (1) ta có $(\sum_i p_i x_i)^k \leq (\sum_i p_i)^{k-1} \times \sum_i p_i x_i^k$. Đặt $p_i = b_i^{p/(p-1)}$ và x_i bằng $a_i b_i^{1/(1-p)}$ ta có ngay bất đẳng thức phải tìm.

Tóm lại qua các ví dụ trên ta thấy tác dụng to lớn của phương pháp hàm số lồi mà chủ yếu là bất đẳng thức Jensen. Nếu bạn biết lấy đạo hàm của $\log x$ (nó tỉ lệ với $1/x$) hoặc có một cách khác để chứng minh rằng $-\log x$ $(x > 0)$ lồi thì bạn còn mở rộng khả năng ứng dụng (3) hoặc (4); ví dụ để chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ thì

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n} \leq x_1^{x_1} x_2^{x_2} \ldots x_n^{x_n}$$

(bài số 5/85 của báo Toán học và tuổi trẻ). Và bạn hãy thử sáng tạo cái mới.

Bài 7/113. *Cho một đường tròn và một điểm cố định nằm trong đường tròn đó; hai điểm B và C nằm trên đường tròn đã cho sao cho AB vuông góc AC. Gọi B_1, C_1 theo thứ tự nằm trên cạnh AB sao cho*

$$\widehat{ABB_1} = \widehat{ABC}/3, \ \widehat{ACC_1} = \widehat{ACB}/3$$

Các đoạn thẳng BB_1 và CC_1 giao nhau tại A_1. Hãy nghiên cứu những tính chất của các tam giác $A_1B_1C_1$ khi B và C chạy trên đường tròn đã cho.

Lời giải (của *Đinh Hương Thịnh* – 11C1 Phú Nhuận, T.P. Hồ Chí Minh; *Tôn Thất Dũng* – PTCT Quốc học Huế; *Nguyễn Ngọc Khánh* – 9C Đoàn kết, Hà Nội...).

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Từ đó xét hai cặp tam giác bằng nhau IA_1C, B_1A_1C và IA_1B, C_1A_1B để rút ra hệ thức $A_1C_1 = A_1B_1$. Như vậy *tam giác $A_1B_1C_1$ luôn luôn cân*. Dễ thấy rằng góc A_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ luôn bằng 120^0, vậy *tam giác $A_1B_1C_1$ luôn đồng dạng với chính nó.*

Nhận xét. Thực ra điều kiện hai điểm B và C di chuyển trên đường tròn không có gì quan trọng; chỉ cần cho góc xAy vuông, B chạy trên Ax, C chạy trên Ay,... thì kết quả vẫn như trên.

T.T.T.

Bài 9/113. *Chứng minh rằng có thể dựng bằng thước và compa một tứ giác lồi cho biết bốn cạnh và góc xen giữa hai đường chéo.*

Lời giải.

Gọi độ dài bốn cạnh đã cho của tứ giác theo thứ tự là $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Bao giờ ta cũng có thể giả thiết AB là cạnh lớn nhất; φ là góc tạo bởi hai đường chéo AC, BD và nhìn đoạn AB. Ta đặt $AC = x$, $BD = y$. Theo đề bài thì a, b, c, d và là đã cho. Nếu dựng được x (hoặc y) thì dựng được hai tam giác ACB và ACD (hoặc ABD và CBD) và do đó dựng được tứ giác $ABCD$.

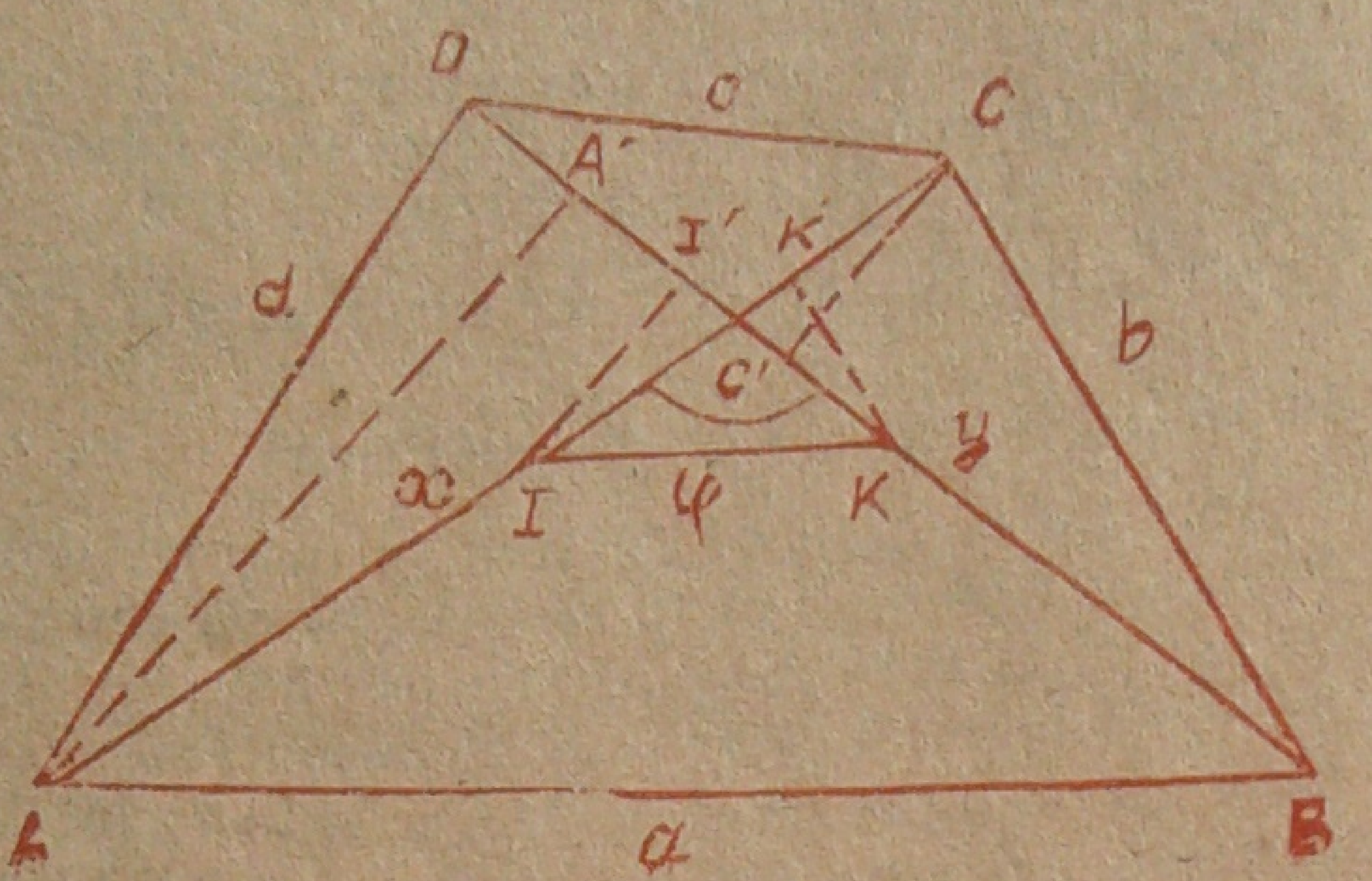
Ta có hệ thức sau đây:

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2xy\cos\varphi. \tag{1}$$

Thật vậy, sau khi chọn hướng dương từ B đến D trên đường thẳng (BD), ta có (gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AC và BD, A' và C' là hình chiếu vuông góc của hai điểm A và C trên đường thẳng (BD)):

$$b^2 - c^2 = 2yKC', \tag{2}$$

$$d^2 - a^2 = 2yA'K. \tag{3}$$



Cộng vế đối vế, ta được :

$$b^2+d^2-a^2-c^2=2y\,A'C' \qquad (4)$$

Mặt khác, $A'C'=AC\cos\varphi=x\cos\varphi$; thay $A'C'$ bằng $x\cos\varphi$ vào (4), ta được (1). Vì a, b, c, d, φ đã cho nên, với hệ thức (1), ta dựng được tích xy (tức là dựng được hình vuông có diện tích bằng xy).

Ngoài hệ thức (1) ở trên, ta còn có hệ thức :

$$a^2+b^2+c^2+d^2=x^2+y^2+4\,IK^2 \qquad (5)$$

Thật vậy, ta có :

$$a^2+b^2=x^2/2+2BI^2, \qquad (6)$$

$$c^2+d^2=x^2/2+2DI^2. \qquad (7)$$

Cộng vế đối vế và chú ý rằng $BI^2+DI^2=y^2/2+2IK^2$, ta được (5)

Nhưng ta chưa biết IK. Gọi L là giao của AC và BD, ta có :

$$IK^2=IL^2+KL^2-2IL.KL\cos\varphi. \qquad (8)$$

Gọi I' và K' là hình chiếu vuông góc của I, K theo thứ tự lên BD và AC, ta có (sau khi chọn hướng dương từ A đến C trên đường thẳng (AC)) :

$$IK'=IL+LK'=IL+LK\cos\varphi, \qquad (9)$$

$$KI'=KL+LI'=KL+LI\cos\varphi. \qquad (10)$$

Giải hệ (9) và (10), ta rút ra :

$$KL=(KI'+IK'\cos\varphi)/\sin^2\varphi, \qquad (11)$$

$$IL=(IK'+KI'\cos\varphi)/\sin^2\varphi \qquad (12)$$

Vì I' là trung điểm của $A'C'$ nên

$$KI'=(1/2)(KA'+KC').$$

Nhưng theo (2) và (3), ta có :

$$KC'=(b^2-c^2)/2y,\quad KA'=(a^2-d^2)/2y.$$

Vậy $KI'=(a^2+b^2-c^2-d^2)/4y$.

Tương tự như vậy, ta sẽ tính ra :

$$IK'=(a^2-b^2-c^2+d^2)/4x.$$

Để tiện viết, ta sẽ đặt :

$$\alpha=a^2+b^2+c^2+d^2,\quad \beta=a^2+b^2-c^2-\ldots$$
$$\gamma=a^2-b^2+c^2-d^2,\quad \delta=a^2-b^2-c^2+\ldots$$

Đến đây, ta có thể dễ dàng tính ra KI^2 ... viết lại (8) như sau :

$$IK^2=(IL^2-IL.KL\cos\varphi)+(KL^2-IL.KL\cos\varphi)$$
$$=IL(IL-KL\cos\varphi)+KL(KL-IL\cos\varphi)$$
$$=IL.IK'+KL.KI'$$
$$=(1/\sin^2\varphi)\,IK'(IK'+KI'\cos\varphi)+$$
$$+(1/\sin^2\varphi)\,KI'(KI'+IK'\cos\varphi)$$
$$=(1/\sin^2\varphi)(IK'^2+KI'^2+2IK'.KI'\cos\varphi)$$
$$=\frac{1}{16\sin^2\varphi}\left(\frac{\delta^2}{x^2}+\frac{\beta}{y^2}+\frac{2\beta\delta\cos\varphi}{xy}\right)$$

Thay vào trong (5), ta được :

$$\alpha=x^2+y^2+\frac{1}{4\sin^2\varphi}\left(\frac{\delta}{x^2}+\frac{\beta}{y^2}+\frac{2\beta\delta\cos\varphi}{xy}\right) \qquad (13)$$

Mặt khác, theo (1) thì :

$$\gamma=-2xy\cos\varphi. \qquad (14)$$

Hệ hai phương trình (13) và (14) xác định x, y theo a, b, c, d (thông qua $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ và φ). Khử y đi, ta được phương trình sau đây xác định x theo a, b, c, d và φ :

$$(1+\beta^2\cos^2\varphi/\gamma^2\sin^2\varphi)\,x^4-(\alpha+\beta\delta\cos^2\varphi/\gamma\sin^2\varphi)x^2$$
$$+\gamma^2/4\cos^2\varphi+\delta^2/4\sin^2\varphi=0 \qquad (15)$$

Đặt $x^2=X$, ta có một phương trình bậc hai. Vậy ta có thể dựng được đoạn thẳng có độ dài x bằng thước và com-pa vì $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ đều có thể dựng được theo a, b, c, d và khi φ đã cho thì có thể xác định được $\sin\varphi$ và $\cos\varphi$ theo định nghĩa của các hàm số sin và cos. Đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét. Chỉ có 5 bạn giải đúng. Tuy nhiên những lời giải đó thường phức tạp, không đẹp. Đặc biệt, bạn *Nguyễn Ngọc Khánh*, học sinh lớp 9C trường cấp 3 Đoàn Kết Hà Nội, có lời giải gọn hơn cả vì đã biết quy về cách dựng góc của tứ giác cần tìm bằng thước và com-pa. Sau đây là lời giải của bạn Khánh.

Trước hết, nếu gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$, φ là góc giữa hai đường chéo AC, BD và nhìn các đoạn AB, CD (xem h. 1), ta có hệ thức sau đây :

$$S=|(b^2+d^2-a^2-c^2)\operatorname{tg}\varphi|/4 \qquad (16)$$

...y tìm hiểu ý nghĩa hình học ...thức (1) đã tìm ra ở trên. Ta có ...đó như sau:

$...= 2AC.BD \sin\varphi.\mathrm{ctg}\varphi.$ (17)

...có:

$...2AC.BD \sin\varphi = 4S$ (18)

$...2)(LA.LB \sin\varphi + LB.LC \sin\varphi +$
$+ LC.LD \sin\varphi + LD.LA \sin\varphi)$
$...2)(AC.BD \sin\varphi).$

...và (18) ta suy ra ngay hệ thức (16) ...b, c, φ là đã cho, nên với hệ ...dựng được S bằng thước và compa ...được hình vuông có diện tích S).

...có:

$...= (1/2)(ab\sin B + cd\sin D)$ (19)

$...\sin^2 B + 4c^2d^2\sin^2 D + 8abcd\sin B\sin D.$ (20)

(20)

$...+ b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D.$

...ra:

$...- c^2 - d^2 = 2(ab\cos B - cd\cos D)$
$...- c^2 - d^2) = 4a^2b^2\cos^2 B$
$...\cos^2 D - 8abcd\cos B\cos D$ (21)

...vế (20) và (21), ta được:

$... + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) =$
$...+ c^2d^2) - 8abcd\cos(B + D),$

...$\theta = B + D$, ta có hệ thức sau đây:

$$\frac{...+ c^2d^2) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 16S^2}{8abcd}$$ (22)

...thức (16) và (22) chứng tỏ rằng ...(với $0 < \theta < 180°$) có thể dựng được ...và compa.

...quả tìm được vào (19), ta có:

$...\sin B + cd\sin B(\theta - B)$
$...cd\cos\theta)\sin B + cd\sin\theta - \cos B$
$...\sin B + q\cos B = \sqrt{p^2 + q^2}\sin(B + u),$ (23)

...đã đặt:

$p = ab - cd\cos\theta,\ q = cd\sin\theta.$

...xác định từ:

$... = q/p = cd\sin\theta/(ab - cd\cos\theta)$ (24)

...(23) và (24) chứng tỏ rằng các góc ...dựng được bằng thước và compa, ...và B dựng được. Vậy tứ giác $ABCD$ có thể dựng được bằng thước và compa, đó là đpcm.

Một số bạn khác, như *Phan diên Long* – lớp 11 C3 trường cấp 3 Lê thị Hồng Gấm, thành phố Hồ Chí Minh; *Lý Anh Tú, Hà thúc Dương* và *Phạm văn Thạch* – học sinh lớp 12 chuyên toán trường Quốc học Huế cũng có lời giải gần với lời giải của bạn Khánh nhưng trình bày quá phức tạp, chưa làm nổi bật ý chủ đạo của chứng minh của mình.

N.Đ.P.

Bài 10/113. *Trong không gian cho ba đường thẳng đồng quy tại P và đôi một vuông góc với nhau. Trên ba đường thẳng đó ta lấy ba cặp điểm A, A'; B, B'; C, C' sao cho*

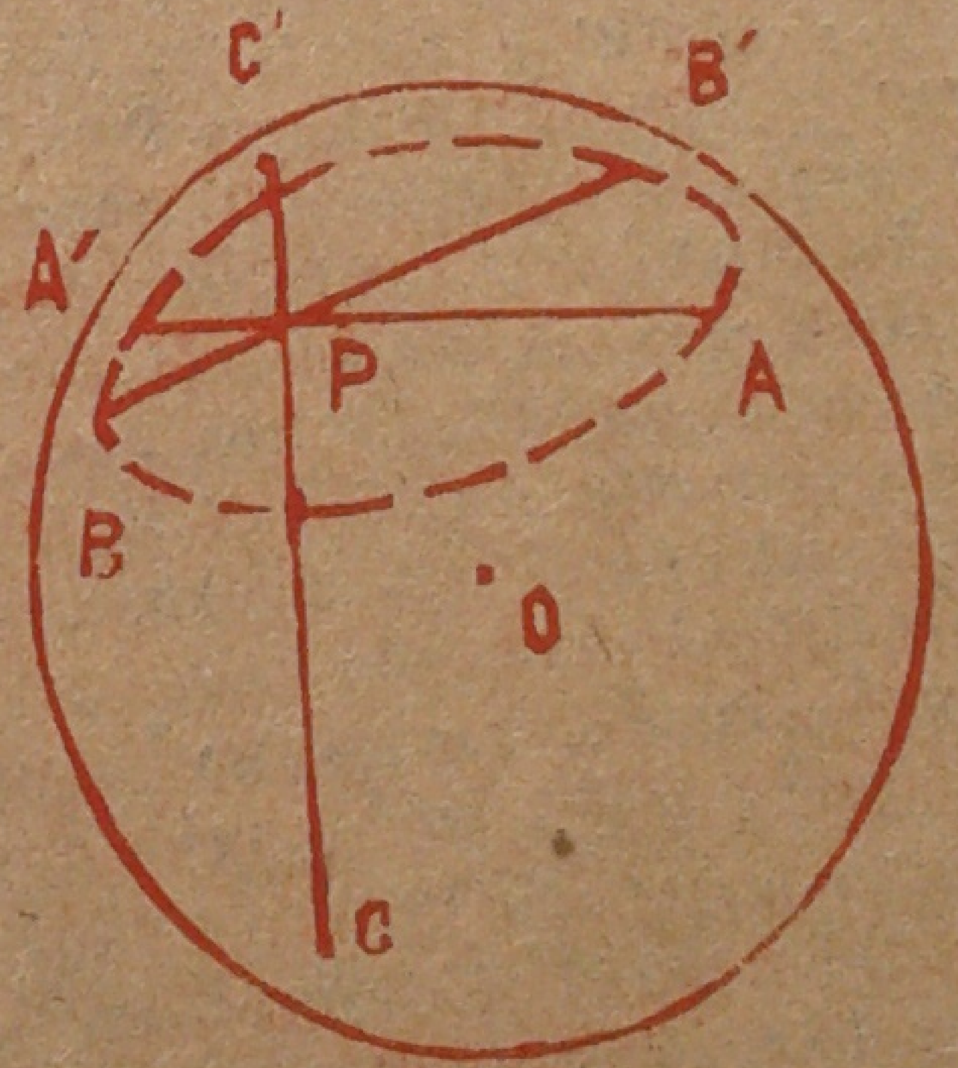
$$\overline{PA}.\overline{PA'} = \overline{PB}.\overline{PB'} = \overline{PC}.\overline{PC'}.$$

Chứng minh rằng:

*a) A, A', B, B', C, C' là các đỉnh của một khối tám mặt **K** nội tiếp một mặt cầu.*

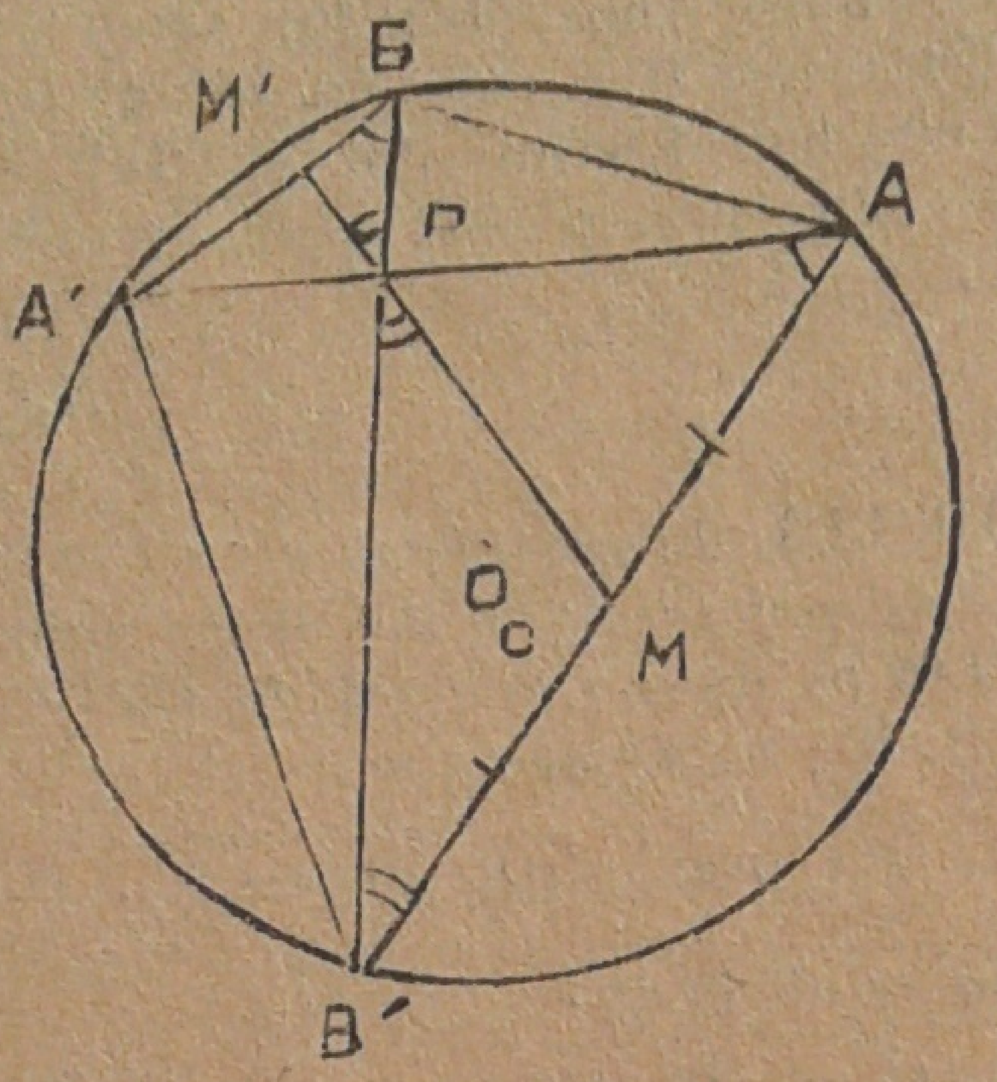
b) Trung điểm các cạnh của K và hình chiếu vuông góc của các điểm đó trên cạnh đối diện cũng nằm trên một mặt cầu.

c) Trọng tâm và trực tâm các mặt của K cùng nằm trên một mặt cầu.



Lời giải.

a) Bốn điểm A, B, C, A' không đồng phẳng xác định một mặt cầu duy nhất (S). Gọi B'', C'' theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các đường thẳng PB, PC với mặt cầu (S). Vì bốn điểm A, B, A', B'' cùng nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và mặt phẳng (PAB), nên ta có: $\overline{PA}.\overline{PA'} = \overline{PB}.\overline{PB''}$. Đối chiếu với giả thiết, ta có: $\overline{PB}.\overline{PB''} = \overline{PB}.\overline{PB'}$, từ đó suy ra $B'' \equiv B'$. Chứng minh tương tự: $C'' \equiv C'$. Nói khác đi, 6 điểm A, B, C, A', B', C' cùng nằm trên một mặt cầu. Đó là các đỉnh của một khối tám mặt (K) nào đó nội tiếp mặt cầu (S). Khối tám mặt (K) sẽ là lồi nếu các cặp điểm A, A'; B, B'; C, C' nằm khác phía nhau đối với điểm P; trong trường hợp ngược lại, (K) là lõm.



b) Trước hết ta chứng minh rằng trung điểm mỗi cạnh của (K), hình chiếu vuông góc của nó trên cạnh đối diện và P là ba điểm thẳng hàng. Thật vậy, gọi M là trung điểm của cạnh AB; MP kéo dài cắt $A'B'$ ở M'. Từ tính chất nội tiếp của tứ giác $ABA'B'$ (nội tiếp đường tròn giao tuyến của (S) và mặt phẳng (PAB)), ta suy ra ngay rằng $PM' \perp A'B'$ (h.2). Nói khác đi, nếu $MM' \perp A'B'$ thì MM' đi qua P và hình chiếu của M trên cạnh đối diện $A'B'$ trùng với hình chiếu của P trên $A'B'$. Bài toán đưa về việc chứng minh rằng trung điểm mỗi cạnh của (K) và hình chiếu của điểm P trên cạnh đó cùng nằm trên một mặt cầu. Gọi N là hình chiếu của P trên AB: $PN \perp AB$. Mặt khác, $OM \perp AB$ (vì $AM = MB = MP$); ta có:

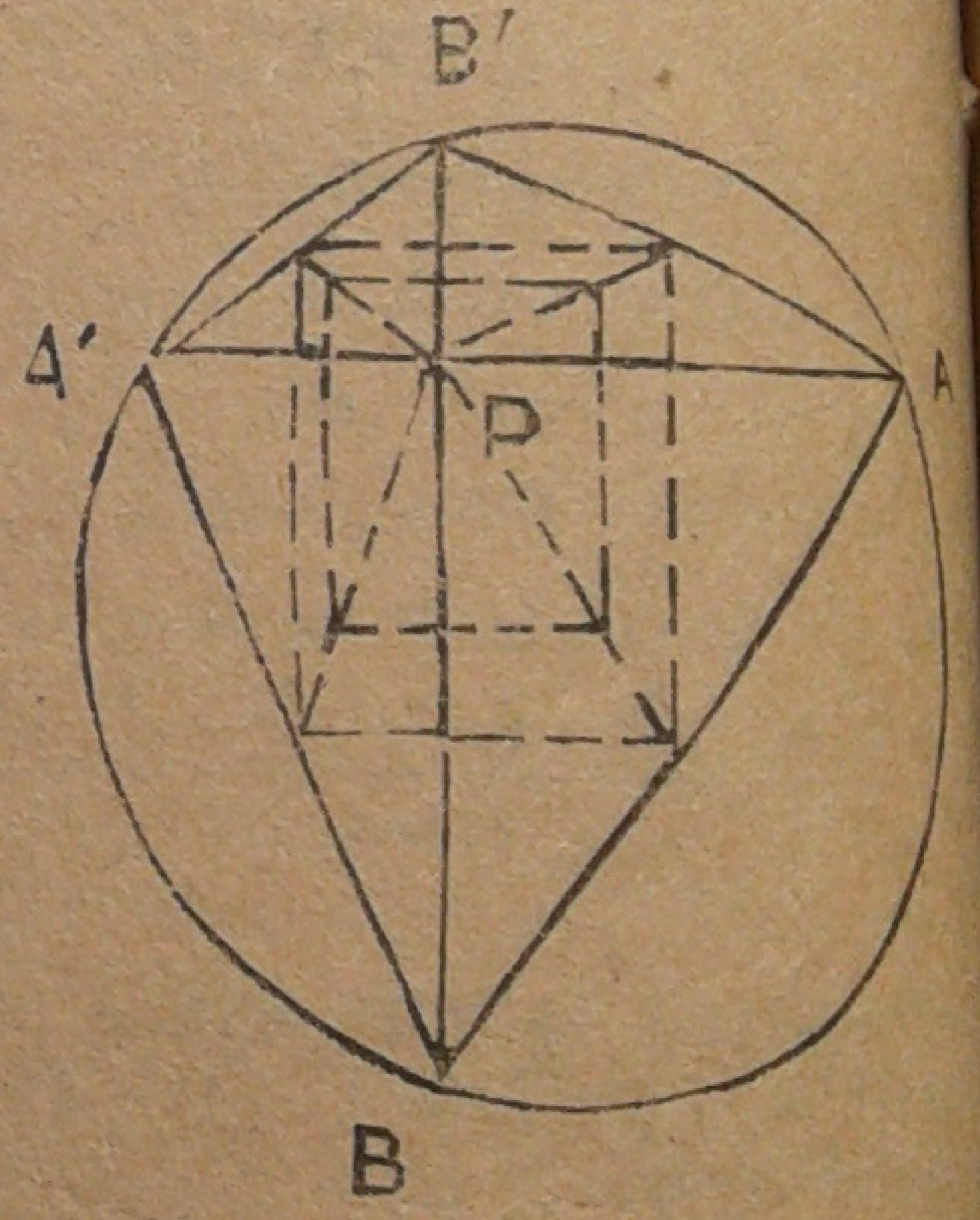
$NP^2 + NO^2 = (MP^2 - MN^2) + (MN^2 + MO^2) =$
$= MP^2 + MO^2 = MA^2 + MO^2 = OA^2 = R$, trong đó R là bán kính mặt cầu (S). Từ đó suy ra:
$2NI^2 + (1/2)OP^2 = 2MI^2 + (1/2)OP^2 = R^2$, trong đó I là trung điểm của đoạn OP. Vậy ta có:
$IN = IM = r = (1/2)\sqrt{2R^2 - d^2}$ = không đổi $(OP = d)$.

Điều đó chứng tỏ rằng trung điểm các cạnh của (K) và hình chiếu của các điểm đó trên cạnh đối diện cùng nằm trên một mặt cầu (S_1), tâm I là trung điểm của OP, bán kính $r = (1/2)\sqrt{2R^2 - d^2}$. Mặt cầu này gọi là *mặt cầu 24 điểm*.

c) Trước hết ta chứng minh rằng trọng tâm mỗi mặt của (K) và hình chiếu của nó trên mặt đối diện và P là ba điểm thẳng hàng. Thật vậy, gọi D và E lần lượt là trung điểm của BC và AB. Theo chứng minh trên thì $PD \perp B'C'$ và $PE \perp A'B'$. Vì $PA \perp (BPC)$ nên $PA \perp B'C'$, do đó $(PAD) \perp B'C'$ và $(PAD) \perp (A'B'C')$. Chứng minh tương tự, ta có $(PCE) \perp (A'B'C$… là trọng tâm của mặt ABC, thế thì (PG)… (PCE). Từ đó suy ra $(PAD) \cap (PCE)$… $(A'B'C')$. Gọi H' là giao điểm của (PG) và… dễ dàng chứng minh được rằng H' là… của mặt $A'B'C'$.

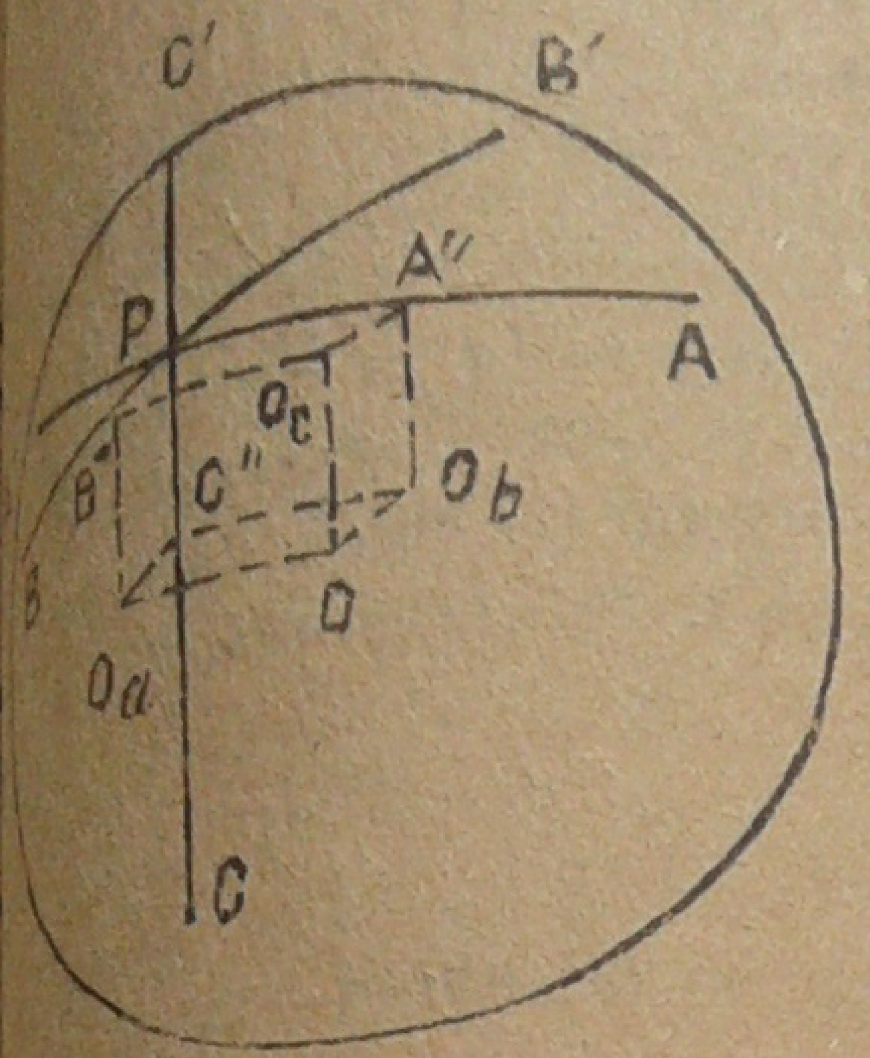
Sau nữa ta chứng minh rằng trọng… mặt của (K) là các đỉnh của một hình… nhật. Thật vậy, xét các mặt bên của h… tứ giác $C.ABA'B'$, một trong hai hình… đáy $ABA'B'$ tạo thành khối tám mặt $K(AB$… Theo tính chất của trọng tâm tam giác… rằng trọng tâm các mặt bên của hình… C này cùng nằm trên một mặt phẳng,… với mặt phẳng đáy $(ABA'B')$ và cách… khoảng bằng $CP/3$, đồng thời có hình… $(ABA'B')$ là các đỉnh của một hình… đồng dạng phối cảnh tâm P tỉ số $k =$… hình chữ nhật có đỉnh là trung điểm… của đáy $ABA'B'$ (xem h.3). Vì khối tám… có thể xem là được tạo thành từ hai h… tứ giác chung đáy úp vào nhau bằng… khác nhau, từ đó suy ra điều phải chứng…

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm… mặt đối diện — hai tam giác ABC và A… của (K) thì GG' là một đường chéo của h…



chữ nhật nói đến ở trên. Dễ dàng tính ra $GG' = (1/9)(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2)$ và tâm của hộp chữ nhật là điểm Q nằm trên đoạn PO, xác định bởi $\overrightarrow{PQ} = (1/3)\overrightarrow{PO}$. Thật vậy… A'', B'', C'' theo thứ tự là trung điểm c… cung AA', BB', CC'; O_a, O_b, O_c theo thứ… hình chiếu của tâm O trên các mặt… $(BCB'C)$, $(CAC'A')$ và $(ABA'B')$. Thế thì… một đường chéo của hình hộp chữ nhật… trên ba cạnh PA'', PB'', PC'' (h. 4). T…

$$\overrightarrow{PG} = (1/3)(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}),$$
$$\overrightarrow{PG'} = (1/3)(\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'})$$



$(\overrightarrow{PG'} - \overrightarrow{PG}) = (1/3)\,(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$.

AA', BB', CC' vuông góc đôi một tại ... có:

$GG'^2 = (1/9)\,(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2)$.

... là trung điểm của GG' (tức Q là tâm ... hộp chữ nhật có các đỉnh tại trọng ... mặt của khối tám mặt (K)), ta có:

$= (1/2)\,(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PG'})$

$= (1/6)\,(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC'})$

$= (1/3)\,(\overrightarrow{PA''} + \overrightarrow{PB''} + \overrightarrow{PC''}) = (1/3)\,\overrightarrow{PO}$.

... giờ ta tính giá trị của $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2$ ... và $d = OP$. Ta có:

$... + BB'^2 + CC'^2 = 4(A''A^2 + B''B^2 + C''C^2)$.

$... = OA^2 - OA''^2$, $B''B^2 = OB^2 - OB''^2$,

$... = OC^2 - OC''^2$, $OA''^2 = OP^2 - PA''^2$,

$... = OP^2 - PB''^2$, $OC''^2 = OP^2 - PC''^2$,

$PA''^2 + PB''^2 + PC''^2 = OP^2 = d^2$.

... ta được:

$$... + BB'^2 + CC'^2 = 4[3R^2 - (3d^2 - d^2)]$$
$$= 4(3R^2 - 2d^2).$$

... suy ra:

$$GG' = (1/3)\sqrt{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$$
$$= (2/3)\sqrt{3R - 2d}.$$

... cũng suy ra rằng trọng tâm và trực tâm ... của (K) cũng nằm trên một mặt cầu ... tâm Q, bán kính $\rho = (1/2)GG'$

$$\rho = (1/3)\sqrt{3R^2 - 2d^2}$$

... này gọi là *mặt cầu 16 điểm.*

Nhận xét.

Hầu hết các bạn đều giải đúng, tuy nhiên nhìn chung lời giải của nhiều bạn khá dài và trình bày không sáng sủa. Phần lớn chưa xác định cụ thể tâm và bán kính của hai mặt cầu (S_1) và (S_2), nhất là tâm và bán kính của mặt cầu 16 điểm (S_2). Bài toán đòi hỏi vận dụng tổng hợp các kiến thức cơ bản về hình học phẳng và không gian (kể cả phương pháp vectơ). Có thể giải bài toán này thuần túy bằng cách sử dụng các phép toán về vectơ (các phép toán tuyến tính và tích vô hướng của các vectơ). Các bạn có thể thấy rằng bài toán này được suy ra từ bài toán nào trong hình học phẳng bằng suy luận tương tự, xin để các bạn tự tìm lấy. Tuy nhiên, kết quả đạt được trong không gian phong phú hơn vì tìm ra hai loại mặt cầu (mặt cầu 24 điểm và mặt cầu 16 điểm), trong lúc ở hình học phẳng chỉ có đường tròn tám điểm. Ngoài ra, các bạn có thể nhận thấy rằng hai loại mặt cầu này gắn với một khối bát diện (có ba đường chéo đồng quy và vuông góc đôi một) nội tiếp một mặt cầu tương tự với hai mặt cầu Ơle gắn với một khối tứ diện trực tâm (tứ diện có các cạnh đối diện vuông góc). Điều đó thể hiện sự phong phú của suy luận bằng tương tự mà các kết quả nêu trong đề toán các bạn có thể tự mình phát hiện ra được. Mong rằng trong học tập môn toán, các bạn nên đào sâu suy nghĩ theo hướng đó.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài 1/114. *Cho dãy số tự nhiên* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, *với* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$ *và tổng các* a_i *bằng tích các* a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. *Giả sử* $k \geqslant 2$, *chứng minh rằng tổng và tích các* a_i *này luôn luôn bé hơn hoặc bằng* $2k$. *Tìm các* a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *trong trường hợp tổng và tích các* a_i *bằng* $2k$.

Lời giải 1 (của *Nguyễn Thanh Nhã* lớp 12 C7, Lê Hồng Phong thành phố Hồ Chí Minh).

Đặt $a_i = 1 + b_i$. Ta cần chứng minh $S = \sum_{i=1}^{k} b_i \leqslant k$.

Theo đầu bài ta có

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} (1 + b_i) = \prod_{i=1}^{k} a_i = \prod_{i=1}^{k} (1 + b_i)$$

hay

$$k + \sum_{i=1}^{k} b_i = 1 + \sum_{i=1}^{k} b_i + (b_1 b_2 + \ldots + b_{k-1} b_k) + \ldots + b_1 b_2 \ldots b_k$$

hay

$$k - 1 = (b_1 b_2 + \ldots + b_{k-1} b_k) + \ldots + b_1 b_2 \ldots b_k \qquad (1)$$

Vì $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$ nên cũng có $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_k$. Vậy ta thấy muốn cho vế phải của (1) khác không thì ít nhất ta phải có

$$b_{k-1},\ b_k \geqslant 1 \quad (2)$$

Từ (1) ta có $k-1 \geqslant b_{k-1} b_k \Rightarrow b_k \leqslant k-1 \quad (3)$

Từ (1) ta cũng có.

$$k-1 \geqslant (b_1 b_k + \ldots + b_{k-1} b_k) = b_k (b_1 + \ldots + b_{k-1}) = b_k (S - b_k)$$

hay

$$k-1 \geqslant b_k (S-b_k) \quad (4)$$

Giả sử $S > k$, từ (4) ta có

$$k-1 > b_k (k-b_k) \quad (5)$$

$(5) \Leftrightarrow b_k^2 - kb_k + k - 1 > 0 \Leftrightarrow (b_k - 1) b_k - (k-1)) > 0$, điều này dẫn đến $b_k < 1$ hay $b_k > k-1$. Mâu thuẫn với (2) và (3).

Vậy $S \leqslant k$.

Trong trường hợp tổng và tích các a_i bằng $2k$, tức là $S = k$ thì từ (4) ta có:

$$k-1 \geqslant b_k (k-b_k).$$

Nhưng vì (5) dẫn đến mâu thuẫn cho nên ta chỉ có

$$k-1 = b_k (k-b_k) \quad (6)$$

Từ đó suy ra $b_k = 1$ hoặc $b_k = k-1$ tức $a_k = 2$ hoặc $a_k = k$.

Từ (6) ta có:

$$k-1 = b_k (S - b_k) = b_k (b_1 + \ldots + b_{k-1}) \quad (7)$$

Do (7) và (1) ta suy ra $b_i = 0$ với $i = 1, 2, \ldots, k-2$ tức là $a_i = 1$ với $i = 1, 2, \ldots, k-2$.

Với $a_k = 2$ để có tổng các a_i bằng tích các a_i ta phải có $a_{k-1} = 2$ và $k = 2$.

Với $a_k = k$ ta phải có $a_{k-1} = 2$ còn k là số tự nhiên tùy ý $\geqslant 2$.

Vậy tóm lại ta tìm được.

$$\begin{cases} a_i = 1 \text{ với } i = 1, 2, \ldots, k-2 \\ a_{k-1} = 2 \\ a_k = k. \end{cases}$$

Ghi chú: bạn ***Nguyễn Quang Trung*** (lớp 10 T Ngô Sĩ Liên, Hà Bắc) cũng đặt $a_i = 1 + b_i$, trong chứng minh bạn Trung đã chứng minh và sử dụng bất đẳng thức

$$\prod_{i=1}^{k} (1+b_i) \geqslant 1 + 2 \sum b_i \text{ với } k \geqslant 3.$$

Lời giải 2 (của *Phạm Văn Thạch* – lớp 11CT trường Quốc học Huế).

Vì a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ là những số tự nhiên thỏa mãn $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$ và tổng các a_i bằng tích các a_i nên nếu $a_{k-1} = 1$ sẽ dẫn đến $a_k = (\ldots$ $+ a_k \Rightarrow k = 1$, trái với giả thiết của đ[...] $k \geqslant 2$. Vậy ta phải có,

$$2 \leqslant a_{k-1} \leqslant a_k$$

Từ đó suy ra $(a_{k-1} - 2)(a_k - 2) \geqslant 0$ hay $2a_{k-1} + 2a_k \leqslant a_{k-1} a_k + 4$

Với $k = 2$ thì (2) cho ta điều cần chứng [...]

Với $k \geqslant 3$, từ (1) ta cũng có

$$\prod_{i=n}^{k} a_i - 2 > 0$$

với n là số tự nhiên bất kỳ $2 \leqslant n \leqslant$ [...]

Như vậy $\left(\prod_{i=n}^{k} a_i - 2\right)(a_{n-1} - 1) \geqslant 0$

hay

$$\prod_{i=n-1}^{k} a_i + 2 \geqslant \prod_{i=n}^{k} a_i + 2a_{n-1}$$

Viết các bất đẳng thức (3) với n từ 2 đến [...] ta được

$$a_1 a_2 \ldots a_k + 2 \geqslant a_2 \ldots a_k + 2a_1$$
$$a_2 \ldots a_k + 2 \geqslant a_3 \ldots a_k + 2a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{k-2} a_{k-1} a_k + 2 \geqslant a_{k-1} a_k + 2a_{k-2}$$

kết hợp với (2) $a_{k-1} a_k + 4 \geqslant 2a_{k-1} + 2a_k$

Cộng $k-1$ bất đẳng thức trên vế với vế ta đ[ược]

$$2k + a_1 a_2 \ldots a_k \geqslant 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$$

hay $$2k \geqslant \prod_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

Bây giờ nếu ta có dấu bằng trong (4') th[ì] trong (4) thì ta phải có dấu bằng trong (3) [với] mọi $2 \leqslant n \leqslant k-1$ và dấu bằng trong (1).

Do đó dấu bằng trong (3) suy ra $a_{n-1} = 1$ [với] $2 \leqslant n \leqslant k-1$.

Do đó dấu bằng trong (1) suy ra $a_{k-1} = 2$ [...] $\sum_{i=1}^{k} a_i = 2k$, suy ra $a_k = k$.

Ghi chú: Bạn *Lý Anh Tú* (lớp 11 CT, trường Quốc học Huế) cũng giải theo cách này song trong chứng minh có nhiều chỗ diễn giải vắn tắt.

Bài 2/114. Cho các số nguyên $(0, 1, \ldots, n)$. H[ãy] tìm một hoán vị của các số nguyên này không chứa cấp số cộng gồm ba số hạng.

Lời giải (của *Cam Minh Trí* – lớp 11CT [...] Hồng Phong, Thành phố Hồ Chí Minh).

...ta có nhận xét rằng nếu ba số a, b, c ... kiện ($a > b$ và $b < c$) hoặc ($a < b$ ...) thì 3 số a, b, c theo thứ tự đó không ... một cấp số cộng.

... bài toán đã cho, ta xét 2 trường hợp ...: $n = 2k-1$ và $n = 2k$ (với k là ...)

... -1. Để tiện lợi ta ký hiệu

$a_i = i$ ($i = 0, 1, \ldots, k-1$)

$b_i = a_i + k$.

... hiệu này thì rõ ràng

... với mọi $i, j = 0, 1, \ldots, k-1$.

... nếu ta chọn một hoán vị của dãy ...:

($a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{k-1}, b_{k-1}$)

($0, k, 1, k+1, \ldots, k-1, 2k-1$)

... nhận xét trên ta thấy rằng dãy trên ... cấp số cộng gồm 3 số hạng. Vậy ... chính là lời giải cần tìm.

... $2k$. Ta đặt số hạng $2k$ vào đầu dãy trên ... dãy đó cũng là lời giải cần tìm.

... Bạn *Tôn Thất Dũng* (lớp 10CT, trường ... Huế) sử dụng tính chất chẵn lẻ đưa ... tổng quát cho 4 trường hợp $n = 4k-1$, ... $4k+2$.

NGÔ ĐẠT TỨ

.../114

... ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) và ($b_1, b_2, \ldots, b_n$) là hai ... của dãy 1, 1/2, ..., 1/n), thỏa mãn điều ...

$$a_1+b_1 \geqslant a_2+b_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n+b_n. \quad (*)$$

... minh rằng với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$, ta có ... thức thực sự $a_k + b_k < 4/k$.

... nữa, hãy chứng tỏ rằng không thể cải tiến ... quả này, theo nghĩa: với $c > 1$ cho ... ý, tồn tại một số tự nhiên n và hai ... ($a_1, a_2, \ldots, a_n$), ($b_1, b_2, \ldots, b_n$) của dãy ... 1/n), thỏa mãn điều kiện (*), nhưng ... có một số tự nhiên k sao cho

$$a_k + b_k > (4-c)/k.$$

... sơ suất của tác giả bài toán, mệnh đề ... bài toán đã được đăng dưới dạng yếu ... vậy ở đây xin sửa lại cho đúng tinh ... bài toán) (T.S).

... giải. Ta hãy cố định một số k, và chia ... cặp

(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_k, b_k)

... loại:

— loại 1 gồm các cặp với $a_i > b_i$, giả thử ... cặp,

— loại 2 gồm các cặp với $a_i = b_i$, giả thử có s cặp,

— loại 3 gồm các cặp với $a_i < b_i$, giả thử có t cặp.

Như vậy $r + s + t = k$. Do k cố định, nên kết quả cần chứng minh không thay đổi nếu ta trao đổi vai trò các hoán vị ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) và ($b_1, b_2, \ldots, b_n$), do đó có thể coi rằng $r \geqslant t$.

Ta hãy xét hai trường hợp tùy theo $s > 0$ hay $s = 0$.

Trường hợp 1: $s > 0$. Khi đó ta có $r + s$ cặp loại 1 và 2

$$(a_{i_1}, b_{i_1}), (a_{i_2}, b_{i_2}), \ldots, (a_{i_{r+s}}, b_{i_{r+s}}). \quad (1)$$

Các số a_{i_j} ($1 \leqslant j \leqslant r+s$) lấy $r+s$ giá trị khác nhau trong tập hợp {1, 1/2, ..., 1/n}, vì vậy

$$a^* = \min(a_{i_j} : 1 \leqslant j \leqslant r+s) \leqslant 1/(r+s).$$

Gọi (a^*, b^*) là cặp ứng với a^*. Vì (a^*, b^*) là một trong các cặp (1), nên theo giả thiết ta có

$$a_k + b_k \leqslant a^* + b^* \leqslant 2a^* \leqslant \frac{2}{r+s} = \frac{4}{2r+2s} < \frac{4}{r+s+t} = \frac{4}{k},$$

do $r \geqslant t$ và $s > 0$.

Trường hợp 2: $s = 0$. Khi đó ta xét r cặp loại 1

$$(a_{i_1}, b_{i_1}), (a_{i_2}, b_{i_2}), \ldots, (a_{i_r}, b_{i_r}).$$

Cũng như trên, gọi

$$a^* = \min(a_{i_j} : 1 \leqslant j \leqslant r),$$

trong trường hợp này ta có

$$a^* \leqslant 1/r \text{ và } b^* < a^*,$$

do (a^*, b^*) là một cặp loại 1. Vì vậy

$$a_k + b_k \leqslant a^* + b^* < 2a^* \leqslant 2/r = 4/2r \leqslant 4/(r+t) = 4/k,$$

do giả thiết $r \geqslant t$.

Thành thử trong cả hai trường hợp, ta đều có

$$a_k + b_k < 4/k$$

Mặt khác với $n = 2m$, ta hãy xem hai hoán vị sau đây của dãy (1, 1/2, ..., 1/2m)

$a_1 = 1$, $a_2 = 1/2m$, $a_3 = 1/2$, $a_4 = 1/(2m-1)$, ...

..., $a_{2m-1} = 1/m$, $a_{2m} = 1/(m+1)$,

$b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_4$, $b_4 = a_3$, ...

..., $b_{2m-1} = a_{2m}$, $b_{2m} = a_{2m-1}$.

Có thể thử lại rằng hai hoán vị này thỏa mãn điều kiện của bài toán, và để ý rằng

$$a_{2m} + b_{2m} = 1/(m+1) + 1/m = (2m+1)/m(m+1).$$

Vì vậy với $c > 0$, ta có

$$\frac{4-c}{2m} - (a_{2m} + b_{2m}) = \frac{2-(m+1)c}{2m(m+1)} < 0$$

nếu chọn m đủ lớn.

NHẬN XÉT — Nhiều bạn đã giải bài toán bằng phép phản chứng. Sai lầm của nhiều bạn là không phân biệt chặt chẽ dấu $\leqslant$ với dấu $<$.

PHAN ĐỨC CHÍNH

ĐỀ RA KỲ NÀY

Bài 1/117. Chứng minh rằng:

a) Từ 6 người tùy ý ta có thể chọn ra 3 người đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau.

b) Từ 18 người tùy ý ta có thể chọn ra 4 người đôi một quen biết nhau, hoặc đôi một không quen biết nhau.

Bài 2/117. Trên giấy kẻ ô vuông người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ nhỏ đến lớn, mỗi số trên một ô vuông theo kiểu « xoắn ốc » như hình dưới. Hãy xác định các số 1930 và 1981 nằm ở dòng, cột thứ mấy nếu coi số 1 nằm ở dòng thứ 51 cột thứ 51 (đánh số dòng, cột tăng dần từ trái sang phải, từ dưới lên trên).

						37
	21	20	19	18	17	
	22	7	6	5	16	
	...	8	1	4	15	
	...	9	2	3	14	
		10	11	12	13	

Nguyễn Công Quý
(ĐH Sư phạm, T.p. Hồ Chí Minh)

Bài 3/117. Tìm tất cả những số nguyên không âm x, y, z sao cho

$$3^x - 2^y = 1930^z$$

Nguyễn Công Quý

Bài 4/117. Viết tất cả các số có 1980 chữ số từ số 19641964...1964 đến số 19811981...1981 liền nhau với thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng cả những số thu được theo cách viết trên có chung một ước số mà trong cách viết thập phân của ước số này chỉ chứa toàn số 0 và

Ngô Duy Ninh
(Qui Nhơn)

Bài 5/117. Cho biết

$1/a + 1/b + 1/c = \alpha$, $(\alpha \neq 0)$

$(1/a + 1/b)(1/b + 1/c)(1/c + 1/a) = \beta$, $abc =$

Hãy tính $a + b + c$ theo α, β, γ.

Doãn Thái Phương Danh
(ĐH Sư phạm, T.P. Hồ Chí Minh)

Bài 6/117. Giải phương trình:

$a.\ (7x^6 + 35x^4 + 21x^2 + 1)/(x^6 + 21x^4 + 35x^2 + 1)$
$+ x.(7a^6 + 35a^4 + 21a^2 + 1)/(a^6 + 21a^4 + 35a^2 + 1)$

Ngô Duy Ninh

Bài 7/117. Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (ω_1), (ω_2) và một điểm A không nằm trên chúng. Dựng một đường tròn đi qua A và cắt hai đường tròn đã cho, mỗi đường tại một cặp điểm xuyên tâm đối. Biện luận.

Xác định bán kính của đường tròn mới dựng

Nguyễn Đăng Phất
(ĐHSP 1, Hà Nội)

Bài 8/117. Cho tứ diện gần đều $ABCD$: $BC = DA = a$, $CA = DB = b$, $AB = DC = c$. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)^2\ (2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)$$
$$(2a^4b^4+2b^4c^4+2c^4a^4-a^8-b^8-c^8) \geq 9$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ABCD$ là tứ diện đều.

Nguyễn Hát Châu
(Hải Hưng)

Bài 9/117. Trên một mặt cầu tâm O bán kính $R = \sqrt{2}a$ vẽ ba đường tròn bằng nhau có bán kính $r = a$, đôi một tiếp xúc với nhau. Tính bán kính của đường tròn nằm trên mặt cầu đã cho và tiếp xúc với cả ba đường tròn nói trên.

Nguyễn Đăng Phất

Chú thích: bài 1/117 do Vũ Đình Hòa (Hà Nội) sưu tầm.

VÀI MẨU CHUYỆN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ

...hợp các số nguyên dương, các số ...tố là các số chỉ chia hết cho số 1 ...thân nó. Như vậy chỉ có một số ...chẵn, là số 2. Tính đến 100, ta có ...tố: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 và 97.

...nguyên tố là vô tận. Vào thế kỷ thứ ...ng nguyên, Ơ-cơ-lít đã chứng minh ...ng cách: cho p là một số nguyên ...bao giờ cũng tìm được số nguyên ... Thật vậy: Đặt P là tích tất cả các ...tố cho đến p:

$$...\times 2\times 3\times 5\times 7\times 11\times \ldots\times p$$

...không chia hết cho tất cả các số trong ...đó hoặc chính $P+1$ là số nguyên ...p), hoặc phải có số nguyên tố lớn ...ước của $P+1$.

...nhà toán học — chuyên nghiệp hoặc ...đã nghiên cứu phương pháp nhanh ...ra các số nguyên tố. Dĩ nhiên có ...đơn giản để tìm ra tất cả các số nguyên ...khoảng từ 1 đến N. Đó là cách sàng ...ra-tô-ten (thế kỷ 3 trước công nguyên): ...tất cả các số nguyên liên tục từ 1 đến ...bỏ hết các bội số của các số nguyên ...$\sqrt{N}$. Các số còn lại là các số nguyên tố.

...nếu có một tiêu chuẩn nào đó, đưa áp ...một số bất kỳ mà cho hết ngay được ...có là số nguyên tố hay không, thì thật ... Về vấn đề này, có thể nêu lên hai ...m, nhưng áp dụng trong thực tế rất ...: cách nghiệm của người Anh Uyn-...: cách nghiệm của người Pháp Fec-ma.

...cách nghiệm của Uyn-sơn (1770) được ...được nhận năm 1973 thì: N là số nguyên ...chỉ nếu $(N-1)!+1$ chia hết cho N. ...$(7-1)!+1 = 6!+1 = 720+1 = 721$; 721 ...cho 7. Vậy 7 là số nguyên tố. Trái lại ...$1 = 40321$, mà 40321 không chia hết cho ...9 không phải là số nguyên tố.

...thực tế, khi N là nhỏ, dùng cách nghiệm ...thì tốt quá rồi. Với N càng lớn thì tính ...còn lâu hơn là chia N cho các số ...$\leqslant \sqrt{N}$.

...một nhà toán học nghiệp dư lỗi lạc ...Pháp, năm 1640 đã phát hiện ra rằng (và ...được Ơ-le chứng minh một cách chặt ...1736):

Nếu p là số nguyên tố mà a không chia hết cho p, thì $a^{p-1}-1$ sẽ chia hết cho p.

Ví dụ, với p là 5, a là 3; 5 là số nguyên tố; và 3 không chia hết cho 5. Vậy $3^{5-1}-1 = 3^4-1 = 81-1 = 80$; 80 chia hết cho 5.

Nếu định lý đảo mà đúng, thì đây sẽ là một cách nghiệm thuận lợi. Định lý đảo, lấy $a = 2$, là: Nếu $2^{N-1}-1$ chia hết cho N thì N sẽ là số nguyên tố! Ta thử lấy $N = 341$. Ta tính được ra, (tuy không phải dễ dàng, nhanh chóng) là $2^{340}-1$ chia hết cho 341. Nhưng 341 không phải là số nguyên tố, vì $341 = 11\times 31$. Định lý đảo không đúng.

Rồi các nhà toán học vẫn tính và thử. Vào năm 1901, người Mỹ D.N. Lê-me đã lập một bảng bao gồm tất cả các số từ 1 đến 10.000.000 kèm theo mọi ước số của các số đó. Trong 10 triệu số như vậy, có 664.580 số nguyên tố.

Đến năm 1936, Hôp-pơ-nô và Crai-sit lại đưa ra ước số nhỏ nhất của tất cả các số từ $10^{12}-10^4$ đến $10^{12}+10^4$ (tức là từ 999 999 990 000 đến 1 000 000 010 000).

Có tất cả 50 847 479 số nguyên tố trong phạm vi các số từ số 1 đến số 10^9.

Lại nói tiếp về số nguyên tố và số hoàn chỉnh. Nếu một số bằng với tổng các ước số của nó, thì đó là số hoàn chỉnh. Chẳng hạn số 6, số 28 là các số hoàn chỉnh:

$$6 = 1+2+3;$$
$$28 = 1+2+4+7+14$$

Ơ-cơ-lít đã phát biểu: Những số có dạng $(2^p-1)2^{p-1}$ mà 2^p-1 là số nguyên tố thì đó là những số hoàn chỉnh:

$p = 2$ ta có số hoàn chỉnh 6;
$p = 3$ » » » 28;
$p = 5$ » » » 496;
$p = 7$ » » » 8128.

Với $p = 11$, thì $2^{11}-1 = 2047 = 23\times 89$, không phải là số nguyên tố.

Vào thế kỷ 17, cha cố Mec-xen, với các lý lẽ rất phức tạp, đã dự đoán là 2^p-1 chỉ là số nguyên tố khi các trị của p (và $p < 258$) là: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 và 257.

Cho đến nay, vẫn chưa rõ là có số hoàn chỉnh lẻ hay không. Tất cả các số hoàn chỉnh chẵn, đều tận cùng bởi 6 hoặc 28 và trừ số 6, nếu đem chia cho 9, đều có dư 1.

Cho đến năm 1922, đã phát hiện 5 chỗ sai trong dự đoán Mec-xen:

— Năm 1883, Pec-vuy-gianh phát hiện số $2^{61}-1$ là số nguyên tố.

— Năm 1903, Côl tính ra: $2^{67}-1 = 193\ 707\ 721 \times 761\ 838\ 257287$ không phải là số nguyên tố. (Có thể có sai lầm về ấn loát trong tài liệu Mec-xen, giữa 61 và 67 chăng!).

— Năm 1911, theo Pao-ơ thì $2^{89}-1$ là số nguyên tố.

— Năm 1914, vẫn theo Pao-ơ: $2^{107}-1$ là số nguyên tố.

— Năm 1922, Crai-sit: $2^{257}-1$ không phải là số nguyên tố.

Từ khi có dự đoán Mec-xen, thì các số nguyên tố có dạng 2^p-1 được gọi là số Mec-xen. Nếu gọi M_p là số Mec-xen liên quan với p ($M_p = 2^p-1$), thì cho đến trước năm 1750, đã biết được các số Mec-xen sau đây:

$$M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}, M_{17}, M_{19}.$$

Năm 1750, Ơ-le đã tìm ra M_{31}: $M_{31} = 2^{31}-1 = 2.147.483.649$.

Năm 1952, D. H. Lê-me và R. M. Rô-b... ra M_{521}. Cùng năm đó, họ lại tìm ... Lại riêng D. H. Lê-me tìm ra các số ... M_{1279}, M_{2203} và M_{2281}.

Năm 1958 A. An-dec-xơn và W. Ri-... M_{3217}:

Năm 1962 A. Hu-uây tìm ra M_{4253} ...

Năm 1964, D. B. Gin-lê phát hiện $M_{...}$ ... và M_{11213}.

Đến năm 1971, Tuc-kec-man làm th... với các trị của p, cho đến 21000, phát h... nguyên tố M_{19937}. Số nguyên tố này ... con số.

Vừa qua (1978) được sự giúp đỡ của ... me và của Tuc-kec-man, Nich-ken và ... học sinh Mỹ) đã đặt, chọn chương trì... đến 350 giờ máy tính và tìm ra số Mec-... 25: $M_{21701} = 2^{21701}-1$ với 6533 chữ số, l... lớn nhất trong các số nguyên tố đã biết...

VŨ NGỌC QUỲNH

(Theo tạp chí « Khoa học và đ... của Pháp số tháng 3 năm 19...

Bảng kê các số Mec—xen đã được biết

Thứ tự	Trị của p	Trị của M_p	Số chữ số	Người phát hiện	Năm phát hiện
1	2	3	1		Thời cổ đ...
2	3	7	1		Thời cổ đ...
3	5	31	2		Thời cổ đ...
4	7	127	3		Thời cổ đ...
5	13	8197	4	Mersenne	1644
6	17	131071	6	Mersenne	1644
7	19	524287	6	Mersenne	1644
8	31	2147 483649	10	Euler	1750
9	61		19	Pervusin	1883
10	89		27	Powers	1911
11	107		33	Powers	1914
12	127		39	Lucas	1877
13	521		157	Lehmer, Robinson	1952
14	607		182	Lehmer, Robinson	1952
15	1279		386	Lehmer	1954
16	2203		663	Lehmer	1954
17	2281		687	Lehmer	1951
18	3217		969	Riesel, Anderson	1958
19	4253		1281	Hurwitz	1962
20	4423		1332	Hurwitz	1962
21	9689		2917	Gillies	1964
22	9941		2993	Gillies	1964
23	11213		3376	Gillies	1964
24	19937		6002	Tuckeeman	1971
25	21701		6533	Nickel, Noll	1978

In 12000c tại Xí nghiệp In 75, 77 Hàng Bồ — Hà Nội.
Số in 11/81, In xong và gửi lưu chiểu tháng 2-1981.
Chỉ số 12884.