

TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TOÁN HỌC

VÀ

tuổi trẻ

Số 110

5+6

1980

BÁO RA HAI THÁNG MỘT KỲ

Chủ biên: NGUYỄN CẢNH TOÀN

Số 70 Trần Hưng Đạo — Hà Nội

Thư ký tòa soạn: HOÀNG CHỨNG

Dây nối: 52825

Chuyên với các bạn trẻ yêu toán

VẬN DỤNG PHÉP TƯƠNG TỰ ĐỀ TẬP DƯỚI SÁNG TẠO TOÁN HỌC

(Tiếp theo kỳ trước)

QUỐC TRINH

a) Thấy rằng phép cộng và phép nhân có một số tính chất giống nhau như: tính kết hợp, tính giao hoán, có phép toán ngược, nên vài bạn đã:

$$\text{từ } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \text{ (đúng) suy ra } \frac{(a+c)}{(b+c)} = \frac{a}{b} \text{ (sai),}$$

$$\text{từ } \sqrt{a^2 b^2} = ab \text{ (đúng) suy ra } \sqrt{a^2 + b^2} = a + b \text{ (sai).}$$

$$\text{Cũng có bạn từ } m n a = n m a \text{ (đúng) suy ra } m \sin \alpha = \sin m \alpha \text{ (sai).}$$

b) Sau đây là các định lý về tính chất chia hết của các số cho 3, cho 9 (Sách Số học—lớp năm—tập I—Nhà xuất bản Giáo dục).

5. POLYA đã nhấn mạnh về vai trò của phép tương tự như sau: « Có thể là sẽ không có phát minh nào trong toán học sơ cấp như trong toán học cao cấp, thậm chí trong lĩnh vực nào nếu ta không dùng những tác tư duy đó (khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự...) đặc biệt là nếu không dùng phép tương tự ».

Tay nhiên như đã nói ở phần trên, phép tương tự cho ta một dự đoán: điều dự đoán đó có thể đúng, có thể sai (tùy từng trường hợp), ví dụ 5. Về số học và đại số, một số bạn ở lớp thường phạm sai lầm khi làm toán vì suy luận qua « tương tự » những kết quả.

«Tất cả các số mà tổng các chữ số chia hết cho 3 đều chia hết cho 3 và chỉ các số đó mới chia hết cho 3».

«Tất cả các số mà tổng các chữ số chia hết cho 9 đều chia hết cho 9 và chỉ các số đó mới chia hết cho 9».

Từ các định lý đó, một số bạn đã công nhận rằng:

Nếu tổng các chữ số của một số chia hết cho 27 thì số đó chia hết cho 27.

Ta dùng phần ví dụ sau để bác bỏ điều đó: số 272745 có tổng các chữ số là 27 chia hết cho 27, nhưng 272745 không chia hết cho 27.

c) Nguy hiểm hơn nữa, không phải chỉ vì tưởng «tương tự» mà cả vi không «cảnh giác» khi giải toán nên một số bạn đã phạm sai lầm khi làm bài tập sau:

Bài tập. Có phải $a=1, b=2, c=3$ là nghiệm của hệ phương trình sau không?

$$\begin{cases} a+b+c=6 & (1) \\ a+2b+3c=14 & (2) \\ 17a+34b+100c=384 & (3) \end{cases}$$

Một số bạn chỉ thay $a=1, b=2, c=3$ vào (1) và kết luận ngay rằng: $a=1, b=2, c=3$ là nghiệm của hệ phương trình trên! Nhiều bạn khác thay $a=1, b=2, c=3$ vào (1) và (2) rồi cũng kết luận như vậy!

Nhưng nếu thay $a=1, b=2, c=3$ vào (3) thì

$$17 \cdot 1 + 34 \cdot 2 + 100 \cdot 3 = 385$$

Vậy phải đâu $a=1, b=2, c=3$ là nghiệm của hệ trên.

VÍ DỤ 6. Trong hình học phẳng ta có thể xem hình tam giác như tương tự với hình tứ giác vì chúng là những trường hợp đặc biệt của hình đa giác, chúng là những hình tạo bởi các đường gấp khúc kín.

Học xong định lý Hêrông về diện tích S của hình tam giác có các cạnh a, b, c và chu vi $2p$:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

có bạn học sinh lớp tám đã dự đoán rằng diện tích S của hình tứ giác lồi có các cạnh a, b, c, d và chu vi $2p$ là

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad (1)$$

Ta kiểm tra xem điều dự đoán đó đúng hay sai.

Với hình vuông thì $a=b=c=d$ và nên từ (1) ta có

$$S = \sqrt{2a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^2 \sqrt{2a}.$$

Vậy (1) là sai đối với hình vuông vì diện tích hình vuông có cạnh a là a^2 .

Nếu ta bỏ thừa số p đầu tiên dưới dấu căn bậc hai tức lấy

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

thì với hình vuông từ (2) ta suy ra diện tích

$$S = \sqrt{a^4} = a^2.$$

Vậy công thức (2) đúng với hình vuông.

Thử công thức (2) với hình chữ nhật, hình thang cân ta cũng có kết quả đúng về diện tích các hình đó.

Nhưng công thức (2) không đúng với hình bình hành nói chung. Từ đó ta dự đoán rằng (2) là công thức Hêrông mở rộng cho diện tích của tứ giác nội tiếp đường tròn (hình vuông, hình chữ nhật, hình thang cân,...).

Sau đó ta chứng minh (2) và thấy (2) đúng với công thức tính diện tích của tứ giác nội tiếp đường tròn.

Từ công thức Hêrông với hình tam giác ta công nhận công thức (1) là công thức để tính diện tích của tứ giác bất kỳ có cạnh a, b, c, d thì phạm sai lầm. Ngoài ra ta còn chứng minh được thêm rằng:

«Nếu tứ giác có cạnh a, b, c, d là nội tiếp trong đường tròn này và ngoại tiếp một đường tròn khác thì diện tích S của nó thỏa mãn công thức $S^2 = abcd$ ». (3)

Bạn hãy chứng minh đầy đủ công thức (2) và (3) này.

VÍ DỤ 7. Qua các bài toán 5', 6', 7' ở ví dụ 2, ví dụ 4 và vài định lý nói trên, các kết quả mà ta dùng phép tương tự để suy ra từ hình tam giác cho hình tứ diện đều như nhau cả về tính chất và về hệ số các đại lượng.

Nhưng các ví dụ 5, ví dụ 6 khuyên ta rằng «cảnh giác với phép tương tự: Điều ta dự đoán không phải bao giờ cũng êm ả, trôi chảy, trơn tru như ta tưởng.

Ta hoàn toàn tỉnh táo để chấp nhận điều đó.

Bạn hãy lưu ý so sánh các kết quả ở các bài toán tương tự sau đây thì rõ.

Bài toán 8

Với điểm O bất kỳ trong hình tam giác (hay trên một mặt của nó) và k_a, k_b, k_c là khoảng cách từ O đến các cạnh a, b, c thì $ak_a + bk_b + ck_c = 2S$. S là diện tích của hình

Bài toán 9

Gọi R_a, R_b, R_c lần lượt là bán kính đường tròn tiếp và bán kính các đường tròn bàng tiếp của hình tam giác thì

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$$

Đây là tóm tắt sự chứng minh bài toán 9'.
 O là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$:
 a, b, c, d lần lượt là diện tích các mặt tứ diện đối diện với các đỉnh A, B, C, D .

$$V_{ABCDE} = V_{ABCD} + V_{EBCD}$$

$$V_{ABCD} = (a+b+c+d)r/3$$

$$V_{EBCD} = aR_a/3$$

$$V_{ABCDE} = (a+b+c+d)r/3 + aR_a/3$$

$$V_{ABCDE} = V_{ABCE} + V_{ABDE} + V_{ACDE}$$

$$= dR_a/3 + cR_a/3 + bR_a/3$$

$$= R_a(b+c+d)/3$$

So sánh (1) và (2) thì

$$(a+b+c+d)r/3 + aR_a/3 = R_a(b+c+d)/3$$

$$(a+b+c+d)r/3 = R_a(b+c+d)/3 - aR_a/3$$

Trong mặt phẳng:

Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Bài toán 8'

Với điểm O bất kỳ trong hình tứ diện (hay trên một mặt của nó) và k_a, k_b, k_c, k_d là khoảng cách từ O đến các mặt lần lượt có diện tích là a, b, c, d , thì $ak_a + bk_b + ck_c + dk_d = 3V$, V là thể tích của hình tứ diện.

Bài toán 9'

Gọi r, R_a, R_b, R_c, R_d lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và bán kính các mặt cầu bàng tiếp của hình tứ diện thì

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_d}$$

tức

$$V_{ABCD} \text{ (viết tắt là } V) = R_a(b+c+d-a)/3$$

Từ đó

$$1/R_a = (b+c+d-a)/3V \quad (3)$$

Ta có các kết quả tương tự sau đây:

$$1/R_b = (a+c+d-b)/3V \quad (4)$$

$$1/R_c = (a+b+d-c)/3V \quad (5)$$

$$1/R_d = (a+b+c-d)/3V \quad (6)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức (3) (4) (5) (6) thì

$$1/R_a + 1/R_b + 1/R_c + 1/R_d = 2(a+b+c+d)/3V$$

Mà

$$3V/(a+b+c+d) = r$$

Vậy:

$$1/R_a + 1/R_b + 1/R_c + 1/R_d = 2/r. \text{ (Trong khi đó ở bài toán 9 thì } 1/R_a + 1/R_b + 1/R_c = 1/r).$$

Những sự khác nhau về kết quả ở các đẳng thức trên là tất yếu và không phải hiếm hoi giữa các tính chất của các đối tượng trong hình học phẳng và trong hình học không gian.

Ở ví dụ 4 ta thấy các điểm tương tự giữa các đối tượng trên nhưng sau đây là những điểm khác nhau.

Trong không gian:

+ Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì có thể không song song với nhau.

+ Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì có thể không song song với nhau.

không gian xác định giao điểm

VÍ DỤ 8. Tiếp đây ta lưu ý đến một kết quả nguy hiểm

$$0 = +1 = -1 = -1/2$$

có ý nghĩa lịch sử khá thú vị (ở thế kỷ thứ 18). Bài toán đặt ra là: Tính tổng vô hạn (chuỗi):

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (1)$$

Người ta đã đưa ra bốn cách tính tổng đó. Đặt tổng đó là x .

Cách 1.

$$x = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

$$x = 0 + 0 + 0 + \dots$$

$$x = 0$$

Cách 2.

$$x = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

$$x = 1 - 0 - 0 - \dots$$

$$x = 1.$$

Cách 3.

$$x = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$x = -1 + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

$$x = -1.$$

Vậy từ ba cách tính đó ta suy ra

$$0 = +1 = -1 \quad (!)$$

Ngoài ra nhà toán học người Italia Govido Gorandi nêu ra cách tính tổng đó như sau:

Cách 4.

$$x = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

nên

$$x - 1 = -1 + 1 - 1 + \dots$$

nghĩa là

$$x - 1 = -x$$

do đó

$$x = 1/2.$$

Vậy qua bốn cách giải trên thì

$$0 = +1 = -1 = 1/2 \quad (!)$$

Xung quanh vấn đề này đã xảy ra một cuộc tranh luận bằng thư từ lâu dài và sôi nổi của một số nhà toán học trong đó có Gorandi, Vônphơ, Vadinhông, Lainit, Iacôp, Beenuli, Ole.

Ví dụ trên là một điển hình về sai lầm khi vận dụng phép tương tự: với ba cách giải đầu người ta đã áp dụng tính chất kết hợp của tổng hữu hạn các số hạng cho tổng vô hạn các số hạng (chuỗi) (1) trên.

Một tổng hữu hạn các số hạng không thuộc vào thứ tự của các số hạng. Nhưng vận dụng tính chất đó cho chuỗi trên chuỗi là sai.

Cuộc tranh luận thú vị đó của các nhà toán học thế kỷ 18 đã được giải quyết khi họ đã xác lập khái niệm chính xác về các chuỗi hội tụ và các chuỗi phân kỳ, phân biệt tính chất khác nhau về tổng hữu hạn và vô hạn các số hạng. Sau này các bạn sẽ gặp các vấn đề đó ở môn Giải tích ở bậc đại học.

§ 3. Tóm lại như chúng ta đã rõ: phép tương tự gợi cho chúng ta những dự đoán để tạo trong toán học. Trong một số trường hợp điều ta dự đoán đúng; trong một số trường hợp khác điều ta dự đoán lại sai.

Chúng ta có thể xem một đối tượng ban đầu là tương tự với một số đối tượng khác theo các góc độ nhìn khác nhau, tùy theo hiệu (hay thuộc tính) mà chúng ta đang nghiên cứu. Chính với cách nhìn với các góc độ khác nhau đó mà chúng ta mở rộng được phạm vi nghiên cứu, chúng ta chủ động tạo ra nhiều năng sáng tạo toán học.

Để nâng cao độ chính xác của các kết quả dự đoán nhờ phép tương tự, chúng ta cần ý các điều kiện sau:

1) Hai đối tượng đem ra so sánh càng nhiều dấu hiệu chung (thuộc tính chung) thì độ chính xác của kết quả dự đoán qua phép tương tự càng cao.

2) Các dấu hiệu của hai đối tượng đó càng nhiều về thì độ chính xác của kết quả dự đoán qua phép tương tự càng cao.

3) Càng nhiều dấu hiệu chung mà bản chất thì kết quả dự đoán qua phép tương tự dễ chính xác hơn.

4) Mối quan hệ giữa các dấu hiệu chung và dấu hiệu định xét đến có tính quy luật sẽ nâng cao độ chính xác về kết luận dự đoán qua phép tương tự.

5) Sự khác nhau về bản chất giữa hai đối tượng đem ra so sánh càng ít thì độ chính xác về kết luận dự đoán nhờ phép tương tự càng cao.

Chúc các bạn đạt nhiều kết quả mới trong việc học toán khi vận dụng các phép tương tự có lý nói chung và phép tương tự riêng.

GIẢI BÀI Kỳ trước

chia hết cho những số nguyên tố nào sau đây:
 2, 3, 5, 13, 109, 151, 491.

Lời giải (của nhiều bạn). Ta có:

$$\begin{aligned} Z &= 1963^{1965} - 1963 = 1963 (1963^{1964} - 1) \\ &= 1963 (1963^{982} + 1) (1963^{491} - 1) (1963^{491} + 1) \\ &= 1963 \cdot (1963 + 1)N \cdot (1963 - 1)M \quad (N, M \text{ nguyên dương}) \\ &= 1963 \cdot 1964 \cdot 1962 \cdot P \quad (P = N \cdot M). \end{aligned}$$

$$1962 = 2 \cdot 3^2 \cdot 109.$$

$$1963 = 13 \cdot 151,$$

$$1964 = 2^4 \cdot 491.$$

nên Z chia hết cho 2, 3, 13, 109, 151, 491.

Ta lại có

$$\begin{aligned} Z &= 1963 (1963^{1964} - 1) = 1963 [(1963^4)^{491} - 1]. \\ 1963^4 &\text{ có chữ số cuối cùng là } 1 \Rightarrow 1963^{1964} \text{ có chữ số cuối cùng là } 1 \Rightarrow Z \equiv 0 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Vậy Z chia hết cho 5.

Tóm lại Z chia hết cho tất cả các số nguyên tố nói trong đầu bài.

Đầu bài toán này trong số báo 113 in nhầm số 491 thành 451. Số $451 = 41 \times 11$ không phải là số nguyên tố. Ta chứng minh Z không chia hết cho 451 bằng cách chứng minh Z không chia hết cho 11:

$$1963 \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow 1963^2 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow$$

$$1963^4 \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow 1963^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow$$

$$1963^{1965} \equiv (1963^5)^{393} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow$$

$$Z = 1963^{1965} - 1963 \equiv -4 \pmod{11}.$$

Bài 3/113. Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là bốn số nguyên dương sao cho

$$a^2 + b^2 + c^2 = abcd, \quad (1)$$

thì ta phải có hoặc $d = 1$, hoặc $d = 3$.

Lời giải. Đề ý rằng quả thật có những bộ bốn số nguyên dương (a, b, c, d) thỏa mãn điều kiện (1), chẳng hạn: (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 3), (3, 3, 3, 1), (3, 3, 6, 1),...

Ta hãy xem một bộ số nguyên dương (a_0, b_0, c_0, d) thỏa mãn (1). Với số d đó, thì (a_0, b_0, c_0) là một nghiệm nguyên dương của phương trình.

$$x^2 + y^2 + z^2 = dxyz. \quad (2)$$

Trong tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y, z) của phương trình này, chắc chắn có một nghiệm mà $a + b + c$ nhỏ nhất (nếu có nhiều

N.D.T.

nghiệm (a, b, c) với cùng tổng $a + b + c$ nhỏ nhất thì ta chỉ việc lấy một trong các nghiệm ấy. Vai trò của x, y, z trong (2) là như nhau, nên có thể giả thiết

$$a \leq b \leq c.$$

Vì $dabc = a^2 + b^2 + c^2 > c^2$, nên $dab > c$, lúc là $c' = dab - c$ là một số nguyên dương. Hơn nữa (a, b, c') cũng là một nghiệm nguyên dương của (2) bởi vì

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c'^2 &= a^2 + b^2 + (dab - c)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 a^2 b^2 - 2dabc \\ &= d^2 a^2 b^2 - dabc = dab(dab - c) = dabc'. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có $a + b + c \leq a + b + c'$, vậy $c \leq c'$, mà $c + c' = dab$, do đó

$$a \leq b \leq c \leq dab/2 \quad (3)$$

Vi

$$a^2 + b^2 + (dab/2 - c)^2 = (dab/2)^2,$$

nên từ (3) suy ra

$$b^2 + b^2 + (dab/2 - b)^2 \geq (dab/2)^2$$

$$\text{hay } 3b^2 - ab^2 d \geq 0$$

$$\text{hay } 3 - ad \geq 0.$$

Mặt khác

$$abcd - 2bc = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc = a^2 + (b - c)^2 \geq 0$$

$$\text{hay } (ad - 2)bc \geq 0, \text{ do đó } ad \geq 2.$$

Như vậy $2 \leq ad \leq 3$ mà ad nguyên, nên $ad = 3$, thành thử chỉ có thể hoặc $d = 1$, hoặc $d = 3$.

Các bạn: Nguyễn Mạnh Hùng (9CT, ĐHSP 1, Hà Nội), Đặng Hùng Tuấn (A.9, ĐHTH, Hà Nội) có lời giải tương tự như trên.

Nhận xét. Với bộ bốn số nguyên dương (a, b, c, d) thỏa mãn điều kiện (1), tức là (a, b, c) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2), thì ta có thể coi chẳng hạn c là một nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - abdX + (a^2 + b^2) = 0$$

Do vậy phương trình này còn có một nghiệm c' nữa; theo hệ thức Viét, $c' = abd - c$ (như vậy c' nguyên và ta đã thấy $c' > 0$); đó là ý đã đề cập đến trong lời giải trên.

Suy nghĩ thêm về cách lập luận chuyển từ c sang c' (và tương tự cho a, b) cùng cách hoán vị a, b, c , các bạn sẽ phát hiện được «thuật toán» để tìm ra tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình (2), xuất phát từ nghiệm «nhỏ» của phương trình ấy, tức là nghiệm $(1, 1, 1)$ khi $d = 3$ và nghiệm $(3, 3, 3)$ khi $d = 1$. Hơn nữa các bạn sẽ thấy nếu (A, B, C) là một nghiệm của phương trình (2) với $d = 1$ thì (A, B, C) phải là bội của 3, khi đó $(A/3, B/3, C/3)$ là một nghiệm

của phương trình (2) với $d = 3$; và nếu (a, b, c) là một nghiệm của (2) với $d = 3$ thì $(3a, 3b, 3c)$ là một nghiệm của (2) với $d = 1$.

Bài 4/113. Tìm những giá trị nguyên của cặp số (a, b) sao cho phương trình

$$x^2 + ax + b = 0$$

có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm nằm trong khoảng $(-5, -4)$ và nghiệm còn lại nằm trong khoảng $(2, 3)$.

Lời giải (của Nguyễn Hoài Nam - 10 D, Kiểm, Hà Nội; Hà Thúc Dương - 11 CT, Quốc Huê; Lưu Thái Linh - 11 C8 Lê Hồng Phong; Hồ Chí Minh;...).

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^2 + ax + b = 0$$

ta phải có dãy số sắp xếp theo thứ tự: $-5, x_1, -4, 2, x_2, 3$.

Do đó

$$(I) \begin{cases} f(-4) < 0 \Rightarrow 16 - 4a + b < 0 \\ f(2) < 0 \Rightarrow 4 + 2a + b < 0 \\ f(3) > 0 \Rightarrow 9 + 3a + b > 0 \\ f(-5) > 0 \Rightarrow 25 - 5a + b > 0 \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} b < 4a - 16 \\ b < -2a - 4 \\ b > -3a - 9 \\ b > 5a - 25 \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có

$$-3a - 9 < b < 4a - 16$$

do đó $a > 1$.

Từ (2) và (4) ta có

$$5a - 25 < b < -2a - 4$$

do đó $a < 3$.

Vậy $a = 2$.

Thay $a = 2$ vào (1) và (2) ta có $b < -8$.

Thay $a = 2$ vào (3) và (4) ta có $b > -15$.

Vậy $b = -9, -10, -11, -12, -13, -14$.

Ta có 6 cặp số thỏa mãn yêu cầu bài ra: $(2, -9), (2, -10), (2, -11), (2, -12), (2, -13), (2, -14)$.

Từ (I) ta cũng có thể dùng phương pháp thị để giải. Trên hệ tọa độ vuông góc (a, b) bốn bất đẳng thức trong hệ (I) nghiệm đúng với những điểm nằm trong tứ giác tạo thành bởi các đường thẳng

$$16 - 4a + b = 0,$$

$$4 + 2a + b = 0,$$

$$9 + 3a + b = 0,$$

$$25 - 5a + b = 0.$$

Từ đó thấy ngay các cặp số phải tìm.

hiệu bạn gửi lời giải bài này, song số điểm cao không nhiều. Rất đáng tiếc bạn phạm những sai lầm quá lớn.

P.Q.G.
nguyên của
một nghiệm
hiện còn lại
-10 D Hoàn
T Quốc học
Phong T.P.
ong trình
tự:
0
0
0
0

5/113. Giải thử $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ là một số thực thỏa mãn điều kiện.

$a_i \leq c + (a_{i-1} + a_{i+1})/2$ ($i = 1, 2, 3, \dots$)
đó c là một số thực, không phụ thuộc vào i .

g minh rằng
 $a_i \leq i(n-i)c + (1-i/n)a_0 + ia_n/n$
mọi $i = 0, 1, \dots, n$.

lời giải. Nhìn chung các bạn gửi lời giải lời giải đúng. Sau đây là hai cách giải và đặc sắc.

(1) Cách 1 (của Phạm Văn Hiến, 11 C1 Phan Bội
(2) Phan Thiết). Từ điều kiện của bài toán
(3) ra
(4) $a_i - a_{i-1} \leq a_{i+1} - a_i + 2c$ ($i = 1, 2, 3, \dots$)

đó
 $a_1 - a_0 \leq a_2 - a_1 + 2c \leq a_3 - a_2 + 4c \leq \dots$
 $\dots \leq a_i - a_{i-1} + 2(i-1)c \leq \dots$

Vi vậy nếu đặt
 $b_i = a_i - a_{i-1} + 2(i-1)c$ ($i = 1, 2, 3, \dots$)
ta được dãy số tăng

$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_i \leq \dots \leq b_n \leq \dots$

ành thử ta có
 $b_1 + \dots + b_i \leq b_i \leq b_{i+1} \leq \dots \leq b_n$

đó
 $b_1 + \dots + b_i \leq b_i \leq b_{i+1} \leq \dots \leq b_n$

pháp đồ
óc (a, b).
iêm đúng
o thành

bài ra:
(2, -13).

do đó

$$\frac{b_1 + \dots + b_i}{i} \leq \frac{i \left(\frac{b_1 + \dots + b_i}{i} \right) + b_{i+1} + \dots + b_n}{n}$$

$$= \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}$$

sau khi thay $b_1, \dots, b_n$ bằng biểu thức của

$$\frac{a_i - a_0 + i(i-1)c}{i} \leq \frac{a_n - a_0 + n(n-1)c}{n}$$

từ đây suy ra với $i = 1, 2, \dots, n$

$$a_i \leq i(n-1)c + (1-i/n)a_0 + ia_n/n$$

Cách 2 của (Tôn Thất Đăng - 10CT, Quốc học Huế).

Đặt

$$b_i = a_i - [i(n-i)c + (1-i/n)a_0 + ia_n/n]$$

($i = 0, 1, 2, \dots, n$), thì hiển nhiên $b_0 = b_n = 0$. Ta còn phải chứng minh rằng $b_i \leq 0$ khi $i = 1, 2, \dots, n-1$. Giả thiết trái lại rằng điều đó không đúng, như vậy $M = \max(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) > 0$. Khi đó có một hay nhiều b_i sao cho $b_i = M$, trong các số này ta chọn b_k với chỉ số k nhỏ nhất, như vậy

$$\begin{cases} b_i < b_k \text{ nếu } 0 \leq i < k \\ b_i \leq b_k \text{ nếu } k < i \leq n, \end{cases}$$

đặc biệt

$$b_{k-1} < b_k \text{ và } b_{k+1} \leq b_k$$

Do đó

$$b_k > (b_{k-1} + b_{k+1})/2;$$

thay b_k, b_{k-1} và b_{k+1} bởi các biểu thức của chúng, rồi ước lược, ta đi đến bất đẳng thức

$$a_k > (a_{k-1} + a_{k+1})/2 + c;$$

trái với điều kiện của đầu bài.

Mâu thuẫn ấy chứng tỏ rằng ta phải có $b_i \leq 0$ với mọi $i = 0, 1, \dots, n$, đó là điều phải chứng minh.

Các bạn Nguyễn Đầu (10 C1, Phan Chu Trinh, Đà Nẵng), Nguyễn Ngọc Khánh (9C Đoàn Kết, Hà Nội), Nguyễn Trọng Tuấn (10C, An Khê, Gia Lai - Kon Tum), Hà Thúc Dương (11 CT, Quốc học Huế) cũng có lời giải tốt.

Bài 6/113. Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi số thực x và thỏa mãn các điều kiện sau đây:

a) $f(1) = 1,$

b) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi $x, y,$

c) nếu $x \neq 0$, thì $f(x) = x^2 f(1/x)$

Chứng minh rằng

$$f(\sqrt[3]{1980/1945}) = \sqrt[3]{1980/1945}$$

Lời giải (của Võ Minh Đức - Buôn Mê Thuột và Phạm Văn Hiến - 11 C1, Phan Bội Châu, Phan Thiết).

Ta chứng minh $f(x) = x$ với mọi số thực x . Thật vậy, từ các điều kiện b) và a) ta có:

$$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0;$$

$$0 = f(0) = f(1-1) = f(1) + f(-1)$$

$$= 1 + f(-1) \Rightarrow f(-1) = -1.$$

Với những giá trị của x khác 0 và khác -1, từ các điều kiện b) và a) ta có:

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) + f\left(\frac{1}{x+1}\right) = f\left(\frac{x+1}{x+1}\right) = f(1) = 1 \quad (*)$$

Từ điều kiện c):

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x^2}{(x+1)^2} f\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} f(x+1).$$

Vậy (*) trở thành

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} f\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x+1) = 1$$

$\Leftrightarrow x^2 f(1) + x^2 f(1/x) + f(x) + f(1) = (x+1)^2$ (do b)).
Mà $x^2 f(1/x) = f(x)$ và $f(1) = 1$, nên đẳng thức trên tương đương với

$$x^2 + 2f(x) + 1 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow 2f(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x.$$

Vì $f(x) = x$ với mọi x , nên điều phải chứng minh là hiển nhiên.

Nhận xét. Các bạn Phạm Anh Tuấn (8I, Chu Văn An, Hà Nội), Đặng Hoàng An (8CT, Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang), Lưu Thanh Long (12 C5, Lưu Văn Liệt, Vĩnh Long), Lê Hoài Nam (9C, Lê Hồng Phong, Nam Định) đã có lời giải tốt.

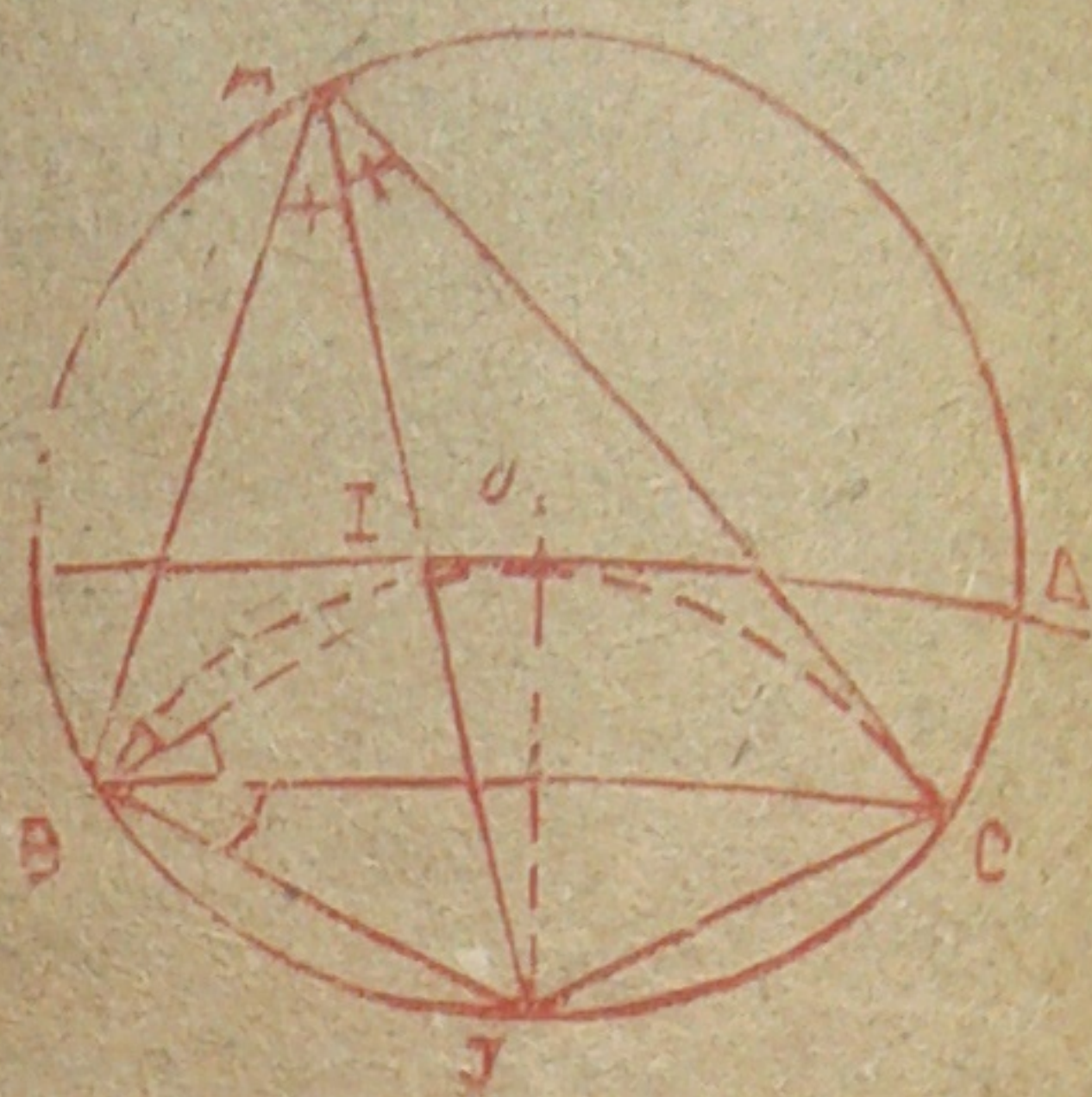
Vài bạn khác cũng giải được bài toán với kết quả $f(\sqrt[r]{r}) = \sqrt[r]{r}$ khi r hữu tỷ, nhưng không suy nghĩ sâu thêm, tuy cách giải tổng quát lại đơn giản hơn cách giải của các bạn ấy. Phần đông các bạn gửi lời giải đã ngộ nhận rằng hàm f liên tục, giả thiết này không có trong đầu bài toán.

P.Q.G.

Bài 8/113. Dựng một tam giác biết bán kính các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp và độ dài một cạnh.

Lời giải.

1. **Phân tích.** Giả sử đã dựng được tam giác ABC biết độ dài cạnh BC bằng $a = 2a'$, bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp. Như vậy cạnh BC là một dây cung có độ dài $a = 2a'$ đã cho của đường tròn (O, R) ; bài toán quy về dựng đỉnh A của tam giác cân tìm. Nối A với tâm I của đường tròn nội tiếp; kéo dài AI gặp đường tròn ngoại tiếp ở J . Để thấy rằng J là trung điểm của cung BC không chứa đỉnh A , và nằm



khác phía với I đối với đường thẳng (BC) . Đó chính là giao điểm thứ hai của đường tròn (O, R) với đường thẳng (IJ) và tâm I của đường tròn nội tiếp và trung điểm J của một trong hai cung BC của đường tròn (O, R) .

Bài toán quy về dựng tâm I của đường tròn nội tiếp.

Ta có: $\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})/2 = 90^\circ + \widehat{A}/2$, vậy I nằm trên cung chứa góc $\alpha = 90^\circ + \widehat{A}/2$ căng dây BC và nằm về phía không chứa điểm J đối với đường thẳng (BC) . Để chứng minh được cung chứa góc này là một cung của đường tròn (O) tâm J , bán kính $JB = JC$. Mặt khác, I cách (BC) một khoảng bằng r cho trước, nên I nằm trên đường thẳng $\Delta // (BC)$ và cách BC một khoảng bằng r ; Δ nằm khác phía với điểm J đối với đường thẳng (BC) . Vậy tâm I đường tròn nội tiếp là một trong các giao điểm của đường thẳng Δ và đường tròn $v(J, r' = JB)$.

2. **Cách dựng.** Từ những điều phân tích ở trên, ta suy ra cách dựng tam giác ABC , trình tự như sau (xem h.1).

- Dựng đường tròn (O, R) , sau đó dựng dây cung $BC = a = 2a'$ (cố nhiên phải thỏa mãn điều kiện $a \leq 2R$, hay là $a' \leq R$).

- Kẻ bán kính $OJ \perp BC$, J là trung điểm của một trong các cung BC của đường tròn (O, R) rồi dựng đường tròn $v(J, r' = JB)$.

- Dựng đường thẳng $\Delta // (BC)$, cách (BC) một khoảng bằng r và nằm khác phía với J đối với (BC) .

- Δ cắt v ở I ; kéo dài JI cắt đường tròn (O) ở A , ABC chính là tam giác phải dựng.

3. **Chứng minh.** Theo cách dựng, tam giác ABC có cạnh BC có độ dài $a (= 2a')$ cho trước, đường tròn ngoại tiếp có bán kính R . Chỉ cần

minh rằng đường tròn (I), tâm I chính là đường tròn nội tiếp tam giác. Cách chứng minh không khó, các bạn thử.

Muốn cho bài toán có lời giải, phải có điều kiện $a = 2a' \leq 2R$ hay sau đó xét hai trường hợp có thể $a' = R$ và $a' < R$.

là giao điểm của Δ và (OJ). Thế thì, ta có nghiệm, tức là để Δ cắt đường tròn (JB), ta phải có:

$$JH \leq JB.$$

$JH = JO + OH = R + r, JB = R\sqrt{2}$, nên:

$$JH \leq JB \Leftrightarrow r \leq R(\sqrt{2} - 1).$$

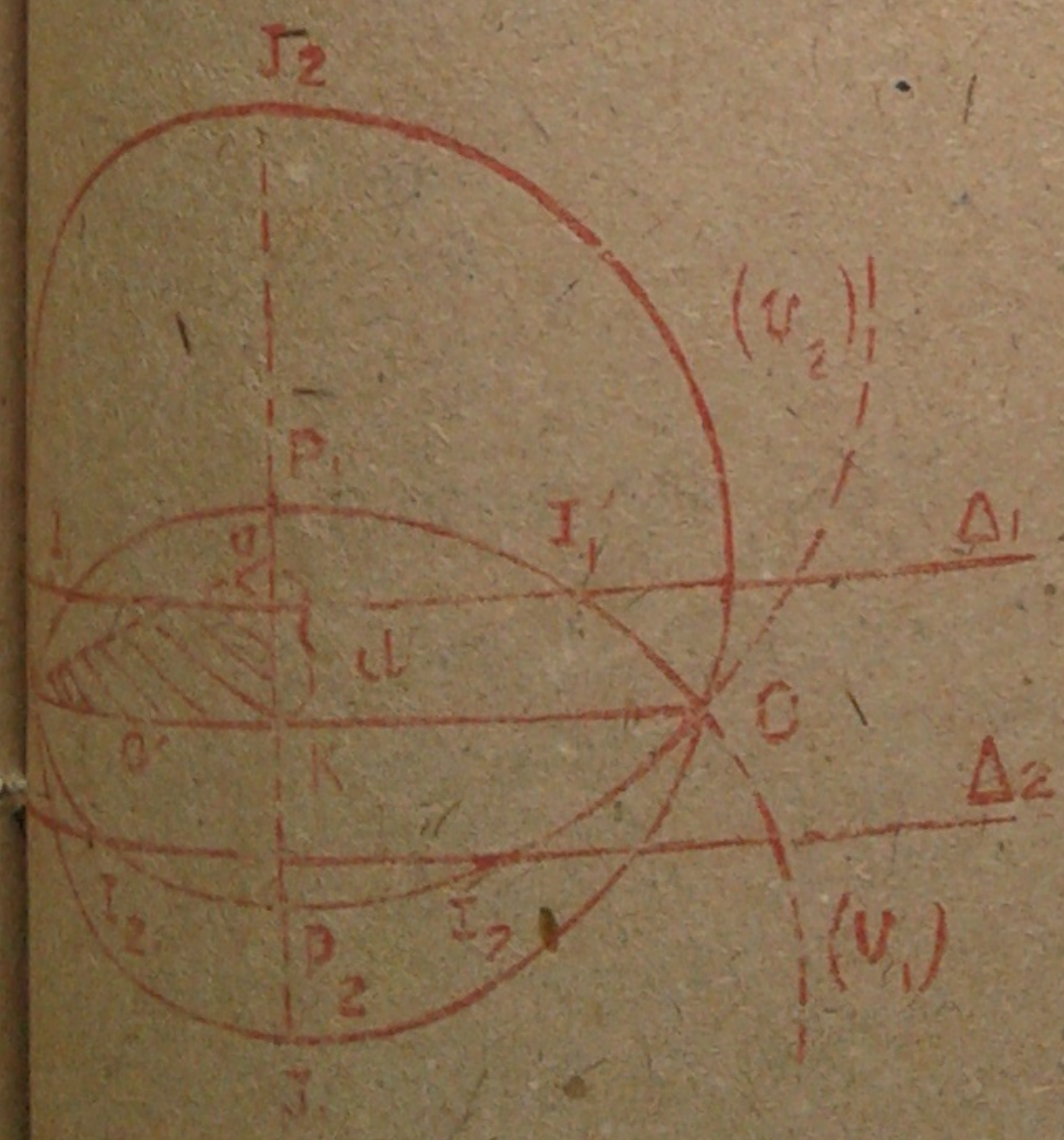
$r < R(\sqrt{2} - 1)$, Δ cắt v ở hai điểm I và J, đối xứng với nhau qua đường kính $JJ' \perp BC$; hai điểm A và A' cũng đối xứng với nhau qua đường kính này. Bài toán có một nghiệm vì ta xem hai tam giác bằng nhau ΔABC (do đối xứng với nhau qua đường kính) chỉ là một nghiệm hình mà thôi.

Nếu $r = R(\sqrt{2} - 1)$, Δ tiếp xúc với v, ta có một nghiệm hình: ABC là tam giác vuông.

Nếu $r > R(\sqrt{2} - 1)$; Δ không cắt v: bài toán vô nghiệm.

$$r < R (a < 2R).$$

K là trung điểm của BC, J_1 là trung điểm của cung nhỏ BC, J_2 là trung điểm của cung



lớn BC; v_1 là đường tròn tâm J_1 , bán kính J_1B ; v_2 là đường tròn tâm J_2 , bán kính J_2B ; P_1 là giao của J_1J_2 với v_1 , P_2 là giao của J_1J_2 với v_2 (h.2).

Rõ ràng là đường thẳng J_1J_2 qua O và K.

$$\text{Đặt } OK = d \text{ thì } R > d = \sqrt{R^2 - a'^2};$$

$$KP_1 = d_1 = J_1B - J_1K = \sqrt{2R(R-d)} - (R-d);$$

$$KP_2 = d_2 = J_2B - J_2K = \sqrt{2R(R+d)} - (R+d).$$

- Điều kiện để Δ_1 cắt đường tròn v_1 (J_1) là:

$$r \leq d_1.$$

- Điều kiện để Δ_2 cắt đường tròn v_2 (J_2) là:

$$r \leq d_2.$$

($\Delta_1 \parallel BC \parallel \Delta_2$, cách BC một khoảng bằng r, Δ_1 ở khác phía với J_1 đối với đường thẳng BC).

- Ta nhận thấy rằng $d_1 = KP_1 > KP_2 = d_2$.
Thật vậy:

$$d_1 > d_2 \Leftrightarrow \sqrt{2R(R-d)} - (R-d) > \sqrt{2R(R+d)} - (R+d)$$

$$\Leftrightarrow 2d > \sqrt{2R}(\sqrt{R+d} - \sqrt{R-d})$$

$$\Leftrightarrow 4d^2 > 2R(R+d - 2\sqrt{R^2 - d^2} + R-d)$$

$$\Leftrightarrow 4(R^2 - a'^2) > 2R(2R - 2a') = 4R^2 - 4Ra'$$

$$\Leftrightarrow a'(R - a') > 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $0 < a' < R$.

Từ đó suy ra:

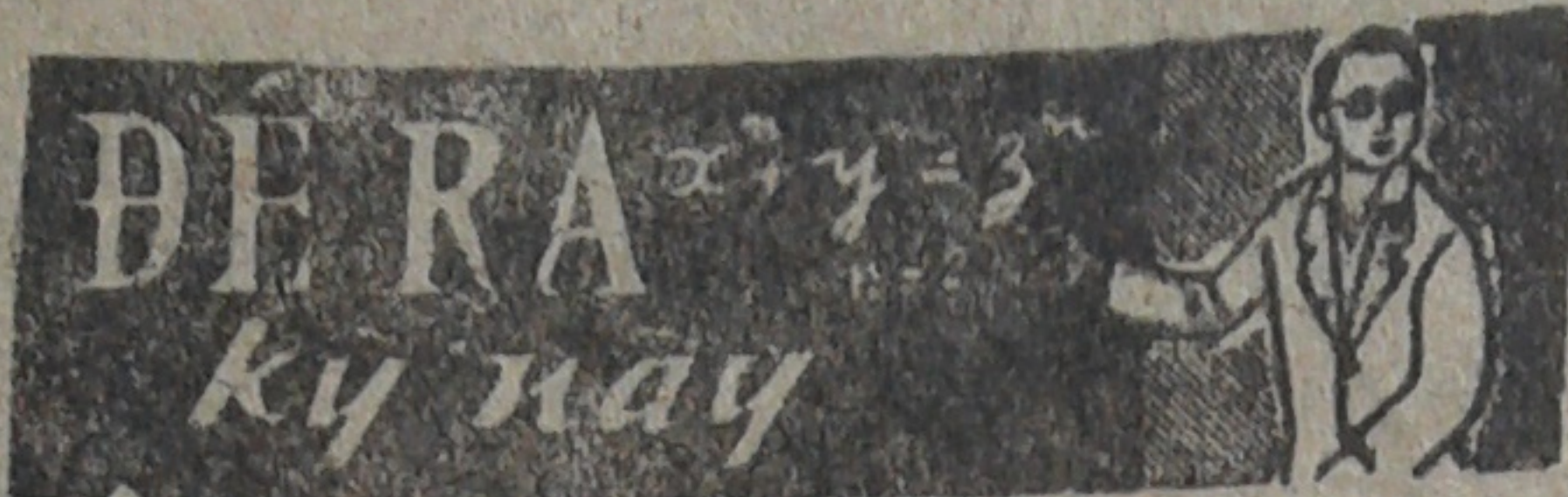
- Nếu $r \leq d_2$: bài toán có hai nghiệm hình (một tam giác nhọn và một tam giác tù).

- Nếu $d_2 < r \leq d_1$: bài toán có 1 nghiệm hình tam giác ABC cần tìm là một tam giác nhọn.

- Nếu $r > d_1$: bài toán vô nghiệm.

Nhận xét. Bạn Cam Minh Trí - học sinh lớp 10 C8, trường cấp 3 Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh có lời giải tốt nhất. Lời giải của bạn Trí trình bày gọn và sáng sủa, đặc biệt phân biệt luận tốt nhất, đầy đủ nhất và chặt chẽ nhất so với lời giải của các bạn khác. Một số bạn có cách phân tích khác đưa đến cách dựng khác với lời giải trên đây do áp dụng hệ thức O-le: $d^2 = R^2 - 2Rr$, trong đó d là khoảng cách OI giữa tâm các đường tròn nội và ngoại tiếp. Giải theo hướng này phần chứng minh phức tạp hơn nhiều và lời giải của nhiều bạn giải theo hướng này thiếu chặt chẽ.

Nguyễn Đăng Phát



Bài 1/116. Có 13 hòn bi, biết rằng trong đó có 1 hòn có trọng lượng khác với các hòn khác, còn 12 hòn có trọng lượng bằng nhau. Hãy dùng một cân hai đĩa, chỉ ra cách cân để sau 3 lần cân phát hiện được hòn bi có trọng lượng khác đó.

Vũ Đình Hòa (CHDC Đức)

Bài 2/116. Chứng minh rằng số $10 \dots 01$ chỉ 2^{n+1}

có ước số dạng $2^{n+1}k+1$.

Từ đó suy ra số đó nguyên tố cùng nhau với số $1.2.3 \dots (2^{n+1}-1)2^{n+1}$

Vũ Đình Hòa

Bài 3/116. Tìm tất cả những số nguyên tố x sao cho tổng

$$y = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{x^2-1}]$$

cũng là một số nguyên tố.

Nguyễn Công Quý

(ĐHSP T. P. Hồ Chí Minh)

Bài 4/116. Gọi S là số nhỏ nhất trong các số $x, y/x, z/t, 1/y, 1/z, t$. Trong đó x, y, z, t là các số thực dương. Hãy tìm miền giá trị của S khi các số dương x, y, z, t thay đổi.

Vũ Quang Sửu (ĐHSP Vinh)

Bài 5/116. Chứng minh bất đẳng thức

$$\cos^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cos^2 \frac{4\pi}{2n+1} + \dots$$

$$\dots + \cos^2 \frac{2n\pi}{2n+1} < \frac{n}{2}$$

với n là số tự nhiên

Đặng Hải Nam (Hải Hưng)

Bài 6/116. Tính các góc của tam giác ABC biết rằng

$$8R^3 h_a h_b h_c = 27 OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, h_a, h_b, h_c là các đường cao và O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Nguyễn Công Quý

Bài 7/116. Trong tam giác ABC ta kẻ đường cao CH và trung tuyến CL . Từ C dựng hai đường thẳng Cx, Cy lập tương ứng với hai góc bằng nhau. Giả sử M, N là chân các đường vuông góc tương ứng hạ từ A đến Cx, Cy . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, H, L nằm trên một đường tròn.

Nguyễn Việt Thành
(Nghệ Tĩnh)

Bài 8/116. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tứ giác $ABCD$ là hình vuông là

$$4S^2 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$$

trong đó S là diện tích; a, b, c, d là các cạnh của tứ giác

Phạm Hiến Bằng
(ĐHSP Việt Bắc)

Bài 9/116. Cho hai đường tròn đồng tâm (O, R) và (I, r) . Chứng minh rằng nếu có một tam giác ABC vừa nội tiếp đường tròn này vừa ngoại tiếp đường tròn kia thì cũng có vô số tam giác như vậy. Bất cứ điểm nào của đường tròn lớn cũng là một đỉnh của một tam giác như thế và bất cứ dây nào của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ cũng là một cạnh của một tam giác như thế.

Trong số những tam giác như vậy, tam giác nào có diện tích lớn nhất, tam giác nào có diện tích nhỏ nhất và tìm các giá trị đó theo R và r

Nguyễn Đăng Phát
(ĐHSP 1 Hà Nội)

HỌC SINH TÌM TÒI

Bài 10/116. Cho nửa đường tròn đường kính AB , C là một điểm trên nửa đường tròn đó. Vẽ hai đường tròn nội tiếp trong hai hình quạt OAC và OCB , hai đường tròn này tiếp xúc với AB tại M và N . Hãy chứng minh rằng

$$MN \geq (\sqrt{2} - 1) AB$$

Thái Văn Đợi và Thái Văn Hội
(Trường cấp 3 Yên Thành, Nghệ Tĩnh)

VÀI ƯỚC LƯỢNG HÌNH HỌC

(Tiếp theo)

PHAN ĐỨC CHÍNH

VÀI ƯỚC LƯỢNG CÁC YẾU TỐ CỦA MỘT TỨ DIỆN

Trong không gian, tứ diện đều với độ dài cạnh bằng 1, có bốn đường cao bằng $\sqrt{6}/3$, thể tích bằng $\sqrt{2}/12$ và bán kính (hình cầu) nội tiếp bằng $\sqrt{6}/12$. Từ nhận xét ấy, ta hãy đề ra bài toán sau đây.

Bài toán 6. Cho một tứ diện với độ dài mỗi cạnh không vượt quá 1. Chứng minh rằng tứ diện

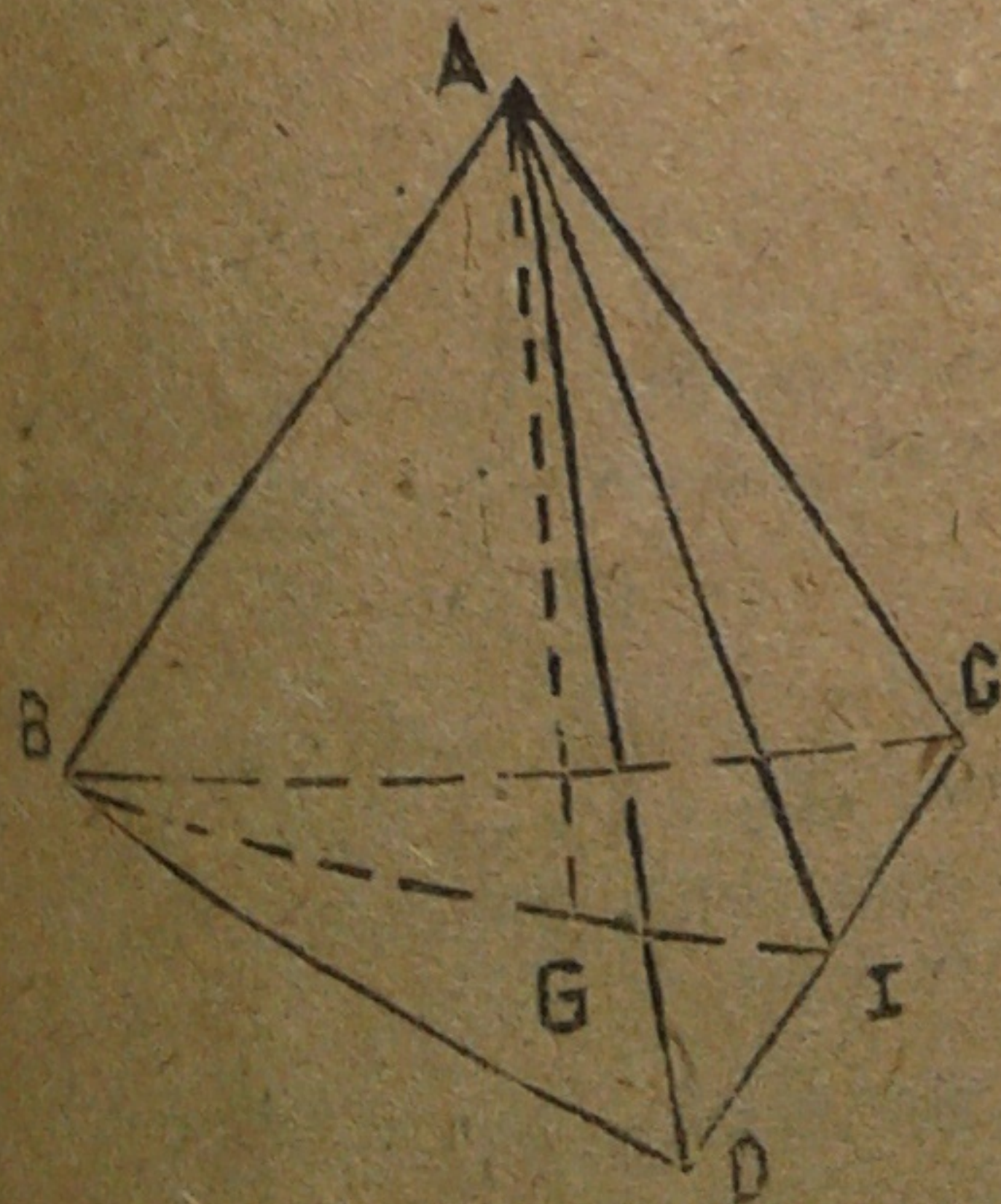
thỏa mãn hai đường cao $\leq \sqrt{6}/3$.

thể tích $\leq \sqrt{2}/12$.

bán kính nội tiếp $\leq \sqrt{6}/12$.

Giải. a) Ta gọi một trung tuyến của một tứ diện là đoạn thẳng nối một đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện. Độ dài của một trung tuyến không lớn hơn độ dài của đường cao xuất phát từ cùng đỉnh, vì vậy để chứng minh a), ta chứng minh qua mạnh hơn:

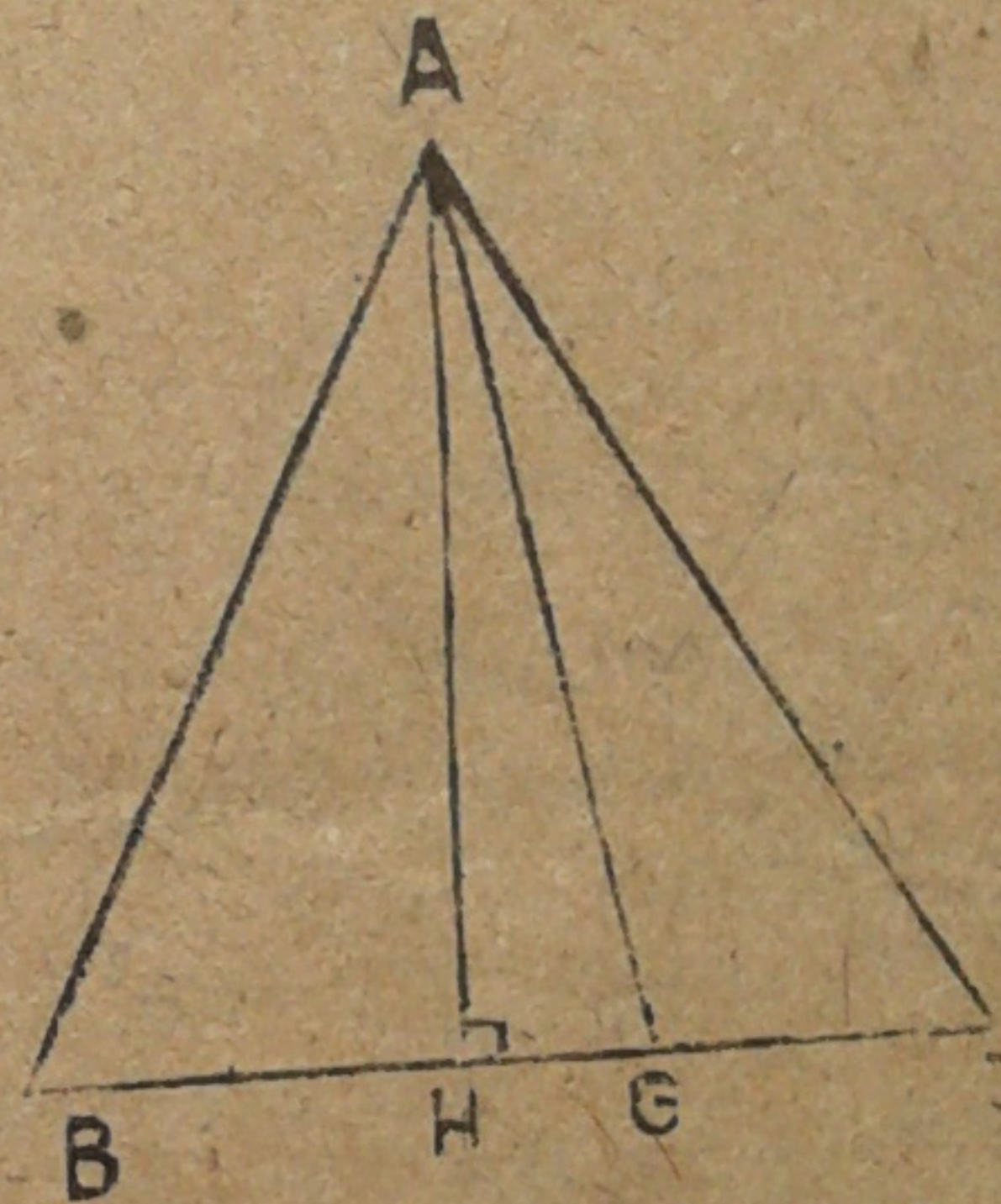
Một tứ diện thỏa mãn điều kiện của bài toán, thì có ít nhất hai trung tuyến với độ dài $\leq \sqrt{6}/3$.
Chứng minh chia làm hai bước.



Hình 3

Bước 1. Tính độ dài trung tuyến AG của tứ diện ABCD, với G là trọng tâm tam giác BCD (hình 3).

Gọi I là trung điểm đoạn CD. Vấn đề quy về việc tính đoạn AG trong tam giác ABI, với $BG = 2GI$.



Hình 4

Theo hình 4, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BI. Vì H có thể nằm trong hay ngoài đoạn BI, nên ta sẽ dùng khoảng cách đại số. Ta có một mặt:

$$\begin{aligned} AH^2 &= AB^2 - BH^2 = AB^2 - (\overline{BG} + \overline{GH})^2 \\ &= AB^2 - BG^2 - GH^2 - 2\overline{BG} \cdot \overline{GH}, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$AG^2 = AB^2 - (4/9)BI^2 - 2\overline{BG} \cdot \overline{GH}, \quad (4)$$

và mặt khác ta có

$$\begin{aligned} AH^2 &= AI^2 - HI^2 = AI^2 - (\overline{HG} + \overline{GI})^2 \\ &= AI^2 - HG^2 - GI^2 - 2\overline{HG} \cdot \overline{GI}, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$AG^2 = AI^2 - (1/9)BI^2 - 2\overline{HG} \cdot \overline{GI}. \quad (5)$$

Vì $\overline{BG} = 2\overline{GI}$, $\overline{HG} = -\overline{GH}$, nên từ (4) và (5)

$$\text{suy ra} \quad 3AG^2 = 2AI^2 + AB^2 - (2/3)BI^2. \quad (6)$$

Vi AI là trung tuyến của tam giác ACD, BI là trung tuyến của tam giác BCD, nên ta có theo công thức tính trung tuyến của một tam giác

$$2AI^2 = AC^2 + AD^2 - (1/2)CD^2, \quad (7)$$

$$2BI^2 = BC^2 + BD^2 - (1/2)CD^2, \quad (8)$$

vậy cuối cùng, từ (6), (7), (8), ta suy ra

$$3AG^2 = (AB^2 + AC^2 + AD^2) - (1/3)(BC^2 + CD^2 + DB^2). \quad (9)$$

Đó là công thức tính trung tuyến của một tứ diện theo các cạnh của tứ diện ấy (suy rộng công thức tính trung tuyến của một tam giác, bạn đọc hãy tự giải thích điều đó). Trong công thức này, đề ý rằng

$$d(A) = AB^2 + AC^2 + AD^2$$

là tổng bình phương các cạnh xuất phát từ đỉnh A, còn

$$s(A) = BC^2 + CD^2 + DB^2$$

là tổng bình phương các cạnh của mặt đối đỉnh A.

Bước 2. Cũng như trên, ta ký hiệu $d(B)$, $d(C)$, $d(D)$ lần lượt là các tổng bình phương các cạnh xuất phát từ các đỉnh B, C, D, và ký hiệu $s(B)$, $s(C)$, $s(D)$ lần lượt là các tổng bình phương các cạnh của các mặt đối các đỉnh B, C, D. Chẳng hạn

$$d(B) = BA^2 + BC^2 + BD^2, \quad s(B) = AC^2 + CD^2 + DA^2, \dots$$

Ký hiệu $2k$ là tổng bình phương của 6 cạnh của tứ diện, tức là

$$2k = AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + DB^2$$

dĩ nhiên ta có

$$d(A) + s(A) = d(B) + s(B) =$$

$$d(C) + s(C) = d(D) + s(D) = 2k,$$

và

$$d(A) + d(B) + d(C) + d(D) =$$

$$s(A) + s(B) + s(C) + s(D) = 4k.$$

Đặt

$$d(A) = k + \alpha, \quad d(B) = k + \beta, \quad d(C) = k + \gamma,$$

$$d(D) = k + \delta,$$

thì ta có

$$s(A) = k - \alpha, \quad s(B) = k - \beta, \quad s(C) = k - \gamma,$$

$$s(D) = k - \delta,$$

và

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Nếu cần, ta đổi tên các đỉnh của tứ diện đã cho, nên có thể coi rằng

$$d(A) \leq d(B) \leq d(C) \leq d(D),$$

tức là

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta.$$

Thế thì

$$4\alpha \leq \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

và

$$\alpha + 3\beta \leq \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \quad (10)$$

do đó

$$4\beta \leq \beta - \alpha.$$

Gọi m_A và m_B là độ dài các trung tuyến tứ diện, xuất phát từ các đỉnh A và B. Theo (10), ta có

$$3m_A^2 = d(A) - (1/3)s(A) = (k + \alpha) - (1/3)(k - \alpha) = (2/3)k + (4/3)\alpha \leq (2/3)k \leq 2,$$

bởi vì theo giả thiết, độ dài của mỗi cạnh của tứ diện là ≤ 1 , vậy $2k \leq 6$. Từ (12) ta suy ra

$$m_A \leq \sqrt{6}/3.$$

Ta lại có, theo (9) và (11)

$$\begin{aligned} 3m_B^2 &= d(B) - (1/3)s(B) = (k + \beta) - (1/3)(k - \beta) \\ &= (2/3)k + (4/3)\beta \leq (2/3)k + (1/3)(\beta - \alpha) \\ &= (1/3)(k + \beta) + (1/3)(k - \alpha) \\ &= (1/3)d(B) + (1/3)s(A) \leq 2, \end{aligned}$$

bởi vì do giả thiết của bài toán, ta có $d(B) \leq 3$ và $s(A) \leq 3$. Thành thử ta có

$$m_B \leq \sqrt{6}/3.$$

Tóm lại, ta đã chứng minh được rằng nếu mỗi cạnh của tứ diện là ≤ 1 , thì tứ diện phải có ít nhất hai trung tuyến (và do đó hai đường cao) với độ dài $\leq \sqrt{6}/3$.

Bạn đọc hãy kiểm nghiệm rằng tứ diện có cạnh bằng 1, cạnh thứ sáu bằng a , với $a > 0$ khá nhỏ, có hai đường cao $> \sqrt{6}/3$; vậy không thể cải tiến hơn kết quả đã nêu ở phần a) của bài toán.

b) Theo bài toán 1, mỗi mặt của tứ diện có diện tích $\leq \sqrt{3}/4$, do đó nếu lấy mặt ứng với một đường cao $\leq \sqrt{6}/3$, thì ta ước lượng được thể tích của tứ diện đã cho

$$V \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

c) Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện đã cho, thế thì

$$3V = rS,$$

với r là bán kính (hình cầu) nội tiếp của tứ diện ấy. Trong bài toán 9 dưới đây, ta sẽ chứng minh rằng với một tứ diện tùy ý, với thể tích V và diện tích toàn phần S , ta có bất đẳng thức

$$216 \sqrt{3} V^2 \leq S^3 \quad (11)$$

(mở rộng bất đẳng thức $3 \sqrt{3} S \leq p^2$ liên hệ diện tích S và nửa chu vi p của một tam giác, bạn đọc hãy tự giải thích điều đó). Theo b), ta có $V \leq \sqrt{2}/12$, vì vậy

$$216 \sqrt{3} V^2 \leq S^3 = 27V^3/r^3,$$

do đó

$$r^3 \leq \sqrt{3}/8 \leq 1/48 \sqrt{6} = (1/2\sqrt{6})^3.$$

$$r \leq \sqrt{6}/12.$$

Trong tất cả các tứ diện có cùng

đáy ABC cho trước, hãy xác định các khoảng cách đại từ H đến các đường thẳng BC, CA, AB .

Gọi O là đỉnh thứ tư của tứ diện, H là đường cao hạ từ O xuống đáy ABC , (hình 5) H có thể nằm trong hay ngoài tam giác ABC . Hãy xác định các khoảng cách đại từ H đến các đường thẳng BC, CA, AB .



Hình 5

$$|x| = HA', \quad |y| = HB', \quad |z| = HC'.$$

A', B', C' là các hình chiếu vuông góc của H lên BC, CA, AB . Đối với dấu của x , ta coi

$x > 0$ nếu H và A ở cùng về một phía đối với đường thẳng BC ,

$x = 0$ nếu H nằm trên đường thẳng BC ,

$x < 0$ nếu H và A ở về hai phía đối với đường thẳng BC .

Giá trị của y và của z được xác định theo cách tương tự.

Với quy ước ấy, và với

$$a = BC, \quad b = CA, \quad c = AB,$$

ta sẽ thấy rằng trong mọi trường hợp, ta luôn

$$ax + by + cz = 2s$$

trong đó s là diện tích tam giác ABC .

Theo giả thiết của bài toán, $h = OH$ là không đổi; hơn nữa

$$2dt(OBC) = BC \cdot OA' = a\sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{a^2h^2 + a^2x^2},$$

$$2dt(OCB) = CA \cdot OB' = b\sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{b^2h^2 + b^2y^2},$$

$$2dt(OAB) = AB \cdot OC' = c\sqrt{h^2 + z^2} = \sqrt{c^2h^2 + c^2z^2}.$$

Như vậy ta phải xác định x, y, z , thỏa mãn điều kiện (14), sao cho biểu thức

$$T = \sqrt{a^2h^2 + a^2x^2} + \sqrt{b^2h^2 + b^2y^2} + \sqrt{c^2h^2 + c^2z^2}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ Ouv , xem các điểm

$$P(ah, ax),$$

$$Q(ah + bh, ax + by),$$

$$R(ah + bh + ch, ax + by + cz),$$

do (14), ta thấy rằng R là một điểm cố định (không phụ thuộc x, y, z).

$$\text{và} \quad T = OP + PQ + QR \geq OR$$

(bạn đọc tự vẽ hình), dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi P, Q nằm trên đường thẳng OR , tức là khi

$$ax/ah = by/bh = cz/ch,$$

tức là khi $x = y = z$; khi đó T đạt giá trị nhỏ nhất

$$T_{\min} = \sqrt{(a+b+c)^2h^2 + (ax+by+cz)^2} \\ = 2\sqrt{p^2h^2 + s^2},$$

với p là nửa chu vi tam giác ABC .

Nhưng với $x = y = z$, ta thấy rằng H cách đều các cạnh của tam giác ABC , vậy H là tâm nội tiếp của tam giác ấy.

Tóm lại ta kết luận:

Trong tất cả các tứ diện $OABC$ có cùng thể tích V , và có cùng đáy ABC cho trước, tứ diện có diện tích toàn phần nhỏ nhất là tứ diện có chân H của đường cao OH trùng với tâm nội tiếp của tam giác ABC . Diện tích toàn phần nhỏ nhất ấy bằng

$$S_0 = s + \sqrt{p^2h^2 + s^2},$$

trong đó s, p là diện tích và nửa chu vi tam giác ABC , và

$$h = OH = 3V/s.$$

Từ bài toán 7, ta chuyển sang:

Bài toán 8. Trong tất cả các tứ diện có cùng thể tích V , và có đáy có cùng diện tích s cho trước, hãy xác định tứ diện có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Giải. Bài toán 8 chỉ khác bài toán 7 ở chỗ: không đòi hỏi đáy ABC là cố định, mà chỉ đòi hỏi diện tích s của đáy ấy là cố định. Với các ký hiệu ở bài toán 7, ta có, như đã

(14) biết

$$p^2 \geq 3\sqrt{3}s,$$

dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi đáy ABC là tam giác đều. Khi đó

$$p^2 = 3\sqrt{3}/s, \quad h^2 = 9V^2/s^2,$$

vì vậy ta có thể kết luận:

Trong tất cả các tứ diện có cùng thể tích V cho trước, và có đáy có cùng diện tích s cho trước, tứ diện có diện tích toàn phần nhỏ nhất là tứ diện có:

- đáy là tam giác đều (với diện tích s).

- đường cao $h = 3V/s$, có chân trùng với trọng tâm (trục tâm, tâm nội tiếp, tâm ngoại tiếp) của đáy.

Diện tích toàn phần nhỏ nhất ấy bằng

$$(S_0)_{\min} = s + \sqrt{27\sqrt{3}V^2/s + s^2}.$$

Dựa vào kết quả trên, bây giờ ta có thể giải quyết:

Bài toán 9. Chứng minh rằng nếu một tứ diện có thể tích V và diện tích toàn phần S , thì ta có

$$S^3 \geq 216\sqrt{3}V^2.$$

và dấu đẳng thức chỉ xảy ra đối với tứ diện đều.

HỆ QUẢ

a) Trong tất cả các tứ diện có cùng thể tích V cho trước, tứ diện đều có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

b) Trong tất cả các tứ diện có cùng diện tích toàn phần S cho trước, tứ diện đều có thể tích nhỏ nhất.

Giải. Xem tất cả các tứ diện có cùng thể tích V . Lấy $s > 0$ tùy ý. Theo bài toán 8, diện tích toàn phần nhỏ nhất của tứ diện thể tích V , diện tích đáy s , bằng

$$f(s) = s + \sqrt{27\sqrt{3}V^2/s + s^2}. \quad (15)$$

Ta hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(s)$ khi $s > 0$. Dùng phương pháp đạo hàm (đây là một bài tập không đơn giản, bạn đọc tự giải quyết), ta thấy rằng với $s > 0$, hàm $f(s)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$s = \sqrt[3]{27\sqrt{3}V^2/2} = (3/2)\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}. \quad (16)$$

Đề ý rằng trong công thức (15),

$$\sqrt{27\sqrt{3}V^2/s + s^2}$$

là tổng diện tích của 3 mặt bên (bằng nhau, do đó có cùng diện tích s'), nhưng với giá trị (16) của s , ta có thể kiểm lại rằng

$$s = s'.$$

Mỗi mặt bên là một tam giác cân, có một cạnh chung với tam giác đều ở đáy, và có cùng diện tích với tam giác đều ấy, vì vậy với giá trị (16) của s , ta thấy rằng mỗi mặt bên là một tam giác đều bằng tam giác đều ở đáy, thành thử khi đó tứ diện là đều.

Với giá trị (16) của s , hàm $f(s)$ đạt nhỏ nhất bằng

$$4s = 6\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}$$

đó là diện tích toàn phần nhỏ nhất của tứ diện có thể tích V cho trước. Vì vậy, nếu diện tích toàn phần của tứ diện đã cho là S , ta có

$$S \geq 6\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}.$$

nâng cả hai vế của bất đẳng thức này lên thừa bậc 3, thì được bất đẳng thức (13).

Dựa vào bất đẳng thức (13), ta có thể bài toán sau đây, mở rộng bài toán 3 cho gian:

Bài toán 10. Một tứ diện có thể tích V và diện tích toàn phần S . Chứng minh rằng tứ diện ấy có:

- ít nhất một đường cao $h \leq \sqrt{6}/3$,
- bán kính nội tiếp $r \leq \sqrt{6}/12$.

Giải. a) Gọi h là đường cao ngắn nhất của tứ diện. Ta có:

$$4V \geq (1/3)Sh,$$

với S là diện tích toàn phần của tứ diện, vậy theo (13)

$$12^3V^3 \geq S^3h^3 \geq 216\sqrt{3}V^2h^3,$$

từ đây suy ra

$$h^3 \leq (8/\sqrt{3})V.$$

Với $V \leq \sqrt{2}/12$, ta được $h \leq \sqrt{6}/3$.

Nhận xét. Tứ diện $OABC$ có 3 góc vuông đỉnh O và có các cạnh

$$a = OA = OB = OC = \sqrt[3]{\sqrt{2}/2},$$

nhận OA, OB, OC làm ba đường cao với độ dài $a > \sqrt{6}/3$, và có thể tích $V = \sqrt{2}/12$, thành thử không thể cải tiến hơn kết quả ở a).

b) Tương tự, do $3V = Sr$, ta có

$$27V^3 = S^3r^3 \geq 216\sqrt{3}V^2r^3,$$

hay

$$r^3 \leq V/8\sqrt{3}.$$

Với $V \leq \sqrt{2}/12$, ta được $r \leq \sqrt{6}/12$.

Dựa vào bất đẳng thức Trê-bur-sep, bạn đọc hãy chứng minh rằng nếu h_1, h_2, h_3, h_4 là độ dài bốn đường cao của một tứ diện, thì ta có

$$r \leq (1/16)(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

(từ đó suy ra rằng nếu cả bốn đường cao đều $\leq \sqrt{6}/3$, thì $r \leq \sqrt{6}/12$).

Ta cũng có các bất đẳng thức

$$r \geq (1/4) \min(h_1, h_2, h_3, h_4)$$

và

$$r < (1/2) \min(h_1, h_2, h_3, h_4).$$

TỔNG KẾT CUỘC THI GIẢI TOÁN NĂM 1980

thi giải toán của báo THvTT, chào mừng ba ngày lễ lớn năm 1980, đã được các bạn trẻ yêu toán tham gia. Tòa soạn đã nhận được trên 1200 bài giải của các địa phương trong nước gửi hầu hết các bạn tuy không tham gia giải thật là nhiều, có những bạn chỉ giải một vài đề, những bạn học năm cuối cấp hai cũng gửi bài. Khuôn khổ bài tổng kết này có hạn, không thể nêu lên toàn bộ danh sách tất cả bạn đã dự thi. Tòa soạn nhiệt liệt hoan nghênh sự tham gia đông đảo ấy của các bạn, chúc mừng các bạn được giải. Sự tham gia đông đảo ấy chứng tỏ nhiệt tình say mê học tập của thế hệ tuổi trẻ chúng ta; hơn nữa địa chỉ của các bạn, phần lớn các bài gửi là của các bạn đang học ở những trường có các lớp chuyên toán, và các bạn học ở các lớp chuyên toán chiếm nhiều giải với các bạn học ở các lớp chuyên toán.

Số các bài giải của từng đề toán mà tòa soạn đã nhận được là như sau:

Đề học: bài 1/113: 171, bài 2/113: 182, bài 3/113: 63, bài 1/114: 35, bài 2/114: 47, bài 3/114: 18, bài 4/114: 30.

Đề hình học: bài 7/113: 46, bài 8/113: 150, bài 9/113: 21, bài 10/113: 55, bài 8/114: 52, bài 9/114: 37.

Đề đại số: bài 4/113: 130, bài 5/113: 68, bài 6/113: 59, bài 5/114: 42, bài 6/114: 51, bài 7/114: 13, bài 11: 13 (bài 10/114 chỉ có vẽ bề ngoài hình thực chất là một bài toán đại số).

Trong tổng số 20 đề toán, trừ vài đề loại trung bình khó, số còn lại là những đề toán khó và rất khó, nhưng đối với mỗi đề toán đều có nhiều bài giải đúng và hay; điều đó nói lên trình độ toán của các bạn học sinh chúng ta, và rằng điều đó đã được xác nhận qua các bài các đề toán đăng trong báo THvTT các số thường kỳ, qua các kỳ thi giỏi toán trong nước và quốc tế.

Phần đông các bạn tham dự cuộc thi là đang học các lớp 8, 9 hệ 10 năm và các lớp 10, 11 hệ 12 năm; có lẽ vì các bạn học năm cuối cấp ba phải chuẩn bị thi tốt nghiệp phổ thông và thi vào đại học, nên tham gia ít hơn.

Qua thông kê trên, số các bạn dự giải các đề toán trong số báo 113 nhiều hơn so với các đề toán trong số báo 114. Phải chăng các đề toán

trong số báo 114 khó hơn, và các bạn năm cuối cấp ba thời không tham gia giải nữa để chuẩn bị cho kỳ thi vào đại học?

Chúc các bạn hun đúc niềm say mê học toán. Mong các bạn đóng góp nhiều cho tờ TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ, góp phần phát huy tác dụng của tờ báo.

Báo TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐƯỢC GIẢI THI TOÁN BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM 1980

KHỐI I

Giải nhất:

— Cam Minh Tri — lớp 10C8 trường Lê Hồng Phong, T.P. Hồ Chí Minh.

Giải nhì:

— Đặng Đức Trọng — lớp 10C7 trường Lê Quý Đôn, T.P. Hồ Chí Minh;

— Nguyễn Trọng Tuấn — lớp 10C trường An Khê, Gia Lai — Kông Tum;

— Bùi Quang Vinh — lớp 10C3 trường Phú Nhuận, T.P. Hồ Chí Minh.

Giải ba:

— Đặng Hoàng An — lớp 8 chuyên toán trường Ngô Sĩ Liên, Hà Bắc;

— Tôn Thất Dũng — lớp 10 chuyên toán trường Quốc học Huế;

— Ngô Gia Khánh — lớp 8 chuyên toán trường ĐHSP 1, Hà Nội.

Giải khuyến khích:

— Nguyễn Văn Kỳ Châu — lớp 10C1 trường Quang Trung, Qui Nhơn;

- Trần Văn Dư — lớp 10C1 trường Phan Châu
Trình, Đà Nẵng;
— Nguyễn Đầu — —nt—

KHỐI II

Giải nhất:

- Hà Thúc Dương — lớp 11 chuyên toán trường
Quốc học Huế;
— Phạm Văn Thạch — —nt—

Giải nhì:

- Phạm Văn Hiên — lớp 11C1 trường Phan
Bội Châu, Phan Thiết;
— Lý Anh Tử — lớp 11 chuyên toán trường
Quốc học Huế.

Giải ba:

- Nguyễn Mạnh Hùng — lớp 9 chuyên toán
trường ĐHSPT 1, Hà Nội;
— Nguyễn Duy Thái Sơn — lớp 1102 trường
Phù Cát, Nghĩa Bình;
— Đinh Hương Thịnh — lớp 11C1 trường Phú
Nhuận, T.P. Hồ Chí Minh.

Giải khuyến khích:

- Ngô Thế An — lớp 11C2 trường Phan
Tuân, Gò Vấp, T.P. Hồ Chí Minh;
— Lưu Thất Linh — lớp 11C8 trường Phan
Phong, T.P. Hồ Chí Minh;
— Phan Điền Long — lớp 11C3 trường Phan
Hồng Gấm, T.P. Hồ Chí Minh.

KHỐI III

Giải nhất và giải nhì không có.

Giải ba:

- Vũ Đức Vinh — lớp 12C trường Lê Q.
T.P. Hồ Chí Minh.

Giải khuyến khích:

- Nguyễn Hoài Nam — lớp 10D trường
Kiếm, Hà Nội.

Chú ý: Trong danh sách trên, địa chỉ ghi theo trường và lớp năm học 1979 - 1980. Bạn đã ra trường xin cho tòa soạn biết địa chỉ mới của các bạn để tiện cho việc liên lạc.

LỜI CẢM ƠN

Để làm giải thưởng "thi giải toán năm 1980", báo Toán học và tuổi trẻ đã nhận được tặng của Thủ tướng Phạm Văn Đồng và các cơ quan:

- Viện Khoa học Việt Nam,
- Hội Toán học Việt Nam,
- Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh,
- Sở Giáo dục Hà Nội,
- Trường Đại học Tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh,
- Nhà xuất bản Giáo dục.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Thủ tướng và các cơ quan nói trên.

Báo TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

In 9000c tại Xí nghiệp In 75, 77 Hàng Bồ — Hà Nội.
Số in 119/80. In xong ngày 15-1-1981.

Chỉ số 12284.

Giá: 0,20