

TOÁN HỌC

và tuổi trẻ

BÁO RA HAI THÁNG MỘT LẦN

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Thư ký tòa soạn: **HOÀNG CHUNG**

Trần Hưng Đạo Hà Nội

Dây nội: 52825

Yên với các bạn trẻ yêu toán

AN DỤNG PHÉP TƯƠNG TỰ ĐỂ TẬP DƯỢT SÁNG TẠO TOÁN HỌC

QUỐC TRINH

Tính từ « tương tự » được giảng nghĩa từ điển tiếng Việt » (của Nhà xuất bản Xã hội-Hà Nội-1977) là: « có một số nhiều mặt giống nhau ».

g phép tương tự, theo Đ.P. Gorki (trong học » Nhà xuất bản Giáo dục-Hà Nội- « phép suy luận trong đó từ chỗ hai ng giống nhau ở một số dấu hiệu ta rút luận rằng các đối tượng này giống nhau số dấu hiệu khác ».

đối tượng A và B có các dấu hiệu (hay tính) chung a, b, c và đối tượng A có dấu thì ta rút ra kết luận dự đoán rằng: B hiệu d.

hệ biểu diễn sơ đồ của phép tương tự như

và B cũng có các dấu hiệu a, b, c.

A có dấu hiệu riêng d.

dấu hiệu d.

Kết luận của phép tương tự chỉ là một điều dự đoán: dự đoán đó có thể đúng, có thể sai.

Trong toán học, ta hay dùng đến « tương tự » trong các trường hợp sau, trong các cách diễn đạt sau:

- Hai đối tượng nào đó của toán học có tính chất tương tự.

- Hai quan hệ nào đó của toán học là tương tự.

- Với « phương pháp chứng minh tương tự »...

- « Tương tự, ta có kết quả... » hay « ta có các kết quả tương tự... ».

Về « tính chất tương tự », « quan hệ tương tự », ta sẽ đề cập ở các ví dụ sau. Riêng về ý « chứng minh tương tự » thì ta hiểu rằng với cách chứng minh theo cấu trúc logic đã trình bày khi chứng minh đối tượng A (hay trường hợp a) nay ta thay A bởi đối tượng B (hay thay a bởi trường hợp b) ta vẫn có kết luận như đã đề xuất. Vì việc trình bày lại một lần nữa sự chứng minh trên với B (hay với

trường hợp b) thì dài dòng thêm, không có gì mới khác và không cần thiết nên ta muốn được chêm chước khi trình bày với ý «chứng minh tương tự là có...» (chứ không trình bày lại đây đủ sự chứng minh).

Với ý «ta có các kết quả tương tự» ta hiểu như sau:

Ví dụ, khi tính diện tích hình tam giác có cạnh a và đường cao tương ứng với cạnh a là h_a , ta có $S = (1/2)ah_a$. Các cạnh a, b, c hoàn toàn có vai trò như nhau, «bình đẳng» với nhau trong tam giác ấy nên nếu lấy các cạnh b, c với các đường cao tương ứng là h_b, h_c thì ta suy ra được các kết quả tương tự $S = (1/2)bh_b$, $S = (1/2)ch_c$.

Hay sau khi đã chứng minh được bình phương cạnh a trong hình tam giác ABC có các cạnh a, b, c là:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

thì với các cạnh b, c còn lại, ta không phải trình bày lại sự chứng minh và có quyền suy ra các kết quả tương tự là:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Các kết quả tương tự suy ra như vậy đều đúng.

§ 2. Sau đây ta sử dụng phép tương tự để tập dượt sáng tạo qua một số bài toán, một số định lý.

VÍ DỤ 1. Ngay từ ở các lớp dưới, các bạn nhỏ cũng có thể tập dượt như vậy.

Cho bài toán sau đây ở lớp sáu:

Bài toán 1. Chứng minh rằng trong hình tam giác, ứng với cạnh dài hơn thì đường cao ngắn hơn.

Vận dụng việc tính diện tích hình tam giác, ta chứng minh dễ dàng bài toán đó.

Giả sử các cạnh của hình tam giác là a, b, c và các đường cao lần lượt tương ứng là h_a, h_b, h_c . Ngoài ra $a > b > c$, ta phải chứng minh rằng: $h_a < h_b < h_c$.

Theo diện tích của hình tam giác thì:

$$(1/2)ah_a = (1/2)bh_b = (1/2)ch_c. \quad (1)$$

Vì $a > b > c$ nên từ (1) ta suy ra dễ dàng:

$$h_a < h_b < h_c.$$

Nhưng giải xong bài toán này rồi, bạn nên dùng phép tương tự (và tốt hơn nữa cả phép tổng quát hóa, đặc biệt hóa...) để xây dựng thêm các bài toán mới, các kết quả mới. Đó là cách «học một suy ra mười».

Thật vậy, trong hình tam giác ngoài ra các đường cao còn có các đường đặc biệt khác như: trung tuyến, đường trung trực, đường phân giác... hình tam giác, các đường cao đồng quy tại một điểm. Các trung tuyến, các đường trung trực, các đường phân giác cũng có tính chất chung của một tính chất chung của các đường này.

Nay ta thử nghiên cứu xem các đường này có tính chất tương tự như tính chất của các đường cao nói ở bài toán 1 trên không.

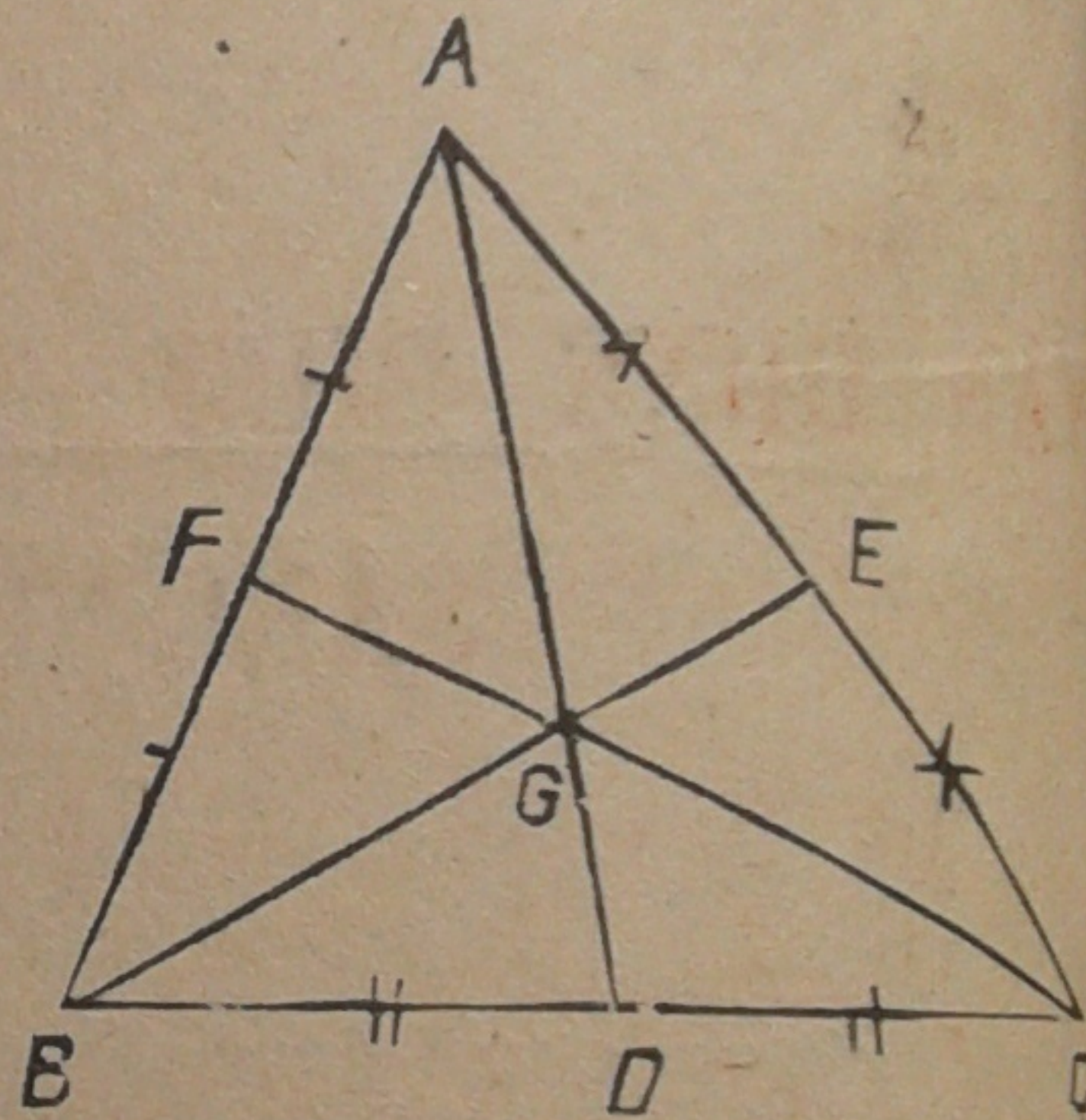
Ta hãy dự đoán rằng:

Bài toán 2. Trong hình tam giác, cạnh dài hơn thì trung tuyến ngắn hơn.

Ta thử chứng minh điều dự đoán đó.

Ba trung tuyến của tam giác ABC cắt nhau tại G (h. 1). Ta lại có $AC > AB$. Ta thử chứng minh $BE < CF$.

$$\text{Ta có } BG = \left(\frac{2}{3}\right)BE \text{ và } CG = \left(\frac{2}{3}\right)CF$$



Vì vậy muốn chứng minh $BE < CF$ ta chỉ cần chứng minh $BG < CG$ cũng được.

Hai tam giác ADB và ADC có AD chung, $DB = DC$ (vì AD là đường trung tuyến) và $AB < AC$ theo giả thiết nên $ADB < ADC$. Hai tam giác GDB và GDC có GD chung, $DB = DC$ và $ADB < ADC$ nên $BG < CG$.

Từ đó suy ra $BE < CF$.

Vậy điều ta dự đoán được chứng minh là đúng.

Tương tự, ta dự đoán thêm và chứng minh được các kết quả mới nữa sau đây:

Bài toán 3. Trong hình tam giác, cạnh dài hơn thì gần tâm đường tròn ngoại tiếp hơn (lớp bảy).

4. Trong hình tam giác, ứng
thì đường phân giác sẽ ngắn
hơn (bài toán 4 là bài toán khó nhất trong
lớp sáu hoặc kiến thức của lớp sáu hoặc kiến thức
của lớp mười).

Chúng minh dễ dàng bài toán 3 nếu
quan hệ giữa các cạnh và khoảng
tròn ngoại tiếp tam giác đến
đường tròn ngoại tiếp tam giác đến

lớp sáu hoặc kiến thức của lớp sáu hoặc kiến thức
của lớp mười).

lấy bài toán 4 này và có thể
các lời giải khác trong báo Toán học
ở các số 39 và 42.

Ta có thể xem hình tam giác trong
tương tự với hình tứ diện trong

không gian ba mặt phẳng không tạo
diện tích hữu hạn nhưng ba
mặt phẳng có thể tạo nên hình tam giác có
diện tích hữu hạn.

không gian ba mặt phẳng không tạo
diện tích hữu hạn nhưng bốn
mặt phẳng có thể tạo được hình tứ diện, có thể
diện tích hữu hạn.

hình tam giác với mặt phẳng chứa
quan hệ của hình tứ diện với không
gian ba mặt phẳng và hình tứ diện đều được
bởi một số tối thiểu yếu tố cơ bản. Sự
tương tự giữa hình tam giác và hình tứ diện là

hình tam giác và hình tứ diện đều được
bởi một số tối thiểu yếu tố cơ bản. Sự
tương tự giữa hình tam giác và hình tứ diện là

sau khi đã nghiên cứu những yếu tố
tính chất của hình tam giác ta thử
tương tự để dự đoán một số tính chất
của hình tứ diện.

hình tam giác, ta chứng minh được bài
toán 5. Nếu h_a, h_b, h_c là các đường cao
của hình tam giác và r là bán kính đường tròn nội
tiếp hình tam giác đó thì

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

phép tương tự, ta xây dựng và chứng
minh bài toán sau về hình tứ diện.

5'. Nếu h_a, h_b, h_c, h_d là các đường
cao của hình tứ diện và r là bán kính mặt cầu
ngoại tiếp hình tứ diện thì

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{1}{r}.$$

ta còn có thể xây dựng các bài toán
tương tự. Ngoài ra ta có thể xem hình tam
giác và hình tứ diện trong không gian.

trong không gian theo một cách nhìn khác nữa
(còn hình tứ diện đã nói ở trên chỉ là một hình
chóp đặc biệt).

Lấy một đoạn AB và một điểm C nằm ngoài
đoạn AB . Nối C với A , với B ta tạo được hình tam
giác ABC .

Lấy đa giác phẳng $MNPQR$ và điểm S nằm ngoài
mặt phẳng của $MNPQR$. Nối S với các đỉnh
của đa giác ấy ta tạo được hình chóp $SMNPQR$.

Với cách nhìn đó ta xem hình tam giác trong
mặt phẳng tương tự với hình chóp trong không
gian.

Qua ví dụ 2 và ví dụ 3, ta xem hình tam giác
trong mặt phẳng tương tự với hình tứ diện hoặc
hình chóp trong không gian. Cả hai cách nhìn
đó đều hợp lý và mỗi cách có ý nghĩa riêng
của nó.

Giữa hình học phẳng và hình học không gian
có một số điểm tương tự chứ không phải chỉ có
một sự tương tự duy nhất.

Một hình có thể xem tương tự với vài hình
khác tùy theo tính chất ta xét, tùy theo dấu hiệu
ta muốn nghiên cứu, tùy theo mối quan hệ của
các hình đó đối với một khái niệm ta đang
nghiên cứu.

Chính với các cách nhìn với nhiều góc độ khác
nhau đó mà ta mở rộng được phạm vi nghiên
cứu, ta may mắn có nhiều khả năng sáng tạo,
ta dễ tìm ra nhiều kết quả mới phong phú, nhiều vẻ.

Nếu xem hình tam giác tương tự với hình tứ
diện thì với những khái niệm sau đây của hình
học phẳng: hình bình hành, hình chữ nhật, hình
vuông, đường phân giác của góc ta kẻ ra các
khái niệm tương ứng lần lượt của hình học
không gian là: hình hộp, hình hộp chữ nhật,
hình lập phương, mặt phân giác của góc nhị
diện.

Dùng phép tương tự, với định lý sau đây của
hình học phẳng: « Những đường phân giác của
ba góc trong của hình tam giác cắt nhau tại
một điểm, đó là tâm đường tròn nội tiếp hình
tam giác », ta xây dựng được định lý sau:

« Các mặt phân giác của sáu góc nhị diện của
hình tứ diện cắt nhau tại một điểm, đó là tâm
mặt cầu nội tiếp hình tứ diện ».

Còn nếu xem hình tam giác tương tự với hình
chóp thì với các khái niệm sau đây của hình
học phẳng: hình bình hành, hình chữ nhật,
đường tròn ta kẻ ra các khái niệm tương ứng
lần lượt của hình học không gian là: hình lăng
trụ, hình lăng trụ đứng, hình cầu.

Ngoài ra ta cũng có thể dùng phép tương tự
để biểu diễn mối tương quan giữa các hình
phẳng và các vật thể trong không gian.

Vi dụ, ta có thể so sánh hình tam giác với hình bình hành trong hình học phẳng như so sánh hình chóp với hình lăng trụ trong hình học không gian.

Khả năng vận dụng toán học của bạn thể hiện ra bằng khả năng giải các bài toán, thực hành và vận dụng toán học, tìm được các cách chứng minh hay, phân tích có phê phán cách chứng minh của người khác, sử dụng thành thạo các phương pháp toán học và nhận thức rõ các khái niệm toán học trong những tình huống cụ thể, khác nhau.

Trong quá trình giải toán, bạn đã huy động và tổ chức, cách ly và liên hợp, nhận biết và hồi tưởng những kiến thức toán học thuộc các dạng khác nhau, phân nhóm chúng lại và bổ sung cho quan niệm của bạn về bài toán, cố gắng dự kiến lời giải, những nét đặc thù nào đó của lời giải hay một phần con đường dẫn đến lời giải.

Giải xong bài toán khó bạn cảm thấy hào hứng, toại nguyện, khoái trá. Nhưng sự lao động toán học còn đòi hỏi chúng ta nhiều nữa về sự sáng tạo: Ngoài việc giải các bài toán của thầy giáo, của các sách, các báo, từ các bài toán đó và với các công cụ như phép quy nạp, phép tương tự, phép tổng quát hóa, phép đặc biệt hóa..., chúng ta thử xây dựng các đầu bài toán mới rồi giải chúng. Việc làm đó nhận khả năng toán học của chúng ta lên rất nhanh.

Đó chính là tự *phát huy tính chủ động độc lập suy nghĩ sáng tạo, tập dượt nghiên cứu toán học.*

Có chủ động thì mới sáng tạo và nhờ có độc lập suy nghĩ sáng tạo mà trí thông minh được phát triển.

Muốn lên cao thì phải bắt đầu từ dưới thấp, muốn đi xa thì phải bắt đầu từ chỗ gần. Chúng ta phải tập dượt những thao tác tư duy và tập phát minh sáng tạo nhỏ qua các bài tập nhỏ từ lớp dưới để dần dần có những tìm tòi, phát minh lớn ở các lớp trên với những bài toán, những vấn đề tổng hợp hơn.

Chúng ta không coi thường những vấn đề nhỏ, những kết quả nhỏ. Nhiều giọt nước nhỏ hợp thành dòng sông lớn.

VÍ DỤ 4. Ở lớp tám bạn đã học định lý:

«Tổng các bình phương các cạnh của hình bình hành bằng tổng các bình phương của hai đường chéo».

Xem hình hộp trong hình học không gian tương tự với hình bình hành trong hình học phẳng, ta xây dựng được định lý sau:

«Tổng các bình phương các cạnh của hình hộp bằng tổng các bình phương của các đường chéo của hình hộp».

Để sử dụng phép tương tự «suy» một đề từ hình học phẳng sang hình học không gian ta cần chỉ rõ sự xác định tương ứng giữa đối tượng của mặt phẳng và các đối tượng không gian.

Chẳng hạn, trong nhiều trường hợp, sự tương ứng sau:

Mặt phẳng — Không gian
Đường thẳng — Mặt phẳng
Điểm — Đường thẳng

Sau đây là vài ví dụ minh họa:

Trong mặt phẳng:

— Hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng hoặc là song song hoặc là cắt nhau.

— Hai đường thẳng cắt nhau chỉ tại một điểm.

— Đường thẳng chia mặt phẳng thành hai nửa đường thẳng.

Trong không gian:

— Hai mặt phẳng phân biệt trong không gian hoặc là song song hoặc là cắt nhau.

— Hai mặt phẳng cắt nhau theo một đường thẳng.

— Mặt phẳng chia không gian thành hai nửa không gian.

Từ những bài toán sau đây về hình tam giác ta đã xây dựng được các bài toán tương tự hình tứ diện.

Bài toán 6. Nếu qua một điểm lấy ở cạnh của hình tam giác ta dựng hai đường thẳng song với hai cạnh bên a, b và gọi a_1, b_1 là những phần của các đường thẳng đó lần lượt song với a, b và nằm trong hình tam giác thì

$$a_1/a + b_1/b = 1.$$

Bài toán 6'. Nếu qua một điểm lấy ở đáy hình tứ diện ta dựng các đường thẳng song với các cạnh bên a, b, c và gọi a_1, b_1, c_1 là những phần của các đường thẳng đó lần lượt song với a, b, c và nằm trong hình tứ diện thì

$$a_1/a + b_1/b + c_1/c = 1.$$

Bài toán 7. Nếu từ một điểm O nằm trong tam giác ta dựng các đoạn thẳng k_a, k_b, k_c lần lượt vuông góc với các cạnh a, b, c của hình tam giác thì

$$k_a/h_a + k_b/h_b + k_c/h_c = 1,$$

trong đó h_a, h_b, h_c là những đường cao của tam giác ứng với các cạnh a, b, c .

Bài toán 7'. Nếu từ một điểm O nằm trong hình tứ diện ta dựng các đoạn thẳng k_a, k_b, k_c, k_d lần lượt vuông góc với các mặt a, b, c, d của hình tứ diện thì

$$k_a/h_a + k_b/h_b + k_c/h_c + k_d/h_d = 1,$$

trong đó h_a, h_b, h_c, h_d là những đường cao hình tứ diện ứng với các mặt a, b, c, d .

(còn nữa)

GIẢI BÀI

kỳ trước

Vì α vô tỷ nên $\{ \alpha \} > 0$, vậy với n đủ lớn thì $n\{ \alpha \} > 1$, hay,

$$\{ n\alpha \} \geq 1 \quad (2)$$

Từ (1) ta có

$$\begin{aligned} [n\alpha] &= [n\alpha] + n\{ \alpha \} = n[\alpha] + [n\{ \alpha \}] \\ &> n[\alpha] \quad (\text{do (2)}). \end{aligned}$$

Từ đó

$$[\alpha] < [n\alpha]/n \quad (3)$$

Do

$$[n\alpha] < n\alpha$$

nên

$$[n\alpha]/n < \alpha < [\alpha] + 1 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có

$$[\alpha] < [n\alpha]/n < [\alpha] + 1 \quad (5)$$

Bất đẳng thức (5) đúng với mọi n thỏa mãn (2) nên nó cũng đúng với những số nguyên tố p thỏa mãn (2), tức là

$$[\alpha] < [p\alpha]/p < [\alpha] + 1 \quad (6)$$

Bất đẳng thức (6) chứng tỏ $[p\alpha]/p$ không phải là số nguyên với mọi p thỏa mãn $\{ p\alpha \} \geq 1$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3/112. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình.

$$x^2(y+3) = yz^2$$

Lời giải. Từ phương trình đã cho ta rút ra

$$z = x\sqrt{(y+3)/y}$$

Vì z, x nguyên nên $(y+3)/y$ là số hữu tỷ. Do vậy khi đưa $(y+3)/y$ về thành phần số tối giản thì phân số tối giản đó có cả tử số và mẫu số là số chính phương. Nhưng vì hiệu của hai số chính phương bất kỳ không nhỏ hơn 3 nên $(y+3)/y$ đã phải là phân số tối giản, và như vậy $y+3$ và y là hai số chính phương:

Hai số chính phương $y+3$ và y hơn nhau 3 đơn vị nên chỉ có thể $y=1$.

Ta suy ra nghiệm nguyên dương của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = m \\ y = 1 \\ z = 2m \end{cases}$$

với m là số nguyên dương tùy ý.

Nhiều bạn sau khi đưa phương trình về dạng $z = x\sqrt{(y+3)/y}$ đã kết luận ngay $\sqrt{(y+3)/y}$ là số nguyên. Kết luận như vậy thiếu chính xác.

L.H.

Bài 4/112. Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn

$$\sqrt{7} - m/n > 0.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{7} - m/n > 1/mn.$$

(1)

112. Tìm giá trị của 1930 số thực $x_1, \dots, x_{1930}$ thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^{1930} x_i = 1980,$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, 1930$, sao cho

giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất

Với mọi $i = 1, 2, \dots, 1930$, từ giả thiết suy ra

$$(x_i - 1)(x_i - 3)(x_i + 4) \leq 0 \quad (*)$$

$$-13x_i + 12 \leq 0$$

$$x_i \leq 13x_i - 12.$$

Tất cả các bất đẳng thức này, ta

$$\sum_{i=1}^{1930} x_i \leq 13 \sum_{i=1}^{1930} x_i - 12 \cdot 1930$$

$$= 13 \cdot 1980 - 12 \cdot 1930$$

$$= 2580.$$

Giá trị lớn nhất của $\sum_{i=1}^{1930} x_i = 2580$, đạt

và chỉ khi các bất đẳng thức (*) trở thành đẳng thức, tức là các giá trị của x_i bằng

1 hoặc 3. Vì có giá trị bằng 1 là p , ta có

$$p + 3(1980 - p) = 1980$$

$$\Leftrightarrow p = 1905.$$

Số 1 và 25 số 3 là 1930 số thực thỏa điều kiện của bài toán.

112. Cho α là số vô tỷ. Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $[p\alpha]$ chia hết cho p .

Ta có $\alpha = [\alpha] + \{ \alpha \}$.

$$n\alpha = n[\alpha] + n\{ \alpha \}$$

là một số tự nhiên.

Lời giải (của Nguyễn Ngọc Khánh - 9C Đoàn Kết, Hà Nội và một số bạn khác).

Theo điều kiện của đầu bài ta thấy ngay

$$7n^2 - m^2 \geq 1.$$

Nhưng ta có thể viết $m = 7k + r$, trong đó $r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; từ đó $m^2 = 7h + s$, trong đó $s = 0, 1, 4, 2$. Như vậy $m^2 + 1$ và $m^2 + 2$ không thể chia hết cho 7, ta loại được hai trường hợp

$$7n^2 - m^2 = 1$$

và

$$7n^2 - m^2 = 2.$$

Ta có:

$$7n^2 \geq m^2 + 3 > m^2 + 2 + 1/m^2 = (m + 1/m)^2,$$

tức là ta đã chứng minh được

$$\sqrt{7} n > m + 1/m$$

hay

$$\sqrt{7} - m/n > 1/mn.$$

N.Đ.T.

Bài 5/112. Chứng minh rằng trong một tứ giác ABCD các hệ thức sau đây là tương đương

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0 \quad (1)$$

$$\cotg A + \cotg B + \cotg C + \cotg D = 0 \quad (2)$$

Lời giải (của Nguyễn Văn Nghĩa - 9E Nguyễn Huệ, Hà Sơn Bình).

a. Chứng minh (1) $\Rightarrow$ (2).

Ta có

$$P = \cos A + \cos B + \cos C + \cos D$$

$$= \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$= \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C-D}{2} \right) \quad (3)$$

$$(\text{vì } (A+B) + (C+D) = 2\pi).$$

$$M = \cotg A + \cotg B + \cotg C + \cotg D$$

$$= \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} + \frac{\sin(C+D)}{\sin C \sin D}$$

$$= \sin(A+B) \left(\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin C \sin D} \right) \quad (4)$$

Từ $P = 0$ suy ra hoặc $\cos[(A+B)/2] = 0$ hoặc $\cos[(A-B)/2] = \cos[(C-D)/2]$,

1) Nếu $\cos[(A+B)/2] = 0$ thì $\sin(A+B) = 0 \Rightarrow M = 0$.

2) Nếu $\cos[(A-B)/2] = \cos[(C-D)/2]$ thì hoặc $A-B = C-D$ hoặc $A-B = D-C$, tức là hoặc $A+D = B+C = \pi$, hoặc $A+C = B+D = \pi$. Lúc đó tính M theo $A+D, B+C$ hoặc theo $A+C,$

$B+D$ tương tự như theo $A+B$ trong trường hợp $M = 0$.

b. Chứng minh (2) $\Rightarrow$ (1).

Từ (4) ta có $M = 0 \Leftrightarrow \sin(A+B) = 0$ hoặc $1/\sin A \sin B = 1/\sin C \sin D$.

1) Nếu $\sin(A+B) = 0$ thì $\cos[(A+B)/2] = 0 \Rightarrow P = 0$.

2) Nếu $1/\sin A \sin B = 1/\sin C \sin D$ thì $\sin A \sin C = \sin B \sin D$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} = \frac{\cos(C-D) - \cos(C+D)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) = \cos(C-D)$$

$$\Leftrightarrow A-B = C-D \text{ hoặc } A-B = D-C$$

$$\Leftrightarrow A+D = B+C = \pi \text{ hoặc } A+C = B+D = \pi$$

Lúc đó tính P theo $A+D, B+C$ hoặc theo $A+C, B+D$ tương tự như theo $A+B$ trong trường hợp $M = 0$.

Bài 6/112. Gọi R và r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC; d_b, d_c là những khoảng cách từ trực tâm H của tam giác đến các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng nếu các góc A, B, C nhọn thì

$$R + r \geq d_a + d_b + d_c \geq 7r - 2R.$$

Lời giải (của Nguyễn Ngọc Khánh - 9C Đoàn Kết, Hà Nội).

Gọi k_a, k_b, k_c là các khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đến các cạnh $a=BC, b=CA, c=AB$ tương ứng, ta chứng minh được

$$k_a + k_b + k_c = R + r$$

Thật vậy, gọi P là chu vi của tam giác thì

$$ak_a + bk_b + ck_c = Pr$$

Mặt khác:

$$P = a + b + c = (b \cos C + c \cos A) + (a \cos C + c \cos A) + (a \cos B + b \cos A)$$

hay

$$P = (b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C$$

Nhân cả hai vế với R và chú ý $k_a = R \cos A, k_b = R \cos B, k_c = R \cos C$, ta được

$$(b+c)k_a + (c+a)k_b + (a+b)k_c = PR$$

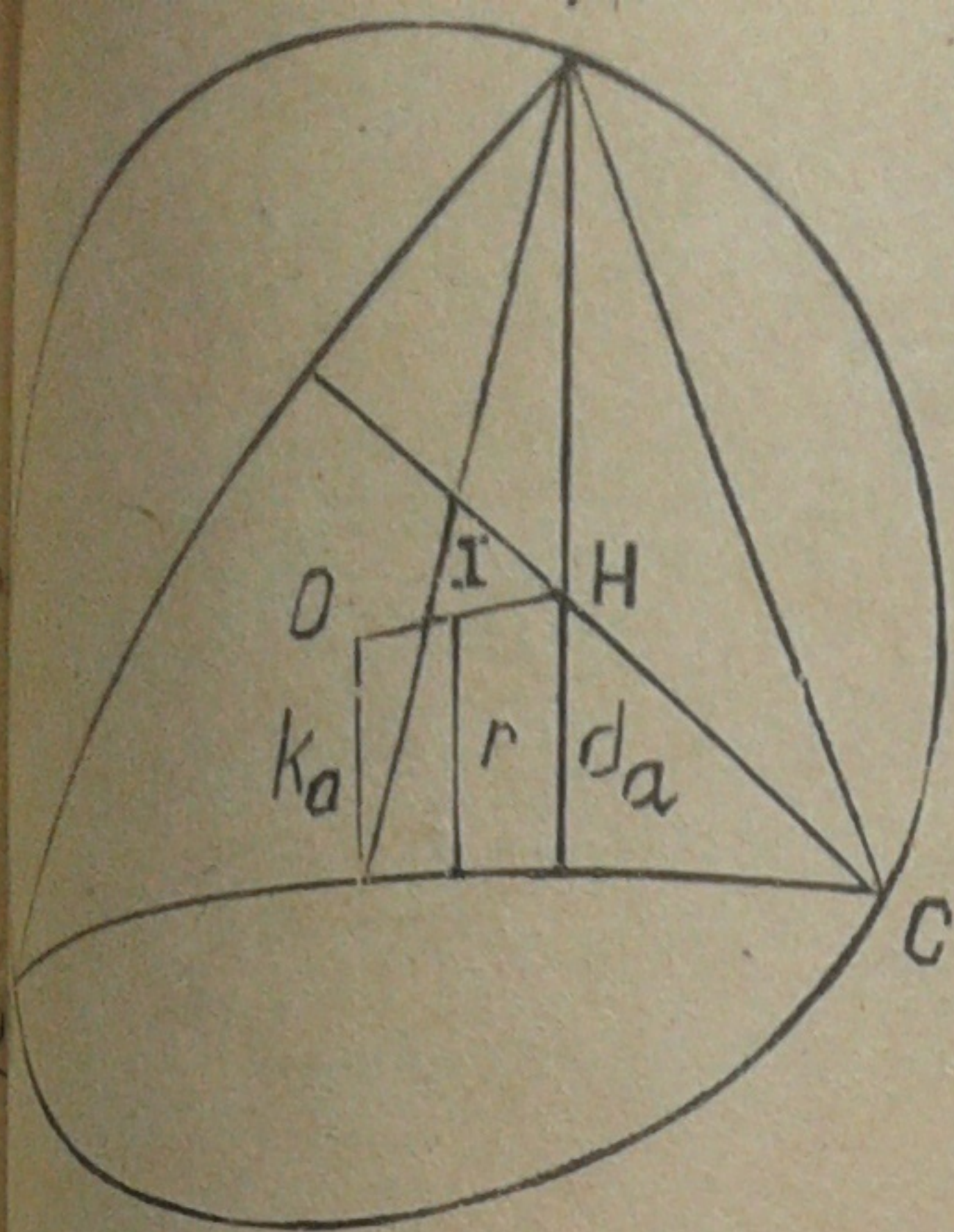
Cộng (1) và (2) ta được đẳng thức (*).

Gọi h_a, h_b, h_c là các đường cao hạ xuống các cạnh a, b, c của tam giác thì từ đẳng thức O-ke ta có

$$h_a - d_a = 2k_a$$

$$h_b - d_b = 2k_b$$

$$h_c - d_c = 2k_c$$



ng (4) ta
 $\cos(C+D) = 0$ hoặc
 $(A+B)/2]$
 $\sin A \sin B$
 $\cos(C+D)$

$D = \pi$,
 hoặc theo
 trong (3)
 N.Đ.T.
 các đường
 ABC: d
 tâm H của
 B, C để

R.
 9C Đoàn
 từ tâm
 các cạnh
 ng minh
 (*)

giác thì
 (1)
 +
 bcosA)
 cosC.
 = RcosA.
 R
 (*).
 ong ứng
 ừ đường

giải (của Nguyễn Thanh Nhã - 11C8 Lê
 Phong, thành phố Hồ Chí Minh).
 biểu thức của $f(m)$ ta thấy

$$2f(m) - f(m^2) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{km+i} \right)$$

a) Muốn chứng minh

$$2f(m) - f(m^2) \leq 1 \quad (1)$$

ta chứng minh bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{km+i} \right) \leq 0. \quad (2)$$

Ta đề ý rằng:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{(km+i)} \geq m/(km+m) = 1/(k+1) \quad (3)$$

dấu = xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.

Dùng (3) ta lần lượt cho $k=1, 2, \dots, m-1$ rồi cộng với vế ta được

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{km+i} \right) \geq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1}$$

dấu = xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.

tức là ta chứng minh được (2) từ đó có (1).

b) Muốn chứng minh

$$2f(m) - f(m^2) > 1/m, \quad (4)$$

ta chứng minh bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{km+i} \right) > 0 \quad (5)$$

Ta thấy rằng

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{(km+i)} < m/km = 1/k \quad (6)$$

Dùng (6) lần lượt cho $k=1, 2, \dots, m-1$ rồi cộng vế với vế ta được

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{km+i} \right) < \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k},$$

tức là chứng minh được (5), từ đó có (4). Khi $m=1$ trong (4) có thể xảy ra dấu = do kết quả của (1).

Tóm lại ta có:

$$1/m \leq 2f(m) - f(m^2) \leq 1.$$

N.Đ.T.

Bài 8/112. Giải và biện luận phương trình theo tham số a:

$$2a^2 - 2a(\cos x + \sin x) + 3/2 = \cos x - \sin x$$

Lời giải (của Nguyễn Hoài Nam - 10D Hoàn Kiếm, Hà Nội; Vũ Trọng Bình - Thuận Thành, Hà Bắc; Lê Xuân Nghĩa - cấp 3 Minh Khai).

Để xác định xem phương trình có nghiệm với những giá trị nào của a, ta coi a là ẩn số và giải phương trình bậc 2:

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2(\cos x + \sin x)a + (1,5 - \cos x + \sin x) &= 0 \\ \Delta' &= (\cos x + \sin x)^2 - 2(1,5 - \cos x + \sin x) \\ &= 1 + 2\sin x \cos x - 3 + 2\cos x - 2\sin x \\ &= 2(\sin x \cos x + \cos x - \sin x - 1) \\ &= 2(\cos x - 1)(\sin x + 1). \end{aligned}$$

Vì $|\cos x| \leq 1, |\sin x| \leq 1$ nên $\Delta' \leq 0$.

Nhưng đề phương trình có nghiệm thì $\Delta' \geq 0$.

Vậy $\Delta' = 0 \Rightarrow \cos x = 1$ hoặc $\sin x = -1$.

1) $\cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$, thay vào phương trình ta có $a = 1/2$ và phương trình có nghiệm $x = 2k\pi$.

2) $\sin x = -1 \Rightarrow \cos x = 0$, thay vào phương trình ta có $a = -1/2$ và phương trình có nghiệm $x = -\pi/2 + 2k\pi$.

Kết luận:

- Với $a = 1/2$, phương trình có nghiệm $x = 2k\pi$.

- Với $a = -1/2$, phương trình có nghiệm $x = -\pi/2 + 2k\pi$.

- Với $a \neq \pm 1/2$, phương trình vô nghiệm.

L.H.

Bài 9/112. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m và n mà $1 \leq m \leq n$ ta đều có

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(k+1)^k} < (n+1)!$$

Lời giải (của nhiều bạn). Trước hết ta chứng minh: Với mọi số tự nhiên $k, n, 1 \leq k \leq n$,

$$k(n-k+1) \geq n \quad (1)$$

Thật vậy, ta có $(k-1)(n-k) \geq 0$

$$\Rightarrow kn - k^2 + k - n \geq 0 \Rightarrow (1).$$

Dấu đẳng thức chỉ có khi $k=1$ hoặc $n=k$.

Thay $k=1, 2, \dots, n$ vào (1) ta có bất đẳng thức

$$(n!)^2 \geq n^n \text{ hay } n! \geq \sqrt[n]{n^n} \quad (2)$$

Từ đầu bài ta suy ra chỉ cần chứng minh

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(k+1)^k} < (n+1)!$$

Ta chứng minh bằng qui nạp.

- Với $n=1$ ta có bất đẳng thức đúng
 $\sqrt{2} < 2$

- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=p$, chứng minh nó cũng sẽ đúng với $n=p+1$.
Ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} \sqrt{(k+1)^k} &= \sum_{k=1}^p \sqrt{(k+1)^k} + \sqrt{(p+2)^{p+1}} \\ &< (p+1)! + \sqrt{(p+2)^{p+1}} / \sqrt{p+2} \\ &< (p+1)! + (p+2)! / \sqrt{p+2} \quad (\text{do } (2)) \\ &= (p+1)! (1 + \sqrt{p+2}) \\ &< (p+1)! (p+2) = (p+2)! \quad (\text{d.p.c.m}) \end{aligned}$$

L.H.

Bài 10/112. Cho $f(x)$ là một đa thức bậc hơn 1 có các hệ số đều nguyên, thỏa mãn điều kiện

$$f(a+b) = ab,$$

$$f(ab) = a+b.$$

với a, b là hai số nguyên cho trước.

Chứng minh rằng $f(a)$ chia hết cho b và $f(b)$ chia hết cho a .

Lời giải (của Nguyễn Hoài Nam - 10D Hà Nội, Hà Nội và một số bạn).

Giả sử

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Khi đó

$$\begin{aligned} f(a+b) - f(a) &= a_n [(a+b)^n - a^n] + \\ &+ a_{n-1} [(a+b)^{n-1} - a^{n-1}] + \dots + a_1 [(a+b) - a] \\ &= a_n b [(a+b)^{n-1} + a(a+b)^{n-2} + \dots + a^{n-2}(a+b) \\ &+ a^{n-1}] + a_{n-1} b [(a+b)^{n-2} + a(a+b)^{n-3} + \dots \\ &+ a^{n-3}(a+b) + a^{n-2}] + \dots + a_1 b. \end{aligned}$$

Như vậy $f(a+b) - f(a)$ chia hết cho b , $f(a+b) = ab$ chia hết cho b nên $f(a)$ chia hết cho b .

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $f(b)$ chia hết cho a .

Ta có nhận xét là không cần phải điều kiện $f(ab) = a+b$.

Bài 6/115. Chứng minh rằng

$$\left[\frac{n-1}{2} \right] \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} C_{n-k-1}^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

ở đó kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của x , C_n^m là tổ hợp chập m của n .

Tạ Văn Tự (ĐH Bách khoa Hà Nội)

Bài 7/115. Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AA' , BB' , CC' gặp nhau tại H . Gọi S_A , S_B , S_C là diện tích của các tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$. Chứng minh hệ thức

$$AH^2 : BH^2 : CH^2 = S_A : S_B : S_C.$$

Kết quả xảy ra thế nào nếu A vuông? A tù?

Lê Quốc Hán.

Bài 8/115. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O ; H là trực tâm của tam giác. Gọi H_1 , H_2 , H_3 lần lượt là các điểm đối xứng của H qua BC , CA , AB . Từ H_1 , H_2 , H_3 kẻ các đường thẳng theo thứ tự song song với OA , OB , OC . Chứng minh rằng các đường thẳng đó cắt nhau tại một điểm.

Đào Trường Giang

Bài 9/115. Trong một góc tam diện $Oabc$ các đường phân giác của các góc phẳng aOb và aOc vuông góc với nhau. Hãy tính góc nhị diện tạo bởi mặt phẳng bOc và mặt phẳng chứa các đường phân giác nói trên.

Nguyễn Công Quý

(ĐH Sư phạm T.P. Hồ Chí Minh)

Bài 10/115. Trên mặt phẳng có 6 người A , B , C , X , Y , Z chuyển động thẳng đều với những vận tốc không đổi (không cho biết có bằng nhau hay không). Biết rằng:

- A gặp C , Y cùng một lúc;
- C gặp B , X cùng một lúc;
- B gặp A , Z cùng một lúc;
- A gặp X đúng giữa đoạn đường A gặp B , C ;
- B gặp Y đúng giữa đoạn đường B gặp C , A ;
- C gặp Z đúng giữa đoạn đường C gặp A , B .

Chứng minh rằng X , Y và Z gặp nhau cùng một lúc.

Vũ Đình Hòa

VÀI ƯỚC LƯỢNG HÌNH HỌC

PHAN ĐỨC CHÍNH

KHI học môn Hình học, trong chứng minh và tính toán, ta thường dùng đến những kết quả chính xác (chẳng hạn định lý về sự đồng quy của ba đường cao của một tam giác,...) và những công thức, tức là những hệ thức biểu diễn bằng đẳng thức (chẳng hạn, công thức tính diện tích một tam giác qua ba cạnh của nó,...).

Tuy nhiên, như mọi môn Toán khác, môn Hình học không thể tránh được các bất đẳng thức, chẳng hạn: điều kiện để ba số dương là độ dài ba cạnh của một tam giác, hoặc tính chất quen biết: tổng các góc phẳng ở đỉnh một góc tam diện phải nhỏ hơn 360° Đặc biệt trong thực tiễn, khi áp dụng các kết quả hình học, người ta rất cần đến các bất đẳng thức để ước lượng.

Đã có rất nhiều sách viết về các ước lượng hình học. Và có nhiều bài toán về ước lượng trong Hình học sơ cấp, cho đến nay chưa có lời giải thỏa đáng.

Trong bài báo này, chúng tôi đề cập đến vài ước lượng, tuy đơn giản nhưng khá lý thú, liên quan đến hai đối tượng hình học đơn giản nhất: tam giác trong mặt phẳng và tứ diện trong không gian.

I. VÀI ƯỚC LƯỢNG CÁC YẾU TỐ CỦA MỘT TAM GIÁC

Ta đề ý rằng một tam giác đều với cạnh bằng 1, có ba đường cao bằng $\sqrt{3}/2$, diện tích bằng $\sqrt{3}/4$, và bán kính (hình tròn) nội tiếp bằng $1/2\sqrt{3}$. Nhận xét này là xuất phát điểm của bài toán sau đây về ước lượng.

Bài toán 1. Cho một tam giác, độ dài mỗi cạnh của nó không vượt quá 1. Chứng minh rằng tam giác ấy có:

- Ít nhất hai đường cao với độ dài $\leq \sqrt{3}/2$,
- Diện tích $\leq \sqrt{3}/4$,
- Bán kính nội tiếp $\leq 1/2\sqrt{3}$.

Giải. a) Trong một tam giác, đường cao có độ dài không vượt quá độ dài của trung tuyến

xuất phát cùng đỉnh, nên để chứng minh và chứng minh kết quả mạnh hơn: một tam giác thỏa mãn điều kiện của bài toán, phải có ít nhất hai trung tuyến với độ dài $\leq \sqrt{3}/2$.

Quả vậy, gọi các độ dài các cạnh của tam giác đã cho là a, b, c . Luôn luôn có thể giả sử rằng

$$0 < c \leq b \leq a \leq 1.$$

Gọi m_a, m_b, m_c là các độ dài của các trung tuyến ứng với các cạnh ấy. Theo công thức tính trung tuyến, ta có

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - a^2/2 \leq b^2 + c^2/2 \leq 1 + 1/2 = 3/2,$$

$$2m_b^2 = a^2 + c^2 - b^2/2 \leq a^2 + b^2/2 \leq 1 + 1/2 = 3/2,$$

từ đó suy ra $m_a \leq \sqrt{3}/2$ và $m_b \leq \sqrt{3}/2$.

Nhận xét. Tam giác cân với độ dài ba cạnh bằng 1, 1, 2c có một đường cao (đồng thời là trung tuyến) có độ dài $\sqrt{1-c^2} > \sqrt{3}/2$, khi c khá nhỏ. Điều đó chứng tỏ không thể cải thiện hơn kết quả đã phát biểu ở a).

$$b) S = a.h_a/2 \leq \sqrt{3}/4.$$

c) Để đơn giản phép chứng minh và hình dung trước hết ta nhận xét rằng một tam giác đều chứa trong một tam (lớn hơn) đồng dạng với nó, với tỷ số đồng dạng $k \geq 1$; hơn nữa, một tam giác được chứa trong một tam giác khác (không cần đồng dạng), thì bán kính nội tiếp của tam giác thứ nhất không vượt quá bán kính nội tiếp của tam giác thứ hai, bởi vì hình tròn nội tiếp của một tam giác là hình tròn lớn nhất được chứa trong tam giác ấy (bạn đọc tự chứng minh điều đó, lưu ý không... ngược lại!).

Như vậy ta hãy ước lượng bán kính nội tiếp của một tam giác ABC thỏa mãn điều kiện của bài toán. Nếu cạnh lớn nhất $a = BC > 1$, thì ta sẽ xét tam giác đồng dạng với ABC theo tỷ số đồng dạng $k = 1/a > 1$. Thay thế ta có thể coi rằng $a = BC = 1, b = AC \leq c = AB \leq 1$.

Khi đó (xem hình 1) tam giác ABC được chứa trong tam giác «cong» BCD chắn bởi đoạn BD.

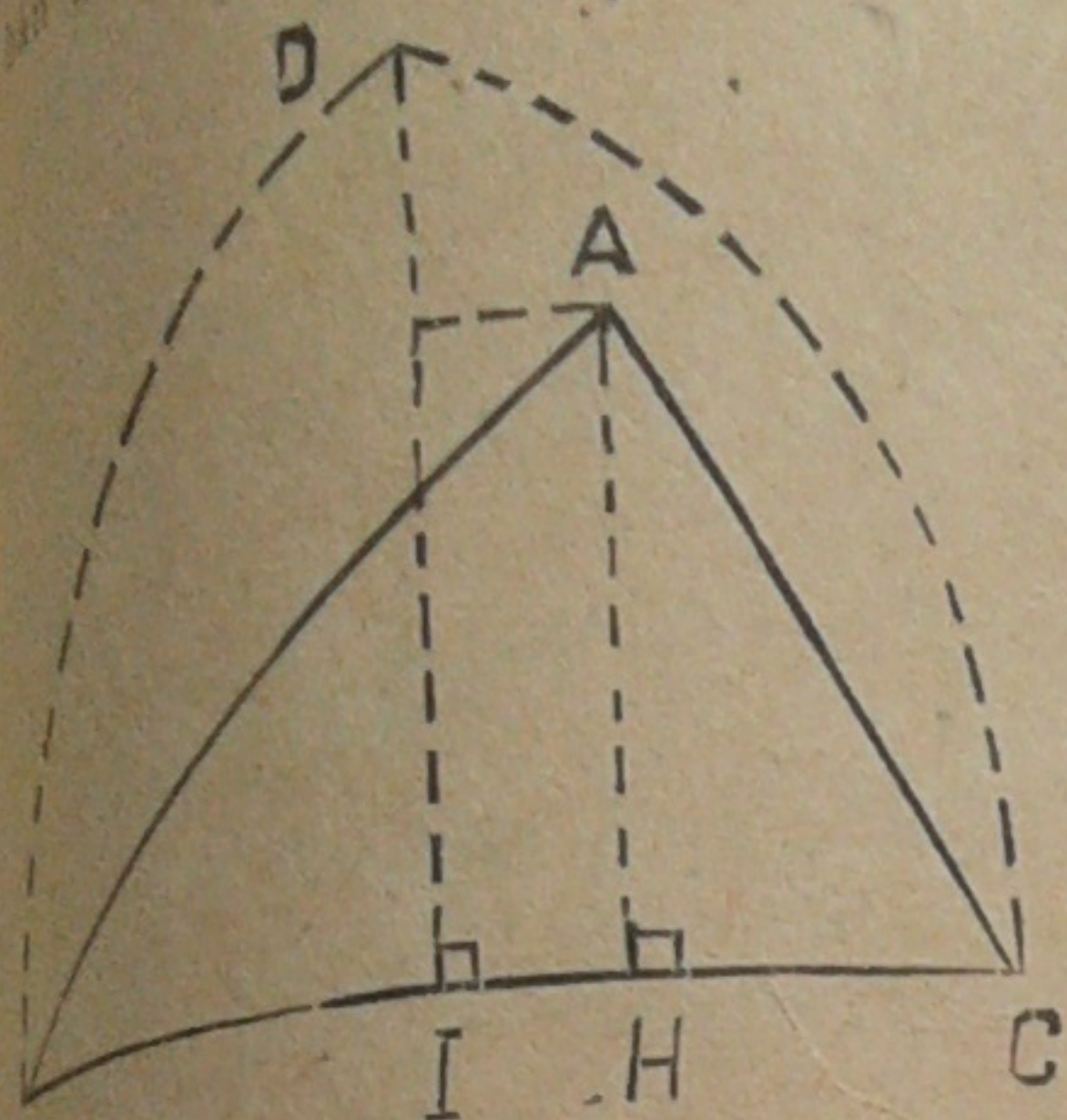
hai cung B...
C và bán ki...

Gọi I là tru...
của tam giác...
trong tam gi...
bằng $1/2\sqrt{3}$),
minh c), ta c...
Đề ý rằng...
BC và cùng...
tam giác AB...
của bài toán

Bài toán
các tam giác...
ang, thì tam...
- Chu vi...
- Bán ki...

Giải. V...
phải chửn...

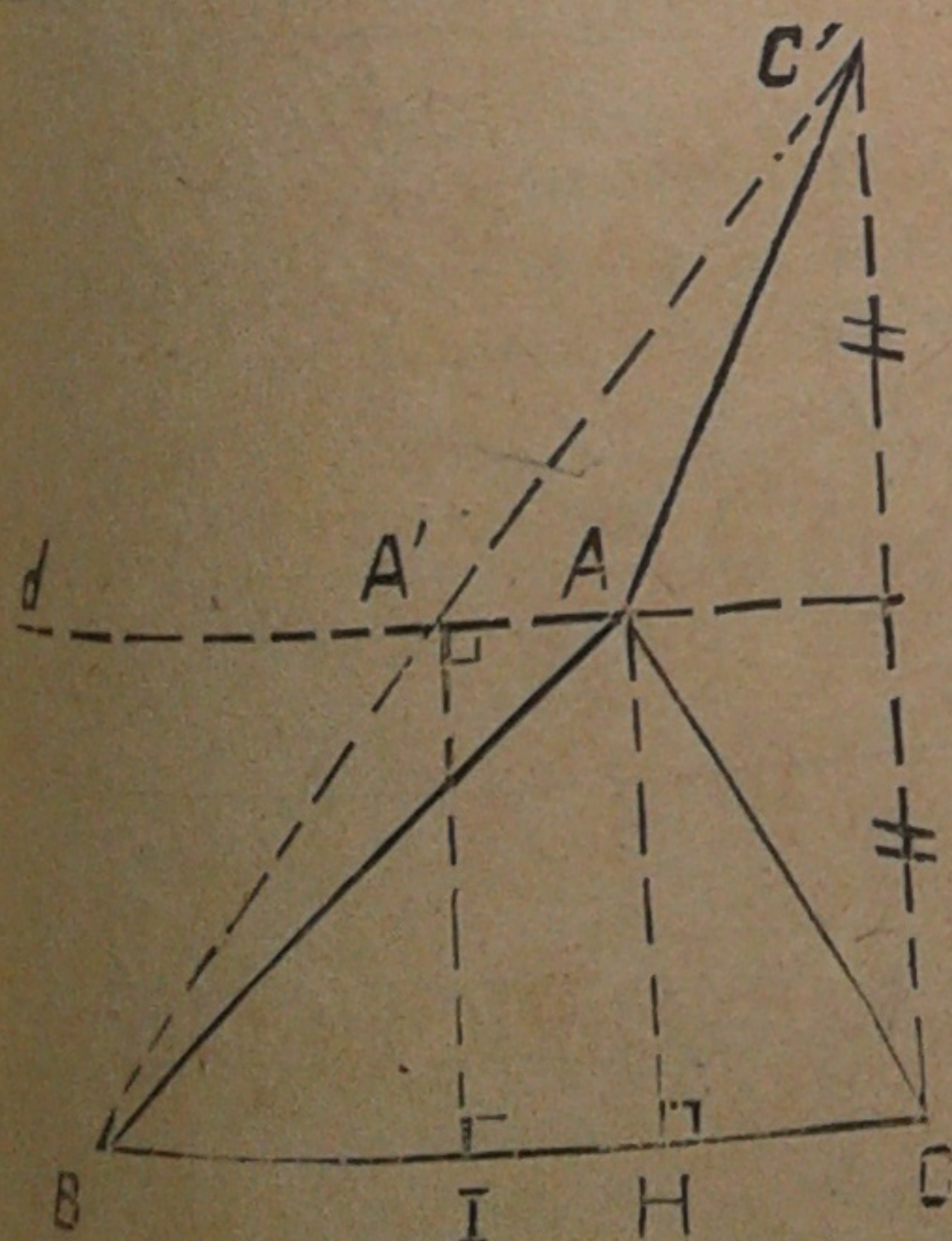
BD, CD của hai đường tròn tâm A, bán kính $BC=1$.



Hình 1

là trung điểm đoạn BC , A' là hình chiếu của A lên DI , r' là bán kính nội tiếp tam giác $A'BC$. Tam giác $A'BC$ được chứa trong tam giác đều BCD (có bán kính nội tiếp $\frac{\sqrt{3}}{4}$), nên $r' \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Vì vậy, để chứng minh $r \leq r'$ chỉ việc chứng tỏ rằng $r \leq r'$.
 Tam giác $A'BC$ là tam giác cân có cùng đáy BC và cùng độ dài đường cao $A'I = AH$ như tam giác ABC . Bất đẳng thức $r \leq r'$ là hệ quả của bài toán 2 sau đây:

Bài toán 2. Chứng minh rằng trong tất cả các tam giác cân có cùng đáy a và chiều cao h_a tương ứng thì tam giác cân có:
 chu vi nhỏ nhất.
 bán kính nội tiếp lớn nhất.



Hình 2

Giải. Với các ký hiệu ở hình 1 và hình 2, ta chứng minh rằng:

$$A'B + A'C \leq AB + AC.$$

Lấy C' là điểm đối xứng của C qua đường thẳng d (đi qua A' và song song với BC), thì các điểm B, A', C' là thẳng hàng, và $AC = A'C'$, $A'C = A'C'$, do đó

$$A'B + A'C = A'B + A'C' = BC' \leq AB + AC' = AB + AC.$$

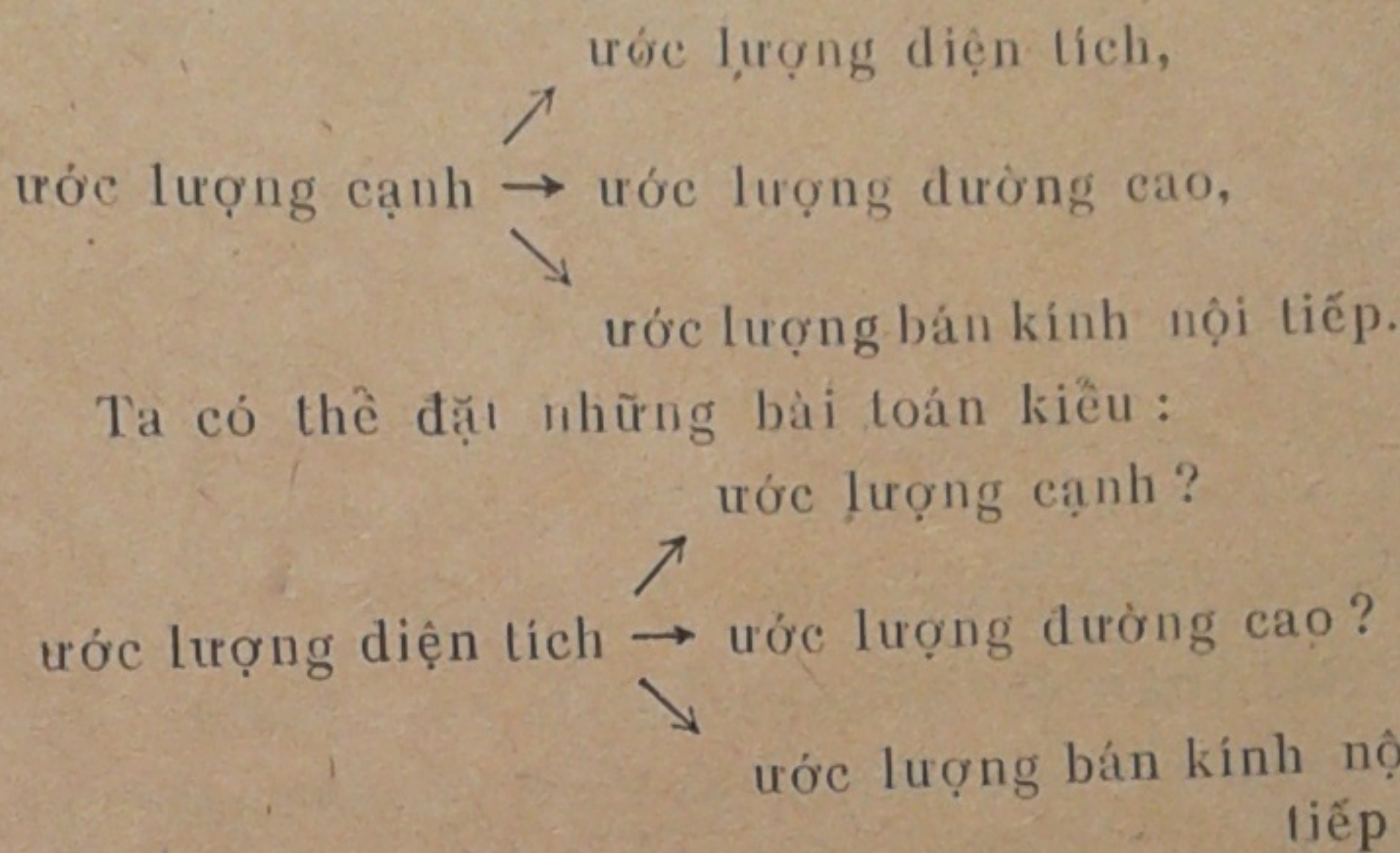
Gọi p, p' là nửa chu vi của các tam giác ABC và $A'BC$. Các tam giác này có cùng diện tích S , và ta đã chứng minh rằng $p' \leq p$. Vì

$$S = pr = p'r',$$

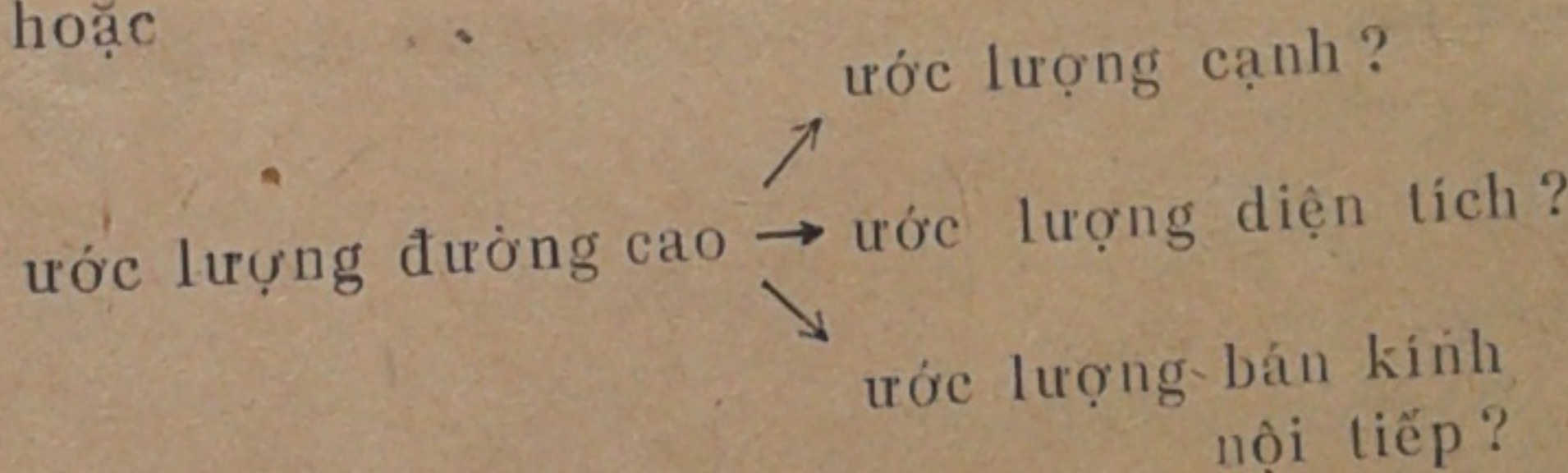
nên với $p' \leq p$, ta suy ra $r \leq r'$.

Bài toán 1 được chứng minh xong.

Suy nghĩ về bài toán 1, ta thấy mục đích bài toán ấy có thể diễn tả dưới dạng sơ đồ:



hoặc



và, và...

Đó là nội dung của các bài toán sau:

Bài toán 3. Giả sử tam giác ABC có diện tích $S \leq \sqrt{3}/4$. Chứng minh rằng tam giác ấy có:
 a) Ít nhất một đường cao $\leq \sqrt{3}/2$,
 b) Bán kính nội tiếp $r \leq 1/2\sqrt{3}$.

Giải. a) Với các ký hiệu thường lệ, ta có

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p \left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

Mặt khác ta có

$$6S = ah_a + bh_b + ch_c \geq (a+b+c)\min(h_a, h_b, h_c) = 2p \min(h_a, h_b, h_c),$$

do đó

$$S^2 \geq \frac{1}{9} p^2 \min^2(h_a, h_b, h_c) \geq \frac{3\sqrt{3}}{9} S \min^2(h_a, h_b, h_c),$$

từ đây suy ra

$$\min^2(h_a, h_b, h_c) \leq \sqrt{3} S \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/4 = 3/4.$$

vậy

$$\min(h_a, h_b, h_c) \leq \sqrt{3}/2.$$

thành thử trong tam giác đã cho, đường cao nhỏ nhất có độ dài $\leq \sqrt{3}/2$.

Nhận xét. Tam giác vuông cân với cạnh góc vuông bằng 0,9 có diện tích bằng $0,405 < \sqrt{3}/4$, nhưng có hai đường cao là hai cạnh góc vuông bằng $0,9 > \sqrt{3}/2$, do đó không thể cải tiến hơn kết quả a).

b) Ta có:

$$S^2 = p^2 r^2 \geq 3\sqrt{3} S r^2,$$

do đó

$$r^2 \leq S/3\sqrt{3} \leq 1/3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/4 = 1/12,$$

hay

$$r \leq 1/\sqrt{12} = 1/2\sqrt{3}.$$

Bạn đọc lưu ý rằng xuất phát từ ước lượng diện tích, không thể ước lượng được các cạnh hay chu vi của tam giác ấy (lấy phần ví dụ).

Bài toán 4. Chứng minh rằng nếu cả ba đường cao của một tam giác là $\leq \sqrt{3}/2$, thì tam giác ấy có bán kính nội tiếp $\leq 1/2\sqrt{3}$.

Giải. Kết quả của bài toán là hệ quả của bất đẳng thức

$$r \leq \frac{1}{3} \max(h_a, h_b, h_c). \quad (1)$$

Để chứng minh (1), ta đề ý rằng

$$6S = ah_a + bh_b + ch_c \leq (a+b+c) \max(h_a, h_b, h_c) = 2p \max(h_a, h_b, h_c),$$

và do $S = pr$, ta suy ra bất đẳng thức (1).

Nhận xét. Bạn đọc hãy tìm ví dụ chứng tỏ rằng một tam giác có thể có cả ba đường cao rất nhỏ, nhưng có diện tích và các cạnh lớn tùy ý (đây là nội dung của một bài toán trong một kỳ thi toán ở Liên Xô). Bất đẳng thức (1) còn có thể coi là hệ quả của bất đẳng thức sau

$$r \leq \frac{1}{9} (h_a + h_b + h_c)$$

Để chứng minh (2), ta có thể coi rằng $a \leq b \leq c$, khi đó $h_a \leq h_b \leq h_c$, khi đó theo bất đẳng thức Trê-bư-sép, ta có

$$6S = ah_a + bh_b + ch_c \leq \frac{1}{3} \times$$

$$\times (a+b+c)(h_a + h_b + h_c) = \frac{2}{3} p(h_a + h_b + h_c)$$

và do $S = pr$, từ đó suy ra (2).

Bên cạnh bất đẳng thức (2), bạn đọc hãy chứng minh bất đẳng thức

$$r < \frac{1}{2} \min(h_a, h_b, h_c).$$

Bài toán 5. Chứng minh rằng nếu một tam giác có bán kính nội tiếp $r \leq 1/2\sqrt{3}$, thì nó ít nhất một đường cao $h \leq \sqrt{3}/2$.

Giải. Kết quả nêu trong bài toán 5 chỉ là hệ quả của bất đẳng thức

$$\frac{1}{3} \min(h_a, h_b, h_c) \leq r.$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta đề ý rằng trong bài toán 3, ta đã gặp bất đẳng thức

$$3S \geq p \cdot \min(h_a, h_b, h_c),$$

mà $S = pr$, từ đó suy ra bất đẳng thức (3).

Nhận xét. Tam giác vuông cân, với cạnh góc vuông bằng

$$a = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}},$$

có bán kính nội tiếp $r = 1/2\sqrt{3}$, có hai đường cao là hai cạnh góc vuông $a > \sqrt{3}/2$, vậy không thể cải tiến hơn kết quả bài toán 5.

Bạn đọc hãy suy nghĩ về những bài toán tương tự với các bài toán trên, nhưng với dấu bất đẳng thức ngược chiều.

(còn nữa)

SỬ DỤNG NGUYÊN TẮC DIRICHOLÉ

TRONG Báo Toán học và tuổi trẻ số 71 có bài: «Nguyên tắc Diricholê—những chiếc lồng và các chú thỏ». Dạng đơn giản nhất của nó được phát biểu là: «Không thể nhốt 7 chú thỏ vào 3 chiếc lồng sao cho mỗi lồng không có quá 2 con». Trong bài báo nhỏ này, tôi muốn giới

thiệu với các bạn một vài bài toán khác, sử dụng nguyên tắc Diricholê khá thú vị và độc đáo.

Bài toán 1. Một khu rừng lim có dạng hình vuông, mỗi chiều 1 km. Trong rừng có 4.500 cây

thể mà $(S_1 + S_2)$ lại là tổng của 2^{k+1} số được chọn.

Bài toán đã được chứng minh xong.

Bài toán 4. Trong hình vuông đơn vị có 101 điểm phân bố tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất 5 điểm, có thể nằm trong một hình tròn bán kính $1/7$.

Giải: Ta chia hình vuông đơn vị thành 25 hình vuông nhỏ bằng cách chia đều mỗi cạnh thành 5 phần bằng nhau, gọi đó là 25 «chiếc lồng», cạnh của mỗi «lồng» đều là $1/5$. Bây giờ coi 101 điểm là 101 «chú thỏ».

Thế thì phải có ít nhất 5 «chú thỏ» nào đó bị nhốt trong cùng một «lồng», vì $101 > 25 \cdot 4 = 100$.

Đường tròn ngoại tiếp «chiếc lồng» đó bán

kinh là $1/5\sqrt{2}$, thế mà

$$1/5\sqrt{2} = 1/\sqrt{50} < 1/\sqrt{49} = 1/7.$$

Vậy 5 «chú thỏ» nói trên có thể nằm trong một hình tròn bán kính $1/7$.

Sau cùng, để kết thúc, mời các bạn thử hai bài toán sau đây bằng cách sử dụng nguyên tắc Dirichlet.

1) Chứng minh rằng nếu hai số nguyên n nguyên tố cùng nhau, thì tìm được số tự nhiên k sao cho $m^k - 1$ chia hết cho n .

2) Cho $n + 1$ số tự nhiên khác nhau, nhỏ hơn $2n$. Chứng minh rằng có thể chọn ra 3 số cho trong đó có một số bằng tổng của hai số kia.

VŨ TIẾN VIỆT

TOÁN HỌC

và ĐỜI SỐNG



TRÌNH TỰ NÀO LÀ TỐT NHẤT

(Tiếp theo và hết)

TRONG phần trước đã xét một lớp bài toán lập kế hoạch lịch—bài toán Johnson và nêu cách giải trong trường hợp 2 máy. Phần này sẽ xét bài toán Johnson trong trường hợp 3 máy và bài toán Johnson mở rộng.

Bài toán m chi tiết gia công trên 3 máy. Khi có nhiều chi tiết phải gia công trên 3 máy A, B, C (theo đúng thứ tự A, B, C) cũng có thể dùng phương pháp giải nêu ở phần trước để tính toán cho một số trường hợp đặc biệt, cụ thể là trường hợp có cả hai điều kiện hoặc có một trong hai điều kiện dưới đây:

1) Thời gian nhỏ nhất của các chi tiết gia công trên máy A lớn hơn hay bằng thời gian lớn nhất của các chi tiết gia công trên máy B.

2) Thời gian nhỏ nhất của các chi tiết gia công trên máy C lớn hơn hay bằng thời gian lớn nhất của các chi tiết gia công trên máy B.

Trong trường hợp này, ta quy bài toán ba đầu (nhiều chi tiết gia công trên 3 máy) về bài toán phụ (nhiều chi tiết gia công trên 2 máy) để có thể giải bằng phương pháp đối với 2 máy. Hai máy «mới» sẽ được ký hiệu là G và H và

xác định thời gian gia công các chi tiết trên máy này như sau:

1) Thời gian gia công mỗi chi tiết trên máy G bằng tổng các thời gian gia công chi tiết đó trên máy A và B.

2) Thời gian gia công mỗi chi tiết trên máy H bằng tổng các thời gian gia công chi tiết đó trên máy B và C.

Như vậy, ta được bài toán phụ: mỗi chi tiết chỉ trải qua 2 máy G và H theo thứ tự qua trước H sau. Giải bài toán này ta được trình tự tốt nhất đối với 2 máy G và H. Trình tự đó cũng tốt nhất đối với cả 3 máy A, B, C của bài toán ban đầu.

Ví dụ. Một tổ sản xuất nhận làm 5 công việc I, II, III, IV, V. Mỗi công việc đều phải trải qua 3 máy A, B, C (theo đúng thứ tự A, B, C) mới hoàn thành. Thời gian làm các công việc trên mỗi máy được ghi trong bảng thời gian sau đây (đơn vị: giờ).

Công việc \ Máy	I II III IV V					Tổng
	I	II	III	IV	V	
A	0,5	3	2	2,5	2	10 giờ
B	1,5	2	1,5	1	2	8 giờ
C	3,5	3	2,5	2	3	14 giờ

Hãy sắp xếp trình tự làm việc trên mỗi máy để thời gian hoàn thành T (tổng thời gian) là nhỏ nhất.

công việc đầu tiên cho đến khi máy C
hoàn thành công việc cuối cùng) là ngắn nhất.
ví dụ này, số nhỏ nhất trong dòng A
số nhỏ nhất trong dòng B là 2, số nhỏ nhất
số nhỏ nhất trong dòng C lớn hơn hay
số nhỏ nhất trong dòng B (ở đây $2 = 2$).
tác đã nêu ở trên, ta đưa về bài toán
trình tự tốt nhất cho 5 công việc trên
máy G và H, với bảng thời gian như sau:

Công việc	I	II	III	IV	V
G	2	5	3,5	3,5	4
H	5	5	4	3	5

là trường hợp nhiều công việc phải trải
máy. Giải bài toán này theo phương pháp
trình bày ở bài trước, ta được trình tự tốt
đối với 2 máy mới G và H là: I, III, V.
đây cũng là trình tự tốt nhất đối với cả
A, B, C của bài toán ban đầu: thời gian
với trình tự này được tính theo bảng sau.

	Máy A		Máy B		Máy C	
	Vào	Ra	Vào	Ra	Vào	Ra
I	0	0g30	0g30	2g00	2g00	5g30
III	0g30	2,30	2,30	4,00	5,30	8,00
V	2,30	4,30	4,30	6,30	8,00	11,00
II	4,30	7,30	7,30	9,30	11,00	14,00
IV	7,30	10,30	10,00	11,00	14,00	16,00

vậy, thời gian T ngắn nhất để hoàn thành
công việc là 16 giờ. Giờ chết đối với máy
A là 2 giờ, đối với máy B là 8 giờ, đối với máy
C là 2 giờ.

giờ ta xét một mở rộng của bài toán

Bài toán Johnson mở rộng. Cần sản xuất
hoàn thành) m chi tiết (hay công việc) bằng
máy, mỗi chi tiết đều trải qua gia công trên
một hoặc tất cả các máy đó, nhưng không

chi tiết i có một trình tự riêng $\partial_i = \{i_1, i_2, \dots, i_{p(i)}\}$,
 $\subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $i_j \neq i_k$ với $j \neq k$ (chi tiết i cần
gia công trên $p(i)$ máy, bắt đầu là máy i_1 , rồi
máy i_2 và cuối cùng là máy $i_{p(i)}$). Cho biết thời
gian $t_{ij} > 0$ ($i = 1 \div m, j = 1 \div p(i)$) cần thiết
để gia công chi tiết i trên máy i_j . Hãy xác định
trình tự gia công các chi tiết trên mỗi máy (chi
tiết nào làm trước, chi tiết nào làm sau) để cho
thời hạn hoàn thành toàn bộ việc sản xuất các
chi tiết là nhỏ nhất, với điều kiện là:

— Đối với mỗi chi tiết i thì việc gia công trên
máy i_j chỉ có thể được bắt đầu sau khi chi tiết
đó đã được gia công xong trên i_{j-1} .

— Trên mỗi máy cùng một lúc chỉ có thể gia
công nhiều nhất là một chi tiết, khi máy đã gia
công chi tiết nào thì phải làm xong chi tiết đó
mới được chuyển sang gia công chi tiết khác.

Bài toán mở rộng này chỉ khác bài toán cũ ở
chỗ: trình tự gia công mỗi chi tiết trên các máy
linh hoạt hơn (không nhất thiết phải qua tất cả
các máy và theo đúng thứ tự $1, 2, \dots, n$), nhờ
đó có thể bao quát được nhiều tình huống thực
tế hơn và do đó có phạm vi ứng dụng rộng
hơn. Tất nhiên cách giải quyết phải phức tạp
hơn. Tuy vậy, cũng như trước đây, trong trường
hợp có 2 máy ($n=2$), có thể giải bài toán mở
rộng này một cách dễ dàng nhờ dùng thuật toán
Johnson đã trình bày ở bài trước.

Trong trường hợp $n=2$ có thể phát biểu lại
bài toán mở rộng dưới dạng cụ thể hơn: Giả
sử có 2 máy A và B dùng để gia công hay làm
 m chi tiết (hay công việc). Các chi tiết được
chia làm 4 nhóm:

a) Nhóm $\{A\}$ gồm các chi tiết chỉ cần làm trên
máy A;

b) Nhóm $\{B\}$ gồm các chi tiết chỉ cần làm trên
máy B;

c) Nhóm $\{AB\}$ gồm các chi tiết cần làm trên
máy A trước, máy B sau;

d) Nhóm $\{BA\}$ gồm các chi tiết cần làm trên
máy B trước, trên máy A sau.

Cho biết $a_i \geq 0$ là thời gian cần để gia công
các chi tiết trên máy A, $b_i \geq 0$ là thời gian cần
để gia công các chi tiết trên máy B. (Chi tiết
nào không cần gia công trên máy A (máy B) thì
 $a_i = 0$ ($b_i = 0$). Hãy tìm trình tự tốt nhất gia công
các chi tiết.

Để giải bài toán này ta làm như sau (các bạn
có thể tự mình kiểm tra tính đúng đắn của
cách làm này):

Sắp xếp các chi tiết thuộc nhóm $\{AB\}$ theo
thuật toán Johnson, cũng làm như vậy đối với
các chi tiết thuộc nhóm $\{BA\}$ (nhưng chú ý là ở
đây B trước, A sau), các chi tiết thuộc mỗi nhóm
 $\{A\}$, $\{B\}$ sắp xếp theo một thứ tự tùy ý. Khi đó

trình tự tốt nhất để gia công m chi tiết là như sau:

— Máy A trước hết gia công các chi tiết thuộc nhóm $\{AB\}$ (theo trình tự đã sắp xếp lại), sau đó gia công các chi tiết thuộc nhóm $\{A\}$ (thứ tự tùy ý) và cuối cùng đến các chi tiết thuộc nhóm $\{BA\}$ (theo đúng trình tự đã gia công trên máy B).

— Máy B trước hết gia công các chi tiết thuộc nhóm $\{B4\}$ (theo trình tự đã sắp xếp lại) sau đó gia công các chi tiết thuộc nhóm $\{B\}$ (thứ tự tùy ý) và cuối cùng đến các chi tiết thuộc nhóm $\{AB\}$ theo đúng trình tự đã gia công trên máy A).

Ví dụ minh họa. Giải bài toán với các số liệu cho trong bảng sau (các chi tiết g, h, i làm trên máy B trước, máy A sau).

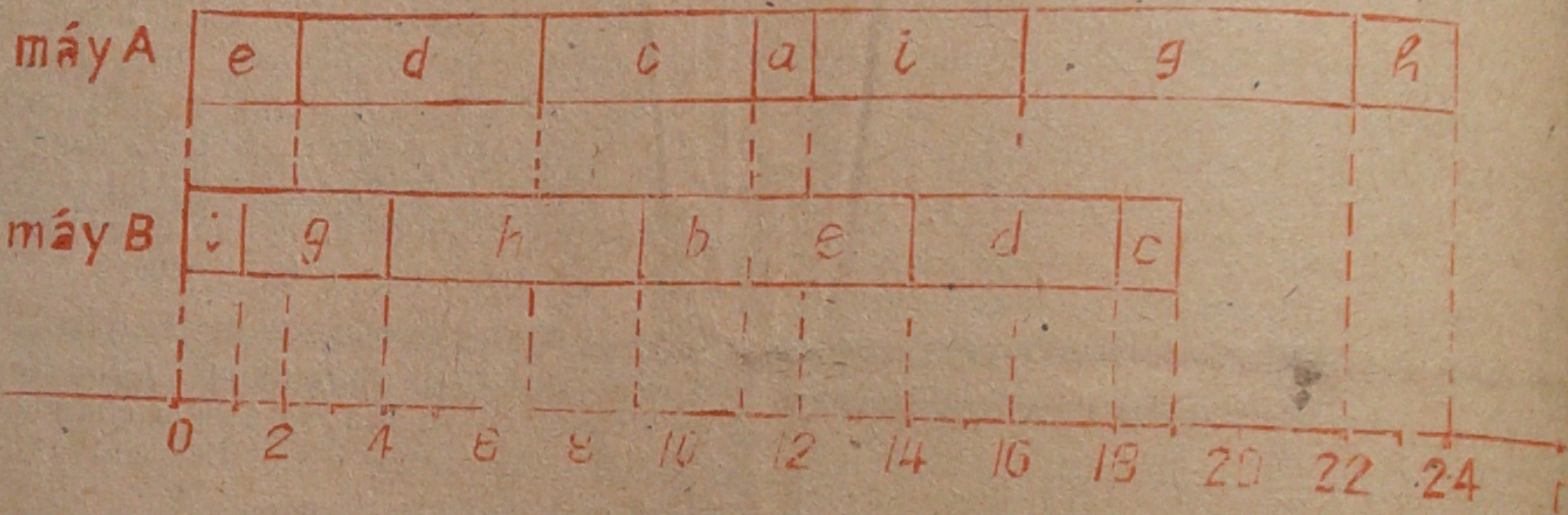
Chi tiết \ Máy	a	b	c	d	e	g	h	i
A	1	0	1	5	2			
B	0	2	1	4	3	3	5	
A						6	2	

Trình tự tốt nhất là

— Máy A: e, d, c, a, i, g, h .

— Máy B: i, g, h, b, e, d, c .

Thời gian hoàn thành toàn bộ công việc 24 (các máy không phải chờ đợi nhau).



VŨ QUANG

THÔNG BÁO

Căn cứ vào khối lượng giấy được cấp, để số lượng xuất bản mỗi kỳ không quá ít, trong 6 tháng cuối năm 1980 báo THvTT chỉ xuất bản hai kỳ: số 4 phát hành tháng 9-1980 và số 5 + 6 sẽ phát hành tháng 12-1980. Số 5 + 6 là số gộp nhưng số trang và giá không thay đổi.

Cuộc thi giải toán năm 1980 của báo sẽ được tổng kết và công bố kết quả trong số 5 + 6 - 1980. Lời giải của cả 20 bài toán thi sẽ được đăng trong số báo này.

BÁO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

In 9000c tại Xí nghiệp In 75, 77 Hàng Bồ - Hà Nội.
Số in 119/80. In xong và gửi lưu chiểu tháng 9-1980.

Chỉ số 12884.

Giá: 0,20